Здравко Цветковски,
Ристо Малчески
Скопје

АЛГОРИТАМ ЗА ГЕНЕРИРАЊЕ НА ЕДНА КЛАСА ПИТАГОРОВИ ТРОЈКИ

Во оваа статија ќе се осврнеме на Питагоровите тројки (x, y, z) со дополнителен услов $y = x+1$. Ќе најдеме релации (алгоритам) кои ќе овозможат итеративно генерирање на тројките од ваков вид.

1. Нека $z = y + b$. Значи

$$x^2 + y^2 = (y+b)^2,$$

од каде добиваме $y = (x^2 - b^2)/2b$. Тогаш Питагоровите тројки можат да се претстават како

$$x, \frac{x^2-b^2}{2b}, \frac{x^2+b^2}{2b}.$$

Нека $y = x + a$. Тогаш $x + a = (x^2 - b^2)/2b$ т.е

$$x^2 - 2bx - (b^2 + 2ab) = 0 \qquad (1)$$

2. Тројки каде $y = x+1$. Во овој случај имаме $a = 1$, тогаш релацијата (1) го добива видот

$$x^2 - 2bx - (b^2 + 2b) = 0 \qquad (2)$$

Ако, $b = 1$ тогаш релацијата (2) го добива видот

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$$

па двата корени 3,-1 на оваа квадратна равенка ги генерираат тројките (3,4,5) и (-1,0,1) соодветно.

За да ја генерираме наредната тројка во случајот кога $a = 1$, т.е $y = x+1$ користејќи ја релацијата (2) потребно е да се знае наредната вредност за b. Наредна тројка за која $y = x+1$ е (20,21,29), која се добива за $b = 8$. Бидејќи 8=3+5 релацијата $b_{n+1} = X_n + Z_n$ ни се нуди како можност, да се искористи за наоѓање на наредните вредности за b, каде (X_n ,

$Y_n, Z_n)$ е n-тата Питагорова тројка со бараното својство. Користејќи $b_2 = 3 + 5 = 8$,со замена во (2) добиваме

$$x^2 - 16x - 80 = (x - 20)(x + 4) = 0$$

која за $a = 1$ ја генерира наредната тројка (20,21,29) .Првите четири тројки за $a = 1$ можат да се генерираат користејќи ја релацијата (2), т.е

$b_1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 = (x - 3)(x + 1) \Rightarrow$ (3,4,5)

$b_2 = 3 + 5 \Rightarrow x^2 - 16x - 80 = 0 = (x - 20)(x + 4) \Rightarrow$ (20,21,29)

$b_3 = 20 + 29 \Rightarrow x^2 - 98x - 2499 = 0 = (x - 119)(x + 21) \Rightarrow$ (119,120,169)

$b_4 = 119 + 169 \Rightarrow x^2 - 576x - 83520 = 0 = (x - 696)(x + 120) \Rightarrow$ (696,697,985).

Како што може да се забележи ($x + Y_{n-1}$) е делител на полиномот на левата страна на (2) за n-тата тројка, т.е равенката (2) можеме да ја запишеме во вид

$$x^2 - 2b_n x - (b_n{}^2 + 2b_n) = (x - X_n)(x - Y_{n-1}) = 0 .$$

Во поглед на оваа релација посистематски пристап е користен за истражувања кои довеле до решение на “равенката на $Pell$” т.е $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, каде x, y се цели, а D е природен број кој не е точен квадрат.

3. Тројки каде a е константа. Да ја разгледаме тројката X, Y, Z каде $Y = X + a$, $(a > 0)$. Тогаш $X^2 + (X + a)^2 = Z^2$ после квадрирањето и множење на двете страни последователно добиваме

$$4X^2 + 4aX + 2a^2 = 2Z^2,$$

$$(2X + a)^2 + a^2 = 2Z^2,$$

$$(\tfrac{2X+a}{a})^2 + 1 = 2(\tfrac{Z}{a})^2 .$$

Означуваме $(2X + a)/a = U$, $Z/a = T$ и полседната равенка можеме да ја запишеме во видот

$$U^2 + 1 = 2T^2 .$$

Ако $a = 1$ тогаш U, T се цели броеви па затоа ова е случај на “равенка на $Pell$” за која е познато дека n-тото решение (U_n, T_n) во $\mathbb{Z}^+$ е дадено со

$$U_n + T_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2n-1} .$$

Значи

$$U_{n+1}+T_{n+1}\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2(n+1)-1}=(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^{2n-1}$$
$$=(1+\sqrt{2})^2(U_n+T_n\sqrt{2})=(3U_n+4T_n)+(2U_n+3T_n)\sqrt{2}.$$

Од каде

$$T_{n+1}=2U_n+3T_n \tag{3}$$
$$U_{n+1}=3U_n+4T_n \tag{4}$$

Да претпоставиме дека U_n и T_n се одредени рекурзивно со релациите (3) и (4). Тогаш имаме

$$2T_{n+1}^2-U_{n+1}^2=2(2U_n^2+3T_n^2)-(3U_n^2+4T_n^2)=2T_n^2-U_n^2$$

Според ова ако

$$2T_1^2-U_1^2=1,$$

тогаш паровите (U_n,T_n) се решенија на равенката $2T^2-U^2=1$, каде U_1 и T_1 се цели броеви. Со замена за T и U, $T=Z/a$ и $U=(2X+a)/a$ во (3) и (4) добиваме

$$\frac{Z_{n+1}}{a}=2\frac{2X_n+a}{a}+\frac{3Z_n}{a} \quad \text{и}$$
$$\frac{2X_{n+1}+a}{a}=3\frac{2X_n+a}{a}+\frac{4Z_n}{a},$$

т.е

$$Z_{n+1}=4X_n+3Z_n+2a, \tag{5}$$
$$X_{n+1}=3X_n+2Z_n+a, \tag{6}$$

и како $Y_n=X_n+a$ равенката (6) можеме да ја запишеме како

$$X_{n+1}=2(X_n+Z_n)+Y_n \tag{7}$$

Со одземање на равенката (6) од равенката (5), ако искористиме дека последователно добиваме

$$Z_{n+1}-X_{n+1}=Z_n+X_n+a,$$
$$b_{n+1}+a=Z_n+X_n+a$$
$$b_{n+1}=Z_n+X_n. \tag{8}$$

4. Тројки каде b е константа. Слична релација може да се добие и во случајот кога b е константа . Се добива

$$a_{n+1}=X_n+Y_n \tag{9}$$
$$X_{n+1}=X_n+2b \tag{10}$$
$$Y_{n+1}=2X_n+Y_n+2b \tag{11}$$

$$Z_{n+1} = 2X_n + Z_n + 2b \qquad (12)$$

На читателот му препуштаме да докаже дека со овие релации навистина се добива низа од Питагорови тројки, и во овој случај равенката (1) се факторизира како $x^2 - 2bx - (b^2 + 2ba_n) = (x - X_n)(x + X_{n-1}) = 0$.

5. Заклучок. Покажавме дека следниве релации генерираат Питагорови тројки (X, Y, Z) т.е

- За $a = constant$, т.е. $X_n + a = Y_n$:

$$\begin{cases} X_{n+1} = 3X_n + 2Z_n + a \\ b_{n+1} = X_n + Z_n \end{cases}$$

- За $b = constant$, т.е. $Z_n = Y_n + b$:

$$\begin{cases} Z_{n+1} = 2X_n + Z_n + 2b \\ a_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

Во специјалните случаи $a = 1$ () и $b = 1$ () тогаш преку дадените рекурентни релации ги генерираат сите барани Питагорови тројки. Како и да е во сите други случаи дадените релации необавезно даваат само некои од бараните тројки, бидејќи релациите (3) и (4) за почетни U_1 и T_1 не ги генерираат сите рационални решенија на "равенката на *Pell*".

Важно својство на овој алгоритам е ако почетните тројки се примитивни (т.е ако X, Y, Z се по парови заемно прости), тогаш секоја тројка на генерираната низа е исто така примитивна.

На пример, да го земеме случајот $a = constant$. Да претпоставиме дека $p \mid X_{n+1}$ и $p \mid Y_{n+1}$ тогаш $p^2 \mid (X_{n+1}^2 + Y_{n+1}^2)$, и како $p \mid Z_{n+1}$. Исто така $p \mid (Y_{n+1} - X_{n+1})$, па значи $p \mid a$. Од релациите (5) и (6) следува дека $p \mid (4X_n + 4Z_n)$ и $p \mid (3X_n + 2Z_n)$; од каде лесно се покажува дека $p \mid Z_n$ и $p \mid X_n$, и од $Y_n = X_n + a$ следува дека $p \mid Y_n$, т.е добивме дека ако тројката $(X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})$ не е примитивна тогаш и тројката (X_n, Y_n, Z_n) не е примитивна , итн се добива дека и тројката (X_1, Y_1, Z_1) не е примитивна. Слично се покажува и во случајот кога $b = constant$, (со примена на релациите (10), (11) и (12)).

6. Примери. $a = constant$, $a = 1$**.** Да претпоставиме дека како почетна тројка ја земаме примитивната тројка (119,120,169) и сакаме да ја генерираме соодветната низа од тројки. Користејќи ги релациите (5) и (6) добиваме

$$X_2 = 3X_1 + 2Z_1 + 1 = 3(119) + 2(169) + 1 = 696 ,$$

$$Y_2 = X_2 + 1 = 696+1=697 , Z_2 = 4X_1 + 3Z_1 + 2a = 4(119)+3(169)+2=985$$

па наредната тројка е (696,697,985) итн .

$a = constant$, $a = 7$. Ќе почнеме со примитивната Питагорова тројка (5,12,13), $(a = 7)$. Во овој случај дадениот алгоритам генерира $X_2 = 48$, и соодветно тројката (48,55,73), но ја пропушта тројката (21,28,35).

$b = constant$, $b = 2$. Како почетна ќе ја земеме примитивната Питагорова тројка (8,15,17). Користејќи ги релациите (10),(11),(12) ја добиваме тројката (12,35,37) но алгоритмот ја пропушта тројката (10,24,26).

7. Алтернативни релации за X_{n+1} и Z_{n+1}. Емпириската формула $X_{n+1} = 6X_n - X_{n-1} + 2$, опишана во статијата на Hatch (1995) за случајот a =1, во суштина е пертикуларен случај од многу поопшта релација, кој следува од претходно напишаното. Од релацијата (6) имаме

$$X_n = 3X_{n-1} + 2Z_{n-1} + a = 2(X_{n-1} + Z_{n-1}) + X_{n-1} + a \qquad (13)$$

Од релацијата (8) имаме

$$b_n = X_{n-1} + Z_{n-1} \qquad (14)$$

Од (13) и (14) добиваме

$$X_n = 2b_n + X_{n-1} + a \quad .$$

Но

$$X_n + a + b_n = Z_n$$

па имаме

$$X_n = (2Z_n - 2X_n - 2a) + X_{n-1} + a = 2Z_n - 2X_n + X_{n-1} - a$$

со елиминација на $2Z_n$ со помошна (6) добиваме

$$X_n = (X_{n+1} - 3X_n - a) - 2X_n + X_{n-1} - a ,$$

т.е.

$$X_{n+1} = 6X_n - X_{n-1} + 2a$$

што и се бараше.

Слично аналогно размислување покажува дека релацијата

$$Z_{n+1} = 6Z_n - Z_{n-1}$$

дискутирана од Mills (1996), за низата при услов $a = constant$, следува од досега напишаното.

Од релацијата (5) имаме

$$2Z_{n+1} = 8X_n + 6Z_n + 4a \qquad (16)$$

Од релацијата (6) имаме

$$3X_{n+1} = 9X_n + 6Z_n + 3a \qquad (17)$$

Со елиминација на Z_n од (16) и (17) добиваме

$$2Z_{n+1} = 3X_{n+1} - X_n + a$$

и користејќи ги соодветните релации за Z_n и Z_{n-1} ја добиваме релацијата

$$2(Z_{n+1} - 6Z_n + Z_{n-1}) = 3(X_{n+1} - 6X_n + X_{n-1}) - (X_n - 6X_{n-1} + X_{n-2}) - 4a$$

која заедно со (15) дава

$$2(Z_{n+1} - 6Z_n + Z_{n-1}) = 3(2a) - 2a - 4a = 0 \text{, т.е } Z_{n+1} = 6Z_n - Z_{n-1};$$

што и се бараше.

Литература

1. Dye R.H.; Nickakalls R.W.D.: *A new algorithm for generating Pythagorean triples*, Mathematical Gazette; 1998
2. Hatch G.: *Pythagorean triples and triangular square numbers,* Mathematical Gazette; 1995

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија