

Ристо Малчески

# МАТЕМАТИКА ЗА ПРВА ГОДИНА ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

Скопје 2025 година

413 решени примери

514 задачи за самостојна работа

7 тестови за проверување на знаењата

## СОДРЖИНА

|      |                                                                                          |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1    | БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ СО БРОЕВИ                                                              |     |
| 1.1  | Поим за множество. Подмножество, еднакви множества                                       | 7   |
| 1.2  | Операции со множества                                                                    | 11  |
| 1.3  | Пресликувања. Еквивалентни множества                                                     | 15  |
| 1.4  | Конечни и бесконечни множества, примена                                                  | 19  |
| 1.5  | Природни броеви                                                                          | 23  |
| 1.6  | Деливост, НЗД и НЗС. Прости и сложени броеви                                             | 27  |
| 1.7  | Рационални броеви                                                                        | 31  |
| 1.8  | Децимални броеви                                                                         | 35  |
| 1.9  | Реални броеви                                                                            | 39  |
| 1.10 | Проценти, примена на процентите                                                          | 43  |
| 1.11 | Размер и пропорција                                                                      | 48  |
| 1.12 | Права и обратна пропорционалност. Просто и сложено тројно правило                        | 51  |
| 1.13 | Делбена сметка и сметка на смеси                                                         | 54  |
|      | Провери го своето знаење 1                                                               | 56  |
| 2    | АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ                                                             |     |
| 2.1  | Степен со степенев показател природен број. Операции со степени                          | 58  |
| 2.2  | Степен со степенев показател цел број                                                    | 61  |
| 2.3  | Поим за корен. Проширување и скратување корени                                           | 64  |
| 2.4  | Операции со корени                                                                       | 67  |
| 2.5  | Степен со степенев показател рационален број                                             | 70  |
| 2.6  | Алгебарски изрази. Полиноми                                                              | 72  |
| 2.7  | Операции со полиноми. Формули за скратено множење                                        | 75  |
| 2.8  | Разложување на полиноми на множители                                                     | 80  |
| 2.9  | Најголем заеднички делител (НЗД) и најмал заеднички содржател на полиноми (НЗС)          | 83  |
| 2.10 | Алгебарски дробки. Проширување и скратување                                              | 86  |
| 2.11 | Операции со алгебарски дробки                                                            | 89  |
|      | Провери го своето знаење 2                                                               | 93  |
| 3    | ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА, ЛИНЕАРНА РАВЕНКА, СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА |     |
| 3.1  | Декартов правоаголен координатен систем. Растојание меѓу две точки                       | 95  |
| 3.2  | Плоштина на триаголник                                                                   | 98  |
| 3.3  | Линеарна функција                                                                        | 100 |
| 3.4  | Коефициент на правец, паралелни и нормални прави                                         | 104 |
| 3.5  | Степенско и експоненцијално растење и опаѓање                                            | 106 |
| 3.6  | Поим за алгебарска равенка. Линеарна равенка                                             | 110 |
| 3.7  | Равенки кои се сведуваат на линеарни и равенки со параметар                              | 114 |
| 3.8  | Примена на линеарните равенки                                                            | 118 |
| 3.9  | Линеарна равенка со две непознати                                                        | 122 |
| 3.10 | Систем од две линеарни равенки со две непознати                                          | 125 |
| 3.11 | Дополнителни решени задачи                                                               | 129 |
| 3.12 | Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати                               | 133 |

|       |                                                                                                                  |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.13  | Линеарна неравенка со една непозната                                                                             | 137 |
| 3.14  | Примена на линеарните неравенки                                                                                  | 140 |
|       | Провери го своето знаење 3                                                                                       | 143 |
| 4     | ГЕОМЕТРИЈА                                                                                                       |     |
| 4.1   | Вектори                                                                                                          | 145 |
| 4.1.1 | Поим за вектор. Еднаквост на вектори                                                                             | 145 |
| 4.1.2 | Собирање и одземање на вектори                                                                                   | 148 |
| 4.1.3 | Множење на вектор со број                                                                                        | 152 |
| 4.1.4 | Примена на векторите                                                                                             | 155 |
| 4.2   | Сличност                                                                                                         | 158 |
| 4.2.1 | Пропорционални отсечки. Талесова теорема                                                                         | 158 |
| 4.2.2 | Слични триаголници. Признаци за сличност                                                                         | 161 |
| 4.2.3 | Својства на сличните триаголници. Евклидови и Питагорова теорема                                                 | 165 |
|       | Провери го своето знаење 4                                                                                       | 168 |
| 4.3   | Тригонометрија                                                                                                   | 169 |
| 4.3.1 | Агол, тригонометриски функции од остар агол                                                                      | 169 |
| 4.3.2 | Вредностите на тригонометриските функции за агли од $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ и произволен остар агол | 173 |
| 4.3.3 | Менување на тригонометриски функции при промена на аголот од $0^\circ$ до $90^\circ$                             | 178 |
| 4.3.4 | Решавање на правоаголен триаголник                                                                               | 182 |
| 4.4   | 2Д-форми                                                                                                         | 186 |
| 4.4.1 | Централен и периферен агол во кружница. Талесова теорема                                                         | 186 |
| 4.4.2 | Тетивен четириаголник                                                                                            | 191 |
| 4.4.3 | Тангентен четириаголник                                                                                          | 195 |
| 4.4.4 | Правилни многуаголници                                                                                           | 198 |
| 4.4.5 | Покривање на површина со 2Д-форми                                                                                | 201 |
|       | Провери го своето знаење 5                                                                                       | 206 |
| 5     | МЕРЕЊЕ                                                                                                           |     |
| 5.1   | Периметар и плоштина на паралелограм                                                                             | 208 |
| 5.2   | Периметар и плоштина на триаголник                                                                               | 212 |
| 5.3   | Периметар и плоштина на трапез и трапезоид                                                                       | 217 |
| 5.4   | Периметар и плоштина на круг и делови на круг                                                                    | 221 |
| 5.5   | Плоштина и волумен на права призма                                                                               | 227 |
| 5.6   | Плоштина и волумен на прав цилиндар                                                                              | 231 |
|       | Провери го своето знаење 6                                                                                       | 236 |
| 6     | РАБОТА СО ПОДАТОЦИ                                                                                               |     |
| 6.1   | Експеримент и настан. Експериментална веројатност                                                                | 238 |
| 6.2   | Елементарни настани. Настан и спротивен настан                                                                   | 242 |
| 6.3   | Класична дефиниција на веројатност                                                                               | 246 |
| 6.4   | Собирање и среднување податоци                                                                                   | 250 |
| 6.5   | Графичко претставување на податоците                                                                             | 254 |
| 6.6   | Аритметичка средина, мода, медијана и ранг на податоци                                                           |     |
|       | Провери го своето знаење 7                                                                                       |     |



## ВОВЕД

Пред тебе е учебникот по математика за I година димназиско образование. Тој е работен така, што ќе можеш и самостојно да се здобиваш со новите знаења и умеења, кои треба да ги усвоиш оваа учебна година.

Материјалот е поделен во шест одделни целини (теми). На почетокот на секоја тема, покрај содржината што е разработена во неа даден е прегледот на новите знаења и умеења со кои треба да се стекнеш доколку успешно ги совладаш предвидените содржини. Секоја тема е заокружена целина и е поделена на определен број лекции кои, исто така, претставуваат заокружени целини. Во секоја тема примерите се нумерирани одделно за темата, како и за дефинициите и теоремите. Меѓутоа, во темата Геометрија нумерирањето е посебно за секоја од четирите подтеми, бидејќи истите на определен начин се засебни целини. Задачите за вежбање кои се дадени по секоја тема се нумерирани одделно. На крајот од секоја тема е даден тест, со чија помош можеш да ги провериш своите знаења и умеења. Притоа, заради обемот и разноликоста на четвртата тема, во неа се дадени два теста, секој од кои опфаќа по две заокружени целини од темата.

Материјалот содржи голем број тврдења, од кои дел пожелно е дел да знаеш да ги докажуваш, а дел да ги усвоиш без доказ. Примерите, кои ги има во доволен број, се целосно решени и се дадени како илустрација на дефинициите и тврдењата кои што се усвојуваат. Затоа, особено е важно добро да ги разработиш, бидејќи само така можеш да се подготвиш за самостојно решавање на задачи, а потоа да преминеш кон решавање на задачите за вежбање.

За полесно користење на учебникот, дефинициите, примерите, тврдењата и деловите кои се предвидени како незадолжителни т.е. за оние што сакаат да знаат повеќе, се обоени во следниве бои:

Пример

Дефиниција

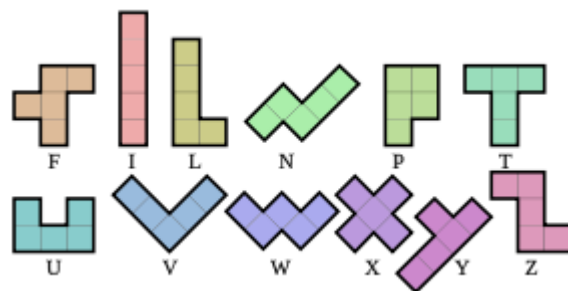
Теорема

За оние што сакаат да знаат повеќе

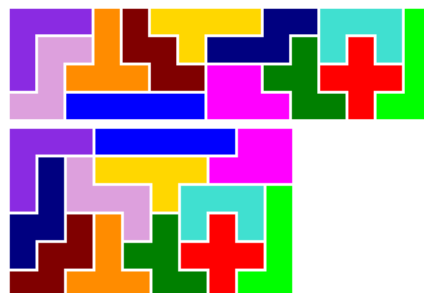
За посеопфатно и подлабоко усвојување на предвидениот материјал, пожелно е да користиш и дополнителна литература, која ќе ти ја препорача твојот наставник.

Авторот

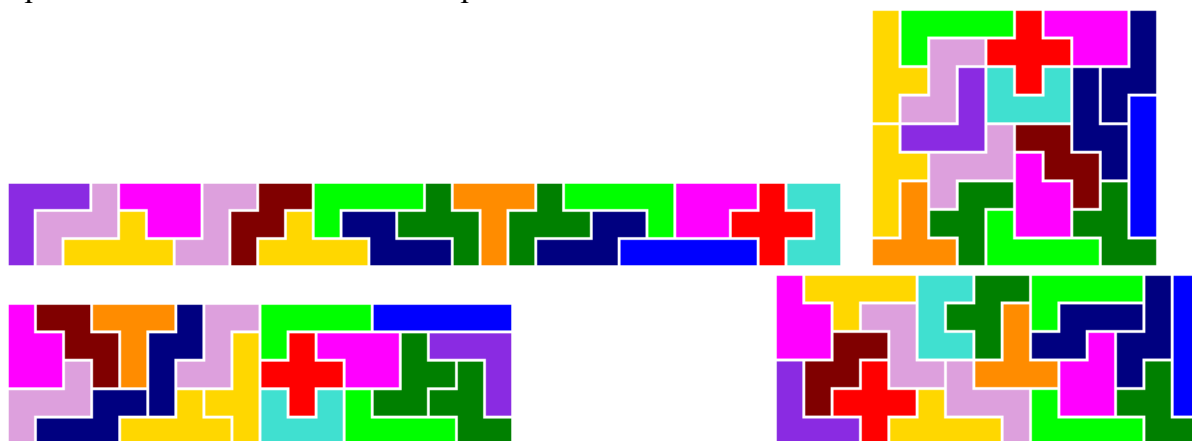
Пентонима е фигура составена од пет единечни квадрати. Ако фигурите смее да се вртат и превртуваат, тогаш имаме 12 пентонима, ки се прикажани на цртежот десно.



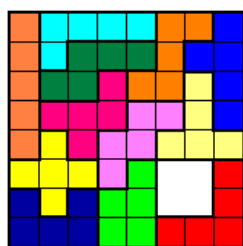
Правоаголници со 60 полиња покриени со пентонима:



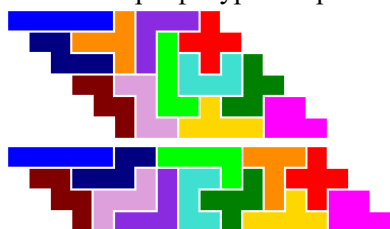
Правоаголници со 90 полиња покриени со пентонима



Две покривања на шаховска табла со пентонима:



Уште четири фигури покриени со пентонима:



## 1 Броеви и операции со броеви

- 1.1 Поим за множество. Подмножество, еднакви множества
- 1.2 Операции со множества
- 1.3 Пресликувања. Еквивалентни множества
- 1.4 Конечни и бесконечни множества, примена
- 1.5 Природни броеви
- 1.6 Деливост, НЗД и НЗС. Прости и сложени броеви
- 1.7 Рационални броеви
- 1.8 Децимални броеви
- 1.9 Реални броеви
- 1.10 Проценти, примена на процентите
- 1.11 Размер и пропорција
- 1.12 Права и обратна пропорционалност. Просто и сложено тројно правило
- 1.13 Делбена сметка и сметка на смеси

Со изучувањето на содржините за множествата ќе можеш:

- да разликуваш истобројни од еднакви множества, конечни од бесконечни множества,
- да определуваш унија, пресек, разлика и Декартов производ на множества, и
- да ги користи усвоените знаења за множествата при решавање на логички задачи.

Со изучувањето на содржините поврзани со множеството реални броеви ќе можеш:

- да ги објаснуваш својствата на природните, целите, рационалните, ирационалните и реалните броеви,
- да определуваш дали еден број е прост или сложен и да ги разложуваш сложените броеви на прости множители,
- да определуваш НЗД и НЗС и да ги користиш при решавање проблеми,
- да претвораш дробка во децимален број и обратно,
- да пресметуваш бројни изрази со реални броеви,
- да наоѓаш апсолутна вредност од реален број и да пресметуваш бројни изрази со апсолутни вредности и
- да наоѓаш пресек и унија на интервали реални броеви.

Со изучувањето на содржините поврзани со размер, пропорција и процент ќе можеш:

- да пресметуваш основна вредност, процентна вредност и процент,
- да решаваш економски проблеми вклучувајќи проста и сложена камата, попуст, приход, профит и загуба,
- да користиш размер, пропорција и продолжена пропорција при решавање на практични проблеми,
- да разликуваш права и обратна пропорционалност и да решаваш проблеми користејќи ги простото и сложеното тројно правило,
- да конвертираш една во друга парична единица,
- да користиш делбена сметка и сметка на смеси при решавање практични проблеми.

## 1.1 Поим за множество. Подмножество, еднакви множества

Теоријата на множества лежи во основата на секоја современа математичка дисциплина. Нејзин основач е германскиот математичар Георг Кантор (1845-1918). Со множествата се запозна во основното образование, а сега ќе ги прошириш и продлабочиш своите знаења за множествата.

Како што знаеш, поимот *множество* е основен поим во современата математика и него не го дефинираме, туку сметаме дека интуитивно е јасно што е тоа множество. Георг Кантор за поимот множество го искажал следниот опис:

*Множеството го подразбираме како севкупност од определени и различни објекти кои со нашата интуиција или интелект мисловно ги опфаќаме во една целина.*

Како синоним на зборот множество ќе ги користиме зборовите: *севкупност, фамилија и класа*. Објектите од кои е составено едно множество ги нарекуваме негови *елементи* или *точки*.

За означување на множествата најчесто ги користиме големите букви од латиничната азбука:  $A, B, C, D, \dots$ , а за означување на елементите на едно множество ги користиме малите букви од латиничната азбука:  $a, b, c, d, x, y, z, \dots$ .

За едно множество ќе сметаме дека е определено, ако за секој објект можеме да кажеме дали му припаѓа или не му припаѓа на тоа множество. Во врска со припадноста на даден елемент на едно множество ги воведуваме следните ознаки.

Нека  $A$  е множество. Ако елементот  $x$  му припаѓа на множеството  $A$ , тогаш пишуваме  $x \in A$ , а ако елементот  $x$  не му припаѓа на множеството  $A$ , тогаш пишуваме  $x \notin A$ .

Постојат повеќе начини на задавање на множествата, од кои овде ќе споменеме три.

*Задавање на множествата со помош на набројување на неговите елементи.* При овој начин елементите на дадено множество се наведуваат во големи загради и притоа редоследот на елементите во заградите не е битен.

**Пример 1.** а) Ако множеството  $A$  е составено од арапските цифри, тогаш тоа го запишуваме на следниот начин:  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

б) Записот на множеството  $B$  составено од самогласките на латиничната азбука е:  $B = \{a, e, i, o, u\}$ .

*Задавање на множествата со наведување на својството на неговите елементи.* Во секоја математичка задача најчесто ги разгледуваме елементите на точно определено множество  $A$ , кое понекогаш го нарекуваме основно множество. Притоа потребно е да ги одделиме елементите кои задоволуваат одредено својство  $P$  (пишуваме  $P(x)$ ), или не го задоволуваат својството  $P$ . Со помош на својството  $P$  одделуваме множество од сите елементи на  $A$ , кои го имаат својството  $P$ , кое го означуваме со  $\{x \in A \mid P(x)\}$  или  $\{x \mid P(x)\}$ .

**Пример 2.** а) Нека  $M$  е множеството од сите природни броеви кои при делење со 3, даваат остаток 2. Според тоа, во овој случај својството  $P$  е природни броеви кои при делење со 3, даваат остаток 2. Ова множество можеме да го запишеме на следниот начин:

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ при делење со } 3 \text{ дава остаток } 2\}$$

или кратко  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ .

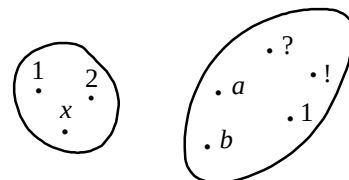
б) Множеството  $X$  од сите рационални броеви кои се поголеми од  $\frac{1}{2}$  и се помали од  $\frac{4}{3}$  го запишуваме на следниот начин:  $X = \{p \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{2} < p < \frac{4}{3}\}$ .

*Претставување на множествата со помош на Венови дијаграми.* Заради полесно расудување во математиката се користат цртежи, шеми, скици и слично. Слично се постапува во теоријата на множествата, каде што множествата се претставуваат како дел од рамнината ограничен со затворена линија. Ваквите цртежи ги нарекуваме Венови дијаграми.

**Пример 3.** За множествата

$$A = \{1, 2, x\} \text{ и } B = \{a, b, ?, 1, !\}$$

Веновите дијаграми се дадени на цртежот.



Дали постојат природни броеви кои се поголеми од 1 и се помали од 2? Јасно, не постои ниту еден таков природен број. Слично, не постојат квадрати кои не се паралелограми, а исто така не постојат луѓе кои се повисоки од 6 m итн.

Заради претходно кажаното природно е да воведеме множество без елементи, кое го нарекуваме *празно множество*. Притоа сметаме дека постои само едно празно множество, кое го означуваме со симболот  $\emptyset$ .

Да ги разгледаме множествата

$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, a, b, c\} \text{ и } C = \{b, c, a\}.$$

Забележуваме дека секој елемент на множеството  $A$  е елемент и на множеството  $B$ , а множествата  $A$  и  $C$  се составени од исти елементи. Во математиката, а и во природата воопшто, имаме многу вакви ситуации, па затоа природна е следнава дефиниција.

**Дефиниција 1.** За множеството  $A$  ќе велиме дека е *подмножество* од множеството  $B$  ако од  $x \in A$  следува  $x \in B$ . Притоа означуваме  $A \subseteq B$  или  $B \supseteq A$ .

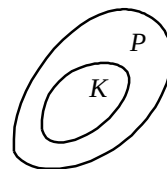
За множествата  $A$  и  $B$  ќе велиме дека се *еднакви* ако  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ . Притоа пишуваме  $A = B$ .

Ако  $A \subseteq B$  и  $B$  содржи елемент кој не му припаѓа на  $A$ , тогаш ќе велиме дека  $A$  е *вистинско подмножество* од  $B$  и пишуваме  $A \subset B$  или  $B \supset A$ .

За празното множество  $\emptyset$  сметаме дека е подмножество од секое множество  $A$ .

Од претходната дефиниција непосредно следува дека  $A \subseteq A$ , но  $A$  не е вистинско подмножество на самото себе.

**Пример 4.** а) Со  $K$  да го означиме множеството од сите квадрати, а со  $P$  множеството од сите паралелограми. Бидејќи секој квадрат е паралелограм, но не секој паралелограм е квадрат, добиваме дека  $K \subset P$ . Со помош на Венов дијаграм, последново е прикажано на цртежот.



б) Нека  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$  и  $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ .

Ако  $n \in P$ , тогаш  $n = 4k + 1$ , за некој  $k \in \mathbb{N}$ . Но, тоа значи дека  $n = 2 \cdot (2k) + 1$  и бидејќи  $2k \in \mathbb{N}$  добиваме дека  $n \in M$ . Според тоа,  $P \subseteq M$ . Понатаму, бидејќи  $3 \in M$ , но  $3 \notin P$ , заклучуваме дека  $P \subset M$ .

в) Множествата  $A = \{1\}$  и  $B = \{1, 1\}$  се еднакви, бидејќи елементот 1 е единствен елемент како на множеството  $A$ , така и на множеството  $B$ . Слично,  $\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Последното е во согласност со претходно кажаното дека *множеството е целина на различни елементи*, односно дека *секој елемент во множеството се смета само по еднаш*.

Во врска со подмножествата на дадено множество е поимот партитивно множество. Нека  $M$  е произволно множество. Да ги формираме сите подмножества на множеството  $M$ . Овие подмножества формираат ново множество кое го нарекуваме *партитивно множество* на множеството  $M$  и го означуваме со  $P(M)$ . Според тоа,  $P(M) = \{x \mid x \subseteq M\}$ .

На пример, за множеството  $M = \{1, 2, 3\}$  имаме

$$P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

**Теорема 1.** За секои множества  $A, B$  и  $C$  точни се следните тврдења.

- i)  $A = A$ ,
- ii) Ако  $A = B$ , тогаш  $B = A$ .
- iii) Ако  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$ , тогаш  $A \subseteq C$ .
- iv) Ако  $A = B$  и  $B = C$ , тогаш  $A = C$ .

**Доказ.** Ќе го докажеме тврдењето iii).

Да претпоставиме дека  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$ . Ако  $x \in A$ , тогаш според дефиницијата 1 од  $A \subseteq B$  следува дека  $x \in B$ . Понатаму, бидејќи  $B \subseteq C$ , повторно од дефиницијата 1 добиваме дека  $x \in C$ . Според тоа, од  $x \in A$  следува дека  $x \in C$ , а тоа значи дека  $A \subseteq C$ .

Слично се докажуваат и останатите три тврдења. Обиди се нив самостојно да ги докажеш.

#### Задачи

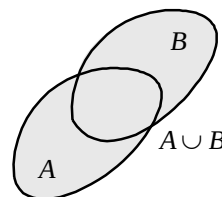
1. Со набројување на неговите елементи запиши го:
  - а) множеството од сите цели броеви меѓу 3 и 12;
  - б) множеството од сите природни броеви деливи со 3 и помали од 25;
  - в) множеството од сите делители на бројот 120.
2. Со помош на својството кое го има, запиши го секое од множествата во задачата 1.
3. Запиши ги со набројување на нивните елементи множествата:
  - а)  $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 7\}$ ;
  - б)  $B = \{x \mid 3x = 7, x \in \mathbb{N}\}$ ;
  - в)  $C = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \mid 12\}$ ;
  - д)  $D = \{3 \cdot 2^n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ и } -4 < n < 6\}$ .
4. Дадени се множествата:  
 $A = \{1, 3, 7, 15, 31\}$ ,  $B = \{5, 11, 23, 47, 95\}$ ,  
 $C = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ ,  $D = \{3 \cdot 2^x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ .  
Кои од нив се меѓусебно еднакви?
5. Дадени се множествата:  $\mathbb{N}$ ,  $P = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ ,  $M = \{n \mid n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$ . Каков однос постои меѓу множествата:
  - а)  $\mathbb{N}$  и  $P$ ;
  - б)  $\mathbb{N}$  и  $M$ ;
  - в)  $M$  и  $P$ .
6. За множеството  $A = \{a, b, c, d\}$  најди го неговото партитивно множество.

## 1.2 Операции со множества

Во досегашните разгледувања се осврнавме на поимите множество, подмножество и еднакви множества. Во практиката најчесто се среќаваме со проблеми во кои треба истовремено да ги разгледуваме елементите кои им припаѓаат на две или повеќе множества, потоа заедничките елементи на две или повеќе множества, па елементите кои му припаѓаат на едно, а не му припаѓаат на друго множество и слично. Претходно кажаното природно ги наметнува операциите со множествата, со кои се запозна во седмо одделение. Да се потсетиме!

**Дефиниција 2.** Унија на множествата  $A$  и  $B$  го нарекуваме множеството  $C$ , кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат барем на едно од множествата  $A$  и  $B$ . Притоа означуваме  $C = A \cup B$ .

Според тоа,  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ . Претставувањето на унијата на множествата  $A$  и  $B$  со Венов дијаграм е дадено на цртежот. Јасно,  $x \notin A \cup B$  ако и само ако  $x \notin A$  и  $x \notin B$ .



**Пример 5.** Најди ја унијата на множествата

а)  $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n \leq 7\}$  и  $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } 5 \leq n < 13\}$ ,

б)  $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n < 9\}$  и  $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n \geq 5\}$ ,

в)  $A = \{n \mid n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0\}$  и  $B = \{n \mid n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}_0\}$ .

**Решение.** а) За дадените множества имаме

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ и } B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\},$$

па затоа  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

б) За дадените множества имаме

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } B = \{5, 6, 7, 8, \dots, k, \dots\},$$

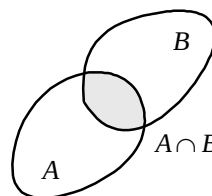
па затоа  $A \cup B = \mathbb{N}$ .

в) Множеството  $A$  е множеството природни броеви кои при делење со 3 даваат остаток 1, а множеството  $B$  е множеството природни броеви кои при делење со 3 даваат остаток 2. Значи,  $A$  и  $B$  ги содржат сите природни броеви кои не се деливи со 3 и само тие броеви. Затоа

$$A \cup B = \{n \mid n = 3k + 1 \text{ или } n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}_0\} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } 3 \nmid n\}.$$

**Дефиниција 3.** Пресек на множествата  $A$  и  $B$  го нарекуваме множеството  $C$ , кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат на секое од множествата  $A$  и  $B$ . Притоа означуваме  $C = A \cap B$ .

Според тоа,  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ . Претставувањето на пресекот на множествата  $A$  и  $B$  со Венов дијаграм е дадено на цртежот. Јасно,  $x \notin A \cap B$  ако и само ако  $x \notin A$  или  $x \notin B$ .



**Пример 6.** Најди го пресекот на множествата

а)  $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n \leq 7\}$  и  $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } 5 \leq n < 13\}$ ,

б)  $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n < 9\}$  и  $B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n \geq 5\}$

в)  $A = \{n \mid n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0\}$  и  $B = \{n \mid n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_0\}$ .

**Решение.** а) За дадените множества имаме  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и  $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ,

па затоа  $A \cap B = \{5, 6, 7\}$ .

б) За дадените множества имаме  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  и  $B = \{5, 6, 7, 8, \dots, k, \dots\}$ , па затоа  $A \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$ .

в) Множеството  $A$  е множеството природни броеви кои при делење со 3 даваат остаток 1. Значи, ако  $n \in A$ , тогаш бројот  $n-1$  е делив со 3. Слично, множеството  $B$  е множеството природни броеви кои при делење со 4 даваат остаток 1. Значи, ако  $n \in B$ , тогаш бројот  $n-1$  е делив со 4. Оттука следува, ако природниот број  $n$  припаѓа на множествата  $A$  и  $B$ , тогаш бројот  $n-1$  е делив со 3 и со 4, што значи со  $3 \cdot 4 = 12$ . Затоа бројот  $n$  при делење со 12 дава остаток 1, односно

$$A \cap B = \{n \mid n = 3k + 1 \text{ и } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_0\} = \{n \mid n = 12k + 1, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

**Дефиниција 4.** За множествата  $A$  и  $B$  ќе велиме дека се *дисјунктни* ако  $A \cap B = \emptyset$ .

**Пример 7.** а) Множествата  $A$  и  $B$  од примерот 5 в) се дисјунктни. Навистина, ако  $n \in A \cap B$ , тогаш  $n \in A$  и  $n \in B$ . Но, тоа значи дека при делење со 3, бројот  $n$  истовремено дава остаток 1 и остаток 2, а тоа не е можно.

б) Очигледно, множествата  $A$  и  $B$  од примерите 6 а) и б) не се дисјунктни.

Исто така не се дисјунктни и множествата  $A$  и  $B$  од примерот 6 в), бидејќи  $13 \in A \cap B$ .

**Теорема 2.** За секои множества  $A, B$  и  $C$ , точни се следните тврдења.

i)  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

ii)  $A \cap B \subseteq A$ ;  $A \cap B \subseteq B$ ;  $A \subseteq A \cup B$ ;  $B \subseteq A \cup B$ .

iii)  $A \cap A = A$ ;  $A \cup A = A$ , (закони за идемпотентност).

iv)  $A \cap B = B \cap A$ ;  $A \cup B = B \cup A$ , (комутативни закони).

v)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ , (асоцијативни закони).

vi)  $A \cap (A \cup B) = A$ ;  $A \cup (A \cap B) = A$ , (закони за апсорпција).

**Доказ.** Ќе го докажеме првото равенство во v). Имаме

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B \cap C) \Rightarrow (x \in A \text{ и } (x \in B \text{ и } x \in C)) \\ &\Rightarrow ((x \in A \text{ и } x \in B) \text{ и } x \in C) \Rightarrow (x \in A \cap B \text{ и } x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

што значи  $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ .

Од друга страна имаме

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\Rightarrow (x \in A \cap B \text{ и } x \in C) \Rightarrow ((x \in A \text{ и } x \in B) \text{ и } x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ и } (x \in B \text{ и } x \in C)) \Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B \cap C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

што значи  $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$ .

Конечно, од

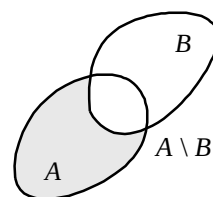
$$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C) \text{ и } A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$$

следува  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

Слично се докажуваат останатите тврдења. Обиди се самостојно да ги докажеш.

**Дефиниција 5.** Разлика на множествата  $A$  и  $B$  го нарекуваме множеството  $C$ , кое се состои од сите елементи на множеството  $A$  кои не му припаѓаат на множеството  $B$ . Означуваме  $C = A \setminus B$ .

Според тоа,  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ . Претставувањето на разликата на множествата  $A$  и  $B$  со Венов дијаграм е дадено на цртежот. Јасно,  $x \notin A \setminus B$  ако и само ако  $x \notin A$  или  $x \in B$ .





**Пример 8.** а) Најди ја разликата на множествата

$$A = \{n \mid n > 4, n \in \mathbb{N}\} \text{ и } B = \{n \mid n < 14, n \in \mathbb{N}\}.$$

б) Најди ја разликата на множествата

$$A = \{n \mid -7 < n < 7, n \in \mathbb{Z}\} \text{ и } B = \{n \mid \frac{12}{n} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

в) Дадени се множествата  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{a, d, f\}$ ,  $C = \{b, e, f, g\}$  и  $D = \{a, f, g, h\}$ . Определи го множеството  $S$  ако се знае дека

$$S \subseteq A, S \cap (B \cup D) = \emptyset, (A \cap C) \setminus S = \emptyset, \{c\} \setminus S = \{c\}.$$

**Решение.** а) Имаме

$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \dots\}$  и  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ , па затоа  $A \setminus B = \{14, 15, 16, 17, \dots\} = \{n \mid n \geq 14, n \in \mathbb{N}\}$ .

б) Имаме

$A = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  и  $B = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ , па затоа  $A \setminus B = \{-5, 0, 5\}$ .

в) Најпрво определуваме,  $B \cup D = \{a, d, f, g, h\}$  и  $A \cap C = \{b, e\}$ . Бидејќи  $S \subseteq A$  и  $S$  нема заеднички елементи со  $B \cup D$  (бидејќи  $S \cap (B \cup D) = \emptyset$ ), следува дека  $S \subseteq \{b, c, e\}$ . Но, од  $(A \cap C) \setminus S = \emptyset$  следува  $b \in S$  и  $e \in S$ , а од  $\{c\} \setminus S = \{c\}$  следува  $c \notin S$ . Значи,  $S = \{b, e\}$ .

Тврдењата искажани во следната теорема непосредно следуваат од дефиницијата на разликата на множествата. Обиди се самостојно да ги докажеш.

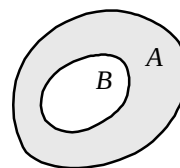
**Теорема 3.** За секои множества  $A$  и  $B$  важи.

- i)  $A \setminus \emptyset = A$ ,  $A \setminus A = \emptyset$ ,  $\emptyset \setminus A = \emptyset$ .
- ii)  $x \notin A \setminus B$  ако и само ако  $x \notin A$  или  $x \in B$ .
- iii) Ако  $A \subseteq B$ , тогаш  $A = B \setminus (B \setminus A)$ .
- iv)  $A \setminus B = \emptyset$  ако и само ако  $A \subseteq B$ .
- v)  $A \setminus B = A$  ако и само ако  $A \cap B = \emptyset$ .

**Дефиниција 6.** Нека е дадено множеството  $A$  и  $B \subseteq A$ . Комплемент на  $B$  во однос на  $A$  го нарекуваме множеството  ${}^c B = A \setminus B$ .

Според тоа,  ${}^c B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ .

Претставувањето на комплементот на множеството  $B$  во однос на множеството  $A$  со Венов дијаграм е дадено на цртежот. Јасно,  $x \notin {}^c B$  ако и само ако  $x \in B$ .



**Пример 9.** а) Најди го комплементот на множеството  $A = \{3, 4, 5\}$  во однос на множеството  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

б) Најди го комплементот на множеството  $A = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$  во однос на множеството  $\mathbb{N}$ .

**Решение.** а) Од дефиницијата б имаме  ${}^c A = U \setminus A = \{1, 2, 6, 7, 8\}$ .

б) Множеството  $A$  е множеството парни природни броеви, па затоа неговиот комплемент е множеството непарни природни броеви, т.е.

$${}^c A = \mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N} \setminus \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{n \mid n \neq 2k, k \in \mathbb{N}\} = \{n \mid n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

**Дефиниција 7.** Парот  $(x, y)$  во кој точно се знае кој елемент е прв, а кој елемент е втор го нарекуваме *подреден пар*. Во подредениот пар  $(x, y)$ ,  $x$  е прва, а  $y$  е втора компонента. Притоа,  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  ако и само ако  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

*Декартов производ* на множествата  $A$  и  $B$  го нарекуваме множеството  $C$ , во ознака  $C = A \times B$ , кое се состои од сите подредени парови  $(x, y)$ , каде што  $x \in A$ ,  $y \in B$ .

Според тоа,  $C = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ .

Декартовиот производ на непразното множество  $A$  со самото себе го нарекуваме *Декартов квадрат* на множеството  $A$  и го означуваме  $A^2$ .

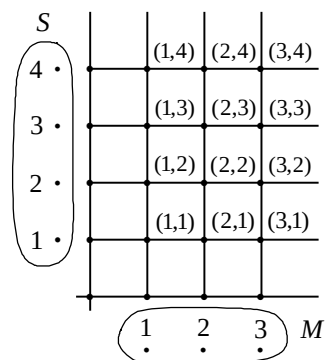
**Пример 10.** а) За множествата  $M = \{1, 2, 3\}$  и  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  Декартовиот производ е

$$M \times S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}.$$

На цртежот десно е даден графичкиот приказ (графот) на Декартовиот производ на множествата  $M$  и  $S$ .

б) За множеството  $A = \{x, y, z\}$  Декартовиот квадрат е

$$A^2 = \{(x,x), (x,y), (x,z), (y,x), (y,y), (y,z), (z,x), (z,y), (z,z)\}.$$



**За оние што сакаат да знаат повеќе.** Покрај наведените тврдења за операциите со множества важат и следниве две теореми, кои ќе ги дадеме без доказ.

**Теорема 4** (*дистрибутивни закони*). За секои множества  $A, B$  и  $C$ , точни се следниве тврдења:

$$i) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$ii) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

**Теорема 5.** Нека  $A, B \subseteq X$ . Тогаш, точни се равенствата

$$i) {}^c({}^c A) = A$$

$$ii) A \subseteq B \text{ ако и само ако } {}^c B \subseteq {}^c A.$$

$$iii) {}^c(A \cup B) = {}^c A \cap {}^c B, \quad {}^c(A \cap B) = {}^c A \cup {}^c B, \text{ (де Морганови закони).}$$

Задачи

7. Најди непразни множества  $A, B$  и  $C$  такви, што

$$a) A \cup B = A \cup C, \text{ но } B \neq C;$$

$$б) A \cap B = A \cap C, \text{ но } B \neq C.$$

8. Најди ја унијата на множествата  $A = \{n \mid n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}\}$  и  $B = \{n \mid n = 4k + 3, k \in \mathbb{N}\}$ .

9. Најди го пресекот на множествата  $A = \{n \mid n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}\}$  и  $B = \{n \mid n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ .

10. Дадени се множествата:  $P = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$  и  $M = \{n \mid n = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ . Најди ги множествата:

$$a) P \cap M;$$

$$б) P \cup M;$$

$$в) P \setminus M \text{ и}$$

$$г) M \setminus P.$$

11. Провери го равенството  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  ако

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 7\}, B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x < 10\} \text{ и } C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 6 \leq x \leq 12\}.$$

12. Дадени се множествата  $A = \{c, d, e\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  и  $C = \{b, c\}$ . Определи ги множествата:

$$a) (A \times B) \cap (A \times C),$$

$$б) A \times ((B \setminus C) \cup (A \setminus B)).$$

13. Најди ги елементите на множеството  $G = \{(x, y) \mid 2x - y = 1, x \in A, y \in B\}$ , каде што  $A = \{-1, 2, 3\}$  и  $B = \{-3, -1, 2, 5, 7\}$ .
14. Дадени се множествата  $A = \{4, 5, 8\}$ ,  $B = \{4, 6, x, 8\}$  и  $C = \{5, 3, 8, x, y\}$ . Најди ги елементите  $x$  и  $y$  ако  $A \cup B = \{4, 5, 6, 8, 9\}$  и  $B \cap C = \{4, 8, 9\}$ .
15. Дадени се множествата  $A = \{1, 2, 3\}$  и  $B = \{3, 4, 5\}$ . Најди го множеството  $X$  ако  $A \cup X = A$  и  $B \cap X = A \setminus (A \setminus B)$ . Колку решенија има задачата?
16. Најди ги множествата  $A, B$  и  $C$  ако
- $$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset,$$
- $$A \setminus B = \{1, 3, 5\}, C \setminus B = \{2, 4\} \text{ и } (A \cap B) \setminus C = \{6\}.$$

### 1.3 Пресликувања. Еквивалентни множества

Со пресликувањата (функциите) се запозна во основното образование. Потсети се!

**Дефиниција 8.** Нека  $A$  и  $B$  се две непразни множества. Ако на секој елемент  $x \in A$  му е придружен, по некое правило  $f$ , еднозначно определен елемент  $y \in B$ , тогаш велиме дека  $f$  е *пресликување (функција)* од  $A$  во  $B$  и пишуваме  $f: A \rightarrow B$ .

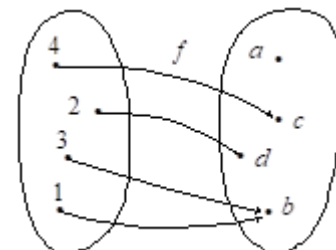
За елементот  $y \in B$  велиме дека е *слика* на елементот  $x \in A$  и пишуваме  $y = f(x)$ . Множеството  $A$  го нарекуваме *домен*, а множеството  $B$  - *кодомен* на пресликувањето  $f$ .

**Пример 11.** а) Ако  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ , тогаш со

$$f(1) = b, f(3) = b, f(2) = d, f(4) = c \quad (1)$$

е зададено пресликување  $f: A \rightarrow B$ .

Во многу случаи пожелно е пресликувањата графички да се претставуваат. Така, горното пресликување графички можеме да го претставиме како на цртежот.



Исто така, наместо правилото на пресликувањето да го запишуваме во обликот (1), тоа можеме да го направиме со помош на записот  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & d & b & c \end{pmatrix}$ , што значи дека во првиот ред ги запишуваме елементите на доменот  $A$ , а во вториот ред нивните слики кои му припаѓаат на кодоменот  $B$ .

Според тоа, ако  $f: A \rightarrow B$  и  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \dots$ , тогаш за правилото  $f$  можеме да го користиме и записот  $f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots \end{pmatrix}$ .

б) Нека  $A$  е произволно непразно множество. Тогаш, со  $I_A(x) = x$ , за секој  $x \in A$  е определено пресликување  $I_A: A \rightarrow A$  кое го нарекуваме *идентично пресликување*.

в) Нека се дадени множествата  $\mathbb{N}$  и  $M = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Јасно, со правилото  $f(k) = 2k$ , е зададено пресликување  $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ .

**Дефиниција 9.** За две пресликувања  $f: A \rightarrow B$  и  $g: C \rightarrow D$  ќе велиме дека *се еднакви* ако  $A = C$ ,  $B = D$  и  $f(x) = g(x)$  за секој  $x \in A$ .

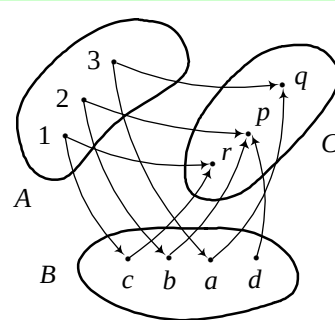
**Пример 12.** а) Да ги разгледаме пресликувањата  $f: A \rightarrow B$ , каде што  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  и  $g: C \rightarrow D$ , каде што  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $D = \{1, 2, 3\}$ ,  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Важи,  $A = C$  и  $f(x) = g(x)$  за секој  $x \in A$ , но  $B \neq D$  па затоа пресликувањата не се еднакви.

б) За пресликувањата  $f: A \rightarrow B$ , каде што  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  и  $g: C \rightarrow D$ , каде што  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $D = \{1, 2, 3\}$ ,  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , важи  $A = C$ ,  $B = D$ , но  $f(2) = 1 \neq 2 = g(2)$ , па затоа пресликувањата не се еднакви.

**Дефиниција 10.** Нека  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  се две пресликувања. За секој  $x \in A$  ставаме  $h(x) = g(f(x))$  и добиваме пресликување  $h: A \rightarrow C$  кое го нарекуваме *композиција на пресликувањата*  $f$  и  $g$ , и го означуваме со  $h = g \circ f$ .

**Пример 13.** а) Нека  $A = \{a, b, c, d\}$  и пресликувањата  $f: A \rightarrow A$  и  $g: A \rightarrow A$  се определени со  $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$  и  $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$ . Имаме,  $g(f(b)) = g(a) = c$  и  $f(g(b)) = f(a) = b$ , што значи дека за композицијата на пресликувања не важи комутативниот закон.

б) Нека  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ ,  $C = \{r, p, q\}$  и нека пресликувањата  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  се дадени со  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & b & a \end{pmatrix}$  и  $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & p \end{pmatrix}$ . Тогаш, за композицијата  $g \circ f$  имаме  $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ r & p & q \end{pmatrix}$ . На цртежот е даден шематскиот приказ на композицијата  $g \circ f$ .



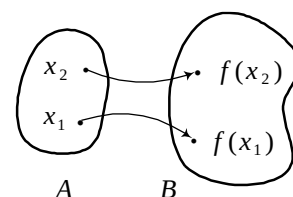
Може да се докаже дека за композицијата на пресликувања важи асоцијативниот закон, т.е. дека е точна следнава теорема, која нема да ја докажуваме.

**Теорема 6.** а) Ако  $f: A \rightarrow B$ , тогаш  $f \circ I_A = f$  и  $I_B \circ f = f$ .

б) Ако  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  и  $h: C \rightarrow D$ , тогаш  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

Во продолжение ќе разгледаме три видови пресликувања: инјекција, сурјекција и биекција, кои заземаат важно место во математиката воопшто.

**Дефиниција 11.** За пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  ќе велиме дека е *инјекција* ако од  $x_1 \neq x_2$  следува  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , т.е. различни елементи имаат различни слики (види цртеж).



**Пример 14.** а) Нека  $A = \{a, b, c, d\}$  и пресликувањата  $f: A \rightarrow A$  и  $g: A \rightarrow A$  се определени со  $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$  и  $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$ . Јасно, пресликувањето  $f$  е инјекција, но пресликувањето  $g$  не е инјекција бидејќи  $b \neq c$ , но  $g(b) = a = g(c)$ .

б) Нека се дадени множествата  $\mathbb{N}$  и  $M = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  и нека пресликувањето  $f: \mathbb{N} \rightarrow M$  е определено со  $f(k) = 2k$ , за секој  $k \in \mathbb{N}$ . Ќе докажеме дека ова пресликување е инјекција.

Навистина, за секои  $k, n \in \mathbb{N}$  такви, што  $k \neq n$  важи  $2k \neq 2n$  што значи  $f(k) \neq f(n)$  т.е.  $f$  е инјекција.

Точна е следнава теорема, која нема да ја докажуваме.

**Теорема 7.** Ако  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  се инјекции, тогаш и  $g \circ f$  е инјекција.

**Дефиниција 12.** За пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  ќе велиме дека е *сурјекција* ако за секој  $y \in B$  постои  $x \in A$  таков, што  $y = f(x)$ , т.е. секој елемент на  $B$  е слика на барем еден елемент од  $A$ .

**Пример 15.** а) Нека  $A = \{a, b, c, d\}$  и  $B = \{1, 2, 3\}$  и пресликувањата  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow A$  се определени со  $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  и  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & b \end{pmatrix}$ . Јасно, пресликувањето  $f$  е сурјекција, но пресликувањето  $g$  не е сурјекција бидејќи  $d$  не е слика на ниту еден елемент од множеството  $B$ .

б) Нека се дадени множествата  $\mathbb{N}$  и  $M = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\}$  и нека пресликувањето  $f: \mathbb{N} \rightarrow M$  е определено со  $f(k) = 2k-1$ , за секој  $k \in \mathbb{N}$ . Ќе докажеме дека ова пресликување е сурјекција.

Нека  $m \in M$ . Тогаш постои  $k \in \mathbb{N}$  таков што  $m = 2k-1$  и притоа важи  $f(k) = 2k-1 = m$ . Значи, за произволен  $m \in M$  најдовме  $k \in \mathbb{N}$  чија слика е  $m$ , па затоа  $f$  е сурјекција.

Следнава теорема ќе ја прифатиме без доказ.

**Теорема 8.** Ако  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  се сурјекции, тогаш и  $g \circ f$  е сурјекција.

**Дефиниција 13.** За пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  ќе велиме дека е *биекција* ако тоа е и инјекција и сурјекција.

Значи,  $f$  е биекција ако секој елемент  $y \in B$  е слика на барем еден елемент  $x \in A$  и различни елементи од  $A$  со  $f$  се пресликуваат во различни елементи од  $B$ .

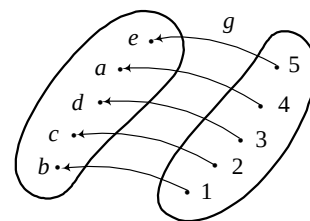
**Пример 16.** а) Очигледно, за секое непразно множество  $A$  идентичното пресликување  $I_A$  е биекција. Провери!

б) Во примерот 15 б) докажавме дека пресликувањето  $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ ,  $M = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\}$  определено со  $f(k) = 2k-1$ , за секој  $k \in \mathbb{N}$  е сурјекција. Но, ова пресликување е и инјекција. Навистина, за секои  $k, n \in \mathbb{N}$  такви, што  $k \neq n$ , важи  $2k \neq 2n$ , па затоа  $2k-1 \neq 2n-1$ , што значи  $f(k) \neq f(n)$ , т.е.  $f$  е инјекција. Конечно,  $f$  е сурјекција и инјекција, па значи е биекција.

Од теоремите 7 и 8 непосредно следува точноста на следната теорема.

**Теорема 9.** Ако пресликувањата  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  се биекции, тогаш и нивната композиција  $g \circ f$  е биекција.

Нека  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  и  $f: A \rightarrow B$  е дадено со  $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Ова пресликување е биекција. Во врска со пресликувањето  $f$  да го разгледаме пресликувањето  $g: B \rightarrow A$  зададено со  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & c & d & a & e \end{pmatrix}$ . Како што можеме да забележиме, „старите“ слики сега се оригинали, а „старите“ оригинали сега се слики (види цртеж).



Претходно разгледаниот пример непосредно ја иницира следната дефиниција за инверзно пресликување.

**Дефиниција 14.** Ако  $f : A \rightarrow B$  е биекција, тогаш со  $g(y) = x$ , за секој  $y \in B$ , ако и само ако  $y = f(x)$  дефинираме пресликување  $g : B \rightarrow A$  кое го нарекуваме *инверзно пресликување* на пресликувањето  $f$ . За инверзното пресликување ја прифаќаме ознаката  $g = f^{-1}$ .

Следнава теорема ќе ја прифатиме без истата да ја докажуваме.

**Теорема 10.** Ако  $f : A \rightarrow B$  е биекција, тогаш инверзното пресликување  $f^{-1} : B \rightarrow A$  е биекција.

Нека  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  и нека пресликувањето  $f : A \rightarrow B$  е дадено со  $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Јасно,  $f$  е биекција, т.е. меѓу множествата  $A$  и  $B$  постои биекција. Ваквите множества имаат посебна улога во математиката.

**Дефиниција 15.** За множествата  $A$  и  $B$  велиме дека се *еквивалентни*, со ознака  $A \sim B$ , ако постои биекција  $f$  од  $A$  во  $B$ . За еквивалентните множества велиме дека имаат еднаков број на елементи (*кардинален број*).

**Пример 17.** а) Множествата  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  и  $B = \{+, -, *, \in, \otimes, \oplus\}$  се еквивалентни. Навистина, пресликувањето  $f : A \rightarrow B$  определено со  $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ + & - & * & \in & \otimes & \oplus \end{pmatrix}$  е биекција и затоа  $A \sim B$ .

б) Во примерот 16 б) докажавме дека пресликувањето  $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ ,  $M = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\}$  определено со  $f(k) = 2k-1$ , за секој  $k \in \mathbb{N}$  е биекција, што значи дека  $\mathbb{N} \sim M$ , т.е. множеството природни броеви е еквивалентно со множеството непарни природни броеви.

**Теорема 11.** За секои множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  важи

- i)  $A \sim A$ .
- ii) Ако  $A \sim B$ , тогаш  $B \sim A$ .
- iii) Ако  $A \sim B$  и  $B \sim C$ , тогаш  $A \sim C$ .

**Доказ.** Тврдењата следуваат од тоа што идентичното пресликување е биекција, инверзното пресликување е биекција и композицијата на биекции е биекција.

**Пример 18.** Нека се дадени множествата  $\mathbb{N}$  и  $P = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ . Во примерот 14 докажавме дека пресликувањето  $f : \mathbb{N} \rightarrow P$  определено со  $f(k) = 2k$ , за секој  $k \in \mathbb{N}$  е инјекција. Но, ова пресликување е сурјекција (Провери!), па значи тоа е биекција. Според тоа,  $P \sim \mathbb{N}$ .

Според примерот 17 б) имаме дека  $\mathbb{N} \sim M$ , каде што  $M = \{2n-1 | n \in \mathbb{N}\}$ , па од теоремата 11 iii) следува дека  $P \sim M$ , т.е. множествата парни и непарни природни броеви се еквивалентни.

Задачи за вежби

17. Нека  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  и  $f$  и  $g$  се пресликувања од  $A$  во  $A$  определени со  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  и  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ . Пресметај  $f(f(1))$ ,  $f(g(2))$ ,  $g(f(4))$  и  $f(g(4))$ .

18. Нека  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{p, q, r\}$ ,  $D = \{m, n, o\}$  и нека пресликувањата  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  и  $h: C \rightarrow D$  се дадени со  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & a \end{pmatrix}$ ,  $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}$  и  $h = \begin{pmatrix} p & q & r \\ m & n & o \end{pmatrix}$ . Пресметај  $g \circ f$ ,  $h \circ g$ ,  $h \circ (g \circ f)$  и  $(h \circ g) \circ f$ .
19. Нека  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  и пресликувањето  $f: A \rightarrow A$  е определено со:
- а)  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;                      б)  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
- Дали  $f$  е биекција? Во случај на потврден одговор најди го инверзното пресликување.
20. Докажи дека множествата  $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$  и  $C = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$  се еквивалентни меѓу себе.
21. Докажи дека множествата  $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$  и  $B = \{3^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  се еквивалентни.

## 1.4 Конечни и бесконечни множества, примена

Во следната дефиниција ќе го воведеме поимот за конечно множество и во натамошните разгледувања под множество ќе подразбираме конечно множество, ако не е поинаку кажано. За таа цел, за секој природен број  $k$  нека  $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ .

**Дефиниција 16.** Нека  $k \in \mathbb{N}$ . За множеството  $M$  ќе велиме дека има  $k$  елементи ако  $M \sim \mathbb{N}_k$ . Притоа ќе пишуваме  $|M| = k$ . По дефиниција земаме дека  $|\emptyset| = 0$ . Јасно,  $|\mathbb{N}_k| = k$ .

За множеството  $M$  ќе велиме дека е *конечно* ако постои  $k \in \mathbb{N}$  таков, што  $|M| = k$ . Во спротивно ќе велиме дека множеството  $M$  е *бесконечно*.

Во продолжение ќе разгледаме неколку својства на конечните множества. Притоа својствата нема да ги докажуваме, току само ќе покажеме како истите се користат за решавање на задачи со пребројување и логички задачи.

**Теорема 12.** а) (принцип на еднаквост). Ако  $|M| = k$  и  $M \sim L$ , тогаш  $|L| = k$ .  
б) Ако  $|M| = |L| = k$ , тогаш  $M \sim L$ .

Од теоремата 12 непосредно следува дека конечните множества  $M$  и  $L$  се еквивалентни ако и само ако имаат еднаков број на елементи.

**Пример 19.** На колку начини на тројца ученици може да им се поделат 8 исти моливи, така што секој од нив да добие барем еден молив?

**Решение.** Осумте моливи ќе ги наредиме во низа и на празните места меѓу нив, кои ги има 7, ќе поставуваме две „прегради“ како на цртежов:

•<sup>1</sup> •<sup>2</sup>| •<sup>3</sup> •<sup>4</sup> •<sup>5</sup> •<sup>6</sup>| •<sup>7</sup> •

Празните места да ги означиме со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Поделбата на цртежот е определена со броевите 2 и 6, т.е. со бројот 26. Сите поделби се определени со следните броеви:



12 13 14 15 16 17  
 23 24 25 26 27  
 34 35 36 37  
 45 46 47  
 56 57  
 67

Вакви двоцифрени броеви има 21, па од принципот на еднаквост следува дека бројот на поделбите на 8 исти моливи на тројца ученици така што секој од нив да добие барем по еден молив е 21.

**Теорема 13** (принцип на збир). а) Ако  $A \cap B = \emptyset$ , тогаш  $|A \cup B| = |A| + |B|$ .

б) Ако  $A_1, A_2, \dots, A_k$  е фамилија од  $k$ ,  $k \geq 2$  по парови дисјунктни множества, т.е. множества за кои важи  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , за  $i \neq j$ , тогаш

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

**Пример 20.** Во примерот 19 дадовме решение на проблемот на поделба на 8 еднакви моливи на тројца ученици, при што секој ученик добива барем по еден молив. Истата задача ќе ја решиме користејќи го принципот на збир.

Нека сите поделби на моливите на тројца ученици го формираат множеството  $A$ . Ова множество ќе го разбиеме на подмножества  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ , при што подмножеството  $A_i$  ги содржи поделбите при кои првиот ученик добива еден молив,  $A_2$  поделбите при кои првиот ученик добива два молива итн. Така, за множествата  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  ја имаме следнава табела

| $i$    | $A_i$                                    | $ A_i $ |
|--------|------------------------------------------|---------|
| 1      | (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) | 6       |
| 2      | (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)        | 5       |
| 3      | (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)               | 4       |
| 4      | (1,3), (2,2), (3,1)                      | 3       |
| 5      | (1,2), (2,1)                             | 2       |
| 6      | (1,1)                                    | 1       |
| Вкупно |                                          | 21      |

Сега од принципот на збир имаме

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| = 21.$$

**Теорема 14** (принцип на производ). а) За секои множества  $A$  и  $B$  важи  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .

б) Нека  $k \geq 2$ . Тогаш  $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$  за секои множества  $A_i, i = 1, \dots, k$ .

**Пример 21.** Меѓу градовите  $A$  и  $B$  има три директни пата, меѓу градовите  $B$  и  $C$  има два директни пата, а меѓу градовите  $C$  и  $D$  има пет директни пата. На колку различни начини може да се стигне од градот  $A$  во градот  $D$ , ако треба само по еднаш да се влезе во секој од градовите  $B$  и  $C$ ?

**Решение.** Со  $X, Y, Z$  да ги означиме множествата патишта меѓу градовите  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$ ,  $C$  и  $D$  соодветно. Тогаш, секоја можност за патување од  $A$  до  $D$  при наведените услови е елемент на множеството  $X \times Y \times Z$  и елементите на ова множество ги даваат сите можности за патување (Зошто?). Од принципот на производ следува дека бараниот број е



$$|X \times Y \times Z| = |X| \cdot |Y| \cdot |Z| = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30.$$

**Теорема 15.** а) (принцип на исклучување). Ако  $A \subseteq M$ , тогаш  $|M \setminus A| = |M| - |A|$ .

б) (принцип на вклучување). За произволни множества  $A$  и  $B$  важи

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Во случај на три множества, принципот на вклучување го има следниов облик:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

**Пример 22.** Во едно одделение десет ученици имаат оценка пет по математика, 20 ученици имаат оценка пет по историја, додека 27 ученици имаат барем една оценка пет по предметите математика и историја. Колку ученици имаат оценка пет по двата предмети?

**Решение.** Нека  $A$  е множеството ученици што имаат оценка пет по математика и  $B$  е множеството ученици што имаат оценка пет по историја. Од условите на задачата имаме  $|A| = 10$ ,  $|B| = 20$  и  $|A \cup B| = 27$ , а се бара  $|A \cap B|$ .

Од принципот на вклучување имаме  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ , т.е.  $27 = 10 + 20 - |A \cap B|$ , па затоа  $|A \cap B| = 3$ .

**Пример 23.** Најди го бројот на природните броеви помали од 100 кои не се деливи ниту со 2, ниту со 3, ниту со 7.

**Решение.** Нека  $M = \{n | 1 \leq n < 100, n \in \mathbb{N}\}$  и со  $A$ ,  $B$  и  $C$  да ги означиме множествата од природните броеви помали од 100 кои се деливи со 2, 3 и 7 соодветно. Лесно се пребројува дека  $|A| = 49$ ,  $|B| = 33$ ,  $|C| = 14$ ,  $|A \cap B| = 16$ ,  $|A \cap C| = 7$ ,  $|B \cap C| = 4$  и  $|A \cap B \cap C| = 2$ .

Прво од принципот на исклучување, а потоа од принципот на вклучување имаме

$$\begin{aligned} |M \setminus (A \cup B \cup C)| &= |M| - |A \cup B \cup C| \\ &= |M| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \\ &= 99 - 49 - 33 - 14 + 16 + 7 + 4 - 2 = 28. \end{aligned}$$

Според тоа, природни броеви кои се помали од 100 и не се деливи ниту со 2, ниту со 3, ниту со 7 има вкупно 28.

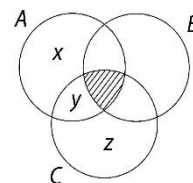
Следните примери ќе ги решиме со помош на Венови дијаграми и ќе ги користиме наведените својства, без притоа истите да го потенцираме.

**Пример 24.** Дадени се множествата  $A, B$  и  $C$  такви што  $A \cap B \cap C = \emptyset$ . Ако множеството  $A \setminus B$  има 7 елементи, множеството  $C \setminus B$  има 8 елементи, множеството  $A \cap C$  има 2 елементи и множеството  $A \cup B \cup C$  има 20 елементи, колку елементи има множеството  $B$ ?

**Решение.** Да означиме како на цртежот десно. Бидејќи  $A \cap B \cap C = \emptyset$ , заклучуваме дека:

- $y = 2$ , бидејќи множеството  $A \cap C$  има 2 елементи,
- $x + y = 7$ , бидејќи множеството  $A \setminus B$  има 7 елементи, па затоа  $x = 5$ ,
- $y + z = 8$ , бидејќи множеството  $C \setminus B$  има 8 елементи, па затоа  $z = 6$ .

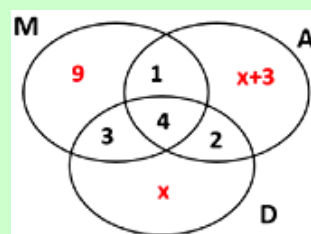
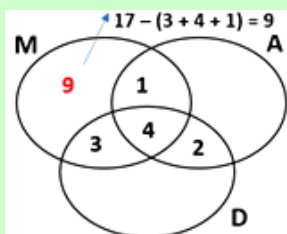
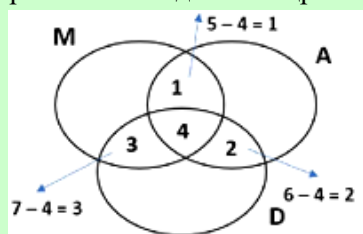
Бидејќи  $A \cup B \cup C$  има 20 елементи, множеството  $B$  ќе има  $20 - (x + y + z) = 20 - 13 = 7$  елементи.



**Пример 25.** Маја, Ана и Дорка заедно тренираат ракомет и одлучиле заедно да организираат забава. Се договориле дека вкупниот број гости ќе биде 40. Маја поканила 17 пријатели, а бројот

на гостите кои ги поканила само Ана е за 3 поголем од бројот на гостите кои ги поканила само Дорка. Бидејќи тие имаат и заеднички пријатели се случило сите три да поканат 4 заеднички пријатели, Маја и Ана поканиле 5 заеднички пријатели, Ана и Дорка поканиле 6, а Маја и Дорка поканиле 7 заеднички пријатели. Колку гости поканила Ана, а колку Дорка?

**Решение.** Нека  $x$  е бројот на гостите кои ги поканила само Дорка. Задачата ќе ја решиме со помош на Венов дијаграм. Од дадените услови последователно ги конструираме дијаграмите прикажани на долните цртежи:



Бидејќи вкупниот број гости бил 40, добиваме

$$9 + x + x + 3 + 3 + 1 + 2 + 4 = 40, \text{ т.е. } x = 9.$$

Значи, Дорка поканила  $9 + 3 + 4 + 2 = 18$  гости и Ана поканила  $12 + 1 + 4 + 2 = 19$  гости.

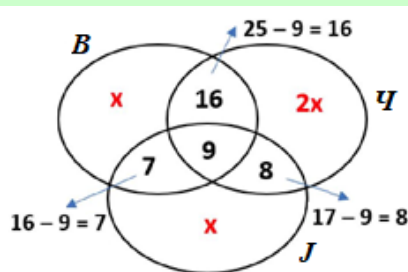
**Пример 26.** Во едно училиште има 97 ученици во деветто одделение. Направила анкета за тоа кој вкус сладолед најмногу сакаат и ги добиле следниве одговори: 25 ученици сакаат сладолед од чоколадо и ванила, 26 ученици сакаат сладолед од ванила и јагода, 17 ученици сакаат сладолед од чоколадо и јагода, 9 ученици ги сакаат сите три вкусови сладолед, и 5 ученици не сакаат сладолед. Колку ученици сакаат само сладолед од ванила, ако нивниот број е еднаков на бројот на учениците кои сакаат само сладолед од јагода и е двојно помал од бројот на учениците кои сакаат само сладолед од чоколадо?

**Решение.** Задачата ќе ја решиме со Венов дијаграм. Бидејќи 5 ученици не сакаат сладолед, бројот на учениците кој треба да го распределиме во множествата е  $97 - 5 = 92$ .

Од условите на задачата лесно се добива следниов Венов дијаграм. Сега од дијаграмот последователно добиваме:

$$x + x + 2x + 16 + 7 + 8 + 9 = 92, \text{ т.е. } x = 13.$$

Значи, бројот на учениците кои сакаат само сладолед од ванила е 13.



Задачи за вежби

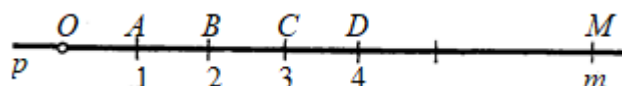
22. На колку начини на тројца ученици можат да им се поделат 10 исти тетратки, така што секој од нив да добие барем една тетратка?
23. Колку четирицифрени броеви има, кои се деливи со 5 и во чиј декаден запис нема повторување на цифрите?
24. Во рамнината се дадени 7 точки, така што никои три не се колинеарни. Колку прави се определени со овие точки?
25. На колку начини може да се поделат 8 исти моливи, 9 исти тетратки и 10 исти книги на тројца ученици, така што секој од нив да добие барем по еден предмет од секој вид?
26. Во едно одделение има 30 ученици. На колку начини може да се избере претседател, благајник и секретар на одделенската заедница, под услов еден ученик да нема две задолженија?
27. Колку петцифрени броеви има, кои се запишуваат со помош на пет различни цифри?

28. Во едно одделение има 30 ученици. Секој ученик има оценка пет по географија или по математика. Од нив: 5 ученици имаат пет по математика и по географија; 16 ученици имаат пет по историја и по географија; 20 ученици имаат пет по географија и 25 ученици имаат пет по историја. Колку ученици имаат пет по историја или по географија, а колку ученици имаат пет по математика?
29. Од 100 ученици: 24 не учат ниту еден од јазиците: англиски, руски и германски; 48 учат англиски; 8 и англиски и руски; 26 учат германски; 8 учат и германски и англиски; 13 учат и германски и руски; и 28 учат руски јазик. Колку ученици ги учат сите три јазици?
30. На група учениците им е поставено прашање кој спорт го сакаат. Добиени се следниве одговори: 18 ученици сакаат кошарка, 14 ученици фудбал, 10 ученици ракомет, 5 ученици фудбал и ракомет, 7 ученици кошарка и ракомет, 10 ученици фудбал и кошарка и 4 ученици ги сакаат сите три спорта. Колку ученици има во групата ако секоја ученик сака барем еден спорт.
31. Колку има природни броеви кои се помали или еднакви на 2019, а кои не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15?
32. Колку има цели броеви кои по апсолутна вредност се помали од 2022 и не се деливи со 3, 5 или 7?

## 1.5 Природни и цели броеви

Во основното образование се запозна со множеството природни броеви  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Како што знаеш секој природен број има следбеник. Така следбеник на бројот 1 е бројот 2, на бројот 2 е бројот 3 итн. На тој начин природните броеви се подредуваат по големина  $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$ . Значи, бројот 1 е најмал природен број и тој не е следбеник на ниту еден природен број, а најголем природен број не постои.

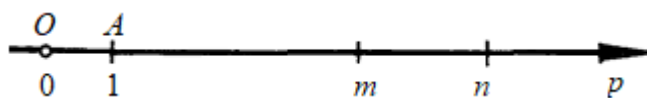
Природните броеви геометриски се претставуваат на следниов начин. Се избира права  $p$  и на неа две точки  $O$  (почетна точка) и  $A$ .



Отсечката  $OA$  се зема за единична мера и се нанесува десно од  $A$  со што редоследно се добиваат точките  $B, C, D, \dots$  кои соодветствуваат на броевите 2, 3, 4, .... Продолжувајќи така можеме да дојдеме до секој природен број  $m$  на кој на цртежот му соодветствува точката  $M$ .

Правата  $p$  е насочена од точката  $O$  кон точката  $A$  и истата ја нарекуваме *бројна оска* или *координатна оска*. Понатаму, точката  $O$  се зема за слика на бројот 0, кој не го сметаме за природен број. Така го добивме множеството  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Како што знаеш, со помош на бројната оска споредувањето на природните броеви го правиме на следниот начин.

**Дефиниција 17.** Бројот  $m$  е помал од бројот  $n$  ако и само ако точката  $m$  е лево од точката  $n$ . Пишуваме  $m < n$ . Притоа велиме и дека бројот  $n$  е поголем од бројот  $m$  и пишуваме  $n > m$ .



Ако  $m < n$  или  $m = n$  тогаш велиме дека  $m$  е помал или еднаков на  $n$  и пишуваме  $m \leq n$ . Притоа велиме и дека бројот  $n$  е поголем или еднаков на бројот  $m$  и пишуваме  $n \geq m$ .

Во множеството  $\mathbb{N}_0$  дефинираваме операција собирање. Познато ти е дека збир на било кои два елементи од  $\mathbb{N}_0$  е елемент од  $\mathbb{N}_0$ . Понатаму, знаеш дека е точно следново тврдење.

**Теорема 16.** За било кои  $a, b, c \in \mathbb{N}_0$  важи

$a + b = b + a$ , комутативен закон на собирањето,

$(a + b) + c = a + (b + c)$ , асоцијативен закон на собирањето.

$a + 0 = 0 + a = a$ , бројот 0 е неутрален елемент за собирањето.

Од комутативниот закон и асоцијативниот закон на собирањето следуваат равенствата

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c = a + c + b = (a + c) + b = (c + a) + b = c + a + b.$$

**Пример 27.** Имаме:  $112 + (123 + 48) = 112 + 123 + 48 = 112 + 48 + 123 = 160 + 123 = 283$ .

**Дефиниција 18.** Нека  $a \in \mathbb{N}_0$  и  $b > 2$ . Збирот  $\underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ собироци}}$  е природен број, кој го нарекуваме

производ на броевите  $a$  и  $b$  и го означуваме со  $a \cdot b$ , т.е.

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ собироци}} \stackrel{\text{деф}}{=} a \cdot b. \quad (1)$$

Во врска со множењето во  $\mathbb{N}_0$  точна е следново тврдење.

**Теорема 17.** За било кои  $a, b, c \in \mathbb{N}_0$  важи

$ab = ba$ , комутативен закон на множењето,

$(ab)c = a(bc)$ , асоцијативен закон на множењето,

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ , бројот 1 е неутрален елемент за множењето

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .

**Пример 28.** Имаме:  $12 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 6 = 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 6 = (6 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 125) = 36 \cdot 1000 = 36000$ .

**Теорема 18.** За било кои  $a, b, c \in \mathbb{N}_0$  важи

$(a + b)c = ac + bc$ , дистрибутивен закон на множењето во однос на собирањето.

**Пример 29.** Ако  $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ , тогаш од дистрибутивниот закон следува:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

**Дефиниција 19.** Нека  $a, b \in \mathbb{N}_0$ . Ако постои  $c \in \mathbb{N}_0$  таков што  $a = b + c$ , тогаш бројот  $c$  го нарекуваме *разлика* на броевите  $a$  и  $b$  и пишуваме  $c = a - b$ .

Од горната дефиниција следува дека во множеството  $\mathbb{N}_0$  разликата е определена ако и само ако  $a \geq b$ . На пример, во  $\mathbb{N}_0$  разликата  $5 - 8$  не е определена, бидејќи не постои број  $c$  таков што  $8 + c = 5$ .

**Теорема 19.** Ако  $a, b, a - b \in \mathbb{N}_0$  тогаш важи

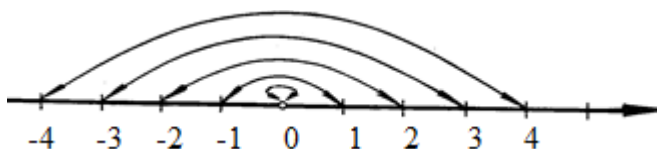
$(a - b)c = ac - bc$ , дистрибутивен закон на множењето во однос на одземањето.

**Дефиниција 20.** Нека  $a, b \in \mathbb{N}_0, b \neq 0$ . Ако постои  $c \in \mathbb{N}_0$  таков што  $a = bc$ , тогаш бројот  $c$  го нарекуваме *количник* на броевите  $a$  и  $b$  и пишуваме  $c = a : b$ .

Од горната дефиниција следува дека во множеството  $\mathbb{N}_0$  количникот не е секогаш определен. На пример, во  $\mathbb{N}_0$  количникот  $5 : 8$  не е определен, бидејќи не постои број  $c$  таков што  $8 \cdot c = 5$ .

**Теорема 20.** Ако  $a \geq b$  и  $a : c, b : c$  постојат, тогаш важи  
 $(a - b) : c = a : c - b : c$ , десен дистрибутивен закон на делењето во однос на одземањето  
 $(a + b) : c = a : c + b : c$ , десен дистрибутивен закон на делењето во однос на собирањето.

Претходно видовме дека разликата на два броја од  $\mathbb{N}_0$  не мора да е природен број. Затоа, множеството  $\mathbb{N}_0$  се проширува со нови елементи (како што знаеш од VII одделение), со нови броеви  $-1, -2, -3, \dots$  кои ги нарекуваме *негативни цели броеви*. Овие броеви на бројната оска се претставуваат како на цртежот.



Множеството составено од елементите на  $\mathbb{N}_0$  и негативните цели броеви го нарекуваме множество цели броеви и го означуваме со  $\mathbb{Z}$ , т.е.  $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Притоа за природните броеви велиме дека се *позитивни цели броеви* наместо  $1, 2, 3, 4, \dots$  во некои случаи пишуваме  $+1, +2, +3, +4, \dots$ , а нулата не е ниту позитивен ниту негативен број.

Симетричната слика на целиот број  $a$  на бројната оска во однос на 0 како центар на симетрија ја нарекуваме *спротивен број* на  $a$  и ја означуваме со  $-a$ .

Операциите собирање и множење на природни броеви се прошируваат во множеството  $\mathbb{Z}$  така што во него се исполнети својствата дадени во теоремите 17 – 20. Освен тоа, точно е тврдењето.

**Теорема 21.** За секој  $a \in \mathbb{Z}$  важи  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

Правилата за собирање цели броеви ти се познати од VII одделение, па овде истите само ќе ги наведеме. Имено, ако  $m, n \in \mathbb{N}$ , тогаш:

- 1)  $-(-m) = m, \quad -(+m) = -m,$
- 2)  $(+m) + (+n) = +(m + n),$
- 3)  $(-m) + (-n) = -(m + n),$
- 4)  $(+m) + (-n) = +(m - n),$  за  $m \geq n,$
- 5)  $(+m) + (-n) = -(n - m),$  за  $m < n.$

Правилата за множење цели броеви ти се познати од VII одделение, па овде истите само ќе ги наведеме. Имено, ако  $m, n \in \mathbb{N}$ , тогаш:

- 1)  $(+m) \cdot (+n) = +(m \cdot n),$
- 2)  $(-m) \cdot (-n) = +(m \cdot n),$
- 3)  $(+m) \cdot (-n) = -(m \cdot n).$

Понатаму, одземањето цели броеви се дефинира со помош на собирањето. Имено, за кои било  $a, b \in \mathbb{Z}$  ставаме  $a - b = a + (-b)$ , т.е. на намаленикот  $a$  му се додава бројот  $-b$ .

**Пример 30.** а) Имаме:

$$(-6) - (-12) + (-13) - (+11) = -6 + 12 - 13 - 11 = -(6 + 13 + 11) + 12 = -30 + 12 = -(30 - 12) = -18.$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned} (-3) + (12 - 3 \cdot 5) - (-8) \cdot (-3) &= -3 + (12 - 15) - (8 \cdot 3) = -3 + (-3) - 24 \\ &= -3 - 3 - 24 = -(3 + 3 + 24) = -30. \end{aligned}$$

Како што ти е познато, во множеството цели броеви точни се следниве тврдења.

**Теорема 22.** а) (закон за кратење). За секои  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  од  $a + c = b + c$  следува  $a = b$ .

б) Секоја равенка  $x + a = b$ , по  $x$  има единствено решение во  $\mathbb{Z}$ . Тоа е:  $x = b - a$ .

в) (правила на знаци). За секои  $a, b \in \mathbb{Z}$ , точни се равенствата:

$$\begin{aligned} -(-a) &= a, & -(a+b) &= (-a) + (-b), \\ (-a) \cdot b &= -(a \cdot b) = a \cdot (-b), & (-a) \cdot (-b) &= a \cdot b. \end{aligned}$$

**Дефиниција 21.** Нека  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Ако  $b - a \in \mathbb{N}$ , тогаш велиме дека  $b$  е поголем од  $a$  и пишуваме  $b > a$ , а ако  $b - a$  е негативен број, тогаш велиме дека  $b$  е помал од  $a$  и пишуваме  $b < a$ .

Ако  $m < n$  или  $m = n$  тогаш велиме дека  $m$  е помал или еднаков на  $n$  и пишуваме  $m \leq n$ . Притоа велиме и дека бројот  $n$  е поголем или еднаков на бројот  $m$  и пишуваме  $n \geq m$ .

**Теорема 23.** За секои  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  важат следниве својства:

или  $a = b$ , или  $a < b$ , или  $a > b$  (трихотомија),

ако  $c < 0$ , тогаш  $-c > 0$ ,

ако  $a < b$  и  $b < c$ , тогаш  $a < c$  (транзитивност),

ако  $a < b$ , тогаш  $a + c < b + c$  (монотоност спрема собирањето),

ако  $a < b$  и  $c > 0$ , тогаш  $a \cdot c < b \cdot c$  (монотоност спрема множењето),

ако  $a < b$  и  $c < 0$ , тогаш  $a \cdot c > b \cdot c$ .

Како и кај природните броеви, ако за целите броеви  $a, b, c$  важи  $a = b \cdot c$ , тогаш пишуваме  $a : b = c$ , при што бројот  $a$  го нарекуваме *деленик*, бројот  $b$  *делител* и бројот  $c$  *количник*.

Правилата за делење цели броеви ти се познати од VII одделение, па овде истите само ќе ги наведеме. Имено, ако  $m, n \in \mathbb{N}$  и количникот  $m : n$  постои, тогаш:

- 1)  $(+m) : (+n) = +(m : n)$ ,
- 2)  $(-m) : (-n) = +(m : n)$ ,
- 3)  $(+m) : (-n) = (-m) : (+n) = -(m : n)$ ,
- 4) за секој цел број  $a$  важи  $a : 1 = a$  и  $a : (-1) = -a$ .

**Пример 31.** Пресметај  $501 \cdot 38 + 86 \cdot (716 - 678) - (15 + 23) \cdot 87$ .

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned} 501 \cdot 38 + 86 \cdot (716 - 678) - (15 + 23) \cdot 87 &= 501 \cdot 38 + 86 \cdot 38 - 38 \cdot 87 \\ &= 38 \cdot (501 + 86 - 87) = 38 \cdot 500 = 19000. \end{aligned}$$

**Пример 32.** Намали го бројот 867 за количникот на бројот 875 со бројот 7.

**Решение.** Имаме:  $867 - (875 : 7) = 867 - 125 = 742$ .

**Пример 33.** Пресметај ја вредноста на бројниот израз:  $A = (27846 : 9 + 3801 : 7) - 36 \cdot 101$ .

**Решение.** Имаме:  $A = (27846 : 9 + 3801 : 7) - 36 \cdot 101 = (3094 + 543) - 3636 = 3637 - 3636 = 1$ .

Задачи

33. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $660 - 625 \cdot (287 - 286) + 2061 - 1161 : 9$ ,      б)  $7 \cdot (36 \cdot 2 + 7 \cdot 4) + 36 - 5 \cdot (256 - 127)$ .

34. Пресметај:  $208 + 2 \cdot (48 \cdot 4 \cdot 14 + 3 \cdot 44 \cdot 16) - (5 \cdot 8 \cdot 43 + 19 \cdot 40 \cdot 3) \cdot 2$ .

35. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $201 + 201 \cdot 2 + 201 \cdot 3 + 201 \cdot 4 + 201 \cdot 5$ ,      б)  $485 - 536 : 4 - (47 \cdot 11 - 11 \cdot 7) + 11 \cdot (37 - 34)$

36. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $A = 15 - 5 \cdot (55503 : 7 - 47508 : 6) : 5$ ;      б)  $B = (543 \cdot 4 - 4326 : 2) : 3 + 6$  и

в)  $C = [(1999 + 2000 + 2001 + 2002) - (2009 + 2010 + 2011)] \cdot 3 - 591 \cdot 10$ .

37. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $\{24 + [15 \cdot (312 - 12 \cdot 8) - 18 : 3] - 68$ ,      б)  $B = ((2250 : 15) : 10) : 3$

в)  $A = 52317 : 3 - (205 \cdot 4 - 2010 : 5) \cdot 2 + 7 \cdot 125 + (3 \cdot 5) \cdot 7$ ,      г)  $[(1 + 2 + \dots + 54) : 3] : (9 : 3 \cdot 3)$ .

## 1.6 Деливост, НЗД и НЗС . Прости и сложени броеви

Во основното образование се запозна со деливоста на природните броеви. Во продолжение ќе повториш за деливоста на природните броеви и ќе се стекнеш со нови знаења.

**Дефиниција 22.** За бројот  $a \in \mathbb{N}_0$  ќе велиме дека е *делив* со бројот  $b \in \mathbb{N}_0$ ,  $b \neq 0$ , ако постои број  $q \in \mathbb{N}_0$  така што е исполнето равенството  $a = bq$ . Притоа ќе велиме дека  $b$  е *делител* на  $a$ , односно дека  $a$  е *содржател* на  $b$  и ќе пишуваме  $b | a$ .

Ако бројот  $b \in \mathbb{N}_0$ ,  $b \neq 0$  не е делител на бројот  $a \in \mathbb{N}_0$ , т.е. ако не постои број  $q \in \mathbb{N}_0$  така што е исполнето равенството  $a = bq$ , тогаш ќе пишуваме  $b \nmid a$ .

Ќе велиме дека  $b$  е *вистински делител* на  $a$  ако  $b | a$  и  $b \neq a$ .

Во основното образование се запозна со посебните признаци за деливост со 2, 3, 4, 5, 6 и 9, но и со некои општи признаци за деливост. Во продолжение, без да ги докажуваме, ќе се потсетиме на некои од општите признаци за деливост.

**Теорема 24.** а) Нека  $a, b, c \in \mathbb{N}$ . Ако  $a | b$  и  $b | c$ , тогаш  $a | c$ .

б) Ако  $b | a$ , тогаш  $b | (ac)$ , за секој  $c \in \mathbb{N}$ .

в) Нека  $a = b + c$  и  $d | b$ . Тогаш  $d | a$  ако и само ако  $d | c$ .

г) Ако  $m | a$  и  $n | b$ , тогаш  $mn | (ab)$ .

**Пример 34.** а) Бидејќи  $15 = 5 \cdot 3$ , од дефиниција 22 следува дека  $3 | 15$  и  $5 | 15$ . Според тоа, броевите 1, 3 и 5 се вистински делители на 15.



б) За броевите 17 и 3 имаме  $17 = 5 \cdot 3 + 2$  и бидејќи  $5 \cdot 3 < 5 \cdot 3 + 2 < 6 \cdot 3$ , заклучуваме дека не постои природен број  $q$  таков што  $17 = 3q$ , што значи дека  $3 \nmid 17$ .

в) Нека бројот  $\overline{abc}$  е делив со 37. Ќе докажеме дека бројот  $\overline{bca} + \overline{cab}$  е делив со 37.

За трите броја запишани со истите цифри како дадениот важи

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10ab = 37(3a + 3b + 3c),$$

односно  $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 37k$ . Според условот на задачата важи  $\overline{abc} = 37m$ , па затоа  $\overline{bca} + \overline{cab} = 37(k - m)$ , што и требаше да се докаже.

Во претходната лекција видовме дека операцијата делење не е секогаш изводлива во множеството  $\mathbb{N}$ . Меѓутоа, знаеме дека во множеството  $\mathbb{N}$  за операцијата делење важи таканаречената *теорема за делење со остаток*.

**Теорема 25.** Ако  $a, b \in \mathbb{N}$ , тогаш постојат  $q, r \in \mathbb{N}_0$  такви што  $a = bq + r$ ,  $0 \leq r < b$ . Притоа, бројот  $a$  го нарекуваме *деленик*,  $b$  -*делител*,  $q$  -*количник* и  $r$  -*остаток*.

**Дефиниција 23.** Нека  $a, b \in \mathbb{N}$ . За бројот  $d$  ќе велиме дека е *заеднички делител* на броевите  $a$  и  $b$  ако  $d \mid a$  и  $d \mid b$ .

Нека  $d_1, d_2, \dots, d_k$  се заеднички делители на  $a$  и  $b$ , и  $d$  е најголемиот меѓу броевите  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , во ознака  $d = \max\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ .

За бројот  $d$  ќе велиме дека е *најголем заеднички делител* на  $a$  и  $b$ .

За најголемиот заеднички делител на броевите  $a$  и  $b$  најчесто се користат ознаките  $(a, b)$  или  $\text{НЗД}(a, b)$ . Ние ќе ја користиме ознаката  $\text{НЗД}(a, b)$ .

Најголемиот заеднички делител има бројни својства, од кои дел се искажани во следнава теорема, која нема да ја докажуваме.

**Теорема 26.** а) Ако  $a = bq$ , тогаш  $\text{НЗД}(a, b) = b$ .

б) Ако  $b < a$ , тогаш  $\text{НЗД}(a, b) = \text{НЗД}(b, a - b)$ .

в) За секои  $a, b \in \mathbb{N}$  важи  $\text{НЗД}(a, b) = \text{НЗД}(a, a + b)$ .

**Пример 35.** а) Најди  $\text{НЗД}(484, 396)$ .

б) Најди го најголемиот природен број  $n$  за кој при делење на броевите 845 и 275 со  $n$ , и во двата случаи се добива остаток 5.

в) Според рецептот на Илина 45 грама какао се раствораат во 150 милилитри вода. Колку милилитри вода е потребно за да се растворот 27 грама какао?

**Решение.** а) Од теорема 28 следува:

$$\begin{aligned} \text{НЗД}(484, 396) &= \text{НЗД}(396, 484 - 396) = \text{НЗД}(396, 88) = \text{НЗД}(88, 396 - 88) = \text{НЗД}(88, 308) \\ &= \text{НЗД}(88, 308 - 88) = \text{НЗД}(88, 220) = \text{НЗД}(88, 220 - 88) = \text{НЗД}(88, 132) \\ &= \text{НЗД}(88, 132 - 88) = \text{НЗД}(88, 44) = 44. \end{aligned}$$

б) Бараниот број е заеднички делител на  $845 - 5 = 840$  и  $275 - 5 = 270$ . Според тоа, треба да најдеме  $\text{НЗД}(840, 270)$ . Од теорема 26 имаме:

$$\begin{aligned} \text{НЗД}(840, 270) &= \text{НЗД}(270, 840 - 270) = \text{НЗД}(270, 570) = \text{НЗД}(270, 570 - 270) \\ &= \text{НЗД}(270, 300) = \text{НЗД}(270, 300 - 270) = \text{НЗД}(270, 30) = 30. \end{aligned}$$



Значи, најголемиот број со бараното својство е 30. Притоа  $845 = 30 \cdot 28 + 5$  и  $275 = 30 \cdot 9 + 5$ .

в) Имаме  $\text{НЗД}(45, 27) = 9$ ,  $27 = 3 \cdot 9$  и  $45 = 5 \cdot 9$ . Бидејќи 9 грама какао се раствораат во  $150 : 5 = 30$  милитри вода, за растворање на 27 грама какао се потребни  $3 \cdot 30 = 90$  милилитри вода.

**Дефиниција 24.** За броевите  $a, b \in \mathbb{N}$  ќе велиме дека се *заемно прости* ако  $\text{НЗД}(a, b) = 1$ .

**Теорема 27.** Ако  $\text{НЗД}(a, b) = d$ ,  $a = dx$  и  $b = dy$ , тогаш  $\text{НЗД}(x, y) = 1$ .

**Пример 36.** Збирот на два природни броја е 252, а нивниот најголем заеднички делител е 36. Кои се тие броеви?

**Решение.** Нека бараните броеви се  $a$  и  $b$ . Од условот на задачата следува  $a + b = 252$ ,  $a = 36x$  и  $b = 36y$ , при што  $\text{НЗД}(x, y) = 1$ . Според тоа,  $36x + 36y = 252$ , т.е.  $x + y = 7$ . Во последното равенство ставаме  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  и добиваме

$$(x, y) \in \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

Конечно, со замена во равенствата  $a = 36x$  и  $b = 36y$  наоѓаме

$$(a, b) \in \{(36, 216), (72, 180), (108, 144), (144, 108), (180, 72), (216, 36)\}.$$

**Дефиниција 25.** Нека  $a, b \in \mathbb{N}$ . За бројот  $c \in \mathbb{N}$  ќе велиме дека е *заеднички содржател* на  $a$  и  $b$  ако  $a | c$  и  $b | c$ .

Јасно, броевите  $kab$ ,  $k \in \mathbb{N}$  се заеднички содржатели на  $a$  и  $b$ , па затоа не постои најголем заеднички содржател на двата броја. Понатаму,  $ab$  е заеднички содржател и ако тој не е најмал, тогаш постои помал содржател, па како имаме конечно многу броеви кои се помали од  $ab$  заклучуваме дека меѓу заедничките содржатели постои *најмал заеднички содржател* на броевите  $a$  и  $b$ , кој го означуваме со  $\text{НЗС}(a, b)$ . Најмалиот заеднички содржател има бројни својства, од кои дел се искажани во следнава теорема, која нема да ја докажуваме.

**Теорема 28.** а) Ако  $\text{НЗД}(a, b) = 1$ , тогаш  $\text{НЗС}(a, b) = ab$ .

б)  $\text{НЗС}(na, nb) = n \cdot \text{НЗС}(a, b)$ , за секои  $n, a, b \in \mathbb{N}$ .

в)  $\text{НЗС}(a, b) \cdot \text{НЗД}(a, b) = ab$ , за секои  $a, b \in \mathbb{N}$ .

**Пример 37.** Имаме,  $\text{НЗД}(1155, 1232) = \text{НЗД}(1155, 1232 - 1155) = \text{НЗД}(1155, 77) = 77$ . Сега од теорема 28 в) следува  $1155 \cdot 1232 = \text{НЗД}(1155, 1232) \cdot \text{НЗС}(1155, 1232) = 77 \cdot \text{НЗС}(1155, 1232)$ , т.е.  $\text{НЗС}(1155, 1232) = 1155 \cdot 1232 : 77 = 18480$ .

**Пример 38.** Најди го најмалиот природен број кој поделен со 2 дава остаток 1, поделен со 3 дава остаток 2, поделен со 4 дава остаток 3, поделен со 5 дава остаток 4 и поделен со 6 дава остаток 5.

**Решение.** Ако на бараниот број му додадеме 1, тогаш новодобиениот број е делив со 2, 3, 4, 5 и 6. Бидејќи се бара најмалиот можен број со даденото својство, добиваме дека новиот број е  $\text{НЗС}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$ . Според тоа, бараниот број е  $60 - 1 = 59$ .

**Дефиниција 26.** За природниот број  $p$  ќе велиме дека е *прост* ако  $p$  има точно два природни делители, т.е. единствени делители на  $p$  се 1 и  $p$ .

Природниот број  $m$  кој има повеќе од два природни делители го нарекуваме *сложен број*.

Во следната теорема се искажани неколку својства на простите броеви.

**Теорема 29.** а) Секој природен број  $n$ , поголем од 1, е делив барем со еден прост број.

б) (Евклид). Постојат бесконечно многу прости броеви.

в) Ако  $p$  е прост број и  $p \mid ab$ , тогаш  $p \mid a$  или  $p \mid b$ .

г) (основна теорема на аритметиката). Секој природен број  $N$  на единствен начин може да се запише како производ на прости множители, (редоследот на множителите не е битен).

**Пример 39.** Запиши ги броевите 6930 и 32340 како производ на прости множители.

**Решение.** Десно е прикажано разложувањето на дадените броеви на прости множители. Оттука добиваме

$$6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \text{ и } 32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

$$\begin{array}{r|l} 6930 & 2 \\ 3465 & 3 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r|l} 32340 & 2 \\ 16170 & 2 \\ 8085 & 3 \\ 2695 & 5 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

**Пример 40.** а) Најди го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 8316 за да се добие број кој е квадрат на природен број, а потоа определи го бројот кој се добива како производ.

**Решение.** За да се помножи бројот 8316 со број со што ќе се добие полн квадрат потребно е сите степени на простите множители да се парни броеви (Зошто?). Бидејќи  $8316 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$ , добиваме дека најмалиот природен број со кој треба да множиме е бројот  $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$ . Така ќе се добие бројот  $8316 \cdot 231 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = (2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11)^2 = 1386^2$ .

Како што видовме во претходните два примери, при разложувањето на даден број на прости множители, некои од множителите може повеќекратно да се повторуваат. Ако во разложувањето некои од множителите се еднакви меѓу себе, на пример  $p_1$  се јавува  $a_1$  пати,  $p_2$  се јавува  $a_2$  пати итн.,  $p_k$  се јавува  $a_k$  пати, тогаш за  $n$  добиваме  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ . Ваквиот запис на бројот  $n$  го нарекуваме *каноничен запис*. Како што видовме во пример 39, каноничните записи на броевите 6930 и 32340 се  $6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  и  $32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ .

Со помош на каноничниот запис на дадени природни броеви  $n$  и  $m$  лесно се определуваат *најголемиот заеднички делител* и *најмалиот заеднички содржател* на  $n$  и  $m$ . Имено, ако  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$  и  $m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$  (некои од броевите  $a_i$  и  $b_j$  можат да се нули), тогаш

$$\text{НЗД}(m, n) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k}, \text{ каде што } c_i = \min\{a_i, b_i\}, i = 1, 2, \dots, k \text{ и}$$

$$\text{НЗС}(m, n) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_k^{d_k}, \text{ каде што } d_i = \max\{a_i, b_i\}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Така на пример, ако се искористат каноничните записи на броевите  $6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$  и  $32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ , со помош на претходните формули наоѓаме

$$\text{НЗД}(6930, 32340) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 \text{ и } \text{НЗС}(6930, 32340) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 97020.$$

## Задачи

38. Ако меѓу цифрите на еден двоцифрен број запишан со исти цифри се допишат две нули, се добива број кој е делив со 91. Докажи!
39. Докажи дека производот на збирот и разликата на два последователни непарни броја е делив со 8.
40. Докажи дека збирот на било кои три последователни природни броеви е делив со 3.
41. Збирот на било кои седум последователни природни броеви е делив со 7. Докажи!
42. Нека целите броеви  $x, y$  и  $z$  при делење со 7 даваат остатоци 4, 5 и 6, соодветно. Докажи дека бројот  $w = 4x + 5y + 6z$  е делив со 7.
43. Определи го најмалиот заеднички содржател на броевите 315 и 600.
44. Определи ги природните брови  $a$  и  $b$  за кои важи  $\text{НЗД}(a, b) = 8$  и  $\text{НЗС}(a, b) = 168$ .
45. Колку најмногу еднакви букети може да се направат од 252 ружи, 288 лалиња и 972 каранфили, ако секој букет содржи цветови од секој вид?
46. Дамјан има повеќе од 3000, а помалку од 4000 денари. Ако дневно троши по 200 или 240 денари, секогаш ќе му останат 50 денари. Колку пари има Дамјан?
47. За која вредност на  $a$  бројот  $\overline{aaaa}$  има најголем број прости делители?
48. Дали постојат прости броеви  $p$  и  $q$  така што  $3p + 5q = 67$ ?
49. Збирот на шест последователни природни броеви е 1275. Определи ги сите прости делители на најмалиот од тие броеви.

## 1.7 Рационални броеви

Видовме дека делењето во множеството  $\mathbb{Z}$  не е секогаш изводливо, што значи дека равенката  $b \cdot x = a$  има решение во  $\mathbb{Z}$  само за некои  $a, b \in \mathbb{Z}$ . За да може оваа равенка да има решение за секои  $a, b \in \mathbb{Z}$  воведуваме нов вид броеви, наречени дробки. Имено, секој количник  $a : b, b \neq 0$  се смета за број, кој го нарекуваме *дропка* и го означуваме со  $\frac{a}{b}$ . Множеството од сите дробки го нарекуваме *множество рационални броеви* и го означуваме со  $\mathbb{Q}$ . Значи,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\},$$

а неговите елементи *рационални броеви*. Притоа, рационални броеви со именител 1 ги сметаме за цели броеви, т.е. важи  $\frac{a}{1} = a$ , за секој  $a \in \mathbb{Z}$ .

При делењето на цели броеви имаме случаи кога со различни парови добиваме ист количник, како на пример:  $2 : 1 = 2, 4 : 2 = 2, 6 : 3 = 2$ . Бидејќи количниците се еднакви, ако истите ги запишеме како дробки, треба и дробките да се еднакви, односно  $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}, \frac{2}{1} = \frac{6}{3}, \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ . За дадениите равенства забележуваме дека  $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1, 2 \cdot 3 = 6 \cdot 1, 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$ . Оттука идејата за да дефинираме еднаквост на рационални броеви.

**Дефиниција 27.** За рационалните броеви  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  важи  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ако и само ако  $ad = bc$ .

Нека е дадена дробката  $\frac{a}{b}$ . Ако се земе предвид дека за секој  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$  важи  $a \cdot (bk) = b \cdot (ak)$ , добиваме дека за  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$  важи  $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ . Ова својство се нарекува

проширување на дропки и велиме дека дропката  $\frac{a}{b}$  сме ја прошириле со бројот  $k \neq 0$ . Ако последното равенство го запишеме во обратна насока, т.е.  $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$ , тогаш имаме својство *скратување на дропки* и велиме дека дропката  $\frac{ak}{bk}$  сме ја скратиле со бројот  $k \neq 0$ . Ако дропката  $\frac{a}{b}$  се скрати со НЗД( $a, b$ ), тогаш броителот и именителот ќе бидат заемно прости броеви и за добиената дропка ќе велиме дека е *нескратлива*.

Овде да забележиме дека проширувањето на дропките ни овозможува да избегнеме употреба на негативни именители. Ова може да се направи така што во дропката со негативен именител броителот и именителот ќе ги помножиме со  $-1$ . Затоа при работата со дропки можеме да се ограничимо само на дропки со позитивни именители, т.е. да земеме  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ .

**Пример 41.** Дропките  $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{3}$  запиши ги како дропки со еднаков именител.

**Решение.** Последното може да се направи на повеќе начини, но вообичаено е заедничкиот именител да е еднаков на најмалиот заеднички содржател на именителите на дропките. Во случајов имаме НЗС( $4, 6, 3$ ) = 12, па затоа дропките треба да ги прошириме до именител 12. Имаме,  $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \frac{5}{6} = \frac{10}{12}, \frac{11}{3} = \frac{44}{12}$ .

**Дефиниција 28.** Нека се дадени дропките  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ . Дропката  $\frac{ad+bc}{bd}$  ја нарекуваме *збир* на дропки  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ . Притоа пишуваме  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ .

Во врска со собирањето на дропки точна е следнава теорема.

**Теорема 30.** Нека  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$  се дропки. Тогаш,

- а)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ , комутативен закон за собирањето,
- б)  $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ , асоцијативен закон за собирањето
- в)  $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ ,
- г)  $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$ .

За дропката  $\frac{a}{b}$ , дропката  $\frac{-a}{b}$  е нејзина *спротивна дропка*. Затоа одземањето на дропки се дефинира на потополно ист начин како и кај целите броеви, односно  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}$ .

**Дефиниција 29.** Нека се дадени дропките  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ . Дропката  $\frac{ac}{bd}$  ја нарекуваме *производ* на дропки  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ . Притоа пишуваме  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .

Во врска со множењето на дропки точна е следнава теорема.

**Теорема 31.** Нека  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$  се дропки. Тогаш,

- а)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ , комутативен закон за множењето,
- б)  $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f})$ , асоцијативен закон за собирањето
- в)  $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ , дистрибутивен закон на множењето во однос на собирањето,
- в)  $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$  и  $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$ .

Нека  $\frac{a}{b} \neq 0$ . Тогаш  $\frac{b}{a}$  е дробка. Од дефиниција 29 и од скратувањето на дробки следува  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$ . Дробката  $\frac{b}{a}$  ја нарекуваме *реципрочна вредност* на дробката  $\frac{a}{b}$ .

**Дефиниција 30.** Ако  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d} \neq 0$  се дробки, тогаш  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ , а тоа значи дека делењето се реализира така што деленикот се множи со реципрочната вредност на делителот.

За собирањето и делењето дробки точна е следнава теорема.

**Теорема 32.** Нека  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$  се дробки. Тогаш  $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) : \frac{e}{f} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} + \frac{c}{d} : \frac{e}{f}$ .

Често пати, при решавање на практични проблеми добиваме дробка чиј броител или именител се дробки. Ваквите дробки ги нарекуваме *двојни дробки*. На пример,  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  е двојна дробка, што значи дека двојна дробка всушност е ознака за делење на дробка со дробка. Значи,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$

т.е. двојната дробка е еднаква на обична дробка, чиј броител е еднаков на производот на „надворешните“ членови, а именителот е еднаков на производот на „внатрешните“ членови.

Претходно видовме дека при работата со дробки можеме да се ограничиме само на дробки со позитивни именители, т.е. да земеме  $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ . Овој запис на рационалните броеви е погоден за нивно споредување, т.е. подредување на истите. Така ја имаме следна дефиниција.

**Дефиниција 31.** За рационалниот број  $r = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  велиме дека е:

- *позитивен* ако  $m > 0$ , и пишуваме  $r > 0$ ,
- *негативен* ако  $m < 0$ , и пишуваме  $r < 0$ .

За рационалниот број  $p$  велиме дека е *поголем* од рационалниот број  $q$  и пишуваме  $p > q$ , ако  $p - q > 0$ , а  $p$  велиме дека е *помал* од  $q$  и пишуваме  $p < q$ , ако  $p - q < 0$ .

**Пример 42.** а) Од  $3 > 0$  следува дека  $\frac{3}{7} > 0$ , а од  $-5 < 0$  следува дека  $\frac{-5}{11} < 0$ .

б) Имаме,  $\frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7 - 4 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{1}{35} > 0$ , па затоа  $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$ .

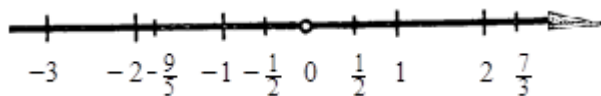
в) Да ги подредиме по големина броевите  $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{6}{10}, \frac{-17}{15}, 2$ .

Најмалиот заеднички содржател на именителите на дадените дробки е 30, па затоа  $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}, \frac{1}{3} = \frac{10}{30}, \frac{6}{10} = \frac{18}{30}, \frac{-17}{15} = \frac{-34}{30}, 2 = \frac{60}{30}$ , односно  $\frac{-17}{15} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{6}{10} < 2$ .

Од дефиницијата 31 следува дека за секој  $r \in \mathbb{Q}$  важи или  $r > 0$  или  $r = 0$  или  $r < 0$ . Со тоа множеството  $\mathbb{Q}$  можеме да го запишеме како унија на множеството позитивни рационални броеви  $\mathbb{Q}^+$ , множеството негативни рационални броеви  $\mathbb{Q}^-$  и нулата, т.е.  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ .

Како и целите, така и рационалните броеви можеме да ги претставуваме на бројната оска. На цртежот се прикажани броевите

$$-3, -2, -\frac{9}{5}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{7}{3}.$$



Од претходните разгледувања следува точноста на следнава теорема.

**Теорема 33.** За секои  $p, q, r \in \mathbb{Q}$  важат следниве својства:

или  $p = q$ , или  $p < q$ , или  $p > q$  (трихотомија),

ако  $p < 0$ , тогаш  $-p > 0$ ,

ако  $p < q$  и  $q < r$ , тогаш  $p < r$  (транзитивност),

ако  $p < q$ , тогаш  $p + r < q + r$  (монотоност спрема собирањето),

ако  $p < q$  и  $r > 0$ , тогаш  $p \cdot r < q \cdot r$  (монотоност спрема множењето),

ако  $p < q$  и  $r < 0$ , тогаш  $p \cdot r > q \cdot r$ .

**Дефиниција 32.** Нека  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Бројот  $s = \frac{p+q}{2}$  го нарекуваме *аритметичка средина* на броевите  $p$  и  $q$ .

За броевите  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{5}$  имаме  $\frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{2} = \frac{\frac{5+6}{15}}{2} = \frac{11}{30}$ . Понатаму,  $\frac{1}{3} < \frac{11}{30} < \frac{2}{5}$ , т.е. аритметичката средина се наоѓа меѓу двата дадени броја. Последното важи за секои два рационални броја, односно точно е следново тврдење, кое ќе го прифатиме без истото да го докажуваме.

**Теорема 34.** Ако  $p, q \in \mathbb{Q}$  и  $p < q$ , тогаш нивната аритметичка средина е рационален број што се наоѓа меѓу нив, т.е.  $p < \frac{p+q}{2} < q$ .

Од теорема 34 следува дека меѓу било кои два рационални броја постои рационален број, па затоа велиме дека множеството  $\mathbb{Q}$  е *густо подредено множество*.

**Пример 43.** Пресметај: а)  $1\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} : 2\frac{2}{7}$ , б)  $\frac{1}{17} \cdot \left( \frac{2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}} : \frac{5\frac{3}{5} + 1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5} - 4\frac{1}{3}} \right) \cdot \left( \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} - \frac{1}{5} \right)$ .

**Решение.** а) Имаме:

$$1\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} : 2\frac{2}{7} = \frac{11}{8} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} : \frac{16}{7} = \frac{11}{8} \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{16} = \left( \frac{11}{8} - \frac{7}{16} \right) \cdot \frac{2}{5} = \frac{22-7}{16} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{8}.$$

б) Имаме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{17} \cdot \left( \frac{2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}} : \frac{5\frac{3}{5} + 1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5} - 4\frac{1}{3}} \right) \cdot \left( \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} - \frac{1}{5} \right) &= \frac{1}{17} \cdot \left( \frac{\frac{5}{2} + \frac{10}{3}}{\frac{7}{2} - \frac{4}{3}} : \frac{\frac{28}{5} + \frac{4}{3}}{\frac{33}{5} - \frac{13}{3}} \right) \cdot \left( \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{17} \cdot \left( \frac{\frac{15+20}{6}}{\frac{21-14}{6}} : \frac{\frac{84+20}{15}}{\frac{99-65}{15}} \right) \cdot \left( \frac{\frac{5}{56} - \frac{4}{56}}{\frac{8}{56} - \frac{7}{56}} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{17} \cdot \left( \frac{35}{6} : \frac{104}{15} \right) \cdot \left( \frac{\frac{1}{56}}{\frac{1}{56}} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{17} \cdot \left( \frac{35 \cdot 6}{6 \cdot 7} : \frac{104 \cdot 15}{15 \cdot 34} \right) \cdot \left( \frac{56}{20} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{17} \cdot \left( \frac{35 \cdot 6}{6 \cdot 7} \cdot \frac{15 \cdot 34}{104 \cdot 15} \right) \cdot \left( \frac{14}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{17} \cdot \frac{35 \cdot 6}{6 \cdot 7} \cdot \frac{15 \cdot 34}{104 \cdot 15} \cdot \frac{13}{5} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Пример 44.** Одреди дробка со именител 9, поголема од  $\frac{2}{3}$  и помала од  $\frac{5}{6}$ .

**Решение.** Имаме  $\frac{2}{3} < \frac{x}{9} < \frac{5}{6}$ , односно ако ги сведеме на заеднички именител,  $\frac{24}{36} < \frac{4x}{36} < \frac{30}{36}$ , од каде  $4x = 28$ , па  $x = 7$ , а дробката е  $\frac{7}{9}$ .

Задачи

50. Пресметај:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{7}{6}, & \text{б)} \frac{9}{4} - \frac{17}{6} + \frac{13}{9} + \frac{5}{2}, & \text{в)} (\frac{2}{6} - \frac{3}{4} + 1) \cdot \frac{6}{7}, & \text{г)} (\frac{5}{6} - \frac{3}{4}) \cdot (\frac{6}{7} - \frac{8}{9}), \\ \text{д)} (\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + 1) : \frac{6}{7}, & \text{ѓ)} (1 - \frac{3}{5}) : (\frac{2}{3} - \frac{1}{5}), & \text{е)} \frac{(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}) : 2}{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}}, & \text{ж)} \frac{(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}) : 2}{(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}) : \frac{1}{4}}. \end{array}$$

51. Подреди ги по големина броевите:  $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{6}$

52. Пресметај ја аритметичката средина на броевите:  $\frac{3}{4}$  и  $\frac{8}{7}$ .

$$53. \text{Пресметај: а)} [(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}) \cdot 5\frac{5}{6}] : [(21 - 1\frac{1}{4}) : 2\frac{1}{2}], \quad \text{б)} \frac{\{[-\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}] : -\frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{2}{8}\} \cdot (-2) - 1}{[-\frac{1}{27} \cdot -\frac{3}{4} - \frac{23}{18}] \cdot (-3) + \frac{1}{4}}.$$

54. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\text{а)} (1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9 + \frac{1}{5}}}) : \frac{465}{419} - \frac{1}{1995}, \quad \text{б)} (\frac{5}{3} - 1) : \frac{1}{6} + (\frac{20}{7} - 2) \cdot 14 - 1\frac{1}{2} : (1 - \frac{1}{2}).$$

## 1.8 Децимални броеви

Дропките со именител 10, 100, 1000, ... ги нарекуваме *децимални (десетични) дробки*. На пример, десетични дробки се дробките:  $\frac{3}{10}, \frac{17}{100}, \frac{247}{100}, \frac{1383}{1000}$  итн. Како што знаеш, тие се запишуваат без именител на следниве начини:

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{10} = 0,3 \text{ (0 цели и 3 десетинки)}, & \frac{17}{100} = 0,17 \text{ (0 цели и 17 стотинки)} \\ \frac{247}{100} = 2,47 \text{ (2 цели и 47 стотинки)}, & \frac{1383}{1000} = 1,383 \text{ (1 цело и 383 илјадитинки) итн.} \end{array}$$

Децималните дробки запишани без именител ги нарекуваме *децимални броеви*.

Секој децимален број е составен од два дела, кои што се одделени со запирка: *цел дел* (пред запирката) и *дробен дел* (по запирката), а запирката ја нарекуваме *децимална запирка*.

Понатаму, знаеш дека:

- 1) Децималниот број не се менува, ако од десно му допишеш произволен број нули.
- 2) Децимален број кој десно по последната цифра има нули не се менува ако тие се изостават.
- 3) Секој цел број може да се запише како децимален, кога ќе се оддели со запирка и ќе се допише произволен број нули како децимали.

**Пример 45.** Имаме:

$$0,175 = 0,1750 = 0,17500; \quad 32,120000 = 32,12; \quad -4 = -4,000.$$

За собирањето и одземањето на децимални броеви, знаеш дека:

1) Децималните броеви се собираат како што се собираат и целите броеви. Притоа децималните запирки во собираците и во збирот треба да бидат на иста вертикална права.

2) Децималните броеви се одземаат како што се одземаат и целите броеви. Притоа децималните запирки во намаленикот, намалителот и разликата треба да бидат на иста вертикална права.

**Пример 46.** Имаме:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 44,300 \\ \text{а) } + 6,245 \\ \hline 50,545 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 123,120 \\ \text{б) } - 2,654 \\ \hline 120,466 \end{array}$$

Множењето и делењето на децималните броеви се реализира така што:

1) Два децимални броја се множат како што се множат цели броеви, а во производот се одделуваат онолку децимални места колку што имаат двата множител заедно.

2) Децимален број се дели со децимален број така што:

а) во деленикот и делителот ја преместуваме децималната запирка на десно за онолку места, колку што децимали има делителот,

б) потоа се делат добиените броеви како што се делат целите броеви, при што кога ќе се спушти децималата на десетинките, тогаш во количникот ставаме децимална запирка.

**Пример 47.** Пресметај:

а)  $1,53 \cdot 3,5$ ;

б)  $17,64 : 3$ ;

в)  $16,34 : 3,3$ .

**Решение.** а) Имаме:

$$\begin{array}{r} 1,53 \cdot 3,5 \\ \hline 765 \\ + 459 \\ \hline 5,355 \end{array}$$

б) Имаме:

$$\begin{array}{r} 17,64 : 3 = 5,88 \\ \hline -15 \\ \hline 26 \\ -24 \\ \hline 24 \\ -24 \\ \hline 0 \end{array}$$

в)  $16,34 : 3,3 = 163,4 : 33$ , па ако го реализираме делењето како што е покажано на шемата десно, добиваме  $16,34 : 3,3 = 4,95151 \dots$

$$\begin{array}{r} 163,4 : 33 = 4,95151 \\ \hline -132 \\ \hline 314 \\ -297 \\ \hline 170 \\ -165 \\ \hline 50 \\ -33 \\ \hline 170 \\ -165 \\ \hline 50 \\ -33 \\ \hline 17 \end{array}$$

Во горниот пример при делењето под б) резултатот има конечно многу децимални места, а при делењето под в) резултатот има бесконечно многу децимални места. Да појасниме зошто е тоа така.

Како што знаеш, дробката чии именители се броеви кои во разложувањето на прости множители ги содржат само броевите 2 и 5 лесно се прошируваат до децимални дробки, т.е. се запишуваат како конечни децимални броеви. На пример:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6; \quad \frac{3}{2} = \frac{15}{10} = 1,5; \quad \frac{133}{50} = \frac{266}{100} = 2,66; \quad \frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{175}{1000} = 0,175.$$

Обратно, ако една дробка има конечен децимален запис, тогаш таа е децимална дробка. Бидејќи единствени прости делители на декадните единици се 2 и 5, ако децималната дробка ја сведеме на



нескратлива дробка, тогаш нејзиниот именител ќе биде производ на степени на броевите 2 и 5. На пример,

$$0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}; \quad 2,325 = \frac{2325}{1000} = \frac{93}{40}, \quad 32,125 = \frac{32125}{1000} = \frac{257}{8}; \quad 0,027 = \frac{27}{1000}.$$

Но, што станува со нескратлива дробка која во именителот имаат множители различни од 2 и 5. Дали таа може да се запише како децимален број и каков е тој број? За да одговориме на горното прашање ќе го разгледаме следниот пример во кој децималниот запис на разгледуваните дробки е најден со делење на броителот и именителот.

**Пример 48.** Имаме:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{54}{11} = 4,909090\dots & \text{б)} \frac{221}{7} = 32,571428571428\dots & \text{в)} \frac{2}{3} = 0,6666\dots, \\ \text{г)} \frac{1}{7} = 0,1428571428571\dots, & \text{д)} \frac{6}{11} = 0,545454\dots, & \text{ѓ)} \frac{27}{35} = 0,675675675\dots \end{array}$$

Како што можеме да видиме во сите случаи во децималниот запис имаме повторување на една цифра или група цифри. Така ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 33.** Најмалата група цифри која постојано се повторува во децималниот запис на дробката  $\frac{a}{b}$  ја нарекуваме *периода*, а бројот на цифрите во периодата го нарекуваме нејзина *должина*.

Јасно, секој периодичен децимален број е од видот  $a_1\dots a_n, b_1\dots b_m p_1\dots p_k (p_1\dots p_k)$ .

Притоа  $\overline{a_1\dots a_n}$  е целиот дел,  $b_1\dots b_m$  е делот од децималниот број по децималната запирка пред да се појави периодата и  $p_1\dots p_k$  е периодата.

Во врска со претходно кажаното важи следнава теорема.

**Теорема 35.** Секој рационален број може да се претстави како периодичен децимален број.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека е даден било кој рационален број  $\frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . При делење на  $m$  со  $n$ , можни се следниве остатоци:  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Според тоа, по најмногу  $n$  чекори во постапката на делењето, некој од остатоците мора да се повтори, што значи дека во количникот ќе имаме повторување на исти цифри по редот по кој претходно се добиле. Со тоа теорема е докажана.

Јасно, ако во постапката на делење во горната теорема се добие остаток 0, тогаш имаме конечен децимален запис, па со допишување на нули добиваме периодичен децимален број.

Важи и обратната теорема на теорема 35.

**Теорема 36.** Секој периодичен децимален број е рационален број.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека е даден периодичниот децимален број

$$X = a_1\dots a_n, b_1\dots b_m p_1\dots p_k (p_1\dots p_k).$$

Имаме:

$$10^{m+k} X = a_1\dots a_n b_1\dots b_m p_1\dots p_k, p_1\dots p_k (p_1\dots p_k)$$

и

$$10^m X = a_1\dots a_n b_1\dots b_m, p_1\dots p_k (p_1\dots p_k),$$

па затоа

$$\begin{aligned}
10^{m+k} X - 10^m X &= \overline{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m p_1 \dots p_k} - \overline{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m} \\
10^m (10^k - 1) X &= \overline{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m p_1 \dots p_k} - \overline{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m}, \\
X &= \frac{\overline{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m p_1 \dots p_k} - \overline{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m}}{10^m (10^k - 1)},
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Во следниот пример ќе ја примениме постапката од доказот претходната теорема.

**Пример 49.** а) За децималниот број  $A = 1,23(23)$  имаме периода со две децимални цифри, па бројот  $A$  го множиме со  $10^2$ , по што го добиваме бројот  $10^2 A = 123,23(23)$ . Според тоа,  $10^2 A - A = 123,23(23) - 1,23(23)$ , од каде добиваме  $99A = 122$ , т.е.  $A = \frac{122}{99}$ .

б) За децималниот број  $A = 11,23567(567)$  имаме:

- пред периодата имаме две децимални цифри и како периодата има три децимални цифри бројот  $A$  го множиме со  $10^5$  и со  $10^2$ , по што добиваме:

$$10^5 A = 1123567,567(567) \text{ и } 10^2 A = 1123,567(567),$$

- добиените равенства ги одземаме и добиваме

$$10^5 A - 10^2 A = 1123567,567(567) - 1123,567(567)$$

$$10^2 (10^3 - 1) A = 1122444$$

$$A = \frac{1122444}{99900} = \frac{31179}{2775}.$$

*Проверка.* Со дигитрон лесно се добиваме дека  $\frac{31179}{2775} = 11,23567(567)$  и  $\frac{122}{99} = 1,23(23)$ .

**Пример 50.** а) Имаме

$$\begin{aligned}
0,6 : \frac{1\frac{1}{2} + 0,5 : 2\frac{1}{2} - 0,25}{15 - 0,5} &= 0,6 : \frac{1,5 + 0,5 : 2,5 - 0,25}{15 - 0,5} = 0,6 : \frac{1,5 + 0,2 - 0,25}{15 - 0,5} \\
&= 0,6 : \frac{1,45}{14,5} = 0,6 : 0,1 = 6.
\end{aligned}$$

$$\text{б) Имаме: } A_1 = \frac{(81,4 - 1,3806) : 4 + 0,03515}{(2,45 - 1,25) : 1,02 + 13 \cdot \frac{3}{50}} = \frac{80,0194 : 4 + 0,03515}{1,20 : 1,02 + 0,78} = \frac{20,04}{2,004} = 10.$$

Децималните броеви, како рационални броеви може да се споредуваат. Постапката за споредување на два децимални броја е следнава:

- 1) Ако целите броеви на два децимални броја се различни, тогаш поголем е оној број кој има поголем цел дел. На пример,  $15,456 < 21,2$  и  $-15,456 < -13,2$ .
- 2) Ако целите делови на два позитивни децимални броја се еднакви, тогаш поголем е бројот кој што има поголема прва децимала (десетинка). Ако и десетинките се еднакви, тогаш поголем е бројот кој што има поголема втора децимала (стотинка), итн. На пример,  $5,556747 < 5,556834$  и  $12,556712 < 12,556734$ .
- 3) Ако целите делови на два негативни децимални броја се еднакви, тогаш поголем е бројот кој што има помала прва децимала (десетинка). Ако и десетинките се еднакви, тогаш поголем е бројот кој што има помала втора децимала (стотинка), итн. На пример,  $-5,556747 < -5,555834$  и  $-12,556752 < -12,556734$ .

## Задачи

55. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а)  $16,345 + 3,26$ ;                      б)  $16,345 - 2,26$ ;  
в)  $5,12 \cdot 6,3$ ;                      г)  $1635,5 : 32$ .

56. Пресметај ја вредноста на изразот:

- а)  $(7,3 - 2,9) \cdot 0,5$ ,                      б)  $(23,4 + 12,3) : 1,25$ ;  
в)  $(3,46 + 2,1 \cdot (0,25 - 1,23))$ ;    г)  $302,5 + 2,5 \cdot (3,02 - 4,1 : 0,25)$ .

57. Следниве дробки претвори ги во децимални броеви:

- а)  $\frac{7}{3}$ ,                      б)  $\frac{5}{12}$ ,                      в)  $\frac{38}{11}$ .

58. Децималниот број  $19,94949494\dots$  запиши го во вид на обична дробка.

59. Децималниот број  $0,027027027\dots$  запиши го во вид на обична дробка.

60. Дадени се изразите:  $A = \frac{(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) : \frac{1}{6} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) : 2}$  и  $B = \frac{42,58,5 + 1\frac{1}{2}}{(11,66 - 10,16) : 3}$ . Кој израз е поголем и за колку пати?

61. Дадени се изразите:  $A = \frac{(19\frac{4}{25} - 18\frac{4}{15}) : \frac{1}{30}}{4 : 3}$  и  $B = \frac{1,37 \cdot 0,4 - 0,048}{0,0952 + (0,37 - 0,002) : 1,1}$ . Кој израз е поголем и за колку пати?

62. Колку пати вредноста на изразот  $(0,6 + 0,42) : (2\frac{1}{2} : 0,5 + 1)$  е помала од 17.

63. Спореди ги децималните броеви:

- а) 43,543 и 43,5431                      б)  $-12,23212$  и  $-12,23222$ .

## 1.9 Реални броеви

Нека  $\frac{m}{n}$  е рационален број. Бидејќи производот на два рационални броја е рационален број, добиваме дека квадратот на рационалниот број  $\frac{m}{n}$ , т.е. производот од видот  $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = (\frac{m}{n})^2$  е рационален број. Јасно, овој број е позитивен. На пример,  $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ , т.е.  $\frac{9}{16}$  е позитивен број и е квадрат на  $\frac{3}{4}$ .

Логично е да си го поставиме обратното прашање, т.е. дали секој позитивен рационален број е квадрат на некој рационален број? Со други зборови, дали за секој рационален број  $r$  постои рационален број  $x$  таков што  $x^2 = r$ ? Одговорот на ова прашање е негативен, што може да се види од следнава теорема.

**Теорема 37.** Не постои рационален број  $x$  таков што  $x^2 = 2$ .

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека претпоставиме дека постои рационален број  $\frac{m}{n}$  таков што  $(\frac{m}{n})^2 = 2$ . Јасно, без ограничување на општоста можеме да земеме дека дробката  $\frac{m}{n}$  е нескратлива. Од последното равенство добиваме  $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = 2$ , што значи  $\frac{m^2}{n^2} = 2$ , т.е.

$$m^2 = 2n^2. \quad (1)$$

Значи, бројот  $m^2$  е парен, па затоа и бројот  $m$  мора да е парен. Навистина, ако  $m = 2p + 1$ , тогаш

$$m^2 = (2p + 1)(2p + 1) = 2p \cdot 2p + 2p \cdot 1 + 1 \cdot 2p + 1 \cdot 1 = 4p(p + 1) + 1$$

ќе биде непарен број, што е противречност. Значи,  $m = 2p$  и со замена во (1) добиваме  $(2p)^2 = 2n^2$ , т.е.  $n^2 = 2p^2$ . Значи,  $n^2$  е парен број, па затоа мора  $n$  да е парен број, т.е.  $n = 2q$ .

Според тоа, од  $(\frac{m}{n})^2 = 2$  добивме дека броевите  $m$  и  $n$  се парни, што противречи на претпоставката дека дропката  $\frac{m}{n}$  е нескратлива. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои рационален број  $\frac{m}{n}$  таков што  $(\frac{m}{n})^2 = 2$ , што и требаше да се докаже.

Од теорема 37 следува дека множеството рационални броеви не е доволно за да се решат некои задачи. На пример, такава е задачата:

*Да се најде страната на квадрат чија плоштина е еднаква на 2.*

Оваа и многу други задачи се причина за проширување на множеството  $\mathbb{Q}$  со нов вид броеви, така што новото множество ќе го содржи и бројот чиј квадрат е 2, кој број како што знаеш го означуваме со  $\sqrt{2}$ .

Во претходната лекција научи дека секој рационален број може да се запише како периодичен децимален број. Меѓутоа, лесно се гледа бројот 0,101001000100001000001... е непериодичен децимален број. Ќе прифатиме дека:

Секој непериодичен бесконечен децимален број е некој нов вид број, којшто ќе го наречеме *ирационален број*. Множеството ирационални броеви го означуваме со  $\mathbf{I}$ .

Ирационалните броеви, заедно со рационални, го формираат *множеството на реалните броеви*, кое што го означуваме со  $\mathbb{R}$ . Според тоа,  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$ .

Од досега кажаното следува дека секој реален број може да се запише како бесконечен децимален број  $a = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ , кој е периодичен ако  $a$  е рационален број и е непериодичен ако  $a$  е ирационален број. Понатаму, реалните броеви можеме да ги споредуваме на потполно ист начин како што во претходната лекција ги споредувавме рационалните броеви. На тој начин во множеството реални броеви  $\mathbb{R}$  имаме подредување за кое се користат истите симболи како и за множествата  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$ .

Да се вратиме на бројот  $\sqrt{2}$ . Ако последователно ги искористиме неравенствата

$$1^2 < 2 < 2^2$$

$$1,4^2 < 2 < 1,5^2$$

$$1,41^2 < 2 < 1,42^2$$

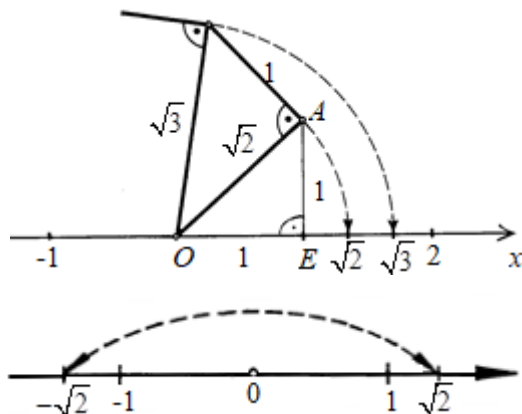
$$1,414^2 < 2 < 1,415^2$$

$$1,4142^2 < 2 < 1,4143^2$$

.....

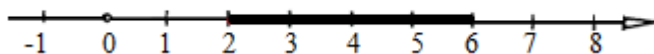
тогаш можеме да заклучиме дека бројот  $\sqrt{2}$  е приближно еднаков на 1,4142. Продолжувајќи ја горната постапка, ќе добиеме бесконечен непериодичен децимален број. Навистина, ако децималниот број добиен на опишаниот начин е периодичен, тогаш тој би бил рационален број, а  $\sqrt{2}$  не е рационален број. Значи, бројот  $\sqrt{2}$  е ирационален број.

Претходно видовме како целите броеви можеме да ги претставиме на бројната оска. Тоа лесно можеме да го направиме и за рационалните броеви, бидејќи од основно образование знаеме како за даден природен број  $n$  да поделиме отсечка на  $n$  еднакви делови, а потоа лесно можеме да го претставиме рационалниот број  $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$ . Понатаму, во претходната лекција видовме дека множеството рационални броеви е густо, т.е. меѓу било кои два рационални броја постои рационален број, на пример, нивната аритметичка средина. Затоа, логично е да го поставиме прашањето: Дали на бројната права има место и за ирационалните броеви? На пример, за броевите  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ . Одговорот на ова прашање е позитивен. На цртежот е дадено како броевите  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$  може да се претстават на бројната оска. Бројот  $-\sqrt{2}$  на бројната оска се претставува како симетрична слика во однос на точка  $O$  на бројот  $\sqrt{2}$ . Уште повеќе, во врска со поставеното прашање точно е следново тврдење.



Постои биекција помеѓу точките на бројната оска и множеството реални броеви, т.е. секоја точка на бројната оска е слика на точно еден реален број, а секој реален број има своја слика на бројната оска.

Нека се дадени реалните броеви  $a$  и  $b$ . Множеството од сите реални броеви кои се меѓу броевите  $a$  и  $b$  го нарекуваме *интервал*, а дадените броеви *краеви* (*крајни точки*) на тој интервал. На цртежот со задебелена линија е означен интервалот чии крајни точки се 2 и 6.

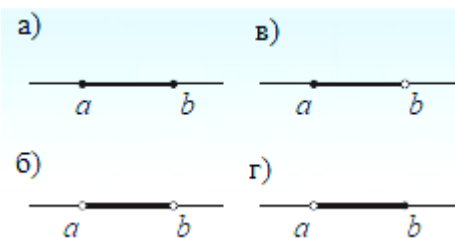


Ако краевите  $a$  и  $b$  му припаѓаат на интервалот, тогаш велиме дека тој интервал е *затворен интервал*. Притоа пишуваме,  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ .

Ако краевите  $a$  и  $b$  не му припаѓаат на интервалот, тогаш велиме дека тој интервал е *отворен интервал*. Притоа пишуваме,  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ .

Ако само еден од краевите  $a$  и  $b$  му припаѓа на интервалот, тогаш велиме дека имаме *полуотворен (полузатворен) интервал*. Според тоа, имаме два полуотворени (полузатворени) интервали и тоа:  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  и  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ .

При графичкото претставување на интервалите, ако крајната точка припаѓа на интервалот тоа го означуваме со полно кругче, а ако крајната точка не припаѓа на интервалот тоа го означуваме со празно кругче. На цртежот а) е прикажан затворениот интервал  $[a, b]$ , на цртежот б) е прикажан отворениот интервал  $(a, b)$  и на цртежите в) и г) се прикажани соодветно полуотворените интервали  $[a, b)$  и  $(a, b]$ , соодветно.



Ако  $a, b \in \mathbb{R}$ , тогаш интервалите  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  и  $(a, b]$  се со конечна должина  $b - a$ , па затоа овие интервали ги нарекуваме *конечни интервали*. Меѓутоа, во многу практични случаи користиме и таканаречени *бесконечни интервали*, кои се определени со

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty), \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (a, +\infty), \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = (-\infty, a] \text{ и } \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-\infty, a).$$

Овде уште да забележиме дека за множеството реални броеви  $\mathbb{R}$  често пати се користи и ознаката  $(-\infty, +\infty)$ .

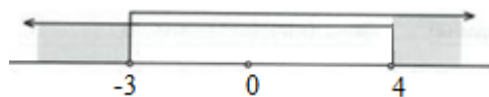
**Пример 51. а) Имаме**

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} = (-3, +\infty) \text{ и } \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} = (-\infty, 4),$$

па затоа

$$(-3, +\infty) \cap (-\infty, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\} = (-3, 4).$$

Графичкото определување на пресекот на овие два интервали е прикажано на цртежот.



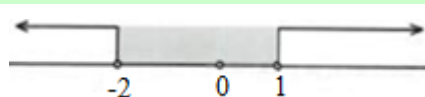
**б) Имаме**

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} = (1, +\infty) \text{ и } \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\} = (-\infty, -2),$$

па затоа

$$(-\infty, -2) \cup (1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ или } x > 1\}.$$

Графичкото определување на унијата на овие два интервали е прикажано на цртежот.



Во основното образование се запозна со поимот апсолутна вредност. Да се потсетиме на дефиницијата на апсолутна вредност.

**Дефиниција 34.** *Апсолутна вредност* на реалниот број  $a$  го нарекуваме реалниот број  $|a|$  дефиниран со

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0. \end{cases} \quad (2)$$

**Пример 52.** Пресметај  $2 \cdot |a| + 7 \cdot |b| + 1$ , ако  $a = -\frac{1}{4}$  и  $b = \frac{3}{2}$ .

**Решение.** Имаме:

$$2 \cdot |a| + 7 \cdot |b| + 1 = 2 \cdot \left| -\frac{1}{4} \right| + 7 \cdot \left| \frac{3}{2} \right| + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{21}{2} + 1 = 12.$$

**Забелешка.** а) Од дефиницијата на апсолутната вредност имаме  $|a| \geq 0$  и  $\sqrt{a^2} = |a|$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

б) Нека  $b > 0$  и  $|a| = b$ . Тогаш, за  $a \geq 0$  имаме  $a = b$ , а за  $a < 0$  важи  $-a = b$ , т.е.  $a = -b$ .  
Значи, од  $|a| = b$  следува  $a \in \{-b, b\}$ , но важи и обратното од  $a \in \{-b, b\}$  следува  $|a| = b$ .

Понатаму, за апсолутната вредност се исполнети тврдењата од следнава теорема.

**Теорема 38.** а) За секој реален број  $a$  важи  $|a| = |-a|$ ,  $a \leq |a|$  и  $-a \leq |a|$ ,

б)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , за секои  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

в)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ , за секои  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

г)  $|ab| = |a| \cdot |b|$ , за секои  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

д)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ , за секои  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ .

**Пример 53.** Да ги разгледаме броевите  $a = -4$  и  $b = 3$ . Имаме

$$a \cdot b = -12, \frac{a}{b} = -\frac{4}{3}, |a| = 4, |b| = 3, |a \cdot b| = 12 \text{ и } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{4}{3},$$

што значи дека

$$|a \cdot b| = 12 = |a| \cdot |b| \text{ и } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{4}{3} = \frac{|a|}{|b|}.$$

### Задачи за вежби

64. На бројната оска определи точка која соодветствува на бројот:

- а)  $\sqrt{5}$ ,      б)  $-\sqrt{5}$ ,      в)  $\sqrt{10}$ ,      г)  $\sqrt{15}$ .

65. Запиши ги пократко интервалите

- а)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$ ,      б)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$ ,  
г)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 7\}$ ,      д)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 5\}$ .

66. Запиши ги пократко интервалите

- а)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$ ,      б)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ ,      в)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1-\}$ ,      г)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 12\}$ .

67. На бројната оска претстави ги интервалите:

- а)  $[2, 7]$ ,      б)  $[1, 11]$ ,      в)  $(-4, 2]$ ,      г)  $(2, 5)$ .  
д)  $(-\infty, 1]$ ,      ё)  $(2, +\infty)$ ,      е)  $[3, +\infty)$ ,      ж)  $(-3, +\infty)$ .

68. На бројната оска претстави го пресекот на интервалите:

- а)  $[2, 7]$  и  $[3, 8]$ ,      б)  $(2, 4]$  и  $[-1, 3]$ ,      в)  $[-3, 2]$  и  $[1, 3]$ ,      г)  $(-1, 4]$  и  $(2, 7)$ ,  
д)  $(-\infty, -1]$  и  $(2, +\infty)$ ,      ё)  $(-\infty, -1]$  и  $(-4, +\infty)$ .

69. Определи ја унијата на интервалите:

- а)  $[2, 7]$  и  $[3, 8]$ ,      б)  $(2, 4]$  и  $[-1, 3]$ ,  
в)  $[-3, 2]$  и  $[1, 3]$ ,      г)  $(-1, 4]$  и  $(2, 4)$ ,  
д)  $(-\infty, -1]$  и  $(-2, +\infty)$ ,      ё)  $(-\infty, -1]$  и  $(-1, +\infty)$ .

70. Ако  $a = -\frac{1}{2}$  и  $b = \frac{-1}{4}$ , пресметај

- а)  $|a| - 7 \cdot |b| + 2$ ,      б)  $|ab| - 7 \cdot |b - a| + 2$ ,  
в)  $|a + 2b| + 6 \cdot |ab - 3b| - 3$ ,      г)  $|3a - 2b| + 5 \cdot |a - 2b - 3| - 1$ .

## 1.10 Проценти, примена на процентите

Во основното образование се запозна со поимот процент и научи за некои примени на процентите. Да се потсетиме!

**Дефиниција 35.** Една стоти дел од даден број се нарекува еден процент од тој број и се означува со  $1\%$ . Значи,  $p\%$  од даден број е  $p$  стоти делови од тој број.

Дропка се запишува во проценти така што се запишува колку стоти делови има и се допишува знакот за процент  $\%$ .

**Пример 54.** а) Во една продавница има 750 пара чевли, од кои  $18\%$  се детски чевли. Колку пара детски чевли има во продавницата.

б) Броевите  $\frac{8}{25}$  и  $8,5$  изрази ги во проценти.

**Решение.** а) Бидејќи  $18$  стоти делови од  $750$  е  $\frac{18}{100} \cdot 750 = \frac{13500}{100} = 135$  заклучуваме дека во продавницата има  $135$  пара детски чевли.

б) Имаме:  $\frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} = 32\%$  и  $8,5 = \frac{850}{100} = 850\%$ .

Во горните пресметувања воочуваме три броја:

- износот на целото, т.е. бројот (750 пара чевли) од кој бараме определен процент, кој го нарекуваме *основна вредност* и го означуваме со  $K$ ,

- износот на делот од целото (135 пара детски чевли), кој го нарекуваме *процентен износ* и кој го означуваме со  $i$ , и

- бројот на *процентите*, кој го означуваме со  $p$ .

Сега, бидејќи  $p\%$  од основната вредност  $K$  е  $\frac{p}{100} \cdot K = \frac{Kp}{100}$ , а тоа е процентниот износ  $i$ , добиваме дека  $i = \frac{Kp}{100}$  е формула за пресметување на процентниот износ кога се познати основата вредност  $K$  и процентот  $p$ .

Понатаму, од добиената формула следува  $100i = Kp$ , односно  $K = \frac{100i}{p}$ , што значи дека ако ги знаеме процентот и процентниот износ, тогаш можеме да ја пресметаме основната вредност. Слично добиваме  $p = \frac{100i}{K}$ , што значи дека кога ги знаеме процентниот износ и основната вредност можеме да го пресметаме процентот.

**Пример 55.** Во излогот на една продавница стои реклама дека секој кој ќе купи два производа добива попуст од 40% на поефтиниот производ. Арлинда купила фармерки за 2200 денари и кошула за 1100 денари. Колку попуст добила и колку платила за купените производи?

**Решение.** Арлинда добила 40% попуст на цената на кошулата:  $\frac{40}{100} \cdot 1100 = 440$  денари. Таа за купените производи платила  $2200 + 1100 - 440 = 2860$  денари.

**Пример 56.** Во една продавница цената на еден тип ролери изнесува 75 евра, а во друга продавница истите ролери се продаваат за 12% повисока цена. Менаџерот Трајче ја знае цената на ролерите во втората продавница, па за да има поголема продажба решил ролерите да ги продава за 12% пониска цена од цената во втората продавница.

Дали Трајче ролерите ги продава по повисока или по пониска цена од првата продавница?

**Решение.** Во втората продавница цената ролерите е за  $\frac{12}{100} \cdot 75 = 9$  евра повисока, што значи дека во оваа продавница нивната цена е  $75 + 9 = 84$  евра.

Бидејќи Трајче ролерите ги продава за 12% пониска цена од цената во втората продавница, тој ролерите ги продава за  $\frac{12}{100} \cdot 84 = 10,08$  евра пониска цена. Значи, цената на ролерите во продавницата со која раководи Трајче е  $84 - 10,08 = 73,92$  евра и таа е пониска од цената во првата продавница.

**Пример 57.** Една марка автомобили се продава во два салони  $A$  и  $B$ . При увозот тие прво плаќаат царина од 10%, а потоа плаќаат ДДВ од 18%. Сопственикот на салонот  $A$  решил на набавната цена да има заработка од 25%, а сопственикот на салонот  $B$  решил на цената по платената царина да има заработка од 23%. Ако набавната цена на автомобилот е 15000 евра, колку пари чини автомобилот во салонот  $A$ , а колку во салонот  $B$ ?

**Решение.** По платената царина цената на автомобилот во двата салони е

$$15000 + \frac{10}{100} \cdot 15000 = 16500 \text{ евра.}$$

Салонот  $A$  има заработка  $\frac{25}{100} \cdot 16500 = 4125$  евра, па цената на автомобилот пред да се пресмета данокот е  $16500 + 4125 = 20625$  евра. Значи, крајната цена на автомобилот ќе биде



$$20250 + \frac{18}{100} \cdot 20250 = 23895 \text{ евра.}$$

Салонот *B* има заработка од  $\frac{23}{100} \cdot 16500 = 3795$  евра, па цената на автомобилот пред да се пресмета данокот ќе биде  $16500 + 3795 = 20295$ . Значи, крајната цена на автомобилот ќе биде

$$20295 + \frac{18}{100} \cdot 20295 = 23948,1 \text{ евро.}$$

**Пример 58.** Цената на еден тип клима уред во месец март била 40000 денари. Заради зголемената побарувачка во продавницата *A* цената била покачена за 30%, а во продавницата *B* цената била три пати покачена по 10%. Во која продавница цената на клима уредот била повисока и за колку?

**Решение.** Цената на клима уредот во продавницата *A* била покачена за 30%, што значи дека новата цена била  $40000 + \frac{30}{100} \cdot 40000 = 52000$  денари.

Во продавницата *B* по првото покачување цената е  $40000 + \frac{10}{100} \cdot 40000 = 44000$  денари. По второто покачување цената е  $44000 + \frac{10}{100} \cdot 44000 = 48400$  денари и по третото покачување цената е  $48400 + \frac{10}{100} \cdot 48400 = 53240$  денари.

Значи, во продавницата *B* цената на уредот е повисока за  $53240 - 52000 = 1240$  денари.

Постапката при решавањето на претходниот пример е идентична со пресметувањето на таканаречените проста и сложена камата. Но, што е тоа камата и како се пресметува?

**Дефиниција 36.** Камата претставува процентен износ на вложена или позајмена сума пари.

Според начинот на пресметување на каматата, таа може да биде:

- *проста*, се добива кога основата за нејзиното пресметување не се менува, што значи дека пресметаната камата за секој период за кој се пресметува не се додава на почетната сума,
- *сложена (камата на камата)*, се добива така што пресметаната камата за секој период се додава на сумата за која се пресметува и на новата сума се пресметува камата за следниот период.

Според моментот на пресметување и плаќање на каматата имаме:

- *антиципативна камата*, која се плаќа на почетокот на секој период на вкаматување, и
- *декурзивна камата*, која се плаќа на крајот на секој период на вкаматување.

Во следните разгледувања ќе се задржиме на простата и сложената декурзивна камата. При пресметување на каматите, како кај простата, така и кај сложената камата се среќаваме со следниве четири елементи:

а) *основната сума (основен капитал)*, која е предмет на вкаматување и која може да биде:

- *почетен капитал*, т.е. вложената или позајмената сума пари  $K_0$ ,
- *зголемена сума (зголемен капитал)*, која е еднаква на збирот на основната сума и пресметаната камата  $L$ , т.е.  $K = K_0 + L$ ,

б) *каматна стапка*  $p$ , која е еднаква на каматата исплатена за 100 денари за единица каматен период (период на вкаматување),

в) *каматен период*, кој е еднаков на времето за кое се вложуваат или користат паричните средства, и

г) *камата*, која е еднаква на сумата  $L$  која се плаќа, пресметана според договорената каматна стапка и единицата каматен период.

Кај простата камата сумата  $L$  е константна за секој период на вкаматување и според дефиницијата на простата камата таа е еднаква на процентниот износ пресметан на основната вредност  $K_0$  за  $p\%$ . Значи,  $L = \frac{K_0 p}{100}$ . Понатаму, ако каматниот период е еднаков на  $n$  периоди на вкаматување, тогаш од дефиницијата на простата камата добиваме дека камата е  $L_n = \frac{K_0 p n}{100}$ , сумата која се добива (враќа) во случај на вложени (позајмени) средства е еднаква на

$$K_0 + L_n = K_0 + \frac{K_0 p n}{100}.$$

Пред да преминеме на решавање на задачи, да забележиме дека каматната стапка најчесто се задава на годишно ниво, но може да се случи периодот на вкаматување да биде изразен во месеци или пак во денови. Затоа, ако имаме месечно вкаматување, а каматниот период е еднаков на  $m$  месеци, тогаш простата камата е  $L_m = \frac{K_0 p m}{1200}$ . Слично, ако имаме дневно вкаматување, а каматниот период е еднаков на  $d$  денови, тогаш простата камата е  $L_d = \frac{K_0 p d}{36000}$ .

**Пример 59.** Лицето  $A$  вложило во банка сума од 10000 денари со 9% проста годишна каматна стапка. Колку пари ќе поседува по 9 месеци?

**Решение.** Во случајов имаме  $K_0 = 10000$  денари,  $p = 9\%$ ,  $m = 9$  месеци и ако ја искористиме формулата  $L_m = \frac{K_0 p m}{1200}$  добиваме дека каматата која лицето  $A$  ќе ја добие по 9 месеци е  $L_9 = \frac{10000 \cdot 9 \cdot 9}{12 \cdot 100} = 675$  денари. Според тоа, бараната сума која е еднаква на зголемениот капитал е еднаква на

$$K = K_0 + L_9 = 10000 + 675 = 10675 \text{ денари.}$$

**Пример 60.** На 1.12.2024 година лицето  $A$  вложило во банката извесна сума пари со 12% проста годишна каматна стапка, која на 14.01.2025 година му донесла камата од 900 денари.

Колку пари вложило лицето  $A$ ?

**Решение.** Во случајов имаме  $K_0 = ?$ ,  $p = 12\%$ ,  $d = 45$  денови и  $L_{45} = 900$  денари. Ако ја искористиме формулата  $L_d = \frac{K_0 p d}{36000}$  добиваме  $900 = \frac{K_0 \cdot 12 \cdot 45}{360 \cdot 100}$ , од каде што добиваме дека  $K_0 = \frac{900 \cdot 360 \cdot 100}{12 \cdot 45} = 60000$  денари.

**Пример 61.** Во банката службеникот ви соопштил дека за заем од 36000 денари, кој го добивате со проста каматна стапка на 1.06.2004 година, а треба да го вратите на 14.08.2004 година, треба да платите камата 945 денари. Колкава е каматната стапка за овој заем?

**Решение.** Во случајов имаме  $K_0 = 36000$  денари,  $d = 75$  денови,  $L_{75} = 945$  денари и треба да се најде процентот  $p$ . Ако ја искористиме формулата  $L_d = \frac{K_0 p d}{36000}$  имаме  $945 = \frac{36000 \cdot 75 p}{360 \cdot 100}$  од каде што наоѓаме  $p = \frac{975}{75} = 13\%$ .

Нека имаме камата  $p\%$ . Почетниот капитал  $K_0$ , при декурзивното вкаматување по првиот период ќе се наголеми за  $\frac{K_0 p}{100}$  и ќе се добие капитал  $K_1 = K_0 + \frac{K_0 p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ . Сега каматата треба да ја пресметуваме на капиталот  $K_1$  и овој капитал по вториот период ќе изнесува

$K_2 = K_1(1 + \frac{p}{100}) = K_0(1 + \frac{p}{100})^2$ . Ако постапката ја продолжиме добиваме дека капиталот по  $n$ -от период ќе биде  $K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$ .

Вкаматувањето може да се врши не само на крајот на една година, туку и на крајот на  $\frac{1}{m}$  години, каде  $m$  е природен број. Притоа, за период од  $\frac{1}{m}$  години процентот се добива кога годишниот процент ќе се подели на бројот на периодите и тој ќе изнесува  $\frac{p}{m}$ . Понатаму, аналогно како и при годишното вкаматување за  $n$  периоди со должина  $\frac{1}{m}$  години при декурзивното вкаматување ја добиваме формулата  $K_n = K_0(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100})^n$ .

**Пример 62.** На која сума ќе нараснат 51400 ден. за 8 год. со 6%, ако вкаматувањето е  
а) годишно, б) тримесечно.

**Решение.** а) Од условот на задачата имаме  $K_0 = 51400$ ,  $p = 6\%$  и  $n = 8$ . Ако замениме во формулата  $K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$  добиваме

$$K_8 = 51400 \cdot (1 + \frac{6}{100})^8 = 81923,791 \text{ ден.}$$

б) Бидејќи во една година имаме 4 тримесечја, во период од 8 години вкупно имаме  $8 \cdot 4 = 32$  тримесечја. Значи, во случајов  $K_0 = 51400$ ,  $p = 6\%$ ,  $m = 4$  и  $n = 32$ . Ако ја искористиме формулата  $K_n = K_0(1 + \frac{\frac{p}{m}}{100})^n$  добиваме

$$K_{32} = 51400 \cdot (1 + \frac{\frac{6}{4}}{100})^{32} = 82770,670 \text{ ден.}$$

#### Задачи за вежби

71. На еден семинар имало 50 учесници. Од нив 36% биле романци, 48% биле шпанци, 12% биле португалци и 4% биле италијани. Колку луѓе има од секоја нација?
72. Цената на еден производ е намалена за 7,5%, односно за 6,75 денари. Колкава била цената на производот пред намалувањето?
73. Набавната цена на еден производ изнесува 4500 денари, а продажната цена изнесува 5175 денари. Колку проценти е повисока продажната од набавната цена?
74. Цената на еден вид велосипед е зголемена 15%, а потоа е намалена за 10%. Сегашната продажна цена на велосипедот е 25875 ден. Пресметај ја цената на велосипедот пред зголемувањето?
75. На брзопотезен шаховски турнир на еден шахист по 9 победи и 7 нерешени резултати му останале уште 20% неодиграни партии. Колку најмногу поени може да има шахистот на крајот на турнирот? (Во шахот за победа се добива 1 поен, а за нерешен резултат 0,5 поени.)
76. Агим набавил тестенини по цена од 220 денари за килограм, но не забележал дека тестенините имаат рок на употреба само уште седум дена. Затоа тој истиот ден тестенините ги продал на еден ресторан по цена од 176 денари за килограм. Колку проценти е загубата на Африм во оваа сделка?
77. Лицето А вложило во банка сума од 25000 денари со 8% проста годишна каматна стапка. Колку пари ќе поседува после 7 месеци?

78. На 1.11.2004 година лицето  $A$  вложило во банката извесна сума пари со 9% проста годишна каматна стапка, која на 14.12.2004 година му донесла камата од 600 денари. Колку пари вложило лицето  $A$ ?
79. Во рекламна понуда за доделување кредити банката соопштува дека за заем од 144000 денари, кој го добивате со проста каматна стапка на 1.01.2004 година, а треба да го вратите на 31.03.2004 година, треба да платите камата 3780 денари. Колкава е каматната стапка за овој заем?
80. На која сума ќе нараснат 120000 ден. за 5 год. со 4% , ако вкаматувањето е  
а) годишно, б) шестмесечно.

## 1.11 Размер и пропорција

Во основното образование се запозна со поимите размер и пропорција. Да се потсетиме!

**Дефиниција 37.** *Размер (однос)* е количник  $a:b$  (или  $\frac{a}{b}$ ) на два неименувани броја  $a$  и  $b$  ( $b \neq 0$ ) или на мерните броеви на две еднородни величини, мерени во иста единица мерка. Броевите  $a$  и  $b$  ги нарекуваме *членови на размерот*.

Ако  $\frac{a}{b} = k$ , тогаш за бројот  $k$  велиме дека е *вредност* на размерот.

За два размери ќе велиме дека се *еднакви* ако имаат еднакви вредности.

**Теорема 39.** Ако членовите на размерот ги помножимо или поделиме со еден ист природен број, тогаш вредноста на размерот не се менува.

**Доказ.** Навистина, за секој број  $m$  важи  $(a \cdot m):(b \cdot m) = (a:m):(b:m) = a:b$ .

**Дефиниција 38.** Размерите  $a:b$  и  $b:a$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ), кои се разликуваат само по местата на своите членови ги нарекуваме *заемно обратни*.

**Теорема 40.** Производот на два заемно обратни размери е еднаков на 1.

**Доказ.** Нека  $a:b$  и  $b:a$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) се два заемно обратни размери. Тогаш

$$(a:b) \cdot (b:a) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1.$$

**Пример 63.** а) Количниците  $7:21$ ,  $35:5$ ,  $61\text{ cm}:21\text{ cm}$  и  $12\text{ kg}:4\text{ kg}$  се размери.

б) Количниците  $7\text{ s}:21$ ,  $35\text{ mm}:5\text{ cm}$ ,  $61\text{ kg}:21\text{ m}^2$  и  $12\text{ km}:4\text{ h}$  не се размери.

в) За размерите  $6:2$  и  $21:7$  важи  $6:2=3$  и  $21:7=3$ , што значи дека тие се еднакви. Вредностите на размерите  $4,5:3$  и  $5:2$  се  $4,5:3=1,5$  и  $5:2=2,5$ , т.е. тие не се еднакви.

**Пример 64.** Ако за 1620 денари можеш да купиш 18 килограми јаболка, колку пари ти се потребни за да купиш 30 килограми јаболка?

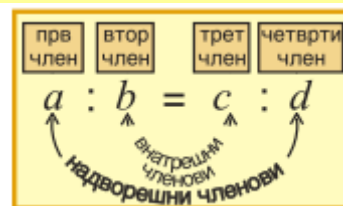
**Решение.** Со  $x$  да ја означиме непознатата сума која е потребна да се купат 30 килограми јаболка. Бидејќи за  $x$  денари добиваме 30 килограми, исто како што за 1620 денари добиваме 18 килограми јаболки двата размери се еднакви, односно  $\frac{x}{30} = \frac{1620}{18}$ . Од последната равенка добиваме  $x = \frac{1620}{18} \cdot 30 = 2700$  денари.

**Дефиниција 39.** Ако два размера  $a:b$  и  $c:d$  имаат еднакви вредности, т.е.  $a:b = c:d = k$ , тогаш равенството  $a:b = c:d$  го нарекуваме *пропорција*.

Притоа читаме „ $a$  спрема  $b$  се однесува како  $c$  спрема  $d$ “.

Бројот  $a$  е *прв член*,  $b$  е *втор*,  $c$  е *трет* и  $d$  е *четврт* член на пропорцијата. Членовите  $a$  и  $d$  ги нарекуваме *надворешни*, а членовите  $b$  и  $c$  *внатрешни членови* на пропорцијата.

Секој член на пропорцијата го нарекуваме *четврта пропорционала* на другите три члена, а вредност  $k$  на размерите ја нарекуваме *коэффициент на пропорционалност*.



Нека  $a:b = c:d = k$ . Тогаш важи  $a = kb$  и  $c = kd$ , па затоа

$$ad = (kb)d = (bk)d = b(kd) = bc.$$

Според тоа, точно е следново *основно својство на пропорцијата*.

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \\ \cdot \\ a \cdot d = b \cdot c \end{array}$$

**Теорема 41.** Во пропорцијата  $a:b = c:d$  производот од надворешните членови е еднаков на производот од внатрешните членови.

**Пример 65.** Определи го непознатиот член во пропорцијата  $8:5 = x:7,5$ .

**Решение.** Од основното својство на пропорциите добиваме  $5x = 8 \cdot 7,5$ . Значи,  $5x = 60$ , односно  $x = 60:5 = 12$ .

**Теорема 42.** Ако производот на два ненулти броја е еднаков на производот на други два броја, тогаш од тие броеви може да се состави пропорција.

**Доказ.** Нека  $a, b, c, d$  се броеви такви што  $ad = bc$  и нека  $a, d \neq 0$ . Тогаш  $b, c \neq 0$ , па затоа  $bd \neq 0$ . Сега ако двете страни на равенството  $ad = bc$  ги поделиме со  $bd$ , ја добиваме пропорцијата  $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ , т.е.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , односно  $a:b = c:d$ .

**Дефиниција 40.** Равенството на три или повеќе еднакви размери го нарекуваме *продолжена пропорција*.

Значи,  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$  е *продолжена пропорција*, која ја запишуваме и во видот  $a_1:a_2:a_3:\dots:a_n = b_1:b_2:b_3:\dots:b_n$ .

**Теорема 43.** Ако  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$ , тогаш  $\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n} = k$ .

**Доказ.** Од  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$  следува  $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, a_3 = kb_3, \dots, a_n = kb_n$ , па затоа

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = kb_1 + kb_2 + kb_3 + \dots + kb_n,$$

т.е.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = k(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n),$$

од каде следува  $\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\dots+b_n} = k$ .

**Пример 66.** Определи ги  $x, y, z$  од пропорцијата  $x:y:z = 2:3:4$  ако нивниот збир е еднаков на 27.

**Решение.** Од  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$  добиваме  $x = 2k, y = 3k, z = 4k$ . Заменуваме во  $x + y + z = 27$  и добиваме  $2k + 3k + 4k = 27$ . Значи,  $9k = 27$ , т.е.  $k = 3$ . Конечно,  $x = 6, y = 9, z = 12$ .

Ако во повеќе пропорции првите и третите членови се еднакви, тогаш од нив може да се формира продолжена пропорција.

На пример, ако  $a:b = x:y, a:c = x:z, a:d = x:t$ , тогаш  $a:b:c:d = x:y:z:t$ .

**Пример 67.** Од пропорциите  $a:b = 4:3, b:c = 7:8, c:d = 6:9$  формирај продолжена пропорција.

**Решение.** Имаме  $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}, \frac{b}{c} = \frac{7}{8}, \frac{c}{d} = \frac{6}{9}$ , од каде добиваме  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8}$ , т.е.  $\frac{a}{c} = \frac{7}{6}$ . Понатаму,  $\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{9}$ , т.е.  $\frac{a}{d} = \frac{7}{9}$ . Сега имаме  $a:b = 4:3, a:c = 7:6, a:d = 7:9$ , од каде добиваме  $a:b = 28:21, a:c = 28:24, a:d = 28:36$ , па затоа  $a:b:c:d = 28:21:24:36$ .

На крајот од овој дел, преку примери, ќе видиме како пропорциите се применуваат при конверзија на валутите.

**Пример 68.** Според курсната листа на Банката Х продажниот курс на 1 евро е 61,8 денари. Колку евра може да се купат 96100 денари?

**Решение.** Ако за дадената сума пари може да се купат  $x$  евра, тогаш точна е пропорцијата  $1:61,8 = x:96100$ . Значи,  $61,8x = 96100$  од каде следува  $x = 1555,02 \approx 1555$ . Значи, за 96100 денари може да се купат 1555 евра.

**Пример 69.** Според курсната листа на Банката Х продажниот курс на 1 канадски долар е 40,05 денари. Колку канадски долари може да се купат 80100 денари?

**Решение.** Ако за дадената сума пари може да се купат  $x$  канадски долари, тогаш точна е пропорцијата  $1:40,05 = x:80100$ . Значи,  $40,05x = 80100$  од каде следува  $x = 2000$ . Значи, за 80100 денари може да се купат 2000 канадски долари.

**Пример 70.** Господинот Михаил има заштеда од 2000 евра. Тој се спрема да оди САД и сака еврата да ги претвори во американски долари. Кога отишол во Банката Х добил информација дека не може директно да ги претвори еврата во долари, и дека откупниот курс на 1 евро е 61,30 денари, а продажниот курс на 1 американски долар е 55,54 денари. Колку долари ќе добие господинот Михаил за неговите 2000 евра?

**Решение.** Бидејќи еврата не може директно да се претворат во американски долари, господинот Михаил прво е ги продаде еврата, за што е добие  $2000 \cdot 61,3 = 122600$  денари. Сега, ако тој за сите пари купува американски долари, тогаш точна е пропорцијата  $1:55,54 = x:122600$  од каде добиваме  $55,54x = 122600$ , т.е.  $x \approx 2207,4$  американски долари.

#### Задачи

- Во едно одделение бројот на момчињата спрема бројот на девојчињата е во размер 2:3. Во ова одделение има 8 момчиња. Колку девојчиња има во ова одделение?
- Дадени е пропорцијата:
  - $14:56 = 23:92$ ,
  - $3:4 = 9:12$ .

- Размени ги местата на членовите во секој размер. Дали повторно доби пропорција?
- Опреди го  $x$  во пропорцијата:  
а)  $x:63=8:21$ ,                      б)  $2:x=5:30$ ,                      в)  $3,03:x=5,05:6$ .
  - Првиот член на една пропорција е 7,5 пати поголем од вториот. Ако третиот член е 4, определи го четвртиот член.
  - Опреди го  $x$  во пропорцијата:  
а)  $(3-x):x=1:5$ ,                      б)  $(5-x):(5+x)=1:2$ .
  - Од пропорциите  $a:b=2:3$ ,  $c:a=5:4$ ,  $d:b=7:3$  формирај продолжена пропорција.
  - Според курсната листа на Банката X продажниот курс на 1 британска фунта е 73,36 денари. Колку британски фунти може да се купат 146800 денари?
  - Господинот Агим има заштеда од 3000 швајцарски франци. Тој се спрема да оди САД и сака франците да ги претвори во американски долари. Кога отишол во Банката X добил информација дека не може директно да ги претвори франците во долари, и дека откупниот курс на 1 франак е 63,7518 денари, а продажниот курс на 1 американски долар е 55,54 денари. Колку долари ќе добие господинот Агим за неговите 3000 швајцарски франци?

## 1.12 Права и обратна пропорционалност .

### Просто и сложено тројно правило

Во основното образование се запозна со поимот пропорционалност и научи за некои примени на пропорционалностите. Да се потсетиме!

**Дефиниција 41.** За променливите величини  $x$  и  $y$  ќе велиме дека се *право пропорционални* ако постои број  $k \neq 0$  таков што за секоја вредност на  $x$  соодветната вредност на  $y$  е определена со формулата  $y=kx$ .

Бројот  $k$  го нарекуваме *коэффициент на пропорционалност*, а формулата  $y=kx$  ја нарекуваме *формула на пропорционалност*.

**Пример 71.** Ако килограм компири чини 110 денари, колку чинат три килограми компири? А колку чинат шест килограми?

**Решение.** Со  $x$  да го означиме количеството компири, а со  $y$  цената на чинење на тоа количество. Бидејќи цената на еден килограм компири е 110 денари, јасно е дека за  $x$  килограми компири ќе платиме  $y=110x$  денари.

Сега, за  $x=3$  добиваме  $y=110 \cdot 3=330$  денари, а за  $x=6$  добиваме  $y=110 \cdot 6=660$  денари.

**Теорема 44.** Нека  $x$  и  $y$  се две право пропорционални величини. Ако  $x_1$  и  $x_2$  се произволни вредности на  $x$ , а  $y_1$  и  $y_2$  се соодветни вредности на  $y$ , тогаш  $x_1:x_2=y_1:y_2$ .

**Доказ.** Нека  $k$  е коэффициентот на пропорционалност. Тогаш  $y_1=kx_1$  и  $y_2=kx_2$ , па затоа  $y_1:y_2=kx_1:kx_2=x_1:x_2$ , што и требаше да се докаже.

**Пример 72.** Една недела пред новогодишните празници слаткарот Кирил решил на сите производи да одобри попуст од 37,5%.



а) Редовната цена на чоколадната торта е 4000 денари. Колку ќе чини новата цена на тортата?

б) Ако со  $x$  ја означиме редовната цена на некој производ, а со  $y$  цената на истиот производ со попуст, дали величините  $x$  и  $y$  се право пропорционални? Во случај на потврден одговор определи го коефициентот на пропорционалност  $k$ .



**Решение. а)** Попуст од 37,5% значи дека од редовната цена треба да се одземе  $\frac{37,5}{100}$  делови со што се добива новата цена. Имаме  $4000 - 4000 \cdot \frac{37,5}{100} = 2500$  денари.

б) Цената со попуст  $y$  е  $y = x - \frac{37,5}{100}x = (1 - 0,375)x = 0,625x$ . Тоа значи дека величините  $x$  и  $y$  се право пропорционални и притоа  $k = 0,625$ .

**Пример 73.** Еден трактор може да изора една нива за 16 дена. За колку дена истата нива ќе ја изораат 2, 4, 8 трактори? (Било кои два трактора за исто време ораат иста површина.)

**Решение.** Два трактора нивата ќе ја изораат за  $16 : 2 = 8$  дена, 4 трактора за  $16 : 4 = 4$  дена и 8 трактори за  $16 : 8 = 2$  дена.

Забележуваме дека ако со  $x$  го означиме бројот на тракторите, а со  $y$  бројот на деновите потребни да се изора нивата, тогаш  $y = \frac{16}{x}$ .

**Дефиниција 42.** За променливите величини  $x$  и  $y$  ќе велиме дека се *обратно пропорционални* ако постои број  $k \neq 0$  таков што за секоја вредност на  $x$  соодветната вредност на  $y$  е определена со формулата  $y = \frac{k}{x}$ .

Бројот  $k$  го нарекуваме *коефициент на обратната пропорционалност*, а формулата  $y = \frac{k}{x}$  ја нарекуваме *формула на обратната пропорционалност*.

**Теорема 45.** Нека  $x$  и  $y$  се две обратно пропорционални величини. Ако  $x_1$  и  $x_2$  се произволни вредности на  $x$ , а  $y_1$  и  $y_2$  се соодветни вредности на  $y$ , тогаш  $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$ .

**Доказ.** Нека  $k$  е коефициентот на обратната пропорционалност. Тогаш  $y_1 = \frac{k}{x_1}$  и  $y_2 = \frac{k}{x_2}$ , па затоа  $y_1 : y_2 = \frac{k}{x_1} : \frac{k}{x_2} = x_2 : x_1$ , што и требаше да се докаже.

Во следните примери ќе воведеме шема така што во првиот ред ги запишуваме познатите вредности, а во вториот ред ја запишуваме непознатата вредност и преостанатата позната вредност, притоа водејќи сметка именуваните броеви од ист вид да се еден под друг. Постапката на решавање на задачи со помош на оваа шема е позната како *просто тројно правило*.

**Пример 74.** Од 100 kg жито се добиваат 90 kg брашно. Колку жито треба да се сомеле за да се добијат 675 kg брашно?

**Решение.** Бидејќи величините се право пропорционални ја добиваме шемата:

|             |   |               |   |
|-------------|---|---------------|---|
| 100 kg жито | ↑ | 90 kg брашно  | ↑ |
| $x$ kg жито |   | 675 kg брашно |   |



па затоа  $x:100 = 675:90$ , од каде добиваме  $x = \frac{675 \cdot 100}{90} = 750 \text{ kg}$ .

**Пример 75.** За да се ожнее едно поле со пченица потребни се 6 комбајни, секој од кои жнее по 4 часа. Со колку комбајни ќе се ожнее истото тоа поле ако секој комбајн жнее по 8 часа?

**Решение.** Бидејќи величините се обратно пропорционални ја добиваме шемата:

|              |        |
|--------------|--------|
| 6 комбајни   | 4 часа |
| $x$ комбајни | 8 часа |

па затоа  $x:6 = 4:8$ , од каде добиваме  $x = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3$  комбајни.

Ако имаме повеќе од две различни именувани величини, тогаш шемата ја формираме со истата постапка. Притоа стрелките во шемата имаат насока во зависност дали величините се право пропорционални или се обратно пропорционални. Сега, постапката на решавање на задачи со помош на оваа шема ја нарекуваме *сложено тројно правило*.

**Пример 76.** Месечната сметка за струја изнесува 70 денари за 5 светилки, кои светат по 7 часа на ден. Колкава ќе биде сметката, ако 11 светилки светат по 9 часа на ден?

**Решение.** Според условот на задачата ја добиваме шемата:

|             |        |            |
|-------------|--------|------------|
| 5 светилки  | 7 часа | 70 денари  |
| 11 светилки | 9 часа | $x$ денари |

па затоа  $x:70 = (11 \cdot 9):(5 \cdot 7)$ , од каде добиваме  $x = 70 \cdot \frac{11 \cdot 9}{5 \cdot 7} = 198$  денари.

**Пример 77.** За 48 дена 30 работници работејќи по 8 часа на ден може да ископаат канал долг 15 метри, широк 4 метри и длабок 6 метри. За колку дена 36 работници работејќи по 10 часа на ден може да ископаат канал долг 16 метри, широк 5 метри и длабок 4,5 метри.

**Решение.** Од податоците дадени во условот ја добиваме шемата:

|         |         |        |           |         |          |
|---------|---------|--------|-----------|---------|----------|
| 30 раб. | 15 м.д. | 4 м.ш. | 6 м.дб.   | 8 часа  | 48 дена  |
| 36 раб. | 16 м.д. | 5 м.ш. | 4.5 м.дб. | 10 часа | $x$ дена |

па затоа  $x:48 = (8 \cdot 4,5 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 30):(10 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 36)$ , од каде добиваме  $x = 32$  дена.

## Задачи

81. Во правопрпорционалност  $y = 2x$  определи го  $x$  ако:

а)  $y = 22$ , б)  $y = 12$ , в)  $y = 41$ , г)  $y = 122$ .

82. Ако 6 тетратки чинат 234 денари, колку тетратки може да се кушат за 390 денари?

83. Армен има 7, а Бесимка 11 години. Сумата од 1080 денари треба да ја поделат правопрпорционално на бројот на нивните години. Колку пари ќе добие секое дете?

84. Михајло и Јосиф имаат 120 марки. Марките треба да ги поделат правопрпорционално на бројот на буквите во нивните имиња. Колку марки ќе добие секое дете?

85. За монтирање на еден автомобил на еден работник му се потребни 192 работни часа.

а) За колку време еден автомобил ќе монтираат 3 работници?

б) Колку работници се потребни еден автомобил да се монтира за 8 работни часа?

86. Арлинда има 100 боици. Колку боици ќе добие секое девојче, ако Арлинда боиците ги подели со уште:
- а) 1 девојче, б) 3 девојчиња, в) 4 девојчиња, г) 9 девојчиња?
87. Осумдесет работници за определено време прават пат со должина 1600 метри. Колку работници за истото време и по исти услови ќе направат пат од 10 километри?
88. Според планот за работа 40 работници треба да завршат една работа за 27 дена. Работата ја почнале 18 работници и по 27 дена им се придружиле уште 32 работници. За колку денови ќе биде завршена планираната работа?

### 1.13 Делбена сметка и сметка на смеси

Често пати имаме потреба дадена величина да се подели на повеќе делови, при што се задоволени определени услови. Притоа се користиме со продолжените пропорции и нивните својства, а постапката за решавање на проблемот е позната како *делбена сметка*.

Ќе разгледаме неколку примери.

**Пример 78.** На еден шаховски турнир за освојување на првите три места бил обезбеден награден фонд во износ од 105000 денари. Организаторот одлучил за освојување на третото, второто и првото место фондот да се подели во однос  $1:2:4$ . Определи ги висините на наградите.

**Решение.** Ако висините на наградите за освојување на третото, второто и првото место се  $x, y$  и  $z$ , соодветно, тогаш  $x + y + z = 105000$  и  $x:y:z = 1:2:4 = k$ . Оттука добиваме  $x = k$ ,  $y = 2k$  и  $z = 4k$ . Значи,  $k + 2k + 4k = 105000$ , од каде следува  $k = 15000$ . Конечно, износите на третата, втората и првата награда се соодветно:  $x = 15000$ ,  $y = 30000$  и  $z = 60000$  денари.

**Пример 79.** Трговецот Михаил продал 85 kg масло, 124 kg шеќер, 346 kg ориз и 905 kg портокали и за тоа добил 36500 денари маржа. Маржата на секоја продадена стока е пропорционална со масата на таа стока. Колкава маржа добил Михаил за секоја од продадените стоки?

**Решение.** Со  $x, y, z, t$  да ја означиме маржата добиена од продажбата на маслото, шеќерот, оризот и портокалите, соодветно. Тогаш  $x:y:z:t = 85:124:346:905 = k$ , од каде со замена во  $x + y + z + t = 36500$  добиваме  $85k + 124k + 346k + 905k = 36500$ . Од последната равенка следува  $k = 25$ . Според тоа, бараните маржи се:

$$x = 85 \cdot 25 = 2125, y = 124 \cdot 25 = 3100, z = 346 \cdot 25 = 8650, t = 905 \cdot 25 = 22625 \text{ денари.}$$

Често пати по практиката, а особено во стопанството, се мешаат различни видови стоки или стоки од ист вид, сè со цел да се добие производ (смеса) од даден вид или со определен квалитет. Определувањето на цената, квалитетот или соодносот на стоките кои се мешаат се прави со таканаречената сметка на смеси. Во продолжение ќе разгледаме неколку типови на задачи на сметка на смеси.

Нека имаме  $n$  стоки со маси (волумени)  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и цени  $c_1, c_2, \dots, c_n$  на единица маса, соодветно. Масата (волуменот) на смесата добиена од овие  $n$  стоки ќе биде  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Вредноста на сите стоки е  $c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_n m_n$  и оваа вредност треба да е еднаква на вредноста на смесата. Ако  $c$  е цената на единица маса (волумен) на добиената смеса, тогаш вредноста на целата смеса е  $cm = c(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$ . Според тоа,

$$c(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_n m_n,$$

од каде добиваме

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} . \quad (1)$$

**Пример 80.** Една лабораторија извршила три набавки на 90% раствор на етил алкохол и тоа 6 l по цена од 125 денари за литар, 4 l по цена од 105 денари за литар и 10 l по цена од 130 денари за литар. Колку денари просечно платила лабораторијата за 1 l етил алкохол?

**Решение.** Во случајов имаме волумени  $m_1 = 6\text{ l}$ ,  $m_2 = 4\text{ l}$ ,  $m_3 = 10\text{ l}$  и цени  $c_1 = 125$ ,  $c_2 = 105$ ,  $c_3 = 130$  денари. Според тоа, просечната цена на 1 l етил алкохол е

$$c = \frac{125 \cdot 6 + 105 \cdot 4 + 130 \cdot 10}{6 + 4 + 10} = 123,5 \text{ денари.}$$

**Пример 81.** Колку процентен воден раствор на  $\text{NaCl}$  се добива со мешање на 250 милилитри 15% раствор воден раствор  $\text{NaCl}$ , 450 милилитри 10% воден раствор од  $\text{NaCl}$  и 300 милилитри 25% раствор од истото соединение?

**Решение.** Во случајов можеме да ја искористиме формулата (1). Притоа треба да земеме процентуалните учества да се  $c_1 = 15$ ,  $c_2 = 10$ ,  $c_3 = 25$  и  $m_1 = 250$ ,  $m_2 = 450$ ,  $m_3 = 300$ . Според тоа, процентот на добиениот раствор на  $\text{NaCl}$  ќе биде

$$c = \frac{15 \cdot 250 + 10 \cdot 450 + 25 \cdot 300}{250 + 450 + 300} = 15,75\% .$$

**Пример 82.** На пазарот имаме пченица од прва класа која чини 11,5 денари за килограм и пченица од втора класа која чини 9 денари за килограм. Мелницата *Златен клас* има план да купи определено количество пченица по цена од 10 денари за килограм. Во каков сооднос треба да купи од двете класи за да добие мешавина по цена од 10 денари за килограм?

**Решение.** Нека количествата жито од прва и втора класа се  $m_1$  и  $m_2$ , при што  $c_1 = 11,5$  и  $c_2 = 9$ . Од условот на задачата имаме  $c = 10$ . Според тоа,  $10(m_1 + m_2) = 11,5m_1 + 9m_2$ , од каде добиваме  $m_2 = 1,5m_1$ , односно  $m_2 : m_1 = 3 : 2$ .

Во претходниот пример ние всушност од равенството  $c(m_1 + m_2) = c_1 m_1 + c_2 m_2$  ја добивме пропорцијата  $m_2 : m_1 = (c_1 - c) : (c - c_2)$ , која може непосредно да се применува при решавање на задачи од дадениот вид.

#### Задачи

89. Сумата од 150000 денари подели ја на три дела во однос 4:5:6.
90. Сумата од 650000 денари подели ја на четворица работници чии делови се  $a, b, c, d$  така што важи  $a : b = 5 : 2$ ,  $b : c = 3 : 4$ ,  $c : d = 2 : 9$ .
91. Мала викенд кука ја изградиле четири работници и притоа работеле по 24, 30, 38 и 40 дена, соодветно. За извршената работа наплатиле 1320000 денари, кои ги поделиле пропорционално со работните денови. По колку пари добил секој работник?
92. Односот на внатрешните агли на еден четириаголник е 2:3:3:4. По колку степени има секој агол?
93. Пекарата *Златен пек* набавила 6000 kg брашно по цена од 12,63 денари за килограм и 4800 kg по цена од 12,9 денари за килограм.

Колку денари платила пекарата просечно за  $1\text{ kg}$  брашно?

94. Михаил за својот роденден набавил два вида сок и тоа  $20\text{ l}$  по цена од 46 денари за литар и  $10\text{ l}$  по цена од 55 денари за литар. Колку просечно платил Михаил за  $1\text{ l}$  сок?
95. На пазарот имаме јаболка кои чинат 25 денари за килограм и јаболка кои чинат 17 денари за килограм. Фабриката за сокови има план да купи определено количество јаболка по цена од 23 денари за килограм. Во каков сооднос треба да купи од двата вида јаболка за да просечната цена биде 23 денари за килограм?

### Провери го своето знаење 1

- Дадени се множествата  $A = \{4, 5, 8\}$ ,  $B = \{4, 6, x, 8\}$  и  $C = \{5, 3, 8, x, y\}$ . Најди ги елементите  $x$  и  $y$  ако  $A \cup B = \{4, 5, 6, 8, 9\}$  и  $B \cap C = \{4, 8, 9\}$ .
- Од 100 ученици: 24 не учат ниту еден од јазиците: англиски, руски и германски; 48 учат англиски; 8 и англиски и руски; 26 учат германски; 8 учат и германски и англиски; 13 учат и германски и руски; и 28 учат руски јазик. Колку ученици ги учат сите три јазици?
- Збирот на било кои седум последователни природни броеви е делив со 7. Докажи!
- Опреди ги природните брови  $a$  и  $b$  за кои важи  $\text{НЗД}(a, b) = 8$  и  $\text{НЗС}(a, b) = 168$ .
- Пресметај ја вредноста на изразот:  
а)  $(\frac{2}{6} - \frac{3}{4} + 1) \cdot \frac{6}{7}$ ,      б)  $(1 - \frac{3}{5}) : (\frac{2}{3} - \frac{1}{5})$ ,      в)  $(1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9 + \frac{1}{5}}}) : \frac{465}{419} - \frac{1}{1995}$ .
- Децималниот број  $0,027027027\dots$  запиши го во вид на обична дробка.
- Колку пати вредноста на изразот  $(0,6 + 0,42) : (2\frac{1}{2} : 0,5 + 1)$  е помала од 17.
- Набавната цена на еден производ изнесува 4500 денари, а продажната цена изнесува 5175 денари. Колку проценти е повисока продажната од набавната цена?
- Опреди го  $x$  во пропорцијата:  
а)  $(4 - x) : x = 1 : 5$ ,      б)  $(4 - x) : (4 + x) = 1 : 2$ .
- Армен има 7, а Бесимка 11 години. Сумата од 1080 денари треба да ја поделат правопрпорционално на бројот на нивните години. Колку пари ќе добие секое дете?
- Михаил за својот роденден набавил два вида сок и тоа  $20\text{ l}$  по цена од 46 денари за литар и  $10\text{ l}$  по цена од 55 денари за литар. Колку просечно платил Михаил за  $1\text{ l}$  сок?

## 2 Алгебарски рационални изрази

- 2.1 Степен со степенов показател природен број. Операции со степени
- 2.2 Степен со степенов показател цел број
- 2.3 Поим за корен. Проширување и скратување корени
- 2.4 Операции со корени
- 2.5 Степен со степенов показател рационален број
- 2.6 Алгебарски изрази. Полиноми
- 2.7 Операции со полиноми. Формули за скратено множење
- 2.8 Разложување на полиноми на множители
- 2.9 Најголем заеднички делител (НЗД) и најмал заеднички содржател на полиноми (НЗС)
- 2.10 Алгебарски дробки. Проширување и скратување
- 2.11 Операции со алгебарски дробки

Со усвојување на содржите од оваа тема ќе можеш:

- да ги разликуваш степените со степенови показатели природен, цел и рационален број,
- да множиш и делиш степени со еднакви основи и да ги користиш својствата за степе-нување на степен, производ и количник,
- да ги применуваш својствата на операциите со степени при упростување на броен из-раз,
- да прошируваш и скратуваш корени и да ги користиш својствата на корените при упростување на изрази со корени,
- да собираш, одземаш, множиш и делиш полиноми,
- да ги применуваш формулите за скратено множење при разложување на полиноми,
- да определуваш НЗД и НЗС на полиноми,
- да разложуваш полиноми,
- да определуваш за кои вредности е дефинирана дадена алгебарска дробка,
- да прошируваш и скратуваш алгебарски дробки,
- да собираш, одземаш, множиш и делиш алгебарски дробки,
- да упростуваш алгебарски дробки.

## 2.1 Степен со показател природен број. Операции со степени

Со поимот степен со показател природен број се запозна во основното образование. Сега ќе повторим за степените и ќе се стекнеш со нови знаења за истите.

**Дефиниција 1.** Нека  $a \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Степен на реалниот број  $a$  со природен експонент  $n$ , во ознака  $a^n$ , е производот

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ пати}} = a^n.$$

Бројот  $a^n$  го нарекуваме  $n$ -ти степен на бројот  $a$ , бројот  $a$  - основа на степеноет и бројот  $n$  - степенев показател (експонент).

Ако  $n=1$ , тогаш пишуваме  $a^1 = a$ .

**Пример 1.** Пресметај  $a^n$  за  $n=1,2,3,4$ , ако

а)  $a=2$ , б)  $a=-2$ .

**Решение.** а) Имаме:  $2^1=2$ ,  $2^2=2 \cdot 2=4$ ,  $2^3=2 \cdot 2 \cdot 2=8$ ,  $2^4=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2=16$ .

б) Имаме:

$(-2)^1=-2$ ,  $(-2)^2=(-2) \cdot (-2)=4$ ,  $2^3=(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)=-8$ ,  $2^4=(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)=16$ .

Во претходниот пример можеме да воочиме едно важно тврдење во врска со знакот на степенот со природен експонент во зависност од знакот на основата и парноста на степеновиот показател. Имено, точна е следнава теорема.

**Теорема 1.** а) Ако степеновиот показател е парен број, т.е.  $n=2k, k \in \mathbb{N}$  и  $a \in \mathbb{R}$ , тогаш  $a^{2k} \geq 0$ . Притоа  $a^{2k} > 0$  за  $a \neq 0$ .

б) Ако степеновиот показател е непарен број, т.е.  $n=2k+1, k \in \mathbb{N}$  и  $a \in \mathbb{R}$ , тогаш

i)  $a^{2k+1} > 0$ , ако  $a > 0$ , ii)  $a^{2k+1} < 0$ , ако  $a < 0$ , iii)  $a^{2k+1} = 0$ , ако  $a = 0$ .

Веќе знаеш да множиш и делиш степени со еднакви основи, да степенуваш степен, производ и количник на реални броеви. Имено, од дефиницијата на степен, комутативноста и асоцијативноста на множењето реални броеви следува точноста на следнава теорема.

**Теорема 2.** а) Ако  $a \in \mathbb{R}$  и  $m, n \in \mathbb{N}$ , тогаш  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

б) Ако  $m > n$  и  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , тогаш  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ .

в) Ако  $a \in \mathbb{R}$  и  $m, n \in \mathbb{N}$ , тогаш  $(a^m)^n = a^{mn}$

г) Ако  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $m \in \mathbb{N}$ , тогаш  $(ab)^m = a^m b^m$ .

д) Ако  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$  и  $m \in \mathbb{N}$ , тогаш  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ .

**Доказ.** а) Навистина,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ пати}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ пати}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ пати}} = a^{m+n}.$$

б) Имаме:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ пати}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n \text{ пати}} = a^{m-n}.$$

в) Навистина,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ пати}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ пати}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ пати}} \cdot \dots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ пати}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{mn \text{ пати}} = a^{mn}.$$

г) Навистина,

$$(ab)^m = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{m \text{ пати}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ пати}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ пати}} = a^m b^m.$$

д) Имаме:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{m \text{ пати}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ пати}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ пати}}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

**Пример 2.** Од претходната теорема непосредно следува:

а)  $10^4 \cdot 10^{36} = 10^{4+36} = 10^{40}$  и  $(-4)^3 \cdot (-4)^5 = (-4)^{3+5} = (-4)^8 = (-1 \cdot 4)^8 = (-1)^8 \cdot 4^8 = 4^8,$

б)  $\frac{7^8}{7^3} = 7^{8-3} = 7^5$  и  $\frac{(-5)^{13}}{(-5)^5} = (-5)^{13-5} = (-5)^8 = (-1 \cdot 5)^8 = (-1)^8 \cdot 5^8 = 5^8,$

в)  $\frac{(2^3 \cdot 2^4)^6}{2^{40}} = \frac{(2^{3+4})^6}{2^{40}} = \frac{(2^7)^6}{2^{40}} = \frac{2^{7 \cdot 6}}{2^{40}} = \frac{2^{42}}{2^{40}} = 2^{42-40} = 2^2,$

г)  $(xy^2z^3)^4 = x^4(y^2)^4(z^3)^4 = x^4y^{2 \cdot 4}z^{3 \cdot 4} = x^4y^8z^{12},$

д)  $\left(\frac{3xy^2}{2z}\right)^5 = \frac{(3xy^2)^5}{(2z)^5} = \frac{3^5x^5(y^2)^5}{2^5z^5} = \frac{243x^5y^{10}}{32z^5}.$

**Пример 3.** Пресметај ја вредноста на изразот:  $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$

**Решение.** Степените на дадениот израз ги сведуваме на степени со основи 2 и 3. Имаме:

$$\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 5 \cdot 3 \cdot 2^{18} \cdot 3^8}{2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^{10} + 2^{20} \cdot 3^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5}{2^{19} \cdot 3^9 + 2^{20} \cdot 3^{10}} = \frac{2^{18} \cdot 3^9 (2+5)}{2^{19} \cdot 3^9 (1+2 \cdot 3)} = \frac{7}{2 \cdot 7} = \frac{1}{2}.$$

**Пример 4.** Пресметај ја вредноста на изразот:  $(-10)^2 \frac{[6 \frac{4}{25} : 15 \frac{2}{5} - 10^2 \cdot (-0,2)^3] \cdot (0,015 : 0,12 + 0,7)}{1,2[(-3) \cdot (-\frac{1}{2})^3] - 0,2}.$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned} (-10)^2 \frac{[6 \frac{4}{25} : 15 \frac{2}{5} - 10^2 \cdot (-0,2)^3] \cdot (0,015 : 0,12 + 0,7)}{1,2[(-3) \cdot (-\frac{1}{2})^3] - 0,2} &= 100 \cdot \frac{[\frac{154}{25} : \frac{77}{5} - 100 \cdot (-\frac{1}{5})^3] \cdot (\frac{15}{1000} : \frac{12}{100} + \frac{7}{10})}{\frac{12}{10}[(-3) \cdot (-\frac{1}{8})] - \frac{2}{10}} \\ &= 100 \cdot \frac{(\frac{154}{25} \cdot \frac{5}{77} + \frac{100}{125}) \cdot (\frac{15}{1000} \cdot \frac{100}{12} + \frac{7}{10})}{\frac{12 \cdot 3}{10 \cdot 8} - \frac{2}{10}} = 100 \cdot \frac{(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}) \cdot (\frac{5}{40} + \frac{28}{40})}{\frac{12 \cdot 8}{10 \cdot 3} - \frac{2}{10}} \\ &= 100 \cdot \frac{\frac{6}{5} \cdot \frac{33}{40}}{\frac{32}{10} - \frac{2}{10}} = 100 \cdot \frac{\frac{99}{30}}{\frac{30}{10}} = 33, \end{aligned}$$

што и требаше да се определи.

Според теорема 2 б) за  $m > n$  и  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  важи  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  и бидејќи  $\frac{a^n}{a^n} = 1$ , логично е по дефиниција да земеме дека  $a^0 = 1$ .

Следната теорема ќе ја прифатиме без доказ и ќе покажеме како истата се применува при решавање на определен вид равенки.

**Теорема 3.** а) Ако  $a, b > 0$  и  $m \in \mathbb{N}$ , тогаш  $a^m = b^m$  ако и само ако  $a = b$ .

б) Ако  $0 < a \neq 1$  и  $m, n \in \mathbb{N}$ , тогаш  $a^m = a^n$  ако и само ако  $m = n$ .

**Пример 5.** Определи го  $n \in \mathbb{N}$  ако  $0,5^n = 0,0625$ .

**Решение.** Имаме  $0,0625 = 0,5 \cdot 0,125 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,5^4$ . Според тоа,  $0,5^n = 0,5^4$  и од последната теорема следува  $n = 4$ .

**Пример 6.** Докажи дека  $32^{24} > 13^{32}$ .

**Решение.** Нека  $a = 32^{24}$ ,  $b = 13^{32}$ . Бидејќи

$$a = 32^{24} = \underbrace{32^3 \cdot 32^3 \cdots 32^3}_{8\text{-пати}} \text{ и } b = 13^{32} = \underbrace{13^4 \cdot 13^4 \cdots 13^4}_{8\text{-пати}},$$

доволно е да докажеме дека  $32^3 > 13^4$ . Конечно, со непосредна проверка добиваме

$$32^3 = 32768 > 28561 = 13^4.$$

#### Задачи

1. Пресметај:

а)  $3^3 \cdot 3^6 \cdot 3^9$ ,      б)  $(-3)^3 \cdot (-3)^6 : (-3^4)$ ,      в)  $(3^3)^3$ ,      г)  $[(-1)^3]^6 : [(-1)^2]^3$

2. Пресметај ги вредноста на изразот:

а)  $(\frac{-8}{5})^4 \cdot (\frac{-1}{16})^4$ ,      б)  $(\frac{3}{4})^6 \cdot (-8)^6 : (-6)^6$ ,      в)  $(-0,375)^5 : (-1\frac{5}{16})^5 \cdot (1\frac{1}{6})^5$ .

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $\frac{10^6}{5^6}$ ,      б)  $\frac{32^3}{4^6}$ ,      в)  $\frac{4^2 \cdot 25^2}{10^2}$ .

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $(-0,2)^{30} \cdot 25^{12} \cdot 0,25^2$ ,      б)  $\frac{8^{2k+3} \cdot 4^{k+2}}{16^{2k+3}}$ .

5. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $\frac{2^{18} \cdot 3^{22} \cdot 5^{-7} \cdot 2^{18} \cdot 3^{21}}{6^{18} \cdot 9^2 \cdot 4^9 \cdot 9^{10}}$ ,      б)  $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$ .

6. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$-\frac{1}{0,25} [(\frac{1}{0,25})^2 \cdot (\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{0,5})^3 \cdot (-\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{0,8})^2] : (2 - \frac{2}{2})^2.$$

7. Определи го  $n \in \mathbb{N}$  ако:

а)  $(3^n)^4 = (3^2)^{14}$ ,      б)  $2^n = (2^2)^3 \cdot 4^6 : 8^3$ .

8. Ако  $a = \frac{2^{12} + 2^{13}}{4^7 - 4^6}$  и  $5 \cdot 25^b = 125^7$ , колку е  $a + b$ ?



## 2.2 Степен со степенов показател цел број

Во претходната лекција видовме дека ако  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n$  и  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , тогаш  $a^m : a^n = a^{m-n}$ . Меѓутоа, лесно се гледа дека левата страна на последното равенство има смисла и ако  $m < n$ . Навистина, тогаш

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{a^m}} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Ова ни дава повод да ја воведеме дефиницијата.

**Дефиниција 2.** Нека  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Бројот  $\frac{1}{a^n}$  го нарекуваме степен на реалниот број  $a$  со негативен цел експонент  $-n$ . Притоа пишуваме  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

Од дефиницијата 2 и од теоремата 2 непосредно следува точноста на следнава теорема.

**Теорема 4.** Ако  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $m, n \in \mathbb{Z}$ , тогаш

$$\begin{array}{lll} \text{а) } a^m a^n = a^{m+n}, & \text{б) } (a^m)^n = a^{mn}, & \text{в) } (ab)^m = a^m b^m, \\ \text{г) } a^m : a^n = a^{m-n}, & \text{д) } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}. \end{array}$$

**Доказ.** Ќе го докажеме само равенството под а). Другите равенства се докажуваат ана-логно. За  $m, n > 0$ , равенството е докажано во теорема 2. Ако  $m, n < 0$ , тогаш

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Сега, заради комутативното својство на множењето и собирањето реални броеви доволно е да го разгледаме случајот кога  $m > 0$ ,  $n < 0$ . Имаме

$$a^m a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

**Пример 7.** Пресметај  $(xy)^4$ , ако  $x^{-2}y^{-2} = 3$ .

**Решение.** Бидејќи  $x^{-2}y^{-2} = 3$ ,  $xy \neq 0$  добиваме:

$$(xy)^4 = \frac{1}{(xy)^{-4}} = \frac{1}{(x^{-2}y^{-2})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

**Пример 8.** а) Ако  $x^7 = 3$ , пресметај го изразот:  $\frac{(x^{-2})^{-3}(x^3)^4(x^{-17})^{-1}}{x^7}$ .

б) Пресметај ја вредноста на изразот:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ .

**Решение.** а) Бидејќи  $x^7 = 3$  добиваме:

$$\frac{(x^{-2})^{-3}(x^3)^4(x^{-17})^{-1}}{x^7} = \frac{x^6 x^{12} x^{17}}{x^7} = \frac{x^{35}}{x^7} = x^{28} = (x^7)^4 = 3^4 = 81.$$

б) Од теорема 4 д) и дефиницијата на степен со степенов показател цел број следува:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{9}} - \frac{1}{\frac{1}{64}} = 2 + 9 - 64 = 53.$$

Да забележиме дека аналогно како во решението на пример 8 б) добиваме дека за секој  $n \in \mathbb{N}$  и за секои  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  важи

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Според тоа, дробка се степенува со степенев показател негативен цел број така што нејзината реципрочна вредност се степенува со спротивниот степенев показател.

Во првата тема децималните броеви ги воведовме со помош на десетичните дробки. Сега знаеме дека  $10^0 = 1$ ,  $10^1 = 10$ ,  $10^2 = 100$ ,  $10^3 = 1000$  итн. Забележуваме дека бројот на нулите кај декадните единици е еднаков на соодветниот степенев показател. Понатаму, знаеме дека  $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ ;  $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$ ;  $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$  итн.

Претходно кажаното ни овозможува даден број да го запишеме како збир на производи на неговите цифри и степени на бројот 10. Последното може да се направи како за природен, така и за позитивен децимален број.

**Пример 9.** а) Запиши го бројот 98765 како збир на производи на неговите цифри и степени на бројот 10.

б) Запиши го бројот 12,345 како збир на производи на неговите цифри и степени на бројот 10.

**Решение.** а) Имаме:

$$98765 = 90000 + 8000 + 700 + 60 + 5 = 9 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

б) Имаме

$$\begin{aligned} 12,345 &= 10 + 2 + 0,3 + 0,04 + 0,005 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 + 5 \cdot 0,001 \\ &= 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Степените на бројот 10 ги користиме за запишување на таканаречените големи и мали броеви. Големи ги сметаме броевите во чии записи користиме природен степенев показател. На пример, големи се броевите

$$6500000 = 6,5 \cdot 1000000 = 6,5 \cdot 10^6 \text{ и } 14500000 = 1,45 \cdot 10000000 = 1,45 \cdot 10^7.$$

Мали се броевите во чии записи користиме негативен цел степен на бројот 10. На пример, мали се броевите

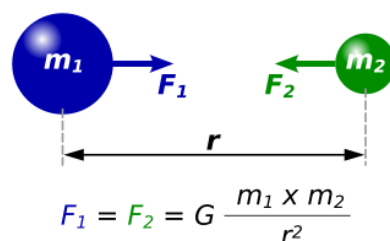
$$0,00006 = 6 \cdot 0,00001 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ и } 0,000000014 = 1,4 \cdot 0,00000001 = 1,4 \cdot 10^{-8}.$$

Во горните пример четирите броја ги запишавме во видот  $A \cdot 10^n$ , каде  $n \in \mathbb{Z}$  и  $1 \leq A < 10$ . Ваквиот запис е доста практичен и истиот се среќава како во физиката, така и во хемијата. Така, на пример, во физиката Њутновиот закон за гравитација тврди дека ако две тела со маси  $m_1$  и  $m_2$  се на растојание  $r$ , тогаш тие се привлекуваат со сила

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

каде  $G = (6,67428 \pm 0,0010) \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$  е таканаречената *гравитациона константа*.

Слично, во хемијата *Авогадровата константа* е еднаква на бројот на молекулите во 1 мол супстанца и истата е еднаква на  $6,02214076(47) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .



**Пример 10.** Запиши ги во облик  $A \cdot 10^n$ , каде  $n \in \mathbb{Z}$  и  $1 \leq A < 10$  броевите:

- а) 80203000, б) 0,000000089

**Решение.** Имаме:

а)  $80203000 = 8,0203 \cdot 10000000 = 8,0203 \cdot 10^7$ ,

б)  $0,000000089 = 8,9 \cdot 0,00000001 = 8,9 \cdot 10^{-8}$ .

**Пример 11.** Колку цифри содржи бројот  $[1,125 \cdot (10^9)^5] : [\frac{3}{32} \cdot 10^{-4}]$ ?

**Решение.** Имаме

$$\begin{aligned} [1,125 \cdot (10^9)^5] : [\frac{3}{32} \cdot 10^{-4}] &= [\frac{1125}{1000} \cdot 10^{45}] : [\frac{3}{32} \cdot 10^{-4}] \\ &= (\frac{9}{8} : \frac{3}{32}) \cdot (10^{45} : 10^{-4}) \\ &= (\frac{9}{8} \cdot \frac{32}{3}) \cdot 10^{45-(-4)} = 12 \cdot 10^{49}. \end{aligned}$$

Овој број во својот запис ги има цифрите 1 и 2, а потоа уште 49 нули, што значи дека вкупниот број цифри е 51.

Задачи

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $A = (0,3^{-3} \cdot 0,3^2)^{-1}$ , б)  $B = (\frac{1}{2})^{-3} - \frac{1}{2^{-3}}$ .

10. Кој израз е поголем и за колку:

$$A \equiv (-4 \cdot 0,5^{2n-7}) \cdot (12 \cdot 0,5^{10-2n}) \text{ или } B \equiv [27 \cdot (\frac{1}{3})^{5n-1}] : [0,5 \cdot (\frac{1}{3})^{5n-3}].$$

11. Упрости го изразот:

а)  $[\frac{(-5)^2 \cdot 3^{-3} \cdot (-1)^4 \cdot (-2)}{5^4 \cdot (-5)^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot (-3)^{-1}}]^{-1}$ , б)  $(a^{3^n})^{-3} \cdot (\frac{a^{2^n}}{a^2})^4$

12. Кој израз е поголем и за колку:

$$A \equiv (16 \cdot 0,25^{3n-2}) : (-0,5 \cdot 0,25^{3n-4}) \text{ или } B \equiv 81 \cdot (\frac{2}{3})^{12-4n} \cdot 3 \cdot (-\frac{2}{3})^{4n-7}.$$

13. Запиши го во облик  $A \cdot 10^n$ , каде  $n \in \mathbb{Z}$  и  $1 \leq A < 10$  бројот:

а) 124000, б) 124000000, в)  $124 \cdot 10^{10}$ , г)  $12,4 \cdot 10^8$ .

14. Запиши го во облик  $A \cdot 10^n$ , каде  $n \in \mathbb{Z}$  и  $1 \leq A < 10$ :

а) бројот на литрите во полн базен со димензии  $12 m \times 30 m \times 2 m$ ,

б) бројот на квадратните плочки со должина на страна  $5 cm$  потребни за поплочување на плоштад со димензии  $200 m \times 150 m$ ,

в) бројот на секундите во едно илјадолетие. (Внимавај секоја четврта година е престапна!)

15. Запиши ја во облик  $A \cdot 10^n$ , каде  $n \in \mathbb{Z}$  и  $1 \leq A < 10$  вредноста на изразот:

а)  $72 \cdot 10^{-5} + 3,1 \cdot 10^{-4}$ , б)  $5,68 \cdot 10^7 - 180 \cdot 10^4$ ,

в)  $5,5 \cdot 10^3 + 4,7 \cdot 10^3$ , г)  $\frac{101}{10^{100}} - 0,99 \cdot 10^{-98}$ .

## 2.3 Поим за корен. Проширување и скратување корени

Во претходните две лекции учевме за степените со природен и цел експонент. Во оваа лекција, користејќи ги знаењата за степените ќе ги изучуваме корените, нивното проширување и скратување.

Како што знаеме за да ја решиме равенката  $x^2 = 4$  треба да најдеме број чиј квадрат е бројот 4. Таков број е 2, бидејќи  $2^2 = 4$ . Бројот 2 го нарекуваме *квадратен корен* од бројот 4. Но, важи и  $(-2)^2 = 4$ , што значи дека и бројот  $-2$  е решение на дадената равенка, па затоа и бројот  $-2$  е *квадратен корен* од бројот 4.

Општо земено, *квадратен корен* на еден број  $a$  е број  $x$  чиј квадрат е бројот  $a$ , т.е. број кој што е решение на равенката

$$x^2 = a. \quad (1)$$

Во врска со решенијата на равенката (1) имаме:

- Ако  $a > 0$ , тогаш може да се докаже дека равенката (1) има две решенија. Тоа се два спротивни броја, кои се и *квадратни корени* на бројот  $a$ . Позитивниот број  $x$  за кој важи (1) го означуваме со  $\sqrt{a}$ , а негативниот со  $-\sqrt{a}$ .
- Ако  $a = 0$ , тогаш равенката (1) има само едно решение – бројот 0, бидејќи  $0^2 = 0$ . При тоа пишуваме  $\sqrt{0} = 0$ .
- Ако  $a < 0$ , тогаш според теорема 1.33 квадратот на секој реален број е ненегативен број, па заклучуваме дека не постои реален број чиј квадрат е  $a$ . Според тоа, равенката (1) нема решение, па затоа не постои квадратен корен од негативен број.

Сега да ја разгледаме равенката  $x^3 = 27$ . За истата да ја решиме треба да најдеме број чиј трети степен е бројот 27. Бидејќи  $3^3 = 27$ , заклучуваме дека бројот 3 е решение на дадената равенка. Меѓутоа, од  $(-3)^3 = -27$  следува дека бројот  $-3$  е решение на равенката  $x^3 = -27$ . Притоа за бројот 3 велиме дека е *трети (кубен) корен* на бројот 27, а за бројот  $-3$  дека е *трети (кубен) корен* на бројот  $-27$ .

Општо земено, *кубен корен* на еден број  $a$  е број  $x$  чиј трети степен е бројот  $a$ , т.е. број кој што е решение на равенката

$$x^3 = a. \quad (2)$$

Во врска со решенијата на равенката (2) може да се докаже дека за секој  $a$  таа има точно едно решение, при што за  $a > 0$  решението е позитивно, за  $a = 0$  тоа е 0 и за  $a < 0$  решението е негативно. Значи, решение на равенката (2) е *кубен корен* од бројот кој го означуваме со  $\sqrt[3]{a}$ .

**Пример 12.** а) Имаме:  $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$ ,  $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$ ,  $\sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{(\frac{3}{5})^2} = \frac{3}{5}$  и  $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$ .

б)  $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ ,  $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$ ,  $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$  и  $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{(\frac{3}{5})^3} = \frac{3}{5}$ .

в) Имаме:  $\sqrt{\sqrt{225} - \sqrt{121} + \sqrt{25}} = \sqrt{\sqrt{15^2} - \sqrt{11^2} + \sqrt{5^2}} = \sqrt{15 - 11 + 5} = \sqrt{9} = 3$ .

За натамошните разгледувања ќе ја користиме следнава теорема, која нема да ја докажуваме.

**Теорема 5.** За секој реален број  $a > 0$  и за секој  $n \in \mathbb{N}$  постои еден и само еден позитивен реален  $x$  кој што е решение на равенката  $x^n = a$ .

Од теорема 5 следува:

- ако  $n$  е непарен број, тогаш за секој  $a$  равенката  $x^n = a$  има единствено реално решение, кое го означуваме со  $\sqrt[n]{a}$  и ова решение го нарекуваме  $n$ -ти корен од  $a$ .
- ако  $n$  е парен број и  $a > 0$ , тогаш равенката  $x^n = a$  во множеството реални броеви има две реални решенија, т.е. имаме два  $n$ -ти корени од  $a$ , кои се два спротивни броја, при што позитивниот го означуваме со  $\sqrt[n]{a}$ , а негативниот со  $-\sqrt[n]{a}$ . За  $a = 0$  постои единствен  $n$ -ти корен од  $a$  и тоа  $\sqrt[n]{0} = 0$  и за  $a < 0$  не постои  $n$ -ти корен од  $a$ .

Постапката со која се определува  $\sqrt[n]{a}$  ја нарекуваме *коренување*, а бројот  $n$  го нарекуваме *коренов показател*.

Понатаму, ако  $x = \sqrt[n]{a}$  постои, тогаш од дефиницијата на  $n$ -ти корен следува  $x^n = a$ , што значи дека  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ . Навистина, на пример,

$$(\sqrt[3]{27})^3 = (\sqrt[3]{3^3})^3 = 3^3 = 27, (\sqrt[4]{16})^4 = (\sqrt[4]{2^4})^4 = 2^4 = 16 \text{ и слично.}$$

Да видиме на што е еднакво  $x = \sqrt[n]{a^n}$ . Ќе разгледаме два случаја:

- Ако  $n$  е непарен број, тогаш според дефиницијата на  $n$ -ти корен тоа е единствениот број чиј  $n$ -ти степен е еднаков на  $a^n$ . Јасно, тоа е бројот  $a$ , па затоа во овој случај важи  $\sqrt[n]{a^n} = a$ .
- Ако  $n$  е парен број, тогаш  $a^n > 0$ , па затоа  $\sqrt[n]{a^n}$  треба да е позитивен број чиј  $n$ -ти степен е еднаков на  $a^n$ . Но, од својствата на апсолутната вредност за  $n = 2k$  имаме  $a^n = a^{2k} = |a|^{2k} = |a|^n$ , па затоа во овој случај важи  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ .

Според тоа,

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{ако } n \text{ е непарен број,} \\ |a|, & \text{ако } n \text{ е парен број.} \end{cases}$$

Навистина, на пример

$$\sqrt[3]{2^3} = 2, \sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2 = |-2|, \sqrt[4]{(-5)^4} = \sqrt[4]{5^4} = 5 = |-5| \text{ и слично.}$$

**Пример 13.** а) Од  $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$  и  $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ , следува  $\sqrt{4} = \sqrt[4]{16}$ , т.е.  $\sqrt{2^2} = \sqrt[4]{2^4}$ .

б) Аналогно како под а) се покажува дека важи  $\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[6]{3^6}$ .

Равенствата од пример 13, но и други слични равенства упатуваат на заклучок дека е точна следнава теорема.

**Теорема 6.** Ако  $a$  е позитивен реален број и  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , тогаш

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}. \quad (3)$$

**Доказ.** Нека  $x = \sqrt[n]{a^m}$ . Тогаш од дефиницијата на корен имаме  $x^n = a^m$ . Сега од теорема 3 а) следува  $(x^n)^p = (a^m)^p$ , па од теорема 2 в) добиваме  $x^{np} = a^{mp}$ . Од последното равенство следува дека  $x = \sqrt[np]{a^{mp}}$ . Конечно, од  $x = \sqrt[n]{a^m}$  и  $x = \sqrt[np]{a^{mp}}$  следува равенството (3).

Теорема 6 всушност покажува дека вредноста на коренот  $\sqrt[n]{a^m}$ ,  $a > 0, m, n \in \mathbb{N}$  не се менува, ако кореновиот показател и степеновиот показател на поткореновиот израз се помножат за еден ист број. Ова својство е познато како *проширување на коренот*.

**Пример 14.** а) Коренот  $\sqrt[3]{a^2b}$ , ( $a > 0, b > 0$ ) ќе го прошириме со 4. Според теорема 6 добиваме  $\sqrt[3]{(a^2b)^4} = \sqrt[12]{a^8b^4}$ .

б) Коренот  $\sqrt[4]{a^3b^2c}$ , ( $a > 0, b > 0, c > 0$ ) ќе го прошириме со 2. Според теорема 6 добиваме  $\sqrt[4]{a^3b^2c} = \sqrt[4]{(a^3b^2c)^2} = \sqrt[8]{a^6b^4c^2}$ .

в) Корените  $\sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{b^3}, \sqrt[6]{c^5}$  ќе ги сведиме на ист коренов показател. Имаме,  $\text{НЗД}(3, 4, 6) = 12$  и затоа  $\sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^4}, \sqrt[4]{b^3} = \sqrt[12]{(b^3)^3} = \sqrt[12]{b^9}, \sqrt[6]{c^5} = \sqrt[12]{(c^5)^2} = \sqrt[12]{c^{10}}$ .

Ако равенството (3) го запишеме во обратна насока, добиваме  $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ , што значи дека вредноста на корен од позитивен број не се менува ако кореновиот показател и степеновиот показател на поткореновиот израз се поделат со некој нивни заеднички делител. Според тоа, ако е даден коренот  $\sqrt[n]{a^m}$ , ( $a > 0, m, n \in \mathbb{N}$ ) и ако  $k$  е заеднички делител на  $m$  и  $n$ , тогаш  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:k]{a^{m:k}}$ .

**Пример 15.** Имаме:

$$\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a} \text{ и } \sqrt[8]{a^2b^4} = \sqrt[8]{(ab^2)^2} = \sqrt[4]{ab^2}.$$

Задачи

16. Определи на што е еднакво:

а)  $\sqrt[6]{16^6}$ ,                      б)  $\sqrt[4]{(-12)^4}$ ,                      в)  $\sqrt{676}$ ,                      г)  $\sqrt{729}$

17. Определи на што е еднакво:

а)  $\sqrt[5]{11^5}$ ,                      б)  $\sqrt[7]{(-12)^7}$ ,                      в)  $\sqrt[3]{216}$ ,                      г)  $\sqrt[3]{-729}$

18. Прошири ги со 3 корените

а)  $\sqrt{a}$ ,                      б)  $\sqrt[3]{a^2}$ ,                      в)  $\sqrt[4]{ab^2}$ ,                      г)  $\sqrt[5]{abc^3}$ .

19. Сведи ги на заеднички коренов показател корените

а)  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{a^2}$  и  $\sqrt[4]{ab^2}$ ,                      б)  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[4]{ab}$  и  $\sqrt[5]{a^2b^3c}$

20. Упрости ги корените:

а)  $\sqrt[4]{a^4b^2}$                       б)  $\sqrt[5]{a^5b^{20}c^{15}}$                       в)  $\sqrt[6]{a^3b^9c^{21}}$ .

## 2.4 Операции со корени

Во претходната лекција се запознавме со корените и научивме да прошируваме и да скрапуваме корен. Сега, ќе покажеме уште кои операции можеме да ги реализираме со корените.

**Теорема 7.** Ако  $n \in \mathbb{N}$  и  $a$  и  $b$  се позитивни реални броеви, тогаш точно е равенството

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \quad (1)$$

**Доказ.** Да ставиме  $x = \sqrt[n]{ab}$  и  $y = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ . Тогаш

$$x^n = (\sqrt[n]{ab})^n = ab \text{ и } y^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Според тоа,  $x^n = y^n$  и како броевите  $x$  и  $y$  се позитивни, од теорема 3 а) следува  $x = y$ , т.е. точно е равенството (1)

**Пример 16.** Од равенството (1) следува:

а)  $\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15,$

б) ако  $a, b > 0$ , тогаш  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^4 b^3},$

в) ако  $a, b, c > 0$ , тогаш  $\sqrt[6]{a^4 b^3 c^2} = \sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[6]{b^3} \cdot \sqrt[6]{c^2} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{c},$

г) ако  $x, y, z > 0$ , тогаш  $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{y^2} \cdot \sqrt[4]{z^6} = \sqrt[4]{xy^2 z^6}.$

**Теорема 7.** Ако  $n \in \mathbb{N}$  и  $a$  и  $b$  се позитивни реални броеви, тогаш точно е равенството

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \quad (2)$$

**Доказ.** Да ставиме  $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  и  $y = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ . Тогаш

$$x^n = (\sqrt[n]{\frac{a}{b}})^n = \frac{a}{b} \text{ и } y^n = (\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}})^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Според тоа,  $x^n = y^n$  и како броевите  $x$  и  $y$  се позитивни, од теорема 3 а) следува  $x = y$  т.е. точно е равенството (2)

**Пример 16.** Од равенството (12) следува:

а)  $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{3}{5},$

б)  $\sqrt[5]{\frac{a^7 b^3}{a^2 b^8}} = \sqrt[5]{\frac{a^5 b^3}{a^2 b^8}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{b^5}} = \sqrt[5]{(\frac{a}{b})^5} = \frac{a}{b},$

в)  $\sqrt[3]{\frac{xy^2}{x^2 y}} = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{x^2 y}} = \frac{\sqrt[12]{x^4 y^8}}{\sqrt[12]{x^6 y^3}} = \sqrt[12]{\frac{x^4 y^8}{x^6 y^3}} = \sqrt[12]{\frac{y^5}{x^2}}.$

**Пример 17.** а) Имаме

$$\sqrt{25 \cdot 0,09} + \sqrt{\frac{64}{0,25}} + \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{0,09} + \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{0,25}} + \sqrt{36} = 5 \cdot 0,3 + \frac{8}{0,5} + 6 = 1,5 + 16 + 6 = 23,5.$$

б) Имаме.

$$\begin{aligned}
 143 \cdot 91 \cdot 77 - \sqrt{143} \cdot \sqrt{91} \cdot \sqrt{77} &= 143 \cdot 91 \cdot 77 - \sqrt{143 \cdot 91 \cdot 77} = 13^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2 - \sqrt{13^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2} \\
 &= 13^2 \cdot 11^2 \cdot 7^2 - \sqrt{13^2} \cdot \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{7^2} = (13 \cdot 11 \cdot 7)^2 - 13 \cdot 11 \cdot 7 \\
 &= 1001^2 - 1001 = 1001(1001 - 1) = 1001 \cdot 1000 = 1001000.
 \end{aligned}$$

**Теорема 8.** Ако  $a > 0$  и  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$  се такви што  $m = np + q$ ,  $q < n$ , тогаш  $\sqrt[n]{a^m} = a^p \cdot \sqrt[n]{a^q}$ .  
**Доказ.** Навистина,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{np+q}} = \sqrt[n]{a^{np} a^q} = \sqrt[n]{a^{np}} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{(a^p)^n} \cdot \sqrt[n]{a^q} = a^p \cdot \sqrt[n]{a^q}.$$

**Пример 18.** а)  $\sqrt[5]{a^{27}} = \sqrt[5]{a^{5 \cdot 5 + 2}} = a^5 \cdot \sqrt[5]{a^2}$ ,

б)  $\sqrt[3]{a^7 b^{14}} = \sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt[3]{b^{14}} = \sqrt[3]{a^{3 \cdot 2 + 1}} \cdot \sqrt[3]{b^{3 \cdot 4 + 2}} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot b^4 \cdot \sqrt[3]{b^2} = a^2 b^4 \cdot \sqrt[3]{ab^2}.$

**Пример 19.** Пресметај ја вредноста на изразот:  $2\sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{108} - 27\sqrt{3}$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{108} - 27\sqrt{3} &= 2\sqrt{25 \cdot 3} - 3\sqrt{16 \cdot 3} + 5\sqrt{36 \cdot 3} - 27\sqrt{3} \\
 &= 2 \cdot 5\sqrt{3} - 3 \cdot 4\sqrt{3} + 5 \cdot 6\sqrt{3} - 27\sqrt{3} \\
 &= (10 - 12 + 30 - 27)\sqrt{3} = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Теоремата 8 всушност ја дава постапката за извлекување на множител пред корен. Обратната постапка е внесувањето на множител под знакот на коренот. Да разгледаме еден пример.

**Пример 20.** а)  $a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$ ,

б)  $x^2 \cdot \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{(x^2)^5} \cdot \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^{10}} \cdot \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^{10} y}$ ,

в)  $x^4 \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{(x^4)^4} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^{16}} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^{16} x} = \sqrt[4]{x^{17}}$ ,

г)  $x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{x^5}} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{x^5}} = \sqrt[3]{x^6 \cdot \frac{y}{x^5}} = \sqrt[3]{xy}$ ,

д)  $\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt[5]{\frac{b^4}{a^6}} = \sqrt[5]{\frac{a^{10}}{b^5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b^4}{a^6}} = \sqrt[5]{\frac{a^{10}}{b^5} \cdot \frac{b^4}{a^6}} = \sqrt[5]{\frac{a^4}{b}}.$

**Теорема 9.** Нека  $m, n \in \mathbb{N}$  и  $a$  и  $b$  се позитивни реални броеви. Тогаш  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$  и  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ .

**Доказ.** Нека  $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ . Од дефиницијата на корен имаме  $x^n = \sqrt[m]{a}$  и затоа  $a = (x^n)^m = x^{mn}$ , од што следува  $x = \sqrt[mn]{a}$ . Според тоа,  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = x = \sqrt[mn]{a}$ .

Нека  $x = (\sqrt[n]{a})^m$  и  $y = \sqrt[n]{a^m}$ . Тогаш  $x^n = ((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = a^m$  и  $y^n = (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$ . Според тоа,  $x^n = y^n$ , па од теорема 3 а) следува  $x = y$ , односно  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ .

**Пример 21.** а)  $(\sqrt[3]{a})^5 = \sqrt[3]{a^5}$ ,



$$\begin{aligned} \text{б)} \quad (\sqrt[4]{a^3b^2})^3 &= \sqrt[4]{(a^3b^2)^3} = \sqrt[4]{a^9b^6} = a^2b \cdot \sqrt[4]{ab^2}, \\ \text{в)} \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} &= \sqrt[12]{a}, \\ \text{г)} \quad \sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{b} &= \sqrt[3]{\sqrt[4]{(a^2b)^4} \cdot \sqrt[4]{b}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{(a^2b)^4b}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^8b^5}} = \sqrt[12]{a^8b^5}. \end{aligned}$$

### Задачи

21. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\text{а)} \quad \sqrt{\sqrt{121} - \sqrt{64} + \sqrt{169}}, \quad \text{б)} \quad \sqrt{\sqrt{256} + \sqrt{196} + \sqrt{36}}.$$

22. Пресметај:

$$\text{а)} \quad \sqrt{64 \cdot 169}, \quad \text{б)} \quad \sqrt[3]{27000}, \quad \text{в)} \quad \sqrt{25a^2}, \quad \text{г)} \quad \sqrt[3]{a^3b^6c^9}.$$

23. Пресметај:

$$\text{а)} \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{75}, \quad \text{б)} \quad \sqrt{10} \cdot \sqrt{3,6}, \quad \text{в)} \quad \sqrt[3]{(a+b)^2} \cdot \sqrt{a+b}.$$

24. Пресметај на најкраток начин:

$$\text{а)} \quad \sqrt{145^2 - 24^2} \quad \text{б)} \quad \sqrt{117^2 - 108^2} \quad \text{в)} \quad \sqrt{90^2 - 54^2}.$$

25. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\text{а)} \quad 2\sqrt{125} - 3\sqrt{80} + 5\sqrt{180} - 27\sqrt{5}, \quad \text{б)} \quad 7\sqrt{150} - 6\sqrt{96} + 5\sqrt{216} - 14\sqrt{6}$$

26. Пресметај:

$$\text{а)} \quad \sqrt[4]{\frac{81}{10000}}, \quad \text{б)} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{343}}, \quad \text{в)} \quad \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x}}, \quad \text{г)} \quad \frac{\sqrt[4]{16a^6}}{\sqrt{2a}}.$$

27. Пресметај:

$$\text{а)} \quad \sqrt[4]{8a^3} : \sqrt[3]{4a^2}, \quad \text{б)} \quad \sqrt[5]{a^6} : \sqrt[10]{a^3}, \quad \text{в)} \quad \sqrt[3]{(a+b)^2} : \sqrt{a+b}.$$

28. Пресметај ја вредноста на изразот:  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{24} + \sqrt{150}}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{2}.$

29. Извлечи пред знакот на коренот:

$$\text{а)} \quad \sqrt[3]{a^5b^7}, \quad \text{б)} \quad \sqrt{25a^3b^7}, \quad \text{в)} \quad \sqrt[3]{8a^{11}b^7c^4}.$$

30. Внеси под знакот на коренот и упрости го изразот:

$$\text{а)} \quad ab^2 \cdot \sqrt[3]{ab}, \quad \text{б)} \quad 6x^3y \cdot \sqrt{5x}, \quad \text{в)} \quad 3ac^2 \cdot \sqrt[3]{2ab}.$$

31. Упрости ги изразите:

$$\text{а)} \quad (\sqrt[3]{a^2b^3c})^4 \quad \text{б)} \quad (\sqrt{x^3y})^3 \quad \text{в)} \quad (\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{bc^3})^2$$

32. Упрости ги изразите:

$$\text{а)} \quad (\sqrt{x^3}\sqrt{y})^3, \quad \text{б)} \quad \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[4]{y}, \quad \text{в)} \quad \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}\sqrt{a}.$$

## 2.5 Степен со степенов показател рационален број

**Дефиниција 3.** Нека  $a > 0$  е реален број и  $r \in \mathbb{Q}$ , т.е.  $r = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогаш, бројот  $\sqrt[n]{a^m}$  го нарекуваме  $r$ -ти степен на  $a$ , т.е. степен со рационален степенов показател. Притоа означуваме  $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ .

**Пример 22.** Имаме:

$$\text{а) } 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}, \quad \text{б) } a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^4}, \quad \text{в) } 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4.$$

Во следнава теорема ќе ги наведеме основните својства на степени со рационален степенов показател.

**Теорема 10.** Нека  $r, r' \in \mathbb{Q}$  и  $a, b > 0$ . Тогаш, точни се формулите:

$$\text{а) } a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad \text{б) } a^r a^{r'} = a^{r+r'},$$

$$\text{в) } (a^r)^{r'} = a^{rr'}, \quad \text{г) } \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'},$$

$$\text{д) } (ab)^r = a^r b^r \text{ и } \text{ѓ) } \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

**Доказ.** а) Ако  $r = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , тогаш

$$a^{-r} = a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^r}.$$

б) Нека  $r = \frac{m}{n}$ ,  $r' = \frac{p}{q}$ ,  $m, p \in \mathbb{Z}$ ,  $n, q \in \mathbb{N}$ . Тогаш

$$a^r a^{r'} = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+r'}.$$

в) Нека  $r = \frac{m}{n}$ ,  $r' = \frac{p}{q}$ ,  $m, p \in \mathbb{Z}$ ,  $n, q \in \mathbb{N}$ . Тогаш

$$(a^r)^{r'} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = a^{rr'}.$$

г) Од а) и в) следува

$$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^r \cdot a^{-r'} = a^{r+(-r')} = a^{r-r'}.$$

д) Ако  $r = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , тогаш

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r.$$

ѓ) Од а), в) и д) следува

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = (ab^{-1})^r = a^r (b^{-1})^r = a^r b^{-r} = a^r \cdot \frac{1}{b^r} = \frac{a^r}{b^r}.$$

**Пример 23.** Имаме:

$$\text{а) } (a^{\frac{3}{5}})^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3}} = a^{\frac{2}{5}},$$

$$\text{б) } a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{5}{12}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}} = a^{\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12}} = a^{\frac{12}{12}} = a$$

$$\text{в)} (81 \cdot 16)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81 \cdot 16}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{16}} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6},$$

$$\text{г)} (2^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{3}{2}}) \cdot 2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{1}{2}} - (2^3)^{\frac{3}{2}}) \cdot 2^{\frac{3}{2}} = (2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{9}{2}}) \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} - 2^{\frac{9}{2} + \frac{3}{2}} = 2^2 - 2^6 = 4 - 64 = -60,$$

$$\text{д)} (-15 \cdot 2^{\frac{1}{n-1}}) : (3 \cdot 2^{\frac{1}{n}}) = \frac{-15 \cdot 2^{\frac{1}{n-1}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{n}}} = \frac{-15}{3} \cdot \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{2^{\frac{1}{n}}} = -5 \cdot 2^{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}} = -5 \cdot 2^{\frac{1}{n(n-1)}},$$

### Задачи

33. Претстави ги со помош на корени следниве степени:

а)  $9^{\frac{7}{8}}$ ,

б)  $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ ,

в)  $(xy^2)^{\frac{1}{5}}$ .

34. Претстави ги во вид на степени со рационален степен показател следниве изрази:

а)  $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{5}}$ ,

б)  $(b^{\frac{3}{5}} : b^{\frac{1}{5}})^{\frac{5}{6}}$ .

35. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $(\frac{27}{512})^{-\frac{1}{3}}$ ,

б)  $(0,0001)^{-\frac{1}{2}}$ ,

в)  $(\frac{1}{125})^{-\frac{1}{3}}$ .

36. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $(3^{\frac{1}{3}} - 9^{\frac{2}{3}}) \cdot 3^{\frac{5}{3}}$ ,

б)  $(5^{\frac{1}{5}} - 25^{\frac{3}{5}}) \cdot 5^{\frac{9}{5}}$ .

### Белешка за пресметување квадратен корен од реален број

Пресметувањето на квадратен корен од даден реален број можеме да го направиме со помош на дигитрон. На пример, ако го внесеме бројот 45986 и потоа го притиснеме копчето  $\sqrt{x}$ , на дисплејот на дигитронот ќе се појави бројот 214.4434657433049 (види цртеж). Значи,

$$\sqrt{45986} \approx 214,4434657433049.$$

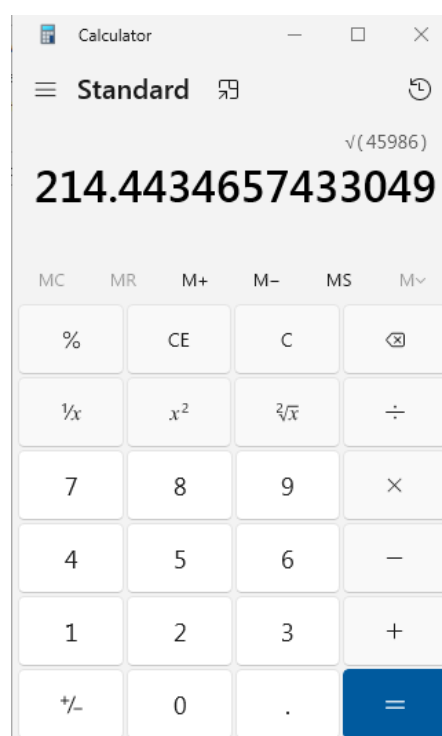
За приближно пресметување на квадратен корен од даден број постои посебен алгоритам, кој се користел пред појавата на дигитроните. Чекорите за наоѓањето на квадратен корен од природен број ќе ги покажеме на примерот за наоѓање на квадратен корен од бројот 45986. Имаме:

1) Подкореновиот број го разделуваме на групи од по две цифри од десно на лево. Притоа првата група од лево може да има и само една цифра.

2) Бараме број чиј квадрат е 4 или најблизок до 4, но е помал од 4. Тоа е бројот 2, бидејќи  $2^2 = 4$ . Значи, *првата цифра* на бараниот квадратен корен е 2.

3) Квадратот на бројот 2 го запишуваме под првата група цифри од десно и го одземаме од неа. Така го добиваме првиот остаток, бројот 0.

4) Кон добиениот остаток ја допишуваме оддесно втората група цифри 59 и од бројот 059 ја одделуваме цифрата на единиците, а преостанатиот број 5 го делиме со удвоената прва цифра на коренот, т.е. со бројот  $2 \cdot 2 = 4$  и добиваме 1. Тоа е *втората цифра* на бараниот корен.



5) Кон удвоената прва цифра (бројот 4) оддесно ја допишуваме втората цифра (цифрата 1) и така добиениот број 41 го множиме со втората цифра (цифрата 1) на коренот. Добиеениот производ 41 го одземаме од бројот 059 и го добиваме вториот остаток – бројот 18.

6) Кон вториот остаток оддесно ја допишуваме третата група цифри 86 и од бројот 1886 ја одделуваме цифрата на единиците, а преостанатиот број 188 го делиме со удвоениот број формиран од првите две цифри на коренот, т.е. со бројот  $2 \cdot 21 = 42$  и добиваме 4. Тоа е *третата цифра* на бараниот корен.

7) Третата цифра на коренот ја допишуваме до удвоениот број формиран од првите две цифри (бројот 42) и така добиениот број 424 го множиме со третата цифра (цифрата 4) на коренот. Добиеениот производ 1696 го одземаме од бројот 1886 и го добиваме третиот остаток – бројот 190.

8) Бидејќи немаме други групи цифри, запишуваме децимална записка, на третиот остаток оддесно допишуваме 00 и од бројот 19000 ја одделуваме цифрата на единиците, а преостанатиот број 1900 го делиме со удвоениот број формиран од првите три цифри на коренот, т.е. со бројот  $2 \cdot 214 = 428$  и добиваме 4. Тоа е *четвртата цифра* на бараниот корен.

9) Четвртата цифра на коренот ја допишуваме до удвоениот број формиран од првите три цифри (бројот 428) и така добиениот број 4284 го множиме со четвртата цифра (цифрата 4) на коренот. Добиеениот производ 17136 го одземаме од бројот 19000, го добиваме четвртиот остаток – бројот 1864. Потоа до добиениот остаток допишуваме 00 и ја повторуваме постапката.

$$\begin{array}{r} \sqrt{4|59|86} = 214,4 \\ \underline{4} \\ 059 \quad : 41 \cdot 1 \\ \underline{41} \\ 1886 \quad : 424 \cdot 4 \\ \underline{1696} \\ 19000 \quad : 4284 \cdot 4 \\ \underline{17136} \\ 1864 \end{array}$$

**Забелешка.** Ако треба да определиме квадратен корен од децимален број, тогаш подкореновиот број го делиме лево и десно од децималната записка на групи од по две цифри. Ако бројот на децималите е непарен, тогаш од десно допишуваме една нула и го применуваме горниот алгоритам. На пример,  $\sqrt{127,246} = \sqrt{1|27|24|60}$ .

## 2.6 Алгебарски изрази. Полиноми

Потсети се!

**Константа** е симбол кој што служи за означување на точно одреден математички објект. На пример, константи се  $\frac{1}{4}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $-3$ ,  $\pi$  и  $\emptyset$  (празно множество).

**Променлива** е симбол (најчесто буква, како:  $x, y, z, a, b, t, n, \alpha, \beta, \dots$ ) која што претставува заедничка ознака за елементите на дадено множество  $D$ . Множеството  $D$  го нарекуваме *област* или *домен* на променливата, а секој негов елемент го нарекуваме *вредност на променливата*. Во оваа смисла, ако  $x$  е заедничка ознака за реалните броеви, тогаш за  $x$  велиме дека е *реална променлива*.

Изразите формирани од бројни константи и променливи, поврзани со знаците за математичките операции, и загради ги нарекуваме *изрази со променливи* или *алгебарски изрази*.

Производот на некои бројни константи и степените со степенови показатели природни броеви од некои променливи го нарекуваме *моном*. Притоа, бројните константи, како на пример

$2, 5, -\frac{1}{5}, \sqrt{12}$  и слично, по договор ги сметаме за мономи. Понатаму, за мономот кој содржи само еден броен множител и кој не содржи степени со иста основа веламе дека е запишан во *нормален вид*. Бројниот множител на моном запишан во нормален вид го нарекуваме *коэффициент*, а другиот дел го нарекуваме *главна вредност* на мономот. За мономите кои што имаат исти главни вредности веламе дека се *слични*.

**Пример 24.** а) Изразите  $6a^2b$ ,  $3ab^2 \cdot 2a^2b$ ,  $\frac{4yz^3}{5}$  и  $2 \cdot \frac{3y^2z^3}{5}$  се мономи. Имено, кај мономот може да има делење со ненулта број, бидејќи делењето можеме да го сметаме за множење со реципрочна вредност. Така, добиваме дека  $\frac{4yz^3}{5} = \frac{4}{5} \cdot yz^3$  и  $2 \cdot \frac{3y^2z^3}{5} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot y^2z^3 = \frac{6}{5} y^2z^3$ .

Понатаму,

- за мономот  $6a^2b$  коэффициентот е 6, а главната вредност е  $a^2b$ ,

- за мономот  $\frac{4yz^3}{5}$  коэффициентот е  $\frac{4}{5}$ , а главната вредност е  $yz^3$ ,

- за мономот  $2 \cdot \frac{3y^2z^3}{5}$  коэффициентот е  $\frac{6}{5}$ , а главната вредност е  $y^2z^3$  и

- за мономот  $3ab^2 \cdot 2a^2b = 6a^3b^3$  коэффициентот е 6, а главната вредност е  $a^3b^3$ .

б) Мономите  $6a^2b$  и  $2a^2b$  се слични, бидејќи имаат исти главни вредности  $a^2b$ , но мономите  $7a^2b$  и  $7ab^2$  не се слични, бидејќи нивните главни вредности се различни.

Збирот на степените показатели од степените на променливите на еден моном го нарекуваме *степен* на тој моном.

**Пример 25.** Степените на мономите  $6a^2b$ ,  $3ab^2 \cdot 2a^2b$  и  $22xy^2z^5$  соодветно се  $2+1=3$ ,  $1+2+2+1=6$  и  $1+2+5=8$ .

Збирот на конечен број мономи го нарекуваме *полином* или *цел рационален израз*. Според тоа, и мономите ги сметаме за полиноми. Оттука, кај полином не се јавува делење со променлива или со израз што содржи променлива, па затоа тој е определен за сите вредности на неговите променливи. Понатаму, полиномот кој е збир на точно два мономи го нарекуваме *бином*, а полиномот кој е збир на точно три мономи го нарекуваме *трином*.

**Пример 26.** а) Изразите  $ax+by$ ,  $x^2zy+abxy$ ,  $4x^2+3$  и  $5+2x^3$  се биноми, а изразите  $x^2+\frac{3}{2}xy+5y$ ,  $a^3+3a^2b-4abc$  и  $axy+2ax^2+3ay^3$  се триноми. Јасно, сите овие изрази се полиноми.

б) Во изразите,  $\frac{x}{x+3}$ ,  $\frac{a+1}{b^2+2}$  и  $\frac{a^2+1}{a^2+a+1}$  имаме делење со израз во кој се јавува променлива, па затоа тие не се полиноми.

*Бројна вредност* на израз е вредноста која се добива кога во изразот на секоја променлива ќе и доделиме некоја вредност (некој реален број) и ќе ги извршиме сите операции во изразот.

**Пример 27.** а) Бројната вредност на изразот  $\frac{a^2+1}{b^2+b+1}$  за  $a=1, b=-2$  е:

$$\frac{1^2+1}{(-2)^2+(-2)+1} = \frac{2}{4-2+1} = \frac{2}{3}.$$

б) Бројната вредност на изразот  $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$  за  $a=-2, b=-1$  е:

$$\frac{(-2)^2+2(-2)(-1)+1^2}{(-2)^3+3(-2)^2(-1)+3(-2)(-1)^2+1^3} = \frac{4-4+1}{-8+12-6+1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Изразите што имаат еднакви бројни вредности за секои вредности на променливите од дефиниционото множество ги нарекуваме *идентични изрази*. Два идентични изрази, сврзани со знакот за еднаквост („=“) формираат равенство кое го нарекуваме *идентитет*.

**Пример 28.** а) Изразите  $x(x+4)$  и  $x^2+4x$  имаат еднакви бројни вредности за секоја вредност на променливата  $x$ , што значи дека се идентични изрази. Според тоа, равенството  $x(x+4)=x^2+4x$  е идентитет.

б) За изразите  $x^2-y^2$  и  $x-y$  имаат еднакви бројни вредности за  $x=y=a$ , но за  $x=2, y=0$  првиот израз има вредност  $2^2-0^2=4$ , а вториот израз има вредност  $2-0=2$ , па затоа тие не се идентични. Значи, равенството  $x^2-y^2=x-y$  не е идентитет.

в) Равенствата  $2a+3a=5a$ ,  $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$  се идентитети.

Заменувањето на еден рационален израз со друг рационален израз што е идентичен со него го нарекуваме *идентична трансформација*.

Понатаму, секој полином може да се запише во таканаречен *нормален вид*, т.е. може да се запише како збир на мономи меѓу кои нема два слични и кои се запишани во нормален вид. Оваа постапка е наречена *сведување на полиноми*. Притоа, најголемиот од степените на мономите што го сочинуваат полиномот го нарекуваме *степен на полиномот*. Сведувањето на полиномите го правиме со користење на комутативното и асоцијативното на собирањето и множењето, како и дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето.

**Пример 29.** Ќе го сведеме на нормален вид полиномот

$$A(x, y) = 7x^2y - 3xy \cdot (-2y) - 4xy^2 + 2xy \cdot (-3x) - 5x.$$

Имаме:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= 7x^2y - 3xy \cdot (-2y) - 4xy^2 + 2xy \cdot (-3x) - 5x \\ &= \underline{7x^2y} + \underline{6xy^2} - \underline{4xy^2} - \underline{6x^2y} - 5x \\ &= x^2y + 2xy^2 - 5x. \end{aligned}$$

Степените на мономите во горниот полином се 3, 3 и 1, па затоа степенот на овој полином е еднаков на 3.

**Пример 30.** Даден е полиномот  $P(x) = x^{101}(x-1)^{101}$ . Пресметај  $P(9) - P(3)P(4)$ .

**Решение.** Прво да забележиме дека

$$P(9) = 9^{101}(9-1)^{101} = 9^{101}8^{101} = 72^{101},$$

$$P(3) = 3^{101}(3-1)^{101} = 3^{101}2^{101} = 6^{101} \text{ и}$$

$$P(4) = 4^{101}(4-1)^{101} = 4^{101}3^{101} = 12^{101}.$$

Според тоа,

$$P(9) - P(3)P(4) = 72^{101} - 6^{101}12^{101} = 72^{101} - (6 \cdot 12)^{101} = 72^{101} - 72^{101} = 0.$$

Задачи

37. Запиши ги во нормален вид мономите: а)  $4x^2y \cdot 0,5x$ , б)  $2a \cdot 3x^2 \cdot (-6a^2x)$ .
38. Определи ги коефициентот, главната вредност и степенот на мономот:  
а)  $7a^3$ , б)  $0,12ab^4$ , в)  $4x^2y \cdot 0,5x$ , г)  $3a \cdot 3x^2 \cdot (-6a^2x)$ .
39. Провери дали се слични мономите:  
а)  $5a^2b^2c$  и  $5a^2bc^2$  б)  $4x^2y \cdot 0,5x$  и  $12x^3y$ .
40. Пресметај ја вредноста на алгебарскиот израз:  
а)  $4a^2 + 5b^3$ , за  $a=1, b=-2$ , б)  $\frac{x^2+2xy+y^2}{x-y}$ , за  $x=4, y=3$ .
41. Провери дали се идентитети следниве равенства:  
а)  $3x(x+y) = 3x^2 + 3xy$ , б)  $(x+2y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ , в)  $\frac{xy(3x-2y)}{y(3x-2y)} = x$ .
42. Сведи го на нормален вид полиномот и определи го неговиот степен:  
а)  $4x^3 - 2x^2 + 3x - 5 - 8x + 4 + 5x^2$ , б)  $11a^2b^2c + 15ab^2c^2 - 7b^2ca^2$ .
43. Даден е полиномот  $P(x) = (x+1)^{101}x^{101}$ . Пресметај  $P(8) - P(2)P(3)$ .

## 2.7 Операции со полиноми. Формули за скратено множење

Во оваа лекција ќе ги разгледаме операциите со полиноми и ќе изведеме некои од таканаречените формули за скратено множење.

При сведувањето на полиноми на нормален вид ние всушност собиравме полиноми. Да разгледаме уште еден пример.

**Пример 31.** Собери ги полиномите:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 12 \text{ и } Q(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 4.$$

**Решение.** Имаме:

$$P(x) + Q(x) = \underline{x^3} + \underline{2x^2} + \underline{3x} - 12 + x^4 - \underline{2x^3} - \underline{x^2} + \underline{2x} + 4 = x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 8.$$

Понатаму, знаеш дека

- полином се множи со моном така што секој член на полиномот се помножува со мономот и добиените производи се собираат,
- полином се множи со полином така што секој член на првиот полином се множи со секој член на вториот полином и добиените производи се собираат.

**Пример 32.** Помножи ги полиномот  $6xy - 5x^2 + 2x - 3y$  и мономот  $4xy$ . Определи го степенот на добиениот полином.

**Решение.** Од дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето следува:

$$(6xy - 5x^2 + 2x - 3y) \cdot 4xy = 6xy \cdot 4xy - 5x^2 \cdot 4xy + 2x \cdot 4xy - 3y \cdot 4xy \\ = 24x^2y^2 - 20x^3y + 8x^2y - 12xy^2.$$

Забележуваме дека степенот на добиениот полином е еднаков на 4, т.е.  $4 = 2 + 2$ , што значи дека тој е еднаков на збирот на степените на множителите. Во општ случај ова важи за производот на секој полином со секој моном.

**Пример 33.** Помножи ги полиномите  $x^2 + 2xy + y$  и  $x + 3y$ . Определи го степенот на добиениот полином.

**Решение.** Имаме:

$$(x^2 + 2xy + y)(x + 3y) = x^2 \cdot x + 2xy \cdot x + y \cdot x + x^2 \cdot 3y + 2xy \cdot 3y + y \cdot 3y \\ = x^3 + \underline{2x^2y} + \underline{xy} + \underline{3x^2y} + 6xy^2 + 3y^2 \\ = x^3 + 5x^2y + 6xy^2 + xy + 3y^2.$$

Забележуваме дека степенот на добиениот полином е еднаков на 3, т.е.  $3 = 2 + 1$ , што значи дека тој е еднаков на збирот на степените на множителите. Во општ случај ова важи за производот на секои два полиноми.

Претходно видовме како се множат два полиноми. Сега, ако биномот  $a + b$  го помножиме сам со себе, добиваме

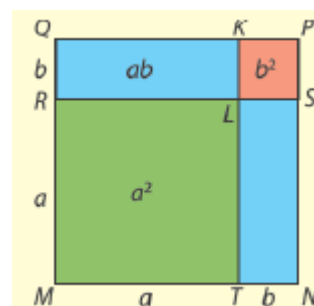
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2,$$

т.е. точна е формулата

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1)$$

Формулата (1) можеме да ја добиеме и геометриски, како што е прикажано на цртежот. Имаме:

$$(a + b)^2 = P_{MNPQ} = P_{MTLR} + P_{TNSL} + P_{KQRL} + P_{LSPK} \\ = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Понатаму, ако биномот  $a - b$  го помножиме сам со себе, добиваме

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2,$$

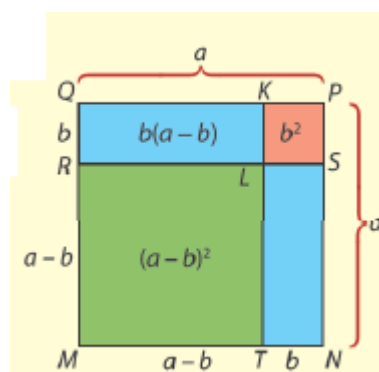
т.е. точна е формулата

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (2)$$

Формулата (2) можеме да ја добиеме и геометриски, како што е прикажано на цртежот. Имаме:

$$(a - b)^2 = P_{MTLR} = P_{MNPQ} - P_{TNSL} - P_{KQRL} - P_{LSPK} \\ = a^2 - b(a - b) - (a - b)b - b^2 \\ = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Да забележиме дека  $a$  и  $b$  во формулите (1) и (2) можат да бидат кои било мономи или полиноми.



**Пример 34. а)** Имаме:



$$(a+5)^2 = a^2 + 2 \cdot 5a + 5^2 = a^2 + 10a + 25,$$

$$(4a-2b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 2b + (2b)^2 = 16a^2 - 16ab + 4b^2.$$

б) Имаме:

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3b + (3b)^2 = (a+3b)^2,$$

$$x^4 - 10x^3y^3 + 25x^2y^6 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 5xy^3 + (5xy^3)^2 = (x^2 - 5xy^3)^2.$$

в)  $97^2 = (100-3)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409.$

г)  $215^2 = (200+15)^2 = 200^2 + 2 \cdot 200 \cdot 15 + 15^2 = 40000 + 6000 + 225 = 46225.$

**Пример 35.** Докажи дека

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca. \quad (3)$$

Од формулата (1) непосредно следува:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca. \end{aligned}$$

На цртежот е дадено како геометриски може да се добие формулата (3).

|     | $a$   | $b$   | $c$   |
|-----|-------|-------|-------|
| $a$ | $a^2$ | $ab$  | $ac$  |
| $b$ | $ab$  | $b^2$ | $bc$  |
| $c$ | $ac$  | $bc$  | $c^2$ |

Ако ги помножиме биномите  $a+b$  и  $a-b$ , добиваме

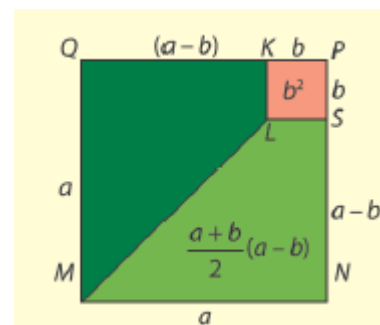
$$(a+b)(a-b) = a \cdot a + b \cdot a - a \cdot b + b \cdot b = a^2 - b^2,$$

т.е. точна е формулата

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \quad (4)$$

Формулата (4) можеме да ја добиеме и геометриски, како што е прикажано на цртежот. Имаме:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= P_{MNPQ} - P_{LSPK} = P_{MNSL} + P_{MQKL} \\ &= \frac{a+b}{2}(a-b) + \frac{a+b}{2}(a-b) = 2 \cdot \frac{a+b}{2}(a-b) \\ &= (a+b)(a-b). \end{aligned}$$



Да забележиме дека  $a$ ,  $b$  и  $c$  во формулите (3) и (4) можат да бидат кои било мономи или полиноми.

**Пример 36.** Имаме:

а)  $(3x-5y)(3x+5y) = (3x)^2 - (5y)^2 = 9x^2 - 25y^2,$

б)  $(x\sqrt{2} - \sqrt{3})(x\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (x\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 3,$

в)  $986 \cdot 1014 = (1000-14) \cdot (1000+14) = 1000^2 - 14^2 = 1000000 - 196 = 999804,$

г)  $7,26^2 - 2,26^2 = (7,26+2,26)(7,26-2,26) = 9,52 \cdot 5 = 47,6.$

*За оние што сакаат да знаат повеќе.* а) Ако ја искористиме формулата (1) и правилото за множење на полиноми, добиваме

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\
 &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,
 \end{aligned}$$

односно

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (5)$$

Геометрискиот доказ на (5) е даден на цртежите. Имено, ако коцка  $A$  со должина на раб  $a+b$  расечеме на покажаниот начин, добиваме

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= V_A = V_D + 3V_B + V_C \\
 &= a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
 \end{aligned}$$

Понатаму, ако во (5) наместо  $b$  ставиме  $-b$ , добиваме

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \quad (6)$$

б) Да ги помножиме полиномите  $a-b$  и  $a^2 + ab + b^2$ . Добиваме

$$\begin{aligned}
 (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a \cdot a^2 + a \cdot ab + a \cdot b^2 - b \cdot a^2 - b \cdot ab - b \cdot b^2 \\
 &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - b^2a - b^3 \\
 &= a^3 - b^3,
 \end{aligned}$$

што значи дека е точна формулата

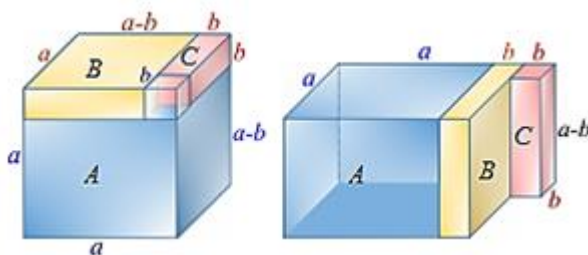
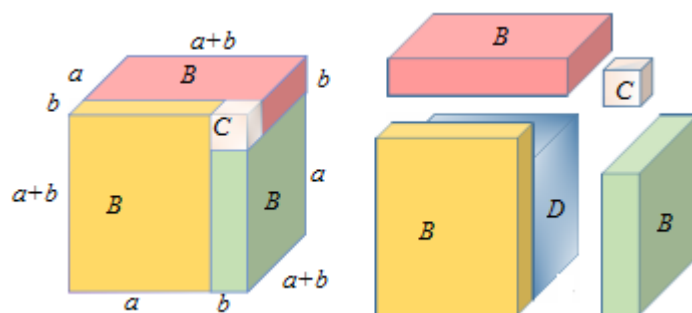
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2). \quad (7)$$

Геометрискиот доказ на (7) е даден на цртежите. Имено, ако коцка со должина на раб  $a$  расечеме на покажаниот начин, добиваме

$$\begin{aligned}
 a^3 - b^3 &= V_A + V_B + V_C \\
 &= (a-b)a^2 + (a-b)ab + (a-b)b^2 \\
 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2).
 \end{aligned}$$

Понатаму, ако во (7) наместо  $b$  ставиме  $-b$ , добиваме

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2). \quad (8)$$



**Пример 28\*.** Имаме:

$$\begin{aligned}
 (a+2)^3 &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 2 + 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8, \\
 (2x-y)^3 &= (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 - y^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3, \\
 a^3 + 8 &= a^3 + 2^3 = (a+2)(a^2 - 2a + 2^2) = (a+2)(a^2 - 2a + 4), \\
 8x^3 - y^3 &= (2x)^3 - y^3 = (2x-y)((2x)^2 + 2x \cdot y + y^2) = (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2).
 \end{aligned}$$

Претходно видовме како се собираат и множат полиноми. За одземањето на полиноми постапуваме на следниов начин:  $P - Q = P + (-1)Q$ .

Пресметај ја разликата на полиномите  $x^2 + 2xy + y$  и  $xy + 3y$ .

Останува уште да видиме како се делат полиноми. Правилото за делење на полином со моном произлегува од правилото за делење на збир со рационален број и истото гласи:

*Полином се дели со моном така што секој член на полиномот се дели со мономот и добиените количници се собираат.*

**Пример 37.** Полиномот  $18ax^4y^3 + 2x^5y^2$  подели го со мономот  $4x^2y$ .

**Решение.** Имаме:

$$(18ax^4y^3 + 2x^5y^2) : (4x^2y) = \frac{18ax^4y^3}{4x^2y} + \frac{2x^5y^2}{4x^2y} = \frac{18}{4}ax^{4-2}y^{3-1} + \frac{2}{4}x^{5-2}y^{2-1} = \frac{9}{2}ax^2y^2 + \frac{1}{2}x^3y.$$

Постапката за делење на два полиноми е слична на постапката за делење на два природни броја. Таа се состои во следново:

1) Деленикот и делителот ги подредуваме според степените на една од променливите кои се среќаваат во нив.

2) Првиот член на деленикот се дели со првиот член на делителот и се добива првиот член на количникот.

3) Првиот член на количникот се множи со делителот и добиениот производ се одзема од деленикот.

4) Првиот член од добиениот остаток се дели со првиот член од делителот и се добива вториот член од количникот. Постапката продолжува се додека не се добие остаток нула или остаток чиј степен по избраната променлива по која ги подредивме полиномите е помал од степенот на делителот по истата променлива.

**Пример 38.** а) Полиномот  $p(x) = x^2 + 3x + 2$  подели го со полиномот  $q(x) = x + 2$ .

б) Полиномот  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$  подели го со полиномот  $q(x) = x - 2$ .

**Решение.** а) Имаме:

$$\begin{array}{r} (x^2 + 3x + 2) : (x + 2) = x + 1 \\ \underline{\pm x^2 \pm 2x} \phantom{+ 2} \\ x + 2 \\ \underline{\pm x \pm 2} \\ 0 \end{array}$$

Значи,  $p(x) : q(x) = x + 1$ .

в) Имаме:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 3x^2 - x + 1) : (x - 2) = 2x^2 + x + 1 \\ \underline{\pm 2x^3 \mp 4x^2} \phantom{- x + 1} \\ x^2 - x + 1 \\ \underline{\pm x^2 \mp 2x} \phantom{+ 1} \\ x + 1 \\ \underline{\pm x \mp 2} \\ 3 \end{array}$$

Добиваме остаток 3 . Понатамошно делење не е можно бидејќи 3 е константен полином, а делителот  $q(x) = x - 2$  е полином од прв степен. Резултатот го запишуваме во облик

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^3 - 3x^2 - x + 1}{x - 2} = \frac{(x-2)(2x^2 + x + 1) + 3}{x - 2} = 2x^2 + x + 1 + \frac{3}{x-2}.$$

Задачи

44. Пресметај:

- а)  $4 \cdot (5x^3 - 2x + 1) + (4x^2 - x + 3)(-5x)$ ,      б)  $(x^2 + 3)(x^2 - 2)$ ,  
 в)  $(3xy + 2x)(4xy - 3y)$ ,      г)  $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$ .

45. Пресметај:

- а)  $(3a + 2b)^2$ ,      б)  $(5x^2 - 4z^3)^2$ ,      в)  $(x^3 + 3x^2 + 1)^2$ ,  
 г)  $89^2$ ,      д)  $79 \cdot 101$ ,      е)  $55 \cdot 75$ .

46. Пресметај:

- а)  $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$ ,      б)  $(2x^2 - 3y)(2x^2 + 3y)$ ,  
 в)  $(1 - x^2)(1 + x^2)(x^4 + 1)$ ,      г)  $0,0102^2 - 0,01^2$

47. Едната катета на правоаголниот триаголник е 8. Определи ја другата катета ако хипотенузата е за 5 подолга од таа катета.

48. Докажи дека квадратот на должината на едната катета во правоаголен триаголник е еднаков на производот на збирот ни разликата на другите две страни.

49. Полиномот  $p(x) = x^4 + 3x + 2$  подели го со полиномот  $q(x) = x + 1$ .

50. Полиномот  $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 3$  подели го со полиномот  $q(x) = x^2 - 2$ .

51. Полиномот  $6x^2y^2 - 13y^3 + 8x^3 - 12x^2y + 6y^4$  подели го со полиномот  $2x - 3y$ .

52. Користејќи ги формулите за скратено множење пресметај:

- а)  $\sqrt{23^2 + 46 \cdot 5^2 + 5^4} - \sqrt{50^2 - 14^2}$ ,      б)  $\frac{13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 27 + 9^3}{44,5^2 - 19,5^2}$ .

## 2.8 Разложување на полиноми на множители

Во претходната лекција видовме дека не е тешко да се помножат два полиноми. Меѓутоа обратната постапка, т.е. даден полином да се запише како производ на два множителя е доста потешка. Во продолжение, преку примери, ќе разгледаме три постапки за разложување на полином на множители.

Ако сите членови на даден полином имаат заеднички множител, тогаш, користејќи го дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето, пред заграда можеме да го извлечеме тој множител. Ова во некои случаи ни овозможува даден полином да го разложиме на множители. Да разгледаме еден пример.

**Пример 39.** Разложи го на множители полиномот:

- а)  $9x^2y^2 + 12x^3y - 6x^2y$ ,      б)  $7ax^4 - 21a^2x^3 + 14a^3x^2$ ,  
 в)  $8a^2(x - 6) - 16a(6 - x) + 24b(x - 6)$ ,      г)  $x^2(a + x) - a^2(x + a) + ax(a + x)$ .

**Решение.** Имаме:

а)  $9x^2y^2 + 12x^3y - 6x^2y = 3x^2y(3y + 4x - 2),$

б)  $7ax^4 - 21a^2x^3 + 14a^3x^2 = 7ax^2(x^2 - 3ax + 2a^2),$

в)  $8a^2(x - 6) - 16a(6 - x) + 24b(x - 6) = 8(x - 6)(a^2 + 2a + 3b),$

г)  $x^2(a + x) - a^2(x + a) + ax(a + x) = (a + x)(x^2 - a^2 + ax).$

Покрај споменатата идеја, за разложувањето на полиномите на множители ги користиме и формулите за скратено множење. Да разгледаме еден пример.

**Пример 40.** Разложи го полиномот на множители:

а)  $a^4b^2 - 81x^2,$

б)  $a^4 - 1,$

в)  $4a^5 - a^3x^2,$

г)  $4ax^2 + 4ax + a.$

**Решение.** Имаме:

а)  $a^4b^2 - 81x^2 = (a^2b)^2 - (9x)^2 = (a^2b - 9x)(a^2b + 9x),$

б)  $a^4 - 1 = (a^2)^2 - 1^2 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1),$

в)  $4a^5 - a^3x^2 = a^3(4a^2 - x^2) = a^3((2a)^2 - x^2) = a^3(2a - x)(2a + x),$

г)  $4ax^2 + 4ax + a = a(4x^2 + 4x + 1) = a((2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1) = a(2x + 1)^2.$

Претходните две идеи за разложување на полиномите на множители често пати се комбинираат со таканареченото групирање на членовите на полиномот. Да разгледаме еден пример.

**Пример 41.** Разложи го полиномот на множители:

а)  $2a^2 + ab + 2ac + bc,$

б)  $8x^3 + 8x^2y - 18xy^2 - 18y^3,$

в)  $x^3 + x^2 - x - 1,$

г)  $8a^3 - 12a^2b - 18ab^2 + 27b^3.$

**Решение.** а) Последователно наоѓаме:

$$2a^2 + ab + 2ac + bc = a(2a + b) + c(2a + b) = (2a + b)(a + c).$$

б) Последователно наоѓаме:

$$\begin{aligned} 8x^3 + 8x^2y - 18xy^2 - 18y^3 &= 8x^2(x + y) - 18y^2(x + y) = 2(x + y)(4x^2 - 9y^2) \\ &= 2(x + y)(2x - 3y)(2x + 3y). \end{aligned}$$

в) Последователно наоѓаме:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

г) Последователно наоѓаме:

$$\begin{aligned} 8a^3 - 12a^2b - 18ab^2 + 27b^3 &= 4a^2(2a + 3b) - 9b^2(2a + 3b) = (2a + 3b)(4a^2 - 9b^2) \\ &= (2a + 3b)(2a - 3b)(2a + 3b) = (2a - 3b)(2a + 3b)^2. \end{aligned}$$

Во голем број случаи за да се разложи еден полином на множители, односно за да се упрости даден израз потребно е на полиномот (изразот) да му се додаде и одземе еден или повеќе мономи. Да разгледаме неколку примери.

**Пример 42\*.** Разложи го полиномот на множители:

а)  $P(x) = x^3 - 7x + 6$

б)  $P(x) = x^8 + x^4 + 1$ ,

в)  $P(x) = x^5 + x + 1$ .

**Решение.** а) Последователно добиваме:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2 - 1) - 6(x - 1) \\ &= x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x^2 - 2x + 3x - 6) \\ &= (x - 1)[x(x - 2) + 3(x - 2)] = (x - 1)(x - 2)(x + 3). \end{aligned}$$

б) Последователно наоѓаме:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 \\ &= (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2) = (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= [(x^2 + 1)^2 - x^2](x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)((x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}x)^2) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1 - \sqrt{3}x)(x^2 + 1 + \sqrt{3}x). \end{aligned}$$

в) Последователно наоѓаме,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 + x + 1 = (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

**Пример 43\*.** Упрости го изразот:

$$P(a, b) = [(4a + 5b)^2]^2 - [(4a - 5b)^2]^2 - 160ab(4a - 5b)^2.$$

**Решение.** Последователно добиваме:

$$\begin{aligned} P(a, b) &= [(4a + 5b)^2 - (4a - 5b)^2][(4a + 5b)^2 + (4a - 5b)^2] - 160ab(4a - 5b)^2 \\ &= (4a + 5b + 4a - 5b)(4a + 5b - 4a + 5b)[(4a + 5b)^2 + (4a - 5b)^2] - 160ab(4a - 5b)^2 \\ &= 8a \cdot 10b[(4a + 5b)^2 + (4a - 5b)^2] - 160ab(4a - 5b)^2 \\ &= 80ab \cdot (4a + 5b)^2 + 80ab \cdot (4a - 5b)^2 - 160ab \cdot (4a - 5b)^2 \\ &= 80ab \cdot [(4a + 5b)^2 - (4a - 5b)^2] \\ &= 80ab(4a + 5b + 4a - 5b)(4a + 5b - 4a + 5b) \\ &= 80ab \cdot 8a \cdot 10b = 6400a^2b^2. \end{aligned}$$

**Задачи**

53. Разложи го полиномот на множители:

а)  $10a^2 + 5a$ ,

б)  $28axc^4 - 21a^2c^3 + 14a^3xc^2$

54. Разложи го полиномот на множители:

а)  $a + (a - 1)a^2 - 1 - a(1 - a)$ ,

б)  $28xy - 12a^2x + 9a^2 - 21y$ ,

в)  $xyz + x^2y^2 + 3x^4y^5 + 3x^3y^4z - xy - z$ .

55. Разложи го полиномот на множители:

а)  $x^2(a - 4) - y^2(4 - a)$

б)  $x^2(a^2 - a - 1) - a^2 + a + 1$ ,

в)  $21x^3y^4 - 14xy^3$ ,

г)  $(2x - 1)^2 - 16y^2$ .

56. Разложи го полиномот на множители:

а)  $9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$ ,

б)  $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ ,

в)  $a^3 - ba^2 + 3b^3 - 2a^2b$ ,

г)  $8a^3 - 12a^2b - 18ab^2 + 27b^3$ .

57. Разложи го полиномот на множители

$$bc(b+c) + ca(c-a) - ab(a+b).$$

58. Упрости го изразот:

а)  $(2x-y)^2 + y^2 - 2y(y+2x)$ ,

б)  $\frac{1}{2}(x+y)(2x-2y) - y^2$ ,

в)  $(x-\sqrt{5})(x^2+5)(x+\sqrt{5}) - (x^2+2)^2 + 2(2x)^2$ .

59. Пресметај:

$$[1 - (\frac{1}{2})^2] \cdot [1 - (\frac{1}{3})^2] \cdot [1 - (\frac{1}{4})^2] \cdot \dots \cdot [1 - (\frac{1}{100})^2].$$

60. Должината на катетата на правоаголникот триаголник е  $7\text{ cm}$ , а хипотенузата е  $1\text{ cm}$  подолга од другата катета. Пресметај го периметарот на овој триаголник.

61. Разликата на должините на страните на правоаголникот е  $2\text{ cm}$ , а должината на него-вата дијагонала е  $10\text{ cm}$ . Определи ја плоштината на овој правоаголник.

## 2.8 Најголем заеднички делител (НЗД) и најмал заеднички содржател на полиноми (НЗС)

Веќе научи да собираш, множиш и делиш полиноми, да разложуваш полиноми на множители и да упростуваш полиноми. Понатаму, знаеш дека при делењето на полиноми може да има остаток 0 (пример 38 а)) или ненулта остаток (пример 38 б)). Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 4.** За полиномот  $P$  ќе велиме дека е *делив со полиномот*  $Q$ , ако постои ненулта полином  $R$  таков, што  $P = Q \cdot R$ . Притоа ќе пишуваме  $Q | P$ . За полиномот  $Q$  велиме дека е *делител* на полиномот  $P$ , а за полиномот  $P$  дека е *содржател* на полиномот  $Q$ .

**Пример 44.** Да го разгледаме полиномот  $P(x, y) = x^2y + xy$ . Од  $x^2y + xy = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha xy(x+1)$ , каде  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  следува дека делители на полиномот  $P(x, y)$  се полиномите:

$$\alpha, \alpha x, \alpha y, \alpha xy, \alpha(x+1), \alpha x(x+1), \alpha y(x+1), \alpha xy(x+1), \text{ каде } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

**Дефиниција 5.** Ако  $P$  и  $Q$  се два полинома и ако за ненултиот полином  $R$  важи  $R | P$  и  $R | Q$ , тогаш ќе велиме дека полиномот  $R$  е *заеднички делител* на полиномите  $P$  и  $Q$ .

**Пример 45.** Делителите на полиномот  $Q(x) = x(x+1)^2$  се полиномите:

$$\alpha, \alpha x, \alpha x(x+1), \alpha(x+1), \alpha x(x+1)^2, \text{ каде } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Сега, од (1) и (2) следува дека заеднички делители на  $P(x, y) = x^2y + xy$  и  $Q(x) = x(x+1)^2$  се полиномите:

$$\alpha, \alpha x, \alpha(x+1), \alpha x(x+1), \text{ каде } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Во пример 45 гледаме дека заедничкиот делител  $\alpha x(x+1)$  на  $P(x, y) = x^2y + xy$  и  $Q(x) = x(x+1)^2$  е содржател на сите други заеднички делители на овие два полиноми. Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 6.** Полиномот  $d$  е *најголем заеднички делител* (НЗД) на полиномите  $P$  и  $Q$  ако  $d \mid P$ ,  $d \mid Q$  и ако секој заеднички делител на  $P$  и  $Q$  е делител и на  $d$ .

За полиномите  $P$  и  $Q$  ќе велиме дека се *заемно прости* ако нивниот најголем заеднички делител е ненулта константа.

Од претходно кажаното следува: ако полиномот  $d$  е најголем заеднички делител на полиномите  $P$  и  $Q$ , тогаш и секој полином  $\alpha d$ ,  $\alpha \neq 0$  е најголем заеднички делител на полиномите  $P$  и  $Q$ .

За НЗД на полиномите точна е следнава теорема, која нема да ја докажуваме.

**Теорема 11.** За секои два ненулти полинома  $P$  и  $Q$  постои најголем заеднички делител, кој е единствен со точност до мултипликативна константа.

**Пример 46.** а) За полиномите  $36x^4y^3$  и  $22x^2y^5$  најголемиот заеднички делител е од видот  $\alpha x^2y^3$ , каде  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Притоа, во разложувањата на множители на двата полиноми се јавуваат броевите 36 и 22, па за поедноставно користење на НЗД на двата полинома земаме  $\alpha = \text{НЗД}(36, 22) = 2$ . Значи,

$$\text{НЗД}(36x^4y^3, 22x^2y^5) = 2x^2y^3.$$

б) Аналогно како под а) за полиномите  $14(a+1)^2(a-4)$  и  $21a^2(a+1)^5$  имаме

$$\text{НЗД}(14(a+1)^2(a-4), 21a^2(a+1)^5) = 7(a+1)^2.$$

Од горните примери може да се заклучи дека, НЗД на два или повеќе полиноми го наоѓаме на следниов начин:

- дадените полиноми ги разложуваме на прости множители, т.е. на полиноми кои што понатаму не може да се разложуваат,
- меѓусебно ги множиме сите прости множители што се заеднички за дадените полиноми, при што секој од нив го земаме со најмалиот степен показател со кој се јавува во разложените полиноми.

**Пример 47.** Определи НЗД за полиномите:

$$2a^2 - 2ab, 8a^2 - 8b^2, 4b^2 - 4ab.$$

**Решение.** Имаме:

$$2a^2 - 2ab = 2a(a-b), \quad 8a^2 - 8b^2 = 8(a-b)(a+b), \quad 4b^2 - 4ab = -4b(a-b).$$

Сега, ако ја примениме погоре опишаната постапка добиваме

$$\text{НЗД}(2a^2 - 2ab, 8a^2 - 8b^2, 4b^2 - 4ab) = 2(a-b).$$



Според дефиниција 4 содржател на еден полином е полином којшто е делив (т.е. се дели без остаток) со дадениот. Во врска со содржателите на полиномите ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 7.** *Заеднички содржател* на два или повеќе дадени полиноми е полином којшто е содржател на секој од дадените полиноми.

**Пример 48.** За полиномите  $2a$  и  $3(a-b)$  заеднички содржатели се полиномите

$$6a(a-b), 12a(a-b), 18a(a-b)c, 12a^2(a-b), 6a(a-b)^2, \dots$$

Од дефиниција 8 следува дека за полиномите  $2a$  и  $3(a-b)$  заеднички содржател е секој полином од видот  $6a(a-b) \cdot P$ , каде што  $P$  е произволен полином со кои било променливи.

Од дефиницијата 7 следува дека, два или повеќе дадени полиноми имаат безброј многу заеднички содржатели. Во врска со заедничките содржатели на два или повеќе дадени полиноми ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 8.** Заедничкиот содржател на два или повеќе дадени полиноми кој е делител на сите други содржатели го нарекуваме *најмал заеднички содржател* (НЗС) на дадените полиноми.

За НЗС на полиномите точна е следнава теорема, која нема да ја докажуваме.

**Теорема 12.** За секои два ненулти полинома  $P$  и  $Q$  постои најмал заеднички содржател, кој е единствен со точност до мултипликативна константа.

**Пример 49.** Најди НЗС на полиномите  $2x-2$ ,  $x^2-1$ ,  $3x^2+6x+3$ .

**Решение.** Наоѓаме:

$$P(x) = 2x - 2 = 2(x-1), \quad Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \text{ и}$$

$$R(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2.$$

Сега,  $\text{НЗС}(P(x), Q(x), R(x)) = 2 \cdot 3(x-1)(x+1)^2 = 6(x-1)(x+1)^2$ .

Од горниот пример може да се заклучи дека, НЗС на два или повеќе полиноми го наоѓаме на следниов начин:

- дадените полиноми ги разложуваме на прости множители, т.е. на полиноми кои што понатаму не може да се разложуваат,
- потоа се формира производ од сите прости множители така што секој множител се зема со најголемиот степен показател со кој се јавува во разложените полиноми.

**Пример 50.** Најди НЗС на полиномите:  $2x^3 + x^2 - 4x - 12$  и  $x^2 + x - 6$

**Решение.** Имаме:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 12 = 2(x^3 - 8) + x^2 - 4x + 4$$

$$= 2(x-2)(x^2 + 2x + 4) + (x-2)^2$$

$$= (x-2)(2x^2 + 4x + 8 + x - 2) = (x-2)(2x^2 + 5x + 6)$$

$$Q(x) = x^2 + x - 6 = x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x-2) + 3(x-2) = (x-2)(x+3).$$

Простите множители во дадените полиноми се сите на прв степен, па затоа

$$\text{НЗС } (P(x), Q(x)) = (x-2)(x+3)(2x^2+5x+6).$$

Задачи

62. Најди НЗД за полиномите:

а)  $6x^2y^3, 15x^3y^4, 12x^2y,$

б)  $a^3-4a, a^4-4a^3+4a^2, a^2x-2ax,$

в)  $ax(a-x)^2, x^2(a+x)(a-x), axy(a-x)^3,$

г)  $a^3+a^2+a+1, a^2+2a+1, a^2-1.$

63. Најди НЗС на мономите>

а)  $-24x^3y^2, 6xyz, 18x^2z,$

б)  $x-y, x^2+xy+y^2,$

в)  $6xy+9y^2, 4x^2+6xy,$

г)  $xy, x^2+xy, xy+y^2.$

64. Најди НЗД и НЗС на полиномите:

а)  $3x-6y, x^2-4xy+4y^2, 2x^2-8y^2$

б)  $a^2-7a, a^3-49a, a^2-14a+49,$

в)  $2a^3+12a^2x+18ax^2, 2a^2-18x^3.$

## 2.10 Алгебарски дробки. Проширување и скратување

Како што рековме, изразите формирани од бројни константи и променливи, поврзани со знаците за математичките операции, и загради ги нарекуваме *изрази со променливи* или *алгебарски изрази*. Понатаму, видовме дека полиномите се алгебарски изрази и се запознавме со операциите со полиномите, нивното разложување и наоањето на НЗД и НЗС на два или повеќе полиноми. Во оваа лекција, користејќи ги полиномите, ќе дефинираме нов вид алгебарски изрази, а тоа се алгебарските дробки. Попрецизно ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 9.** Нека  $P$  и  $Q$  се полиноми. Изразот

$$\frac{P}{Q}, Q \neq 0 \quad (1)$$

го нарекуваме *алгебарска дробка*. Полиномот  $P$  го нарекуваме *броител*, а полиномот  $Q$  именител на *дропката*  $\frac{P}{Q}$ .

**Пример 51.** а) Изразите

$$\frac{x}{2a^3b^2}, \frac{7}{10abc}, \frac{1}{2x-2}, \frac{2-x}{(1-x)(1+x)}, \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2} \text{ и } \frac{x^3+x^2+3x^2y+2xy+3xy^2+y^2+y^3}{2x^3+x^2y-4xy^2-3y^3}$$

се алгебарски дробки.

б) Обичните дробки, како на пример  $\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{4}$  и  $\frac{23,23}{\sqrt{2}}$ , ги сметаме за алгебарски дробки.

Дадена алгебарска дробка има смисла само кога именителот е различен од нула. Според тоа, променливите во алгебарската дробка може да ги примаат само оние вредности, за кои именителот има вредност различна од нула. За овие вредности велиме дека се *допуштени вредности на променливите на дробката*, односно дека *дропката е дефинирана на тие вредности на променливите*.

**Пример 52.** Определи ги допуштените вредности на променливите во алгебарските дроб-ки:

а)  $\frac{3a}{a-3}$ ,      б)  $\frac{3a}{2a+4}$ ,      в)  $\frac{3-a}{a(a-1)}$       г)  $\frac{b+1}{(b-1)(b-2)(b-3)}$ .

**Решение.** а) За дробката  $\frac{3a}{a-3}$  допуштени се вредностите за кои именителот е различен од 0, односно  $a-3 \neq 0$ , од каде добиваме  $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

б) Именителот на дробката треба да е различен од 0, т.е.  $2a+4 \neq 0$ , од каде добиваме  $a \neq -2$ , односно  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

в) Именителот на дробката треба да е различен од 0, т.е.  $a(a-1) \neq 0$ , од каде следува  $a \neq 0$  и  $a \neq 1$ , па затоа  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

г) На потполно ист начин како во претходните случаи се добива  $b \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ .

**Дефиниција 10.** За две алгебарски дробки  $\frac{P}{Q}$  и  $\frac{R}{S}$  велиме дека се *идентични* еднакви, ако за секоја комбинација на допуштените вредности на променливите во двете дробки соодветните бројни вредности на тие дробки се еднакви. Во тој случај равенството  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$  го нарекуваме *идентитет* (над множеството допуштени вредности).

**Теорема 13.** а) Нека се дадени алгебарските дробки  $\frac{P}{Q}$  и  $\frac{R}{S}$  ( $Q \neq 0$ ,  $S \neq 0$ ). Тогаш  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$  ако и само ако  $PS = QR$ .

б) Ако и броителот и именителот на алгебарската дробка  $\frac{P}{Q}$ ,  $Q \neq 0$  се помножи со ист полином  $T$  различен од нула, се добива дробка која што е идентично еднаква на дадената, т.е.

$$\frac{P}{Q} = \frac{PT}{QT}, T \neq 0. \quad (2)$$

Притоа велиме дека дадената дробка е *проширена* со полиномот  $T$ .

**Пример 53.** Дробката  $\frac{x-2}{x+2}$  прошири ја со полиномот  $x^2+1$ .

**Решение.** Јасно,  $x^2+1 \geq 1 > 0$ , па затоа бараното проширување е

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-2x^2+x-2}.$$

Со помош на својството за проширување на дробки, две или повеќе дробки може да се сведат на дробки со еднакви именители. Постапката на сведување на дробки на еднакви именители може да се согледа од следниов пример.

**Пример 54.** а) Сведи ги на заеднички именител дробките:

а)  $\frac{x}{2a^3b^2}$ ,  $\frac{7}{10abc}$  и  $\frac{1}{6a^2b}$ .      б)  $\frac{3}{a+1}$  и  $\frac{2}{a-2}$ .

**Решение.** а) Именителите на дадените дробки се мономи. За заеднички именител на дробките обично ќе го земаме најмалиот заеднички содржател на именителите. Имаме,

$$\text{НЗС}(2a^3b^2, 10abc, 6a^2b) = 30a^3b^2c.$$

Ги одредуваме дополнителните множители на секоја од дадените дробки:

$$30a^3b^2c : 2a^3b^2 = 15c, \quad 30a^3b^2c : 10abc = 3a^2b \quad \text{и} \quad 30a^3b^2c : 6a^2b = 5abc.$$

Секоја од дробките ја множиме со дополнителните множители и наоѓаме

$$\frac{x}{2a^3b^2} \cdot \frac{15c}{15c} = \frac{15cx}{30a^3b^2c}, \quad \frac{7}{10abc} \cdot \frac{3a^2b}{3a^2b} = \frac{21a^2b}{30a^3b^2c} \quad \text{и} \quad \frac{1}{6a^2b} \cdot \frac{5abc}{5abc} = \frac{5abc}{30a^3b^2c}.$$

б) Именителите на дадените дробки се биноми и немаат заеднички множител. Затоа НЗС( $a+1, a-2$ ) =  $(a+1)(a-2)$ . Дополнителните множители на дробките се  $a-2$  и  $a+1$ . Тогаш

$$\frac{3}{a+1} = \frac{3(a-2)}{(a+1)(a-2)} \quad \text{и} \quad \frac{2}{a-2} = \frac{2(a+1)}{(a+1)(a-2)}.$$

Во многу случаи се јавува потреба да се упрости дадена алгебарска дробка. Тоа најчесто се постигнува со скратување на алгебарската дробка, т.е. со делење на броителот и именителот со ист полином  $T \neq 0$ , при што се добива  $\frac{P}{Q} = \frac{P:T}{Q:T}$ ,  $T \neq 0$ . За таа цел броителот и именителот се разложуваат на прости множители, па потоа се врши скратување на дробката, и тоа по правило со најголемиот заеднички делител на броителот и именителот на дробката.

**Пример 55.** Упрости ја алгебарската дробка:

а)  $\frac{ax-a^2}{a^2x-ax^2}$ ,                      б)  $\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2}$ .

**Решение.** а) Прво ќе ги разложиме броителот и именителот на дробката:

$$\frac{ax-a^2}{a^2x-ax^2} = \frac{a(x-a)}{ax(a-x)} = -\frac{a(x-a)}{ax(x-a)}.$$

Дадената дробка има смисол за  $a \neq 0, x \neq 0, a \neq x$ . Сега, од НЗД( $a(x-a), ax(x-a)$ ) =  $a(x-a)$ , следува дека дадената дробка ја кратиме со  $a(x-a)$  и добиваме

$$\frac{ax-a^2}{a^2x-ax^2} = -\frac{\cancel{a(x-a)}}{\cancel{ax(x-a)}} = -\frac{1}{x}.$$

б) Прво ќе ги разложиме броителот и именителот на дробката. Добиваме,

$$\begin{aligned} \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2} &= \frac{a^2(b-c)+b^2c-b^2a+ac^2-bc^2}{a(b^2-c^2)-b(b^2-c^2)} = \frac{a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)}{(b^2-c^2)(a-b)} \\ &= \frac{(b-c)(a^2+bc-ab-ac)}{(b-c)(b+c)(a-b)} = \frac{(b-c)(a(a-b)-c(a-b))}{(b-c)(b+c)(a-b)} \\ &= \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(b-c)(b+c)(a-b)}. \end{aligned}$$

Дадената дробка има смисол за  $b \neq c, a \neq b$  и  $b \neq -c$ . Конечно наоѓаме:

$$\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{ab^2-ac^2-b^3+bc^2} = \frac{\cancel{(b-c)} \cancel{(a-b)} (a-c)}{\cancel{(b-c)} (b+c) \cancel{(a-b)}} = \frac{a-c}{b+c}.$$

**Пример 56.** Упрости ја алгебарската дробка:

а)  $\frac{(2a-1)^2+8a}{4a^2-1}$ ,                      б)  $\frac{(x+3y)^2-(x-2y)^2}{x^2-(x-y)^2}$ .

**Решение.** а) Имаме:

$$\frac{(2a-1)^2+8a}{4a^2-1} = \frac{4a^2-4a+1+8a}{(2a-1)(2a+1)} = \frac{4a^2+4a+1}{(2a-1)(2a+1)} = \frac{(2a+1)^2}{(2a-1)(2a+1)}.$$

Дадената дробка има смисол за  $a \neq \frac{1}{2}, a \neq -\frac{1}{2}$ . Конечно, добиваме

$$\frac{(2a-1)^2+8a}{4a^2-1} = \frac{(2a+1)^2}{(2a-1)(2a+1)} = \frac{2a+1}{2a-1}.$$

б) Имаме

$$\frac{(x+3y)^2-(x-2y)^2}{x^2-(x-y)^2} = \frac{(x+3y+x-2y)(x+3y-x+2y)}{(x+x-y)(x-x+y)} = \frac{5y(2x+y)}{y(2x-y)}.$$

Дадената дробка има смисол за  $y \neq 0$  и  $2x - y \neq 0$  и притоа

$$\frac{(x+3y)^2-(x-2y)^2}{x^2-(x-y)^2} = \frac{5y(2x+y)}{y(2x-y)} = \frac{5(2x+y)}{2x-y}.$$

## Задачи

65. За кои вредности на променливите нема смисла алгебарската дробка:

- а)  $\frac{x^2+4x+2}{(x+a)(x-1)}$ , б)  $\frac{x}{x^3-4x}$ ,  
 в)  $\frac{a-3}{a^2b-16b}$ , г)  $\frac{2a+b}{a^4-ab^3}$ .

66. Прошири ја алгебарската дробка:

- а)  $\frac{4}{5x}$  со  $2x^2$ , б)  $\frac{2a^2}{3x}$  со  $4ax^2$ ,  $a \neq 0$ ,  
 в)  $\frac{x^2-x+1}{x-1}$  со  $x+1$  ( $x+1 \neq 0$ ).

67. Сведи ги на заеднички именител дробките:

- а)  $\frac{x}{6y^2}$  и  $\frac{y}{4x^2}$ , б)  $\frac{1}{x^2+xy+y^2}$  и  $\frac{1}{x^2-y^2}$ .

68. Сведи ги на заеднички именител дробките:

- а)  $\frac{a}{2x-4}$  и  $\frac{b}{5x-10}$ , б)  $\frac{1}{2x-2}$  и  $\frac{2-x}{(1-x)(1+x)}$ ,  
 в)  $\frac{1}{6a+3}$ ,  $\frac{2}{2a-1}$  и  $\frac{9a+3}{8a^2-2}$ , г)  $\frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}$ ,  $\frac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}$  и  $\frac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}$ .

69. Скрати ја алгебарската дробка:

- а)  $\frac{9x^2-4}{6ax+4a}$ , б)  $\frac{a^3x-ax^3}{a^2x-ax^2}$ ,  
 в)  $\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}$ , г)  $\frac{ac(x^2+1)+x(a^2+c^2)}{ac(x^2-1)+x(a^2-c^2)}$ .

## 2.11 Операции со алгебарски дробки

Во претходната лекција се запозна со алгебарските дробки, нивното проширување и скратување, со идентичните алгебарски дробки и нивното упростување. Во продолжение ќе ги разгледаме операциите со алгебарските дробки. На почетокот да забележиме дека алгебарските дробки се собираат, одземаат, множат и делат како и обичните дробки.

**Дефиниција 11.** Збирот на алгебарски дробки со еднакви именители е дробка со истиот именители, а броителот е еднаков на збирот на броителите на собирачите, т.е.

$$\frac{P}{T} + \frac{Q}{T} = \frac{P+Q}{T}, T \neq 0. \quad (1)$$

**Пример 57.** Имаме:

$$\text{a)} \frac{12}{7x^2} + \frac{b}{7x^2} + \frac{3c}{7x^2} = \frac{12+b+3c}{7x^2},$$

$$\text{б)} \frac{2x-a}{2x-3} + \frac{3+a}{2x-3} + \frac{1}{2x-3} = \frac{2x-a+3+a+1}{2x-3} = \frac{2x+4}{2x-3}.$$

**Дефиниција 12.** Разликата на алгебарски дробки со еднакви именители е дробка со истиот именител, а броителот е еднаков на разликата од броителот на намаленикот и броителот на намалителот, т.е.

$$\frac{P}{T} - \frac{Q}{T} = \frac{P-Q}{T}, T \neq 0. \quad (2)$$

**Пример 58.** Имаме:

$$\text{a)} \frac{x+3a}{x} - \frac{x-a}{x} = \frac{x+3a-(x-a)}{x} = \frac{x+3a-x+a}{x} = \frac{4a}{x},$$

$$\text{б)} \frac{x}{a-1} - \frac{2x}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \frac{x-2x}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \frac{-x}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \frac{-x+1}{a-1}.$$

Сега е јасно, дека за да се соберат (одземат) дробки со различни именители, тие прво треба да се сведат на дробки со исти именители, а потоа да се соберат (одземат).

**Пример 59.** Пресметај го збирот

$$\text{a)} \frac{x}{2a^3b^2} + \frac{7}{10abc} - \frac{1}{6a^2b},$$

$$\text{б)} \frac{1}{6a+3} + \frac{2}{2a-1} - \frac{9a+3}{8a^2-2}.$$

**Решение.** а) За да ги сведеме дробките на ист именител, ќе го најдме НЗС од нивните именители:

$$\text{НЗС}(2a^3b^2, 10abc, 6a^2) = 30a^3b^2c,$$

а потоа ќе ги запишеме со ист именител и ќе ги собереме:

$$\frac{x}{2a^3b^2} + \frac{7}{10abc} - \frac{1}{6a^2b} = \frac{15cx}{30a^3b^2c} + \frac{21a^2b}{30a^3b^2c} - \frac{5abc}{30a^3b^2c} = \frac{15cx+21a^2b-5abc}{30a^3b^2c}.$$

б) Имаме,

$$\frac{1}{6a+3} + \frac{2}{2a-1} - \frac{9a+3}{8a^2-2} = \frac{1}{3(2a+1)} + \frac{2}{2a-1} - \frac{9a+3}{2(2a+1)(2a-1)} = \frac{2(2a-1)+2 \cdot 3(2a+1)-3(9a+3)}{6(2a+1)(2a-1)} = \frac{-11a-5}{6(4a^2-1)}.$$

Добиениот збир има смисол за  $a \neq -\frac{1}{2}$  и  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Дефиниција 13.** Производ на две алгебарски дробки е дробка чиј броител е еднаков на производот од броителите на множителите, а именителот е еднаков на производот од именителите на множителите, т.е.

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot S}, (Q \neq 0, S \neq 0). \quad (3)$$

**Пример 60.** Пресметај го производот:

$$\text{a)} \frac{3a^2}{4b^3} \cdot \frac{5b^4}{6a^5},$$

$$\text{б)} \frac{a^2-1}{a-2} \cdot \frac{5a-10}{3-3a^2}.$$

**Решение.** Имаме:

$$\text{a)} \frac{3a^2}{4b^3} \cdot \frac{5b^4}{6a^5} = \frac{3a^2 \cdot 5b^4}{4b^3 \cdot 6a^5} = \frac{15a^2b^4}{24a^5b^3} = \frac{5b}{8a^3},$$

$$\text{б)} \frac{a^2-1}{a-2} \cdot \frac{5a-10}{3-3a^2} = \frac{(a^2-1)(5a-10)}{(a-2)(3-3a^2)} = \frac{5 \cancel{(a^2-1)} \cancel{(a-2)}}{-3 \cancel{(a-2)} \cancel{(a^2-1)}} = -\frac{5}{3}.$$

**Дефиниција 14.** Количникот на две алгебарски дробки  $\frac{P}{Q}$  и  $\frac{R}{S}$  е еднаков на производот од деленикот  $\frac{P}{Q}$  и реципрочната вредност  $\frac{S}{R}$  на делителот, т.е.

$$\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot R}, \quad (Q \neq 0, R \neq 0, S \neq 0).$$

**Пример 61.** Пресметај го количникот:

а)  $\frac{2a}{3x^2} : \frac{ab}{cx^2}$ ,                      б)  $\frac{2x-a}{6x-9} : \frac{3+a}{2x-3}$ .

**Решение.** Имаме:

а)  $\frac{2a}{3x^2} : \frac{ab}{cx^2} = \frac{2a}{3x^2} \cdot \frac{cx^2}{ab} = \frac{2a \cdot cx^2}{3x^2 \cdot ab} = \frac{2c}{3b}$ ,

б)  $\frac{2x-a}{6x-9} : \frac{3+a}{2x-3} = \frac{2x-a}{3(2x-3)} \cdot \frac{2x-3}{3+a} = \frac{(2x-a)(2x-3)}{3(2x-3)(3+a)} = \frac{2x-a}{3(a+3)}$ .

**Дефиниција 15.** Дропката чиј броител и именител се алгебарски дробки ја нарекуваме двојна алгебарска дробка.

Аналогно на обичните двојни дробки, секоја двојна алгебарска дробка може да се трансформира во обична алгебарска дробка. За таа цел потребно е нејзиниот броител да се подели со нејзиниот именител. Да разгледаме еден пример.

**Пример 62.** а) Имаме:

$$\frac{\frac{2a+1}{a-1}}{\frac{a+1}{a}} = \frac{2a+1}{a-1} : \frac{a+1}{a} = \frac{2a+1}{a-1} \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{(2a+1)a}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a^2+1}{a^2-1}.$$

б) Имаме:

$$\frac{\frac{1-b}{ab} - \frac{a}{a}}{\frac{a}{a+b}} = \left(\frac{1}{ab} - \frac{b}{a}\right) : \left(a + \frac{a}{b}\right) = \frac{1-b^2}{ab} : \frac{ab+a}{b} = \frac{(1-b)(1+b)}{ab} \cdot \frac{b}{a(b+1)} = \frac{1-b}{a^2}.$$

**Пример 63.** Упрости го изразот:  $\left[\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3} - \frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right] : \left(1 - \frac{y-1}{x} - \frac{y}{x^2}\right).$

**Решение.** Имаме:

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3} - \frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right] : \left(1 - \frac{y-1}{x} - \frac{y}{x^2}\right) &= \left[\frac{x^2-xy}{y(x^2+y^2)} - \frac{2x^2}{(y-x)(x^2+y^2)}\right] : \frac{x^2-x(y-1)-y}{x^2} \\ &= \frac{(x^2-xy)(y-x)-2x^2y}{y(y-x)(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2}{x^2-xy+x-y} \\ &= \frac{yx^2-xy^2-x^3+yx^2-2yx^2}{y(y-x)(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2}{x(y-x)+(y-x)} \\ &= \frac{-x(x^2+y^2)}{y(y-x)(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2}{(x-y)(x+1)} = \frac{x^3}{y(x+1)(x-y)^2}. \end{aligned}$$

Да забележиме дека дадениот израз има смисол за  $y \neq 0$ ,  $x \neq -1$  и  $x \neq y$ .

**Пример 64.** Упрости го изразот:  $A(x, y) = \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{x-y}{x+y} - 1\right)}{\left(\frac{x-y}{x+y} + 1\right)\left(\frac{x-y}{y} - \frac{y}{x}\right)}.$

**Решение.** Имаме,

$$A(x, y) = \frac{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{x-y}{x+y} - 1\right)}{\left(\frac{x-y}{x+y} + 1\right)\left(\frac{x-y}{y} - \frac{y}{x}\right)} = \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2} \cdot \frac{x-y-x-y}{x+y}}{\frac{x-y+x+y}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{xy}} = \frac{-(x^2-y^2)(-2y)xy(x+y)}{2x(x^2-y^2)(x+y)(xy)^2} = \frac{xy \cdot y}{x(xy)^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Дадениот израз има смисла за  $x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm y$ . Зошто?

Задачи

70. Пресметај:

а)  $\frac{7}{4a^2} + \frac{x}{4a^2} + \frac{1}{4a^2},$

б)  $\frac{2a^2-a+6}{a-5} + \frac{3a^2+6a-4}{a-5}.$

71. Пресметај:

а)  $\frac{8a-3}{2a-1} - \frac{3a-5}{2a-1},$

б)  $\frac{a^2+3a+1}{a-5} - \frac{a^2-a+4}{a-5}.$

72. Собери ги дробките:

а)  $\frac{1}{2x-2}$  и  $\frac{2-x}{(1-x)(1+x)},$

б)  $\frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}, \frac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}$  и  $\frac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}.$

73. Пресметај:

а)  $\frac{a+x}{x} + \frac{x}{x-a} - \frac{a^2}{x^2-ax},$

б)  $\frac{a}{a-3} - \frac{a-2}{a},$

в)  $\frac{a-2b}{2a+b} + \frac{3a+4b}{2a-b} - \frac{a+b}{a},$

г)  $\frac{x+2}{2x^2-2x} + \frac{x-1}{x^2-2x+1}.$

74. Пресметај:

а)  $\frac{2x}{5y} \cdot \frac{3y}{4ax},$

б)  $\frac{a-1}{a^2-9} \cdot \frac{a+3}{2a-2},$

в)  $\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a^2+ab}{ab-b^2},$

г)  $\frac{x^4+x^3+x+1}{x^3-x^2+x-1} \cdot \frac{2x^2+2}{x^3+1}.$

75. Пресметај:

а)  $\frac{9ax^2}{10c^4} : \frac{6a^3}{5c^2x},$

б)  $\frac{x}{x-a} : \frac{a^2}{x^2-ax},$

в)  $\frac{a^2-9x^2}{a^2-ax} : \frac{a^2-3ax}{a-x},$

г)  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) : \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right).$

76. Пресметај:

а)  $\frac{\frac{a^2-1}{b-1}}{\frac{a+1}{b^2-1}},$

б)  $\frac{\frac{x^2+2x}{3x+6}}{x-1},$

в)  $\frac{1+\frac{a}{a-2}}{1-\frac{a}{a-2}},$

г)  $\frac{1-\frac{3a^2}{1-a^2}}{\frac{a}{a-1}+1}.$

77. Упрости го изразот:

а)  $[a+2:(1+\frac{a}{2})] : \frac{a^3-8}{a+2} + \frac{1}{2-a},$

б)  $[(1-\frac{2}{1-3a})(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1})] : (2-18a^2).$

78. Упрости го изразот:

а)  $\frac{a^2-1}{n^2+an} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2},$

б)  $\frac{(m^2-\frac{1}{n^2})^m (n+\frac{1}{m})^{n-m}}{(n^2-\frac{1}{m^2})^n (m-\frac{1}{n})^{m-n}}.$



## Провери го своето знаење 2

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $(-0,2)^{30} \cdot 25^{12} \cdot 0,25^2$ ,

б)  $\left[ \frac{(-5)^2 \cdot 3^{-3} \cdot (-1)^4 \cdot (-2)}{5^4 \cdot (-5)^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot (-3)^{-1}} \right]^{-1}$ .

2. Пресметај  $\frac{(x^{-2})^{-3}(x^3)^4(x^{-17})^{-1}}{x^7}$ , ако  $x^7 = 3$ ,

3. Запиши ја во облик  $A \cdot 10^n$ , каде  $n \in \mathbb{Z}$  и  $1 \leq A < 10$  вредноста на изразот:

$$72 \cdot 10^{-5} + 3,1 \cdot 10^{-4}.$$

4. Сведи ги на заеднички коренов показател корените  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[4]{ab}$  и  $\sqrt[5]{a^2b^3c}$

5. Упрости ги изразите:

а)  $(\sqrt{x^3}\sqrt{y})^3$ ,

б)  $(\sqrt[3]{a^2b^3c})^4$ ,

в)  $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}$ .

6. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(5^{\frac{1}{5}} - 25^{\frac{3}{5}}) \cdot 5^{\frac{9}{5}}.$$

7. Сведи го на нормален вид полиномот и определи го неговиот степен:

$$4x^3 - 2x^2 + 3x - 5 - 8x + 4 + 5x^2.$$

8. Даден е полиномот  $P(x) = (x+1)^{101}x^{101}$ . Пресметај  $P(8) - P(2)P(3)$ .

9. Полиномот  $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 3$  подели го со полиномот  $q(x) = x^2 - 2$ .

10. Користејќи ги формулите за скратено множење пресметај:

$$\sqrt{23^2 + 46 \cdot 5^2 + 5^4} - \sqrt{50^2 - 14^2}.$$

11. Разложи го полиномот на множители:

$$9x^2 + 6xy + y^2 - z^2.$$

12. Пресметај:

а)  $\frac{a+x}{x} + \frac{x}{x-a} - \frac{a^2}{x^2-ax}$ ,

б)  $\frac{x}{x-a} : \frac{a^2}{x^2-ax}$ ,

в)  $\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a^2+ab}{ab-b^2}$ ,

13. Упрости го изразот:

$$[a+2:(1+\frac{a}{2})] : \frac{a^3-8}{a+2} + \frac{1}{2-a}.$$

### 3 Линеарна функција, линеарна равенка, систем од две линеарни равенки и линеарна неравенка

- 3.1 Декартов правоаголен координатен систем. Растојание меѓу две точки
- 3.2 Плоштина на триаголник
- 3.3 Линеарна функција
- 3.4 Коефициент на правец, паралелни и нормални прави
- 3.5 Степенско и експоненцијално растење и опаѓање
- 3.6 Поим за алгебарска равенка. Линеарна равенка
- 3.7 Равенки кои се сведуваат на линеарни и равенки со параметар
- 3.8 Примена на линеарните равенки
- 3.9 Линеарна равенка со две непознати
- 3.10 Систем од две линеарни равенки со две непознати
- 3.11 Дополнителни решени задачи
- 3.12 Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати
- 3.13 Линеарна неравенка со една непозната
- 3.14 Примена на линеарните неравенки

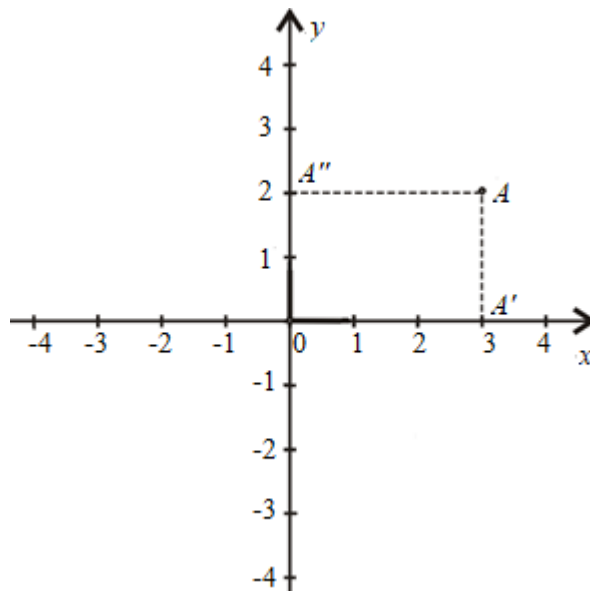
Со усвојување на содржите од оваа тема ќе можеш:

- да определуваш координати на точки во Декартов правоаголен координатен систем,
- да определуваш должина на отсечка зададена со координатите на крајните точки,
- да наоѓаш средишна точка на отсечка зададена со координатите на крајните точки,
- да пресметуваш периметар и плоштина на триаголник зададен со координатите на неговите темиња,
- да проверуваш дали три точки се колинеарни,
- да испитуваш тек и црташ график на линеарна функција.,
- да запишуваш равенки на паралелни и нормални прави,
- да решаваш практични задачи користејќи ги условите за нормалност и паралелност на две прави,
- да скицираш едноставни графици на функции кои изразуваат степенска и експоненцијална зависност,
- да решаваш едноставни задачи со степенска и експоненцијална зависност,
- да составуваш и решаваш линеарни равенки, вклучувајќи ги и равенките со параметар,
- да ги применуваш линеарните равенки во решавање на практични проблеми,
- да наоѓаш решенија на линеарна равенка со две непознати и истата да ја разгледуваш како равенка на права,
- да составуваш и решаваш систем од две линеарни равенки со две непознати (метод на замена, метод на спротивни коефициенти и графички метод),
- да ги применуваш системите линеарните равенки со две непознати во решавање на практични проблеми,
- да составуваш и решаваш линеарна неравенка со една непозната, и
- да ги применуваш линеарните неравенки со две непознати во решавање на практични проблеми.

### 3.1 Декартов правоаголен координатен систем. Растојание меѓу две точки

Како што знаеме, положбата на секоја точка на бројната права е еднозначно определена со еден и само еден реален број  $x$ . Сега ќе покажеме како се определува положбата на точка во рамнината.

Во рамнината цртаме две заемно нормални прави  $Ox$  и  $Oy$ , кои ги ориентираме и нивната заедничка точка ја земаме за почеток на двете ориентирани прави. Потоа земаме отсечка за заедничка единица мерка, со која ги мериме сите отсечки на двете прави. Правите  $Ox$  и  $Oy$  ги нарекуваме *координатни оски*, а точката  $O$  *координатен почеток*. Оската  $Ox$  ја нарекуваме *апсцисна оска*, а оската  $Oy$  ја нарекуваме *ординатна оска*. Вака определените апсцисна и ординатна оска заедно определуваат *Декартов правоаголен координатен систем*, кој се означува со  $xOy$ . Рамнината во која е определен некој координатен систем ја нарекуваме *координатна рамнина*.



Нека  $A$  е произволна точка во координатната рамнина. Од точката  $A$  повлекуваме нормали кон координатните оски  $Ox$  и  $Oy$ , кои соодветно ги сечат во точките  $A'$  и  $A''$ . Според тоа, на секоја точка  $A$  од рамнината и соодветствуваат точно две точки  $A'$  и  $A''$  од координатните оски. Важи и обратното, ако земеме точки  $A'$  и  $A''$  соодветно на координатните оски  $Ox$  и  $Oy$  и во нив повлечеме нормали на оските, тогаш тие се сечат во една точка  $A$ , т.е. на секои две точки од координатните оски соодветствува единствена точка во координатната рамнина. Сега, на точката  $A'$  на оската  $Ox$  и соодветствува точно определен реален број  $x$ , а на точката  $A''$  на оската  $Oy$  и соодветствува точно определен реален број  $y$ .

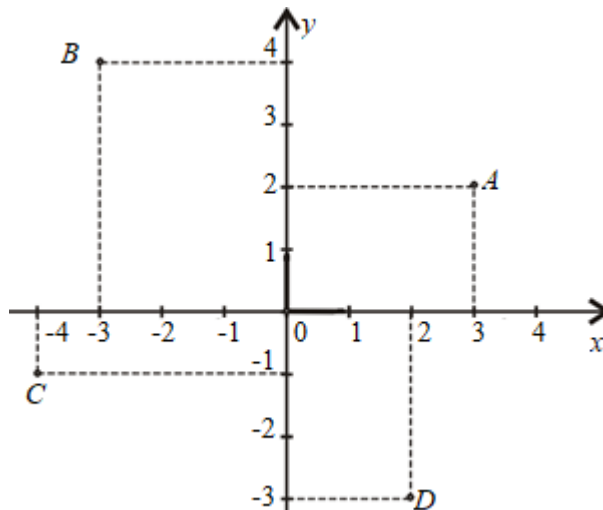
Според тоа, положбата на точката  $A$  во координатната рамнина  $xOy$  е еднозначно определена со реалните броеви  $x$  и  $y$ , кои ги нарекуваме *координати* на точката  $A$ . Притоа пишуваме  $A(x, y)$ , координата  $x$  ја нарекуваме *апсциса*, а координата  $y$  ја нарекуваме *ордината* на точката  $A$ . Координатите  $x$  и  $y$  ги запишуваме како подреден пар  $(x, y)$ .

Од претходните разгледувања гледаме дека, *постои биекција меѓу множеството точки од координатната рамнина  $xOy$  и множеството подредени парови реални броеви  $(x, y)$*

На претжот имаме

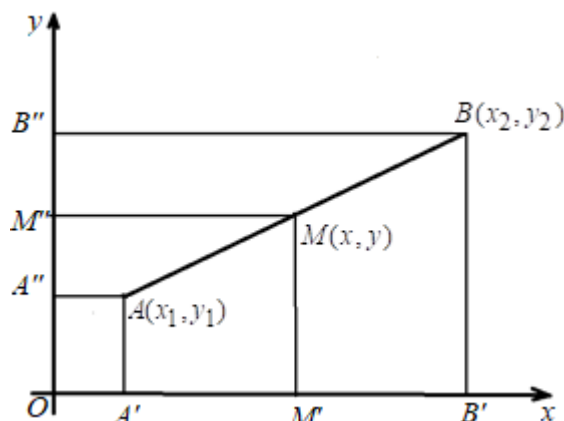
$A(3, 2)$ ,  $B(4, -3)$ ,  $C(-4, -1)$  и  $D(-3, 2)$ .

Нека е дадена отсечка  $AB$ :  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  и нека точката  $M(x, y)$  е нејзината



средна точка. Од точките  $A, B, M$  повлекуваме нормали на координатните оски и ги добиваме точките  $A', A'', B', B'', M', M''$  (види цртеж).

Четириаголникот  $AA'B'B$  е правоаголен трапез во кој точката  $M$  е средина на кракот  $AB$  и отсечката  $MM'$  е паралелна на основите  $AA'$  и  $BB'$ . Значи,  $MM'$  е средна линија на трапезот  $AA'B'B$ , од каде следува дека точката  $M'$  е средина на отсечката  $A'B'$ . Значи,  $A'M' = M'B'$ , од каде добиваме  $x - x_1 = x_2 - x$  (Зошто?). Од последното равенство следува  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . На потполно идентичен начин од рам-нокракиот трапез  $B''A''AB$  наоѓаме  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .



Според тоа, апсцисата (ординатата) на средината на дадена отсечка е еднаква на аритметичките средини на апсцисите (ординатите) на нивните крајни точки.

**Пример 1.** а) Определи ги координатите на средината  $M$  на отсечката  $AB$ :  $A(-3, 3)$ ,  $B(7, -1)$ .

б) Дадена е отсечка  $AB$ :  $A(5, 1)$ ,  $B(x, y)$  чија средина е точката  $M(4, -1)$ . Определи ги координатите на точката  $B$ .

**Решение.** а) Точката  $M$  има координати:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = 2$  и  $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$ . Значи,  $M(2, 1)$ .

б) Од условот на задачата следува  $4 = \frac{5 + x}{2}$  и  $-1 = \frac{1 + y}{2}$ , од каде добиваме  $x = 3$  и  $y = -3$ . Значи,  $B(3, -3)$ .

Да ја определиме должината на отсечката  $AB$ :  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ . Од точките  $A, B$  повлекуваме нормали на координатните оски и ги добиваме точките  $A', A'', B', B''$  (види цртеж). Нека правата  $AA''$  ја сече отсечката  $BB'$  во точката  $C$ . Тогаш  $C(x_2, y_1)$  и триаголникот  $ABC$  е правоаголен. Притоа, независно од местоположбата на отсечката  $AB$  важи

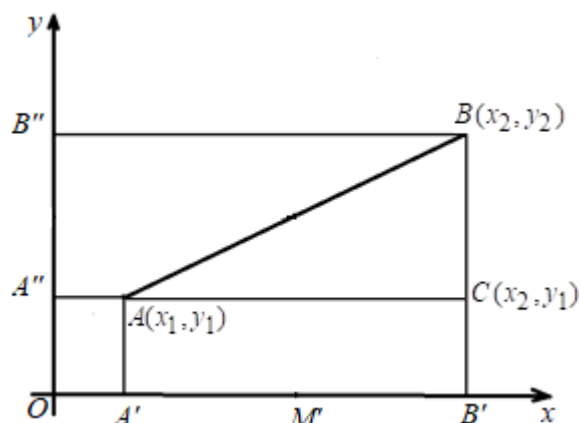
$$\overline{BC} = \overline{B''A''} = |y_2 - y_1| \text{ и } \overline{AC} = \overline{A'B'} = |x_2 - x_1|.$$

Сега, од Питагоровата теорема добиваме

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2},$$

па од својствата на апсолутната вредност следува

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$



**Пример 2.** а) Определи го растојанието меѓу точките  $A(-2, -7)$  и  $B(6, -1)$ .

б) Дадена е точката  $A(2, 1)$ . Определи ја координатата  $y$  на точката  $B(5, y)$  таква што  $\overline{AB} = 5$

**Решение.** а) Со замена во равенството (1) добиваме

$$\overline{AB} = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (-1 - (-7))^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

б) Од условот на задачата добиваме

$$\sqrt{(5-2)^2 + (y-1)^2} = 5, \text{ т.е. } (5-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Според тоа,  $(y-1)^2 = 16$ , од каде добиваме  $y-1=4$  или  $y-1=-4$ , т.е.  $y=5$  или  $y=-3$ . Конечно постојат две точки со саканото својство  $B_1(5,5)$  и  $B_2(5,-3)$ .

**Пример 3.** Даден е триаголник  $ABC: A(4,-3), B(2,3), C(0,1)$ . Определи ги:

- а) периметарот на триаголникот  $ABC$ ,
- б) должините на тежишните линии на триаголникот  $ABC$ ,
- в) должините на средните линии на триаголникот  $ABC$ .

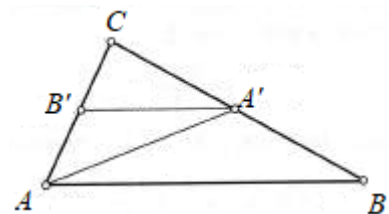
**Решение.** а) Имаме:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{10}, \overline{BC} = \sqrt{(0-2)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}, \overline{AC} = \sqrt{(0-4)^2 + (1+3)^2} = 4\sqrt{2}.$$

Значи, периметарот на триаголникот е  $L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})$ .

б) Средината на страната  $BC$  е  $A'(\frac{2+0}{2}, \frac{3+1}{2}) \equiv A'(1, 2)$ . Според тоа, должината на тежишната линија  $AA'$  е:  $\overline{AA'} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ . Определи ги должините на другите две тежишни линии.

в) Средината на страната  $AC$  е  $B'(\frac{4+0}{2}, \frac{-3+1}{2}) \equiv B'(2, -1)$ . Значи, должината на средната линија  $A'B'$  е  $\overline{A'B'} = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$ , т.е. таа е еднаква на половина од должината на страната  $AB$ , тврдење кое ти е познато основно образование и кое покасно ќе го докажеме. Определи ги должините на другите две средни линии.



### Задачи

- Во Декартов правоаголен координатен систем нацртај ги точките  $A(2,2), B(-3,2), C(-1,-1), D(2,-3), M(3,-3)$  и  $N(4,4)$ .
- Определи ги координатите на средината на отсечката со крајни точки:
  - а)  $A(2,2), B(-3,5)$ ,
  - б)  $C(-1,7), D(3,-3)$ ,
  - в)  $M(3,-3), N(4,4)$ .
- Дадена е отсечка  $AB: A(6,5), B(x,y)$  чија средина е точката  $M(2,-3)$ . Определи ги координатите на точката  $B$ .
- Дадени се точките  $A(x,5), B(11,y), M(2,-3)$ . Определи ги  $x$  и  $y$  така што точката  $M$  е средина на отсечката  $AB$ .
- Определи ја должината на отсечката чии крајни точки се:
  - а)  $A(2,2), B(-3,5)$ ,
  - б)  $C(-1,7), D(3,-3)$ ,
  - в)  $M(3,-3), N(4,4)$ .
- Определи го растојанието на секоја од точките до координатниот почеток:  $A(2,2), B(-3,5), C(-1,7), D(3,-3)$  и  $E(3,-4)$ .
- Дадена е точката  $A(2,1)$ . Определи ја координатата  $y$  на точката  $B(7,y)$  така што  $\overline{AB} = 13$ .

8. Даден е триаголникот  $ABC : A(3,6), B(4,-6), C(-5,2)$ . Определи од каков вид е тој триаголник во однос на неговите страни и пресметај го неговиот периметар.
9. Даден е триаголник  $ABC : A(-5,1), B(3,-3), C(1,-7)$ . Определи ги:
  - а) периметарот на триаголникот  $ABC$ ,
  - б) должините на тежишните линии на триаголникот  $ABC$ ,
  - в) должините на средните линии на триаголникот  $ABC$ .
10. Докажи дека триаголникот  $ABC : A(-1,1), B(1,3), C(-\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$  е рамностран.

## 3.2 Плоштина на триаголник

Ако за еден триаголник се дадени координатите на неговите темиња, тогаш можеме да ги определиме должините на неговите страни, што значи дека триаголникот е определен. Тоа значи дека можеме да ја пресметаме плоштината на тој триаголник. Во овој дел ќе изведеме формула за пресметување на плоштината на триаголник за чии темиња се дадени нивните координати.

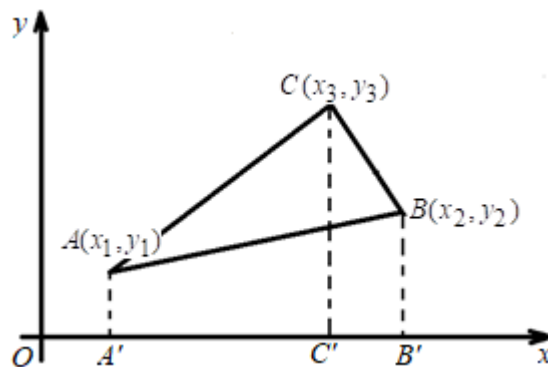
Даден е  $\triangle ABC : A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ .

Ако  $A', B', C'$  се подножјата на нормалите повлечени од темињата на оската  $Ox$ , тогаш четириаголниците  $A'B'B'A, A'C'C'A, C'B'BC$  се трапези. Плоштините на овие трапези се

$$P_{A'B'B'A} = \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1),$$

$$P_{A'C'C'A} = \frac{y_1 + y_3}{2} (x_3 - x_1),$$

$$P_{C'B'BC} = \frac{y_3 + y_2}{2} (x_2 - x_3).$$



Според тоа, плоштината на триаголникот  $ABC$  е

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{A'C'C'A} + P_{C'B'BC} - P_{A'B'B'A} \\ &= \frac{y_1 + y_3}{2} (x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2} (x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \end{aligned}$$

Како што можеме да видиме, на цртежот означувањето на темињата на триаголникот е направено во насока спротивна од насоката на движење на стрелките на часовникот, т.е. во позитивна насока и притоа се добива дека  $P > 0$ . Ако пак означувањето е направено во спротивната насока тогаш се добива истата формула и притоа ќе важи  $P < 0$ . Оттука следува дека независно од тоа како се нумерирани темињата на триаголникот  $ABC$ , неговата плоштина се пресметува според формулата:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|. \quad (1)$$

**Пример 4.** а) Пресметај ја плоштината на триаголникот  $ABC$  чии темиња се  $A(-3,5)$ ,  $B(5,-1)$  и  $C(-6,-4)$ .

б) Колкава е должината на висината на овој триаголник повлечена од темето  $A$ .

**Решение.** а) Со замена во формулата (1) за плоштината на дадениот триаголник добиваме

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-3 \cdot (-1 - (-4)) + 5(-4 - 5) + (-6) \cdot (5 - (-1))|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |-9 - 45 - 36| = \frac{1}{2} \cdot |-90| = 45.$$

б) Должината на страна  $BC$  е:

$$\overline{BC} = \sqrt{(5 - (-6))^2 + (-1 - (-4))^2} = \sqrt{11^2 + 3^2} = \sqrt{130}.$$

Сега, со замена во формулата  $P = \frac{\overline{BC} \cdot h_A}{2}$  добиваме  $45 = \frac{\sqrt{130} \cdot h_A}{2}$ , односно  $h_A = \frac{90}{\sqrt{130}}$ .

Нека се дадени три различни точки  $A, B, C$ . Знаеме дека, ако точките  $A, B, C$  се колинеарни, тогаш триаголникот  $ABC$  е дегенериран, па неговата плоштина е еднаква на 0. Значи, ако точките  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  се колинеарни, тогаш точно е равенството

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0. \quad (2)$$

Обратно, ако плоштината на еден триаголник е еднаква на 0, тогаш растојанието на темето  $A$  до страната  $BC$  е еднаква на 0, па затоа точката  $A$  лежи на правата  $BC$ , т.е. точките  $A, B, C$  се колинеарни. Значи, ако за точките  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  е исполнето равенството (2), тогаш тие се колинеарни.

Од претходните разгледувања следува дека, *точките  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  се колинеарни ако и само ако важи равенството (2)*

**Пример 5.** Дали точките  $A(1, 3), B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  и  $C(2, 7)$  се колинеарни.

**Решение.** Имаме

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 1 \cdot (\frac{1}{3} - 7) + \frac{1}{3} \cdot (7 - 3) + 2 \cdot (3 - \frac{1}{3})$$

$$= -\frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = 0.$$

Значи, за координатите на дадените точки важи равенството (2), па затоа тие се колинеарни.

За оние што сакаат да знаат повеќе. Формулата (1) за определување на плоштината на триаголник со зададени темиња може да се искористи и за определување на плоштина на произволен четириаголник  $ABCD$ , за кој ни се познати координатите на темињата. Навистина ако  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ , тогаш за плоштината на  $ABCD$  добиваме

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC}$$

$$= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| + \frac{1}{2} |x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)|. \quad (3)$$

**Пример 6.** Определи ја плоштината на четириаголникот  $ABCD$ :  $A(2, -5), B(3, -4), C(7, 2), D(3, 3)$ .

**Решение.** Со замена во формулата (3) добиваме

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} |2 \cdot (-4 - 2) + 3 \cdot (2 - (-5)) + 7 \cdot ((-5) - (-4))| + \frac{1}{2} |2 \cdot (3 - 2) + 3 \cdot (2 - (-5)) + 7 \cdot ((-5) - 3)|$$

$$= \frac{1}{2} |-12 + 21 - 7| + \frac{1}{2} |2 + 21 - 56| = 1 + \frac{33}{2} = \frac{35}{2}.$$

Задачи

11. Определи ја плоштината на триаголникот чии темиња се  $A(2, -5), B(7, -1), C(-5, 4)$ .

12. Докажи дека правата што минува низ точките  $A(4, -6)$  и  $B(-6, 9)$ , минува и низ координатниот почеток.
13. Испитај дали точките лежат на иста права:  
 а)  $A(0, 4)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(3, -2)$       б)  $A(-2, 1)$ ,  $B(0, 5)$ ,  $C(3, 7)$
14. Определи ја апсцисата на точката  $M(x, -2)$  која што лежи на правата што минува низ точките  $A(3, 3)$  и  $B(-1, 2)$ .

### 3.3 Линеарна функција

Во 1.3 зборувавме за пресликувањата (функциите) и се запознавме со некои видови пресликувања (инјекција, сурјекција и биекција). Во овој дел ќе ја изучуваме линеарната функција.

Функцијата определена со

$$f(x) = ax + b \quad (1)$$

каде што  $a$  и  $b$  се дадени реални броеви (константи) ја нарекуваме *линеарна функција*.

Во формулата (1) константата  $a$  ја нарекуваме *коэффициент пред независно променливата*, а константата  $b$  ја нарекуваме *слободен член на линеарната функција*.

Ако го употребиме записот  $y = f(x)$ , тогаш линеарната функција можеме да ја запишеме на следниов начин

$$y = ax + b. \quad (2)$$

**Пример 6.** а) Како што знаеш, ако едно тело изминало пат  $s_0$  и потоа продолжило да се движи со постојана брзина  $v$  (рамномерно движење), тогаш поминатиот пат се пресметува според формулата  $s(t) = s_0 + vt$ . Според тоа, изминатиот пат е линеарна функција од времето, при што  $a = v$  и  $b = s_0$ .

б) Брзината на телото кое се движело со дадена почетна брзина  $v_0$ , а потоа продолжило да се движи рамномерно забрзано со забрзување  $a_v$  се пресметува според формулата  $v(t) = v_0 + a_v t$ . Според тоа, моменталната брзина со која се движи телото е линеарна функција од времето, при што  $a = a_v$  и  $b = v_0$ .

в) При возењето со такси, патникот најчесто плаќа износ кој се формира врз база на таканаречената стартна тарифа и износ кој се добива врз основа на поминатите километри. Така, во такси компанијата Мак-такси стартната тарифа е 150 денари, а за секој поминат километар дополнително се наплатува по 60 денари. Значи, само за поминати  $x$  километри патникот ќе плати  $60x$  денари, а вкупната сума која треба да ја плати ќе биде  $y = 60x + 150$ .

Бидејќи коефициентите  $a$  и  $b$  на линеарната функција (1) ни се познати, ние за секој реален број  $x_0$  можеме да ја пресметаме вредноста на  $f(x_0) = ax_0 + b$ . Тоа значи дека дефиниционата област на линеарната функција е множеството реални броеви, т.е.  $D_f = \mathbb{R}$ .

**Дефиниција 1.** За функцијата  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  велиме дека:

- *монотонно расте* на множеството  $\mathbb{R}$  ако од  $x_1 < x_2$  следува  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ,
- *строго монотонно расте* на множеството  $\mathbb{R}$  ако од  $x_1 < x_2$  следува  $f(x_1) < f(x_2)$ ,



- *монотонно опаѓа* на множеството  $\mathbb{R}$  ако од  $x_1 < x_2$  следува  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ,
- *строго монотонно опаѓа* на множеството  $\mathbb{R}$  ако од  $x_1 < x_2$  следува  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Да ја испитае монотоноста на линеарната функција (1). За коефициентот  $a$  имаме три можности:

а)  $a > 0$ : ако  $x_1 < x_2$ , тогаш од монотоноста спрема множењето следува  $ax_1 < ax_2$ , па од монотоноста спрема собирањето (теорема 1.33), добиваме  $ax_1 + b < ax_2 + b$ , т.е.  $f(x_1) < f(x_2)$ , што значи дека функцијата строго монотонно расте,

б)  $a = 0$ : тогаш за секој  $x_1, x_2$  имаме  $0 \cdot x_1 + b = 0 \cdot x_2 + b = b$ , што значи дека функцијата е константна,

в)  $a < 0$ : ако  $x_1 < x_2$ , тогаш повторно од теорема 1.33 прво добиваме  $ax_1 > ax_2$ , а потоа  $ax_1 + b > ax_2 + b$ , т.е.  $f(x_1) > f(x_2)$ , што значи дека функцијата строго монотонно опаѓа.

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

**Теорема 1.** Линеарната функција (1) строго монотонно расте ако  $a > 0$ , строго монотонно опаѓа ако  $a < 0$  и е константа ако  $a = 0$ .

**Пример 7.** За функцијата  $y = -2x + 1$  имаме  $a = -2$ , што според теорема 1 значи дека таа строго монотонно опаѓа на множеството  $\mathbb{R}$ , т.е. на целата дефинициона област.

За функцијата  $y = \frac{1}{2}x + 3$  имаме  $a = \frac{1}{2}$ , што според теорема 1 значи дека таа строго монотонно расте на множеството  $\mathbb{R}$ , т.е. на целата дефинициона област.

Од горните разгледувања за монотоноста на линеарната функција  $f(x) = ax + b$  следува:

- ако  $a = 0$ , тогаш множеството вредности на функцијата е  $V_f = \{b\}$ ,

- ако  $a \neq 0$ , тогаш за секој  $y_0 \in \mathbb{R}$  постои  $x_0 = \frac{y_0 - b}{a} \in \mathbb{R}$  таков што

$$f(x_0) = f\left(\frac{y_0 - b}{a}\right) = a \cdot \frac{y_0 - b}{a} + b = y_0 - b + b = y_0,$$

што значи дека множеството вредности на функцијата е  $V_f = \mathbb{R}$ .

Како што знаеш множеството  $G_f = \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$  го нарекуваме график на функцијата  $y = f(x)$ . Според тоа, графикот на линеарната функција  $y = ax + b$  е множеството

$$G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = ax + b\}. \quad (3)$$

Ако сакаме да го претставиме геометриски графикот (3) на линеарната функција (1), тогаш тоа го правиме во координатна рамнина. Знаеш дека графикот на линеарната функција е права, па затоа за истиот да го нацртаме, доволно е да земеме две точки, т.е. два различни пара  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , низ кои ја повлекуваме правата која е график на функцијата.

*За оние што сакаат да знаат повеќе.* Претходно рековме дека графикот на линеарната функција е права. Ајде тоа да го докажеме. Нека  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  се две фиксирани точки од графикот на линеарната функција  $G_f$  и нека  $(x_3, y_3)$  е произволна точка од  $G_f$ . Тогаш  $y_1 = ax_1 + b$ ,  $y_2 = ax_2 + b$ ,  $y_3 = ax_3 + b$  и затоа

$$\begin{aligned}
 L &= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \\
 &= x_1(ax_2 + b - (ax_3 + b)) + x_2(ax_3 + b - (ax_1 + b)) + x_3(ax_1 + b - (ax_2 + b)) \\
 &= a(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 - x_2x_1 + x_3x_1 - x_3x_2) = a \cdot 0 = 0,
 \end{aligned}$$

што значи дека точките  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  се колинеарни. Според тоа, произволната точка  $(x_3, y_3)$  од  $G_f$  припаѓа на правата која минува низ точките  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , од каде што следува дека графикот на линеарната функција е права.

За да го нацртаме графикот на линеарната функција, веќе рековме дека треба да определиме две точки низ кои минува правата која е график на функцијата. Можни се следниве случаи:

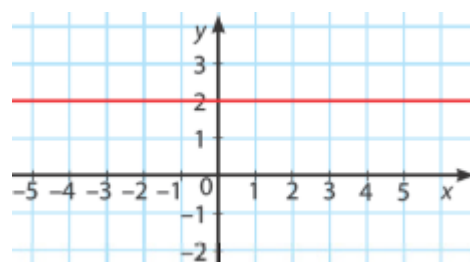
- $a = 0$  и тогаш две точки од правата се, на пример,  $A(0, b)$  и  $B(1, b)$ , при што правата ја сече оската  $Oy$  во точката  $A(0, b)$  и е паралелна со оската  $Ox$ ,

- $a \neq 0$  и  $b = 0$ , т.е. функцијата е од видот  $y = ax$  и тогаш за  $x = 0$  добиваме  $y = 0$ , што значи дека правата минува низ координатниот почеток, т.е. координатните оски ги сече во точката  $O(0, 0)$ , а за втората точка можеме да ставиме на пример  $x = 1$  и добиваме дека графикот минува низ точката  $B(1, a + b)$ ,

- $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , т.е. функцијата е од видот  $y = ax + b$  и тогаш за  $x = 0$  добиваме  $y = b$ , т.е. едната точка е  $A(0, b)$ , а за  $y = 0$  добиваме  $ax + b = 0$ , од каде наоѓаме  $x = -\frac{b}{a}$ , т.е. втората точка е  $B(-\frac{b}{a}, 0)$ . Притоа точката  $A(0, b)$  е пресекот на графикот со оската  $Oy$ , а точката  $B(-\frac{b}{a}, 0)$  е пресекот на графикот со оската  $Ox$ .

Постапката со која за функција  $y = f(x)$ : 1) ги определуваме  $D_f$  и  $V_f$ , 2) наоѓаме дали функцијата расте или опаѓа, 3) ги определуваме пресеците на функцијата со координатните оски (ако истите постојат) и 4) го цртаме графикот на функцијата, ја нарекуваме *испитување на тек и цртање график на функцијата  $y = f(x)$* .

**Пример 8.** а) За функцијата  $y = 2$  имаме  $a = 0$  и  $b = 2$ , што значи дека нејзиниот график ја сече  $Oy$  во точката  $(0, 2)$  и е паралелен со  $Ox$ . Графикот на оваа функција е прикажан на цр-тежот.

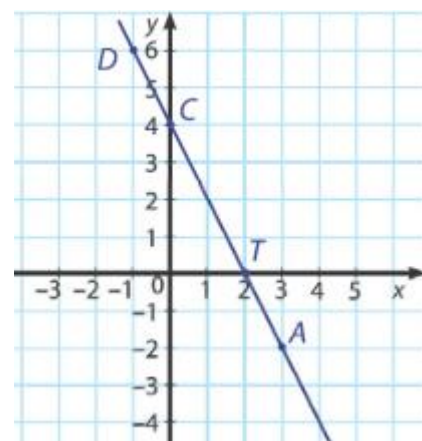


б) Ќе го испитаме текот и ќе го нацртаме графикот на функцијата  $y = -2x + 4$ .

Јасно, дефиниционата област на оваа функција е множеството  $D_f = \mathbb{R}$ , а бидејќи  $a = -2 \neq 0$ , добиваме дека множеството вредности е  $V_f = \mathbb{R}$ .

Понатаму  $a = -2 < 0$ , па од теоремата 1 е следува дека функцијата  $y = -2x + 4$  строго монотонно опаѓа на целата дефинициона област.

За  $x = 0$ , добиваме  $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$ , што значи дека графикот на функцијата ја сече оската  $Oy$  во точката  $C(0, 4)$ . За  $y = 0$ , добиваме  $0 = -2x + 4$ , од каде наоѓаме  $x = 2$ , што значи дека графикот на функцијата ја сече оската  $Ox$  во точката  $T(2, 0)$ .



Значи, графикот на функцијата е правата која минува низ точките  $C(0,4)$  и  $T(2,0)$ . Истиот е прикажан на цртежот, на кој е прикажана и точката  $A(3,-2)$ , која припаѓа на графикот (Провери!).

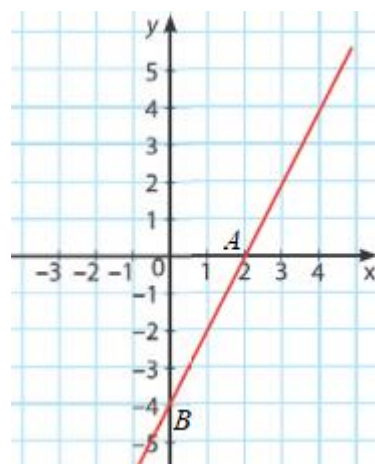
в) Ќе го испитаме текот и ќе го нацртаме графикот на функцијата  $y = 2x - 4$ .

Јасно, дефиниционата област на оваа функција е множеството  $D_f = \mathbb{R}$ , а бидејќи  $a = 2 \neq 0$ , добиваме дека множеството вредности е  $V_f = \mathbb{R}$ .

Понатаму  $a = 2 > 0$ , па од теоремата 1 е следува дека функцијата  $y = 2x - 4$  строго монотонно расте на целата дефинициона област.

За  $x = 0$ , добиваме  $y = 2 \cdot 0 - 4 = -4$ , што значи дека графикот на функцијата ја сече оската  $Oy$  во точката  $B(0, -4)$ . За  $y = 0$ , добиваме  $0 = 2x - 4$ , од каде наоѓаме  $x = 2$ , што значи дека графикот на функцијата ја сече оската  $Ox$  во точката  $A(2, 0)$ .

Значи, графикот на функцијата е правата која минува низ точките  $B(0, -4)$  и  $A(2, 0)$ . Истиот е прикажан на цртежот.



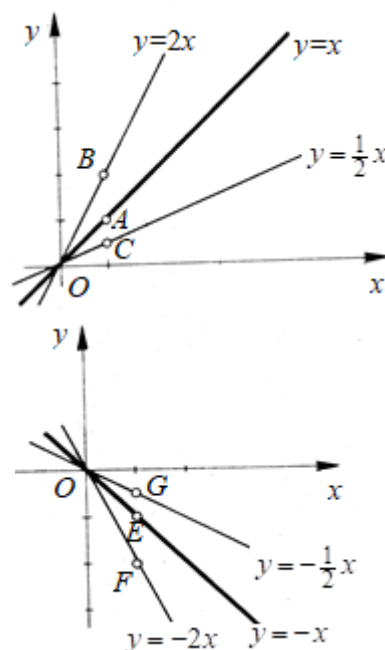
**Пример 9.** Нацртај ги графиците на функциите

а)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = 2x$  и  $h(x) = \frac{1}{2}x$  и  $y = \frac{1}{2}x$

б)  $f(x) = -x$ ,  $g(x) = -2x$  и  $h(x) = -\frac{1}{2}x$

**Решение.** а) Графиците на функциите се прави кои минуваат низ координатниот почеток  $O(0,0)$ . Понатаму, за истите да ги нацртаме наоѓаме  $f(1)=1$ ,  $g(1)=2$  и  $h(1)=\frac{1}{2}$ , па затоа графиците на  $f, g$  и  $h$  минуваат низ точките  $A(1,1)$ ,  $B(1,2)$  и  $C(1, \frac{1}{2})$ , соодветно (види цртеж).

б) Графиците на овие функции минуваат низ координатниот почеток  $O(0,0)$ . Од  $f(1)=-1$ ,  $g(1)=-2$  и  $h(1)=-\frac{1}{2}$  следува дека графиците на  $f, g$  и  $h$  минуваат низ точките  $E(1,-1)$ ,  $F(1,-2)$  и  $G(1, -\frac{1}{2})$ , соодветно (види цртеж).



**Пример 10.** Одреди ја линеарната функција  $f(x) = ax + b$  ако  $f(2x+1) = 3x - 5$ .

**Решение.** За да ја определиме функцијата  $f$  ставаме  $2x+1=t$ . Од последното равенство наоѓаме  $x = \frac{t-1}{2}$ . Понатаму, изразот за  $x$  го заменуваме во  $f(2x+1) = 3x - 5$  и наоѓаме

$$f(t) = 3 \cdot \frac{t-1}{2} - 5 = \frac{3}{2}t - \frac{3+10}{2} = \frac{3}{2}t - \frac{13}{2}.$$

Задачи

15. Која од следните функции монотонно расте, а која монотонно опаѓа:

а)  $f(x) = 4x - \frac{1}{2}$ , б)  $f(x) = -5x - 2\sqrt{2}$ , в)  $f(x) = -\sqrt[3]{4x+1}$ , г)  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 3$

16. Нацртај го графикот на функцијата:

а)  $f(x) = 3x$ ,      б)  $f(x) = -\frac{1}{4}x$ ,      в)  $f(x) = \frac{2}{3}x$ .

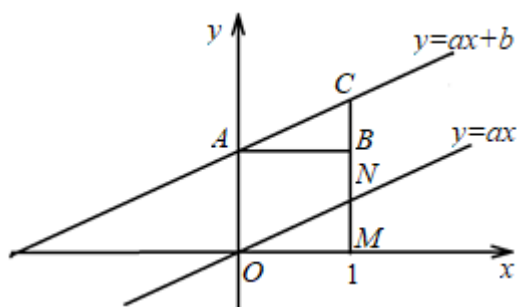
17. Нацртај го графикот на функцијата:

а)  $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ ,      б)  $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$  и      в)  $f(x) = -3x + 4$ .

18. Одреди ја функцијата  $f(x) = ax + b$  ако: а)  $f(x-1) = 4 - x$ ,      б)  $f(3x+4) = 3x - 1$ .

### 3.4 Коефициент на правец, паралелни и нормални прави

Да ги разгледаме функциите  $y = ax$  и  $y = ax + b$  (види цртеж). Во точката  $M(1,0)$  да повлечеме нормала на оската  $Ox$ , која графиците на дадените функции (правите) ги сече во точките  $N$  и  $C$ , а во пресечната точка  $A(0,b)$  на правата  $y = ax + b$  со оската  $Oy$  да повлечеме права паралелна со оската  $Ox$  која правата  $MC$  ја сече во точката  $B$ . Имаме,  $N(1,a)$ ,  $B(1,b)$  и  $C(1,a+b)$ . Значи, за правоаголните



триаголници  $ONM$  и  $ACB$  добиваме  $\overline{OM} = \overline{AB} = 1$  и  $\overline{BC} = a + b - b = a = \overline{MN}$ , што значи дека тие се складни. Од докажаната складност следува дека  $\angle MNO = \angle BAC$  и како  $MC$  е трансверзала за правите  $ON$  и  $AC$  заклучуваме дека овие прави се паралелни.

Може да се докаже дека од паралелноста на правите кои се графици на функциите  $y = ax$  и  $y = a_1x + b$  следува  $a = a_1$ . Според тоа, точна е следнава теорема.

**Теорема 2.** Две линеарни функции имаат еднакви коефициенти пред независно променливата ако и само ако нивните графици се две паралелни прави.

Од претходните разгледувања следува дека коефициентот  $a$  пред независно променливата определува множество паралелни прави, па затоа истиот го нарекуваме *коефициент на правец*.

**Пример 11.** Определи го реалниот број  $k$  така што графиците на функциите  $y = 3x - 7$  и  $y = (k - 2)x + 4$  се:

а) паралелни,      б) се сечат

Дали е можно графиците на дадените функции да се совпаѓаат? За која вредност на реалниот број  $k$  графикот на функцијата  $y = (k - 2)x + 4$  е паралелен со оската  $Ox$ ?

**Решение.** а) Според теорема 2 графиците на функциите  $y = 3x - 7$  и  $y = (k - 2)x + 4$  се паралелни ако и само ако функциите имаат еднакви коефициенти на правци, т.е. ако и само ако  $k - 2 = 3$ , од каде добиваме  $k = 5$ .

б) Јасно, графиците на функциите се сечат ако и само ако  $k - 2 \neq 3$ , т.е.  $k \neq 5$ .

За да графиците на функциите се совпаѓаат тие треба да имаат еднакви вредности за секоја вредност на независно променливата. Но, за  $x_0 = 0$  функцијата  $y = 3x - 7$  има вредност  $y_1 = -7$ , а функцијата  $y = (k - 2)x + 4$  има вредност  $y_2 = 4$ . Значи, графиците на дадените функции не може да се совпаѓаат ниту за една вредност на  $k$ .

Графикот на функцијата  $y = (k - 2)x + 4$  е паралелен со оската  $Ox$  ако  $k - 2 = 0$ , т.е.  $k = 2$ .

**Пример 12.** Најди ја линеарната функција чиј график минува низ точката  $A(1, 4)$  и е паралелен со графикот на линеарната функција  $y = 2x + 8$ .

**Решение.** Нека бараната линеарна функција е  $y = ax + b$ . Бидејќи нејзиниот график е паралелен со графикот на функцијата  $y = 2x + 8$ , од теорема 2 следува дека  $a = 2$ . Значи, бараната функција е од видот  $y = 2x + b$ . Но, графикот на функцијата минува низ точката  $A(1, 4)$ , па затоа важи  $4 = 2 \cdot 1 + b$ , од каде добиваме  $b = 2$ .

Конечно, бараната функција е  $y = 2x + 4$

Да ја разгледаме функцијата  $y = ax + b$ ,  $a, b \neq 0$ . Сакаме да определиме линеарна функција чиј график минува низ дадена точка и е нормален на графикот на функцијата  $y = ax + b$ . За таа цел, аналогно како во решението на претходната задача, потребно е да го определиме коефициентот на правецот на нормалата. Понатаму, бидејќи сите прави кои се нормални на една права се паралелни меѓу себе, доволно е да го определиме коефициентот на правецот на една права која е нормална на дадената права. Графикот на функцијата  $y = ax + b$  ги содржи точките  $A(0, b)$  и  $B(-\frac{b}{a}, 0)$ . Затоа симетралата  $s$  на отсечката  $AB$  е нормална на правата  $y = ax + b$ . Произволна точка  $M(x, y)$  припаѓа на симетралата  $s$  ако и само ако  $\overline{MA} = \overline{MB}$ , од каде добиваме

$$x^2 + (y - b)^2 = (x + \frac{b}{a})^2 + y^2.$$

Ако во последното равенство квадрираме, по средувањето добиваме  $y = -\frac{1}{a}x + \frac{b}{2} - \frac{b}{2a^2}$ . Според тоа, коефициентот на правецот на права која е нормална на правата  $y = ax + b$  е  $a_1 = -\frac{1}{a}$ .

Обратно, нека две прави  $(p)$  и  $(q)$  имаат коефициенти на правци  $a$  и  $a_1 = -\frac{1}{a}$ , соодветно. Тогаш тогаш нормалата  $(r)$  на правата  $(p)$  има коефициент на правец  $a_1 = -\frac{1}{a}$ . Сега од теорема 2 следува дека правите  $(r)$  и  $(q)$  се паралелно, па затоа правите  $(p)$  и  $(q)$  се заемно нормални. Според тоа, точна е следнава теорема.

**Теорема 3.** Правите  $y = ax + b$  и  $y = a_1x + b$  се заемно нормални ако и само ако  $a_1 = -\frac{1}{a}$ .

**Пример 13.** Определи го реалниот број  $k$  така што графиците на функциите  $y = 3x - 7$  и  $y = (k - 2)x + 4$  се заемно нормални.

**Решение.** Коефициентите на правците на правите  $y = 3x - 7$  и  $y = (k - 2)x + 4$  се  $a = 3$  и  $a_1 = k - 2$ . Според условот на задачата правите треба да се заемно нормални, па од теорема 3 следува дека  $a_1 = -\frac{1}{a}$ , односно  $k - 2 = -\frac{1}{3}$ . Конечно, од последната равенка добиваме  $k = \frac{5}{3}$ .

**Пример 14.** Најди ја равенката на правата која минува низ точката  $A(1, 4)$  и е нормална на правата  $y = 2x + 8$ .

**Решение.** Нека  $y = ax + b$  е равенката на бараната права. Тогаш за нејзиниот коефициент на правец добиваме  $a = -\frac{1}{2}$ . Значи, бараната функција е од видот  $y = -\frac{1}{2}x + b$ . Но, графикот на функцијата минува низ точката  $A(1, 4)$ , па затоа важи  $4 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b$ , од каде добиваме  $b = \frac{9}{2}$ .

Конечно, бараната функција е  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ .

**Пример 15.** Точката  $A(0, -5)$  е едното теме на квадратот  $ABCD$  чија една страна лежи на правата  $y = -2x$ . Определи ја плоштината на квадратот  $ABCD$ .

**Решение.** Од  $-5 \neq -2 \cdot 0$  следува дека темето  $A$  не припаѓа на правата  $y = -2x$ . Квадратот има прави агли, па затоа едно од неговите темиња, да кажеме  $B$  се наоѓа во пресекот на правата  $y = -2x$  и нејзината нормала повлечена од точката  $A$ . Коефициентот на правецот на нормалата е  $a = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ , па затоа нејзината равенка е од видот  $y = \frac{1}{2}x + b$ . Бидејќи таа минува низ точката  $A(0, -5)$ , добиваме  $-5 = \frac{1}{2} \cdot 0 + b$ , односно  $b = -5$ . Значи, равенката на нормалата е  $y = \frac{1}{2}x - 5$ .

Понатаму, точката  $B$  е пресек на правите  $y = -2x$  и  $y = \frac{1}{2}x - 5$ , па затоа добиваме  $-2x = \frac{1}{2}x - 5$ , од каде наоѓаме  $x = 2$ . Значи,  $y = -2 \cdot 2 = -4$ , т.е.  $B(2, -4)$ .

Според тоа, должината на страната на квадратот  $ABCD$  е  $\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (-4+5)^2} = \sqrt{5}$ , па затоа неговата плоштина е  $P = \overline{AB}^2 = \sqrt{5}^2 = 5$ .

## Задачи

19. Определи го реалниот број  $k$  така што графици на функциите  $y = 4x - 7$  и  $y = \frac{k-2}{3}x + 1$  се:  
а) паралелни, б) се сечат
20. Определи го реалниот број  $k$  така што графици на функциите  $y = \frac{k-2}{3}x + 1$  и  $y = \frac{k-3}{2}x + 1$  се паралелни.
21. Најди ја линеарната функција чиј график минува низ точката  $A(-1, 3)$  и е паралелен со графикот на линеарната функција  $y = -2x + 11$ .
22. Определи го реалниот број  $k$  така што графици на функциите  $y = 2x + 7$  и  $y = (k + 2)x + 2k + 4$  се заемно нормални.
23. Најди ја равенката на правата која минува низ точката  $A(4, 4)$  и е нормална на правата  $y = -2x + 8$ .
24. Точката  $A(0, 4)$  е едното теме на квадратот  $ABCD$  чија една страна лежи на правата  $y = 3x$ . Определи ја плоштината на квадратот  $ABCD$ .

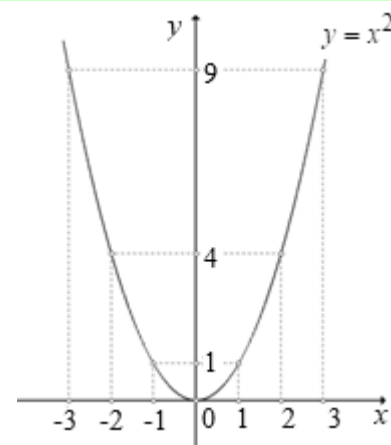
### 3.5 Степенско и експоненцијално растење и опаѓање

Во претходните две лекции ја изучивме линеарната функција  $y = ax + b$ ,  $a \neq 0$  во која независно променливата е на прв степен. Меѓутоа, променливата може да биде и на степен различен од 1. Во следните примери ќе покажеме како се црта (скицира) график на некои функции кај кои променливата се јавува на степен цел број.

**Пример 16.** Нацртај го графикот на функцијата  $y = x^2$ .

**Решение.** За да го нацртаме графикот на функцијата ќе составиме табела со која ќе добијеме точки кои припаѓаат на истиот. Како што знаеме за да го нацртаме графикот на линеарната функција доволно е да определиме две точки и да повлечеме права. Меѓутоа, тоа не е доволно за графикот на функцијата  $y = x^2$ , за чие цртање е пожелно да се определат најмалку 5 точки. Притоа, колку повеќе точки определиме кои припаѓаат на графикот на оваа функција, толку попрецизно ќе може истиот да се нацрта. Точките од графикот ќе ги определиме така што ќе составиме табела на вредности на функцијата, со што всушност определуваме координати на точки од графикот на функцијата. Бараната табела е:

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|----|----|----|---|---|---|---|
| $y$ | 9  | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 | 9 |



Добиените точки ги цртаме во Декартов правоаголен координатен систем, а потоа истите ги поврзуваме, со што го добиваме графикот кој е прикажан на цртежот.

**Пример 17.** Нацртај ги графици на функциите:

а)  $y = 2x^2$  и

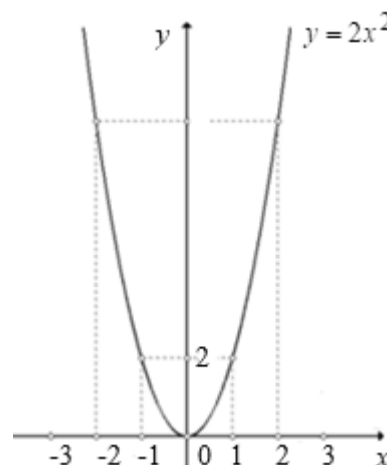
б)  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

**Решение.** Како во пример 16, така и овде, за секоја функција ќе составиме табела на вредности на функцијата, добиените точки ќе ги нацртаме во Декартов правоаголен координатен систем, а потоа со поврзување на истите го добиваме графикот на функцијата.

а) За функцијата  $y = 2x^2$  табелата вредности е

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  |
|-----|----|----|----|---|---|---|----|
| $y$ | 18 | 8  | 2  | 0 | 2 | 8 | 18 |

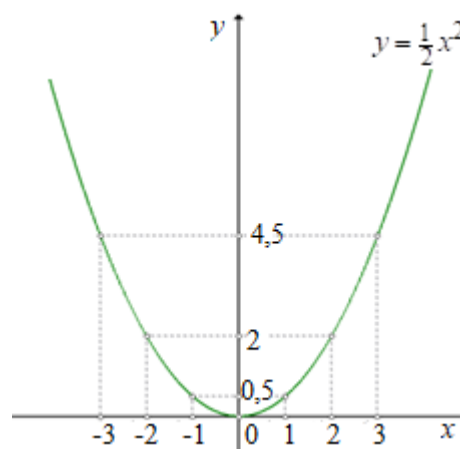
Значи, имаме седум точки од графикот на функцијата и истите ги цртаме во координатен систем. Графикот на функцијата е прикажан на цртежот.



б) За функцијата  $y = \frac{1}{2}x^2$  табелата вредност е

| $x$ | -3  | -2 | -1  | 0 | 1   | 2 | 3   |
|-----|-----|----|-----|---|-----|---|-----|
| $y$ | 9/2 | 2  | 1/2 | 0 | 1/2 | 2 | 9/2 |

Постапуваме како во двата претходни случаи и го добиваме графикот на функцијата.



**Пример 18.** Од примерите 16 и 17 забележуваме дека функциите се симетрични во однос на оската  $Oy$ . Истото важи и ако константата пред  $x^2$  е негативна, но тогаш графикот на функцијата е отворен надолу. За функциите

$$y = -x^2, \quad y = -2x^2 \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{2}x^2$$

табелите вредности се:



|       |    |    |    |   |    |    |    |
|-------|----|----|----|---|----|----|----|
| $x$   | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  | 3  |
| $x^2$ | -9 | -4 | -1 | 0 | -1 | -4 | -9 |

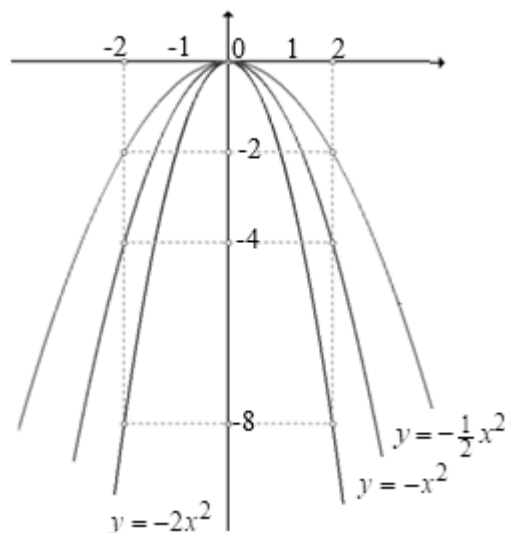
|         |     |    |    |   |    |    |     |
|---------|-----|----|----|---|----|----|-----|
| $x$     | -3  | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  | 3   |
| $-2x^2$ | -18 | -8 | -2 | 0 | -2 | -8 | -18 |

|           |      |    |      |   |      |    |      |
|-----------|------|----|------|---|------|----|------|
| $x$       | -3   | -2 | -1   | 0 | 1    | 2  | 3    |
| $-0,5x^2$ | -9/2 | -2 | -1/2 | 0 | -1/2 | -2 | -9/2 |

Графиците на овие функции се прикажани на цртежот.

Функциите разгледани во примерите 16, 17 и 18 припаѓаат во групата степенски функции. Притоа, во разгледуваните примери степените показатели се позитивни цели броеви. Но, истите може да бидат и негативни цели броеви. Ќе разгледаме два примера.



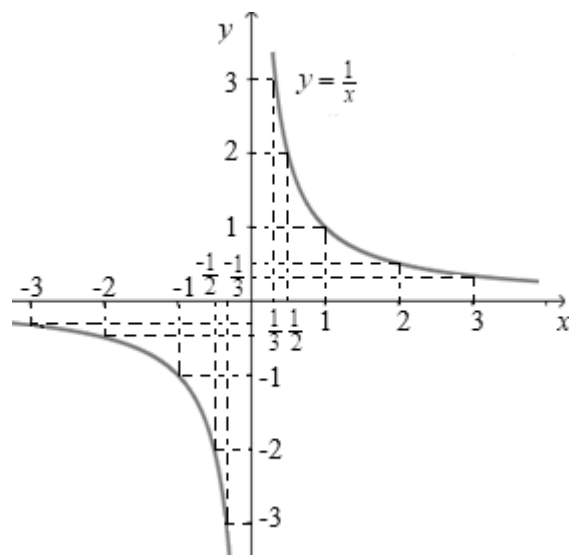
**Пример 19.** Нацртај ги графиците на функциите:

а)  $y = \frac{1}{x}$  и б)  $y = \frac{1}{x^2}$ .

**Решение.** а) Бидејќи делењето со 0 не е дозволено, добиваме дека функцијата  $y = \frac{1}{x}$  е определена за секој  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Сега, како и во претходните примери ќе составиме табела на вредности за дадената функција. Добиваме:

|               |                |                |    |                |                |               |               |   |               |
|---------------|----------------|----------------|----|----------------|----------------|---------------|---------------|---|---------------|
| $x$           | -3             | -2             | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2             |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2             | -3             | 3             | 2             | 1 | $\frac{1}{2}$ |

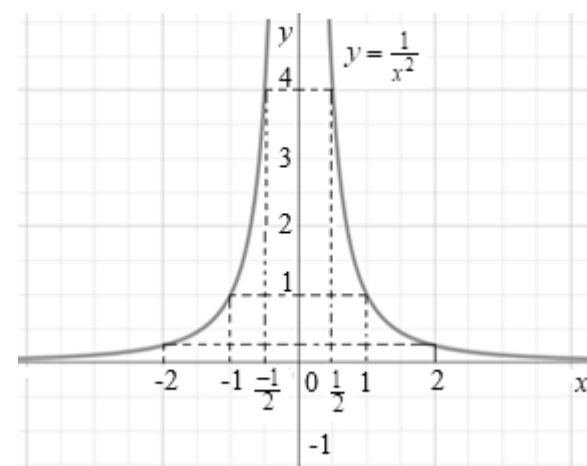
На цртежот е даден графикот на функцијата  $y = \frac{1}{x}$ .



б) Дефиниционата област на функцијата  $y = \frac{1}{x^2}$  е множеството  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Да составиме табела на вредности за оваа функција. Имаме:

|                 |               |               |    |                |                |               |               |   |               |
|-----------------|---------------|---------------|----|----------------|----------------|---------------|---------------|---|---------------|
| $x$             | -3            | -2            | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2             |
| $\frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{4}$ | 1  | 4              | 9              | 9             | 4             | 1 | $\frac{1}{4}$ |

На цртежот е даден графикот на функцијата  $y = \frac{1}{x^2}$ .



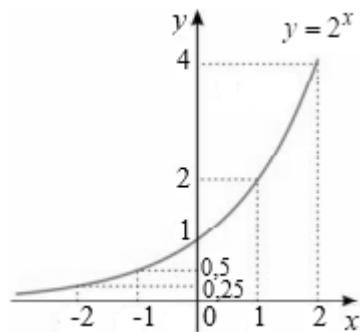
Пред да го разгледаме следниот пример, да забележиме дека графиците на функциите од видот  $y = \frac{a}{x}$ ,  $a \neq 0$  всушност се графиците на обратната пропорционалност, со која се запознавме во лекцијата 1.12.



**Пример 20.** За да го нацртаме графикот на функцијата  $y = 2^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ќе составиме табела за некои вредности на функцијата. Имаме:

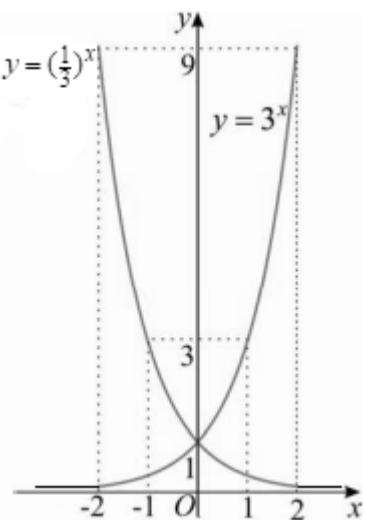
|         |               |               |     |     |     |
|---------|---------------|---------------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-2$          | $-1$          | $0$ | $1$ | $2$ |
| $y=2^x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |

Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови  $(x, 2^x)$  и истите ги поврземе.



Функцијата од пример 20 е експоненцијална функција, т.е. функција од видот  $f(x) = a^x$ . Во случајов  $a$  е природен број. Притоа, ако  $a = 1$ , тогаш  $f(x) = 1$  за секој  $x \in \mathbb{R}$ , што значи дека функцијата е константна. Може да се докаже дека за  $a > 1$  експоненцијалната функција  $f(x) = a^x$  строго монотонно расте, а ако  $0 < a < 1$  таа строго монотонно опаѓа.

На цртежот се дадени графици на функциите  $y=3^x$  и  $y=(\frac{1}{3})^x$ . Како што гледаме овие графици се симетрични во однос на координатната оска  $Oy$ . Да забележиме дека за секој  $a > 1$  графици на функциите  $y=a^x$  и  $y=(\frac{1}{a})^x$  се симетрични во однос на координатната оска  $Oy$ .



Од физика знаеш дека ако едно тело мирува и на него делува сила која брзината ја зголемува во ист правец и насока, тогаш имаме забрзано праволиниско движење. Наједноставно забрзано праволиниско движење е кога забрзувањето  $a$  не се менува во текот на движењето, т.е. кога  $a = \text{const}$  и ова движење го нарекуваме рамномерно забрзано праволиниско движење. Во овој случај, во зависност од времето  $t$  изминатиот пат  $s$  е даден со формулата  $s = \frac{at^2}{2}, t \geq 0$ , што значи дека во случајов имаме степенска зависност на патот од времето.

Во лекцијата 1.10 видовме дека за почетен капитал  $K_0$  и каматна стапка  $p\%$ , при декурзивно вкамување по  $n$ -тиот период капиталот ќе биде  $K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$ . Ако ставиме  $a = 1 + \frac{p}{100}$ , добиваме дека  $K_n = K_0 a^n$ . Притоа  $a > 1$ , од каде заклучуваме дека во случајов имаме експоненцијално растење на капиталот.

**Пример 21.** Во лабораторија со идеални услови за живеење од 1 бактерија за 1 час се добиваат 2 бактерии. На почетокот имало само една бактерија и се претпоставува дека ниту една бактерија нема да умре. Колку бактерии ќе има по

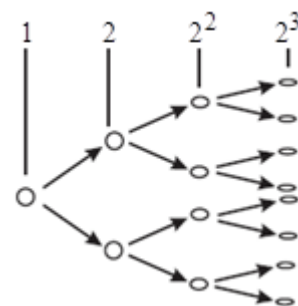
- а) 10 часа, б) 24 часа?

**Решение.** Од условот на задачата следува со секој изминат час бројот на бактериите се удвојува. Значи, по 1 час ќе има 2 бактерии, по 2 часа ќе има  $2 \cdot 2 = 2^2$  бактерии, по 3 часа ќе има  $2 \cdot 2^2 = 2^3$  бактерии итн.

Според тоа, во случајов бројот на бактериите експоненцијално се зголемува и по  $n$  часови ќе имаме  $y(n) = 2^n$  бактерии.

а) Бројот на бактериите по 10 часа ќе биде  $y(10) = 2^{10} = 1024$ .

б) Бројот на бактериите по 24 часа ќе биде  $y(24) = 2^{24} = 16777216$ .



Задачи

25. Состави табела на вредности и нацртај го графикот на функцијата  $y = \frac{1}{12}x^2$ .

26. Состави табела на вредности и нацртај го графикот на функцијата  $y = -\frac{1}{4}x^2$ .

27. Состави табела на вредности и нацртај го графикот на функцијата  $y = \frac{12}{x}$ .

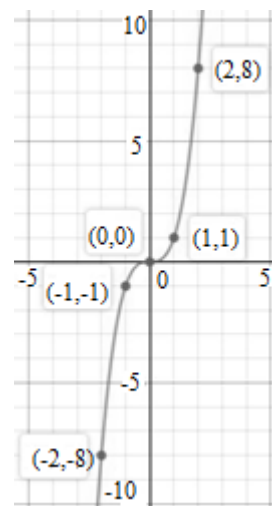
28. Состави табела на вредности и нацртај го графикот на функцијата  $y = -\frac{12}{x^2}$ .

29. Која функција е прикажана со графикот даден на цртежот?

30. Во лабораторија со идеални услови за размножување има три вида бактерии:  $A, B$  и  $C$ . Времето меѓу две делби на бактеријата  $A$  е 25 минути, на бактеријата  $B$  е 24 минути и на бактеријата  $C$  е 20 минути. На почетокот од секој вид има по  $3 \cdot 10^4$  бактерии и се претпоставува дека ниту една бактерија нема да умре. Колку бактерии од секој вид ќе има по 10 часа?

Упатство. Во 10 часа има 600 минути.

31. Познато е дека слободното паѓање е рамномерно забрзано движење со забрзување  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Од врвот на облакодер висок  $200 \text{ m}$  е пуштено слободно да паѓа тело. На која висина од земја-та ќе се наоѓа телото по 6 секунди?



### 3.6 Поим за алгебарска равенка. Линеарна равенка

**Дефиниција 2.** Ако  $A$  и  $B$  се два алгебарски изрази и ако барем едниот од нив содржи променлива, тогаш равенството

$$A = B \quad (1)$$

го нарекуваме *алгебарска равенка*, а променливите ги нарекуваме *непознати* во таа равенка.

**Пример 22.** а) Равенствата  $4x - 7 = 13$ ,  $y(y - 2) = 12$ ,  $\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x - 1}{2x + 1}$  и  $x - 1 = 2 + \sqrt{x}$  се алгебарски равенки со една непозната.

б) Равенствата  $3x - 2y = 15$ ,  $x^2 + xy + y^2 = 0$  и  $x^2 + y^2 = x + y$  се алгебарски равенки со две непознати.

**Дефиниција 3.** Ако во равенката (1) непознатите се заменат со определени реални броеви и ако тогаш добиеме точно бројно равенство, тогаш за тие броеви велиме дека се *решение* на равенката (1).

**Пример 23.** Бројот 5 е решение на равенката  $4x - 7 = 13$ , бидејќи  $4 \cdot 5 - 7 = 13$ , но бројот 7 не е решение на оваа равенка бидејќи  $4 \cdot 7 - 7 = 21 \neq 13$ .

Во врска со една алгебарска равенка разгледуваме две задачи:

- а) дали равенката има решенија,
- б) ако равенката има решение, кои броеви се нејзините решенија, односно кое е множеството решенија  $M$  на таа равенка. Притоа, една алгебарска равенка може да:
  - има решение, т.е. е *решлива равенка* ако нејзиното множество решенија  $M$  не е празно,
  - нема решения, т.е. е *невозможна (нерешлива) равенка*, ако нема ниту едно решение, т.е.  $M = \emptyset$ .

**Пример 24.** а) Равенката  $x^2 + 1 = 0$  нема решение, бидејќи квадратот на било кој број е ненегативен, па затоа собран со 1 е поголем или еднаков на 1.

б) Равенката  $x + 4 = 3x$  е решлива бидејќи за бројот 2 важи  $2 + 4 = 3 \cdot 2$ , т.е. тој е едно нејзино решение.

**Дефиниција 4.** За две равенки  $A = B$  и  $C = D$  велиме дека се *еквивалентни равенки*, ако нивните множества решенија се еднакви. Притоа пишуваме

$$A = B \Leftrightarrow C = D.$$

При решавањето на равенките, ја користиме следнава теорема за еквивалентните равенки, која ќе ја прифатиме без истата да ја докажуваме.

**Теорема 4.** а) Ако  $A = T$ , тогаш  $(A = B \Leftrightarrow T = B)$

б)  $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$ ,

в) Ако  $C \neq 0$ , тогаш  $A = B \Leftrightarrow AC = BC$ ,

г)  $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$  или  $B = 0$ .

Во продолжение ќе се задржиме на линеарните равенки со една непозната и нивното решавање.

**Дефиниција 5.** Ако во алгебарските изрази  $A$  и  $B$  во равенката (1) со една непозната, по нивното средување непозната  $x$  се јавува само со прв степен, тогаш за таа равенка велиме дека е *линеарна равенка со една непозната*.

Линеарни равенки со една непозната се  $4x - 11 = \frac{x+1}{2}$ ,  $\frac{x-1}{7} = \frac{x+3}{2}$ ,  $3x - 8 = 2x + 1$  итн. Ќе решиме неколку примери, со кои ќе покажеме како се решава линеарна равенка со една непозната.

**Пример 25.** Реша ја равенката

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{x}{4} - \frac{1}{5}.$$

**Решение.** Левата и десната страна на равенката ги множиме со НЗС(2,3,4,5) = 60 и ја добиваме еквивалентната равенка  $60(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}) = 60(\frac{x}{4} - \frac{1}{5})$ , односно  $30x - 20 = 15x - 12$ . Ако на двете страни на равенката го додадеме изразот  $20 - 15x$ , ја добиваме еквивалентната равенка

$$30x - 20 + 20 - 15x = 15x - 12 + 20 - 15x, \text{ т.е. } 15x = 8.$$

Последната равенка ја делиме со 15 и добиваме  $x = \frac{8}{15}$ .

Од теорема 4 непосредно следуваат тврдењата искажани во следната теорема, кои непосредно ги користиме при решавањето на равенките.

**Теорема 5.** а) Секој член на равенката може да се пренесе од едната страна на равенката на другата страна, но со спротивен знак.

б) Ако на двете страни на равенката има еднакви членови, тогаш тие може да се поништат.

в) Ако сите членови на равенката го променат знакот, тогаш се добива еквивалентна равенка на дадената.

**Пример 26.** Реша ја равенката

$$\frac{1}{3}\left[x - \frac{2}{7}\left(4x - \frac{1-x}{4}\right) + 7\right] = 2.$$

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{7} \cdot \frac{17x-1}{4} + 7\right) = 2,$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{-3x+99}{14} = 2,$$

$$-3x + 99 = 84,$$

$$3x = 15.$$

Од последната равенка, која е еквивалентна со дадената, наоѓаме  $x = 5$ .

Значи,  $x = 5$  е решение и на дадената равенка.

Од теоремите 4 и 5 следува дека секоја линеарна равенка може да се доведе до обликот

$$ax = b, \quad (2)$$

каде што  $a$  и  $b$  се некои реални броеви. Притоа:

- 1) ако  $a \neq 0$ , тогаш равенката е решлива и има само едно решение, кое се наоѓа ако (2) се помножи со  $\frac{1}{a}$ , при што се добива  $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$ ,
- 2) ако  $a = 0, b = 0$ , тогаш равенката е решлива и има бесконечно многу решенија, бидејќи тогаш  $ax = b \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ , а втората равенка е задоволена за секој реален број  $x$ ,
- 3) ако  $a = 0, b \neq 0$ , тогаш равенката е нерешлива (невозможна), бидејќи равенката  $0 \cdot x = b$  не може да премине во бројно равенство за ниту еден  $x$ .

**Пример 26.** а) Равенката  $x + 3 = 6x - (5x - 4)$  е еквивалентна на равенката  $x + 3 = x + 4$ , т.е. на равенката  $0 \cdot x = 1$ , што значи дека таа е нерешлива.

б) Равенката  $x + 9 = 7x - 3(2x - 3)$  е еквивалентна на равенката  $x + 9 = x + 9$ , т.е. на равенката  $0 \cdot x = 0$ , што значи дека таа е решлива и има бесконечно многу решенија.

в) Равенката  $\frac{5y-4}{3} = 6 + y$  последователно е еквивалентна на равенките

$$\frac{5y-4}{3} = 6 + y,$$

$$5y - 4 = 18 + 3y,$$

$$5y - 3y = 18 + 4,$$

$$2y = 22,$$

$$y = 11,$$

што значи дека таа има едно и единствено решение.

**Пример 27.** Решете ја равенката:

$$2\frac{2}{3} : \{[(3,72 - 0,02x) \cdot \frac{10}{37}] : \frac{5}{6} + 2,8\} - \frac{7}{15} = 0,2.$$

**Решение.** Имаме:

$$2\frac{2}{3} : \{[(3,72 - 0,02x) \cdot \frac{10}{37}] : \frac{5}{6} + 2,8\} = 0,2 + \frac{7}{15},$$

$$[(3,72 - 0,02x) \cdot \frac{10}{37}] : \frac{5}{6} + 2,8 = 2\frac{2}{3} : \frac{2}{3},$$

$$[(3,72 - 0,02x) \cdot \frac{10}{37}] : \frac{5}{6} = 4 - 2,8,$$

$$(3,72 - 0,02x) \cdot \frac{10}{37} = 1,2 \cdot \frac{5}{6},$$

$$3,72 - 0,02x = 1 : \frac{10}{37},$$

$$-0,02x = 3,7 - 3,72$$

$$-0,02x = -0,02$$

$$x = 1.$$

**Пример 28\*.** Решете ја равенката:

$$\frac{x-10}{1998} + \frac{x-11}{1997} + \dots + \frac{x-15}{1993} = \frac{x-1998}{10} + \frac{x-1997}{11} + \dots + \frac{x-1993}{15}.$$

**Решение.** Забележуваме дека

$$\frac{x-10}{1998} = \frac{x-2008+1998}{1998} = \frac{x-2008}{1998} + 1, \quad \frac{x-11}{1997} = \frac{x-2008}{1997} + 1, \quad \frac{x-12}{1996} = \frac{x-2008}{1996} + 1 \text{ итн.}$$

Со замена во дадената равенка добиваме

$$\frac{x-2008}{1998} + 1 + \frac{x-2008}{1997} + 1 + \dots + \frac{x-2008}{1993} + 1 = \frac{x-2008}{10} + 1 + \frac{x-2008}{11} + 1 + \dots + \frac{x-2008}{15} + 1,$$

т.е.

$$(x - 2008) \left[ \frac{1}{1998} + \frac{1}{1997} + \dots + \frac{1}{1993} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \dots - \frac{1}{15} \right] = 0,$$

од каде добиваме  $x - 2008 = 0$ , т.е.  $x = 2008$ .

Задачи

32. Дали се еквивалентни равенките:

а)  $x = 4$  и  $x^2 = 16$ ,

б)  $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$  и  $x = 12$ ,

в)  $\frac{x}{2} - 1 = 2x - 5$  и  $3x - 6 = 3(x - 2)$ ,

г)  $7(x + 4) = 7x + 22$  и  $\frac{x}{3} + 2 = \frac{x}{4} - 1$ ?

33. Решете ја равенката:

а)  $3(x - 5) = 2(x + 7)$ ,

б)  $9(3y + 1) - 6(5y - 7) = 4(y + 11)$

в)  $\frac{9z}{8} - \frac{7z}{6} = \frac{5z}{4} + \frac{3}{2}$ ,

г)  $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{4} = \frac{x+3}{5} - \frac{x+4}{6}$ .

34. Решете ја равенката:

а)  $\frac{a+3}{5} = 2a - 12$ ,

б)  $1x - \frac{2+x}{5} = \frac{3+x}{4}$ ,

в)  $1 - y - \frac{1-2y}{7} = \frac{1-3y}{2}$ ,

г)  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{7} + 1$ .

35. Решете ја равенката:

а)  $2(x + 3) - 4(x + 5) = 6(x + 7) - 9(x + 10)$ ,

б)  $2x + 3(+4) + 5(x + 6) = 7(x + 8) - 14$ ,

$$\text{в)} \frac{2x+1}{7} - \frac{3x+7}{4} + \frac{4x+3}{5} = 3.$$

36. Дадени се изразите со променлива

$$A(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}, \quad B(x) = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}x \quad \text{и} \quad C(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}.$$

Определи го  $x$ , така што

$$3A(x) - 2B(x) - 4C(x) = \frac{14}{3}.$$

37. Реши ја равенката и утврди колку решенија има:

$$\text{а)} 2x - 8 = 4x - 2(x + 4),$$

$$\text{б)} 3x - 7 = 5x + 10 - 2(x + 6),$$

$$\text{в)} 6y - 8 = 2(2y + 5) + 2y - 2,$$

$$\text{г)} \frac{x-3}{5} - \frac{x-1}{2} = \frac{x-3}{10}.$$

### 3.7 Равенки кои се сведуваат на линеарни и равенки со параметар

Знаењата со кои досега се стекна за линеарните равенки со една непозната може да ти помогнат да решавааш равенки кои на прв поглед не се линеарни, а кои со алгебарски трансформации се сведуваат на линеарни. Да решиме неколку вакви задачи.

**Пример 29.** Реши ја равенката:

$$\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2}.$$

**Решение.** Дадената равенка има смисол за оние вредности на непознатата  $x$ , за кои заедничкиот именител на членовите на равенката е различен од нула, т.е. за вредности на  $x$  за кои  $(2x-1)(2x+1) \neq 0$ . Оттука наоѓаме  $x \neq \frac{1}{2}$  и  $x \neq -\frac{1}{2}$ . Ако помножиме со  $4x^2 - 1 \neq 0$  добиваме

$$(2x-1)^2 = (2x+1)^2 - 8,$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 8,$$

$$8x = 8,$$

$$x = 1.$$

Решението  $x = 1$  го задоволува условот  $x \neq \pm \frac{1}{2}$ , па затоа е решение на дадената равенка.

**Пример 30.** Реши ја равенката:

$$\frac{2}{3x-3} - \frac{2x-5}{x^2-2x+1} = \frac{x+1}{3x^2-6x+3} + \frac{1}{2-2x}.$$

**Решение.** Равенката ја запишуваме во обликот

$$\frac{2}{3(x-1)} - \frac{2x-5}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{3(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)}.$$

Заедничкиот именител на членовите на оваа равенка е  $6(x-1)^2$ . Овој член е различен од нула за  $x \neq 1$ , па значи дадената равенка има смисол за  $x \neq 1$ . Ако помножиме со  $6(x-1)^2$  ја добиваме равенката:

$$4(x-1) - 6(2x-5) = 2(x+1) - 3(x-1), \quad \text{т.е.} \quad 7x = 21,$$

чие решение е  $x = 3$ . Решението  $x = 3$  го задоволува условот  $x \neq 1$  за кој дадената равенка има смисол.

**Пример 31.** Реши ја равенката:

$$\frac{x+1}{2x-1} - \frac{11x+5}{12(2x-1)} = \frac{x-3}{4-8x} + \frac{1}{6}. \quad (1)$$

**Решение.** Дадената равенка ја запишуваме во обликот:

$$\frac{x+1}{2x-1} - \frac{11x+5}{12(2x-1)} = \frac{1}{6} - \frac{x-3}{4(2x-1)}.$$

Јасно, равенката има смисол за  $x \neq \frac{1}{2}$ . Ако помножиме со  $12(2x-1)$  равенката го добива обликот  $0 \cdot x = 0$ . Решенијата на последната равенка се сите реални броеви, па затоа решенијата на (1) се сите реални броеви различни од  $\frac{1}{2}$ .

**Пример 32.** Реши ја равенката:

$$2 + \frac{2x-5}{2-x} = \frac{2}{x(x-2)},$$

**Решение.** Дадената равенка ја запишуваме во обликот:

$$2 - \frac{2x-5}{x-2} = \frac{2}{x(x-2)}. \quad (2)$$

Последната равенка има смисол за  $x(x-2) \neq 0$  т.е.  $x \neq 0$  и  $x \neq 2$ . Ако (2) ја помножиме со  $x(x-2)$  ја добиваме равенката

$$2x(x-2) - x(2x-5) = 2 \quad (3)$$

чије решение е  $x = 2$ . Равенката (2) нема смисол за  $x = 2$ , па затоа  $x = 2$  е решение на равенката (3), но не е решение на (2). Значи, дадената равенка нема решение.

**Пример 33.** Реши ја равенката:

$$(0,8x - 0,5)^2 + (0,6x - 1,3)^2 = 4(0,5x - 0,7)(0,5x + 0,7) - 6(0,15x + 0,08).$$

**Решение.** Имаме:

$$0,64x^2 - 0,8x + 0,25 + 0,36x^2 - 1,56x + 1,69 = 4(0,25x^2 - 0,49) - 0,9x - 0,48,$$

$$x^2 - 2,36x + 1,94 = x^2 - 1,96 - 0,9x - 0,48,$$

$$x = 3.$$

Во продолжение ќе решиме неколку линеарни равенки во кои непознатата е под знакот за апсолутна вредност.

**Пример 34.** Реши ја равенката:

$$|x - \frac{1}{2}| = 2\frac{1}{5}.$$

**Решение.** Од дефиницијата на апсолутна вредност ги добиваме равенките  $x - \frac{1}{2} = \frac{11}{5}$  и  $x - \frac{1}{2} = -\frac{11}{5}$  од каде наоѓаме  $x = \frac{27}{10}$  или  $x = -\frac{17}{10}$ .

**Пример 35.** Реши ја равенката:

$$|x-2| + 2x - |x| = x+1. \quad (4)$$

**Решение.** Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$$

па затоа треба да ги разгледаме следните четири случаи:

i)  $x \geq 2$ ,  $x \geq 0$  и тогаш равенката (4) е еквивалентна на равенката

$$x - 2 + 2x - x = x + 1, \text{ при услов } x \geq 2$$

чие решение е  $x = 3$  и тоа ги задоволува дадените услови, па затоа е решение на почетната равенка.

ii)  $x \geq 2$ ,  $x < 0$  што не е можно, бидејќи не постои реален број кој истовремено е поголем или еднаков на 2 и е помал од 0.

iii)  $x < 2$ ,  $x \geq 0$  и тогаш равенката (4) го добива обликот

$$2 - x + 2x - x = x + 1, \text{ при услов } 0 \leq x < 2$$

чие решение е  $x = 1$ . Добиеното решение  $x = 1$  ги задоволува условите  $x < 2$ ,  $x \geq 0$ , па затоа е решение и на почетната равенка.

iv)  $x < 2$ ,  $x < 0$  и тогаш равенката (4) еквивалентна на равенката

$$2 - x + 2x - (-x) = x + 1, \text{ при услов } x < 0$$

чие решение е  $x = -1$ . Добиеното решение  $x = -1$  го задоволува условот  $x < 0$ , па затоа е решение и на почетната равенка.

Значи равенката има три решенија  $x = 3$ ,  $x = 1$  и  $x = -1$ .

**Пример 36\*.** Решете ја равенката

$$|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9. \quad (5)$$

**Решение.** Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases}, \quad |x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -(x - 3), & x < 3 \end{cases} \text{ и } |2x - 8| = \begin{cases} 2x - 8, & x \geq 4 \\ -(2x - 8), & x < 4 \end{cases}$$

па затоа ќе ги разгледаме случаите:

i)  $x \geq 2$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \geq 4$  и притоа (5) го добива следниот облик

$$x - 2 + x - 3 + 2x - 8 = 9, \text{ при услов } x \geq 4,$$

чие решение  $x = \frac{11}{2}$  задоволува  $x \geq 2$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \geq 4$ , па затоа  $x = \frac{11}{2}$  е решение на (5).

ii)  $x \geq 2$ ,  $x \geq 3$ ,  $x < 4$  и при тоа (5) го добива обликот

$$x - 2 + x - 3 - 2x + 8 = 9, \text{ при услов } 3 \leq x < 4,$$

т.е.  $0 \cdot x = 6$  и оваа равенка нема решение, па затоа и равенката (5) нема решение.

iii)  $x \geq 2$ ,  $x < 3$ ,  $x \geq 4$ , кој не е возможен.

iv)  $x \geq 2$ ,  $x < 3$ ,  $x < 4$  и при тоа (5) го добива обликот

$$x - 2 - x + 3 - 2x + 8 = 9, \text{ при услов } 2 \leq x < 3$$

чие решение  $x = 0$  не го задоволува условот  $x \geq 2$  па затоа  $x = 0$  не е решение на (5).

v)  $x < 2$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \geq 4$ , кој не е возможен.

vi)  $x < 2$ ,  $x \geq 3$ ,  $x < 4$ , кој не е возможен.

vii)  $x < 2$ ,  $x < 3$ ,  $x \geq 4$ , кој не е возможен.

viii)  $x < 2$ ,  $x < 3$ ,  $x < 4$  и во овој случај равенката (5) го добива обликот

$$-x + 2 - x + 3 - 2x + 8 = 9, \text{ при услов } x < 2$$

чие решение  $x = 1$  ги задоволува условите  $x < 2$ ,  $x < 3$ ,  $x < 4$ , па затоа  $x = 1$  е решение на (5).

Значи равенката (5) има две решенија  $x = 1$  и  $x = \frac{11}{2}$ .

Во следните примери ќе се осврнеме на таканаречените *параметарски линеарни равенки*, т.е. на равенките кои освен променливата содржат и константа запишана со буква.



**Решение.** За да линейна равенка со една непозната има бесконечно многу решенија таа треба да има облик  $0 \cdot x = 0$ . Според тоа, треба  $a + 1,5 = 0$  и  $2b - 7 = 0$ , односно  $a = -1,5$  и  $b = 3,5$ .

- а) има само едно решение
- б) нема решение
- в) бројот 0 е решение на равенката.

в) За  $a = 0 \neq 1$  равенката има решение  $x = \frac{0}{0-1} = 0$ .

$$(a-3)x = (a-3)(a+3). \quad (6)$$

iv) За  $a \neq 0, \pm 1$  единствено решение на дадената равенка е  $x = \frac{1}{a(a-1)}$ .

ii) За  $b=1$  добиваме  $0 \cdot x = 0$ , т.е. дадената равенка има бесконечно многу решенија.

$$(b-a)x = (a-b)(a+b). \quad (7)$$

и на почетната равенка.

ii) Ако  $b - a = 0$ , тогаш (7) го добива обликот  $0 \cdot x = 0$  па значи има бесконечно многу решенија, што значи, при  $b - a = 0$  и почетната равенка има бесконечно многу решенија.

#### Задачи

38. Реши ја равенката:  $(x+7)(x-1) = (x+2)(x-3)$ .

39. Реши ја равенката:  $(3y-12)(25+5y) = 0$ .

40. Реши ја равенката:  $x^3 = 25x$ .

41. Реши ја равенката:  $(2y+4)(y-5) = y^2 - 25$ .

42. Реши ја равенката:  $(6x+1)^2 - (3x-4)(3x+4) - 1,5(18x^2+4) + 25 = 72$ .

43. Реши ја равенката  $\frac{x-1}{2x^2-18} + \frac{2}{x+3} + \frac{3}{6-2x} = \frac{4x+1}{4(x-3)(x+3)}$ .

44. Реши ја равенката:  $\frac{x+4}{x+3} = \frac{x+2}{x+1}$ .

45. Реши ја равенката:

а)  $||x|+1|+2|=2016$ , б)  $|x+|x+|x||=2010$ , в)  $|x-1|+1=4-x$ ,

г)  $|x|+|2x+3|-1998=0$ , д)  $||x-1|-6|=2$ .

46. За кои вредности на параметарот  $a$  равенката  $\frac{a-2x}{a} - \frac{2-ax}{2} = a-2$  има само едно решение и тоа е еднакво на нула?

47. За кои вредности на параметарот  $a$  равенката  $5(ax-3) = 4ax-7$

а) нема решение, б) има решение еднакво на  $-\frac{4}{5}$

48. За која вредности на параметарот  $a$  равенката  $2(3x+a)(4x-3) - 6(2x-1)^2 = 26$  има решение  $x=2$ ?

49. Реши ја равенката  $\frac{a-x}{a-b} - \frac{x-b}{a+b} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$ , каде  $a$  и  $b$  се параметри.

50. Реши ја равенката  $\frac{a}{x} + 6 = \frac{3}{x} + 2$ , каде  $a$  е параметар.

### 3.8 Примена на линеарните равенки

Математиката е наука која има широка примена. Во следните примери ќе решиме поголем број проблеми кои се сведуваат на решавање на линеарна равенка со една непозната.

**Пример 42.** Омер правел два теста. На вториот тест тој добил 90 поени и резултатот од вториот тест бил 20% подобар од резултатот од првиот тест. Колку поени Омер повеќе освоил на вториот тест?

**Решение.** Нека Омер на првиот тест освоил  $x$  поени. Тој на вториот тест освоил 20% повеќе поени, што значи дека освоил  $1,2x$  поени. Затоа  $1,2x = 90$ , од каде добиваме  $x = 90 : 1,2 = 75$ . Значи, Омер на вториот тест освоил  $90 - 75 = 15$  поени повеќе отколку на првиот тест.

**Пример 43.** Бојан и Борко купиле бомбони и си ги поделиле во однос 5:1. Борко изел една бомбона, а Бојан изел 13 бомбони и им останале еднаков број бомбони. Колку бомбони купиле Бојан и Борки?

**Решение.** На почетокот Борко имал  $x$  бомбони, а Бојан имал  $5x$  бомбони. Кога Борко изел 1 бомбона, а Бојан 13 бомбони, им останале еднаков број бомбони, па затоа  $x - 1 = 5x - 13$ , од каде добиваме  $x = 3$ . Според тоа, двајцата вкупно купиле  $3 + 5 \cdot 3 = 18$  бомбони.

**Пример 44.** Во една кутија чоколади секоја чоколада е или само со бадем, или само со брусница, или само со кикиритки или само со лешник. Притоа  $\frac{1}{5}$  од вкупниот број чоколади се само со бадем, 30% се само со брусница и 20% се само со кикиритки. Колку чоколади има во кутијата, ако девет од чоколадите во кутијата се само со лешник?

**Решение.** Нека во кутијата има  $x$  чоколади. Од условот на задачата следува

$$\frac{x}{5} + 0,3x + 0,2x + 9 = x,$$

од каде добиваме  $x = 30$ . Значи, во кутијата има 30 чоколади.

**Пример 45.** Третина од лалињата и ги дадов на Шана, петтина на Вишна, шестина доби Соња, а четвртина Дана. Преостанатите шест лалиња и ги дадов на мајка ми. Колку вкупно лалиња имав?

**Решение.** Нека бројот на лалињата е  $x$ . Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x + 6 = x,$$

која е еквивалентна со равенката  $20x + 12x + 10x + 15x + 360 = 60x$ , чие решение е  $x = 120$ . Значи, имав 120 лалиња.



**Пример 46.** Збирот на 1259 последователни цели броеви е еднаков на 1259. Определи го најголемиот собирок.

**Решение.** Нека  $x$  е бројот кој се наоѓа во средината на дадените 1259 броја. Тогаш негови претходници се:  $x - 1, x - 2, x - 3, \dots, x - 629$ , а негови следбеници се  $x + 1, x + 2, x + 3, \dots, x + 629$ . Според тоа,

$$x - 629 + x - 628 + \dots + x - 1 + x + x + 1 + \dots + x + 628 + x + 629 = 1259,$$

па затоа  $1259x = 1259$ , т.е.  $x = 1$ .

Значи, најголемиот собирок е  $x + 629 = 1 + 629 = 630$ .

**Пример 47.** Ако некој број се подели со друг број, се добива количник 2 и остаток 5. Ако збирот на тие броеви се подели со нивната разлика, се добива количник 2 и остаток 7. Определи го збирот на овие броеви.

**Решение.** Ако со  $x$  го означиме делителот, тогаш деленикот е  $2x + 5$ . Збирот на броевите е  $3x + 5$ , а разликата е  $x + 5$ . Затоа

$$3x + 5 = 2(x + 5) + 7,$$

од каде добиваме  $x = 12$ . Значи, бараниот збир е  $3x + 5 = 41$ .

**Пример 48.** На прашањето колку е часот таткото му одговорил на синот: Четвртината од изминатото време и половина од преостанатото време на овој ден го даваат точното време. Колку бил часот?

**Решение.** Ако  $t$  го означиме точното време, ја добиваме равенката  $\frac{t}{4} + \frac{24-t}{2} = t$ , од каде добиваме  $t = \frac{48}{5} = 9,6 \text{ h} = 9 \text{ h } 36 \text{ min}$ .



**Пример 49.** Татковото детство траело шестина од неговиот живот, а се оженил осмина од својот живот по детството и одма отишол во војска. Кога поминала уште дванаесеттина од неговиот живот таткото се вратил од војска и 5 години по враќањето од војската добил син. Синот кој проживеал половина од татковите години починал 4 години пред таткото. Колку години живеел таткото и колку години имал кога му се родил синот?

**Решение.** Ако со  $x$  го означиме бројот на годините на таткото, тогаш од условот на задачата следува  $\frac{x}{6} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$ , од каде добиваме  $x = 72$ . Значи, таткото живеел 72 години, а синот му се родил кога имал 36 години.

**Пример 50.** Еден работник сам може да заврши некоја работа за 20 дена, а друг работник истата таа работа сам може да ја заврши за 30 дена. Ако на првиот и вториот работник им се придружи трет работник, тогаш сите тројца работата заедно може да ја завршат за 8 дена. За кое време третиот работник сам може да ја заврши работата?

**Решение.** Нека  $x$  е бројот на деновите за кои третиот работник сам може да ја заврши работата. Првиот работник за еден ден завршува  $\frac{1}{20}$  од работата, вториот работник за еден ден завршува  $\frac{1}{30}$  од работа и третиот работник за еден ден завршува  $\frac{1}{x}$  од работата. Сите тројца за еден ден завршуваат  $\frac{1}{8}$  од работата, па затоа  $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$ . Решението на последната равенка е  $x = 24$ , што значи дека третиот работник сам ќе ја заврши работата за 24 дена.

**Пример 51.** Во две буриња има 170 kg брашно. Ако  $\frac{3}{20}$  од брашното од едното буре се претури во другото буре, тогаш во двете буриња ќе има еднакво количество брашно. Колку брашно имало на почетокот во секое буре?

**Решение.** Нека на почетокот во првото буре имало  $x$  kg брашно. Тогаш во второто буре имало  $170 - x$  kg брашно. По претурањето на  $\frac{3}{20}$  од брашното во првото буре, во него останале  $\frac{17}{20}x$  брашно, а во второто буре имало  $170 - x + \frac{3}{20}x = 170 - \frac{17}{20}x$  брашно. Значи,  $170 - \frac{17}{20}x = \frac{17}{20}x$  од каде добиваме  $x = 100$  kg. Конечно, во првото буре имало 100 kg брашно, а во второто буре имало  $170 - 100 = 70$  kg брашно.

**Пример 52.** Во два сада има 80 литри вода. Ако од првиот сад во вториот сад се прелее  $\frac{1}{8}$  од вкупното количество вода, тогаш во вториот сад ќе има 4 пати повеќе вода отколку во првиот сад. Колку вода имало во секој сад пред прелевањето?

**Решение.** Нека во првиот сад има  $x$  литри вода. Тогаш во вториот сад има  $80 - x$  литри вода. Бидејќи  $\frac{1}{8}$  од вкупното количество вода е  $80 : 8 = 10$  литри, по прелевањето во првиот сад ќе има  $x - 10$  литри вода, а во вториот сад ќе има  $80 - x + 10 = 90 - x$  литри вода. Затоа  $90 - x = 4(x - 10)$ , од каде добиваме  $x = 26$ . Значи, пред прелевањето во првиот сад имало 26 литри вода, а вториот сад имало  $80 - 26 = 54$  литри вода.

**Пример 53.** Од две ниви со вкупна плоштина 500 декари, дедо Африм вкупно ожнеал 222 тони пченица. Приносот од првата нива бил 400 kg од декар, а од втората нива бил 500 kg од декар. Определи ја плоштината на секоја од нивите.

**Решение.** Ако плоштината на првата нива е  $x$  декари, тогаш плоштината на втората нива е  $500 - x$  декари. Дедо Африм вкупно ожнеал  $222\text{ t} = 222000\text{ kg}$  пченица, па затоа

$$400x + 500(500 - x) = 222000,$$

од каде добиваме  $x = 280$ . Значи плоштината на едната нива била 280 декари, а на другата нива била 220 декари.



**Пример 54.** Павел со велосипед тргнал од дома до нивната планинарска кука. Првата пауза ја направил кога поминал  $\frac{2}{7}$  од патот. По  $54\text{ km}$  повторно направил пауза и до тогаш поминал  $\frac{7}{11}$  од патот. Определи ја должината на патот од домот на Павел до неговата планинарска кука.

**Решение.** Нека  $x$  е должината на патот. Од  $(\frac{7}{11} - \frac{2}{7})x = 54$ , добиваме  $\frac{27}{77}x = 54$ . Според тоа,  $x = 154\text{ km}$ .

**Пример 55.** Автобус требало да го помине патот од градот  $A$  до градот  $B$  за 4 часа и 45 минути. Тој тргнал од градот  $A$  и изминал 60% од целиот пат за 3 часа, со брзина помала од определената. За да сигне во определеното време, возачот пресметал, дека треба да ја зголеми брзината за  $8,5\text{ km/h}$ . Определи ја должината на патот меѓу двата града.

**Решение.** Ако со  $x$  ја означиме должината на патот меѓу градовите  $A$  и  $B$ , тогаш за првите 3 часа се поминати  $0,6x$  со брзина  $\frac{0,6x}{3} = 0,2x\text{ km/h}$ . Преостанатиот дел од патот е  $0,4x$  и автобусот го поминал за  $1,75\text{ h}$  со брзина  $(0,2x + 8,5)\text{ km/h}$ , па затоа важи

$$1,75 \cdot (0,2x + 8,5) = 0,4x,$$

од каде добиваме  $x = 297,5\text{ km}$ .

**Пример 56.** Цената на ист вид патики во две продавници била еднаква. Во едната продавница цената на патиките се зголемила за 8%, а во другата се намалила за 8%. Колкава е почетната цена на патиките, ако сега разликата на цените е еднаква на 1200 денари?

**Решение.** Со  $x$  да ја означиме почетната цена на патиките. Сега, во едната продавница цената е  $1,08x$ , а во другата е  $0,92x$ . Според тоа,  $1,08x - 0,92x = 1200$ , т.е.  $0,16x = 1200$ , од каде добиваме  $x = 7500$  денари.

**Пример 57.** За театарската претстава „Пепелашка“, цената на влезницата за возрасен човек е за 50% поголема од цената на влезницата за дете. Ако влезниците за пет возрасни луѓе и четири деца вкупно чинат 39,79 евра, определи колку чинат влезниците за осум возрасни луѓе и шест деца.

**Решение.** Нека  $x$  е цената на влезницата за дете. Тогаш  $1,5x$  е цената на влезницата за возрасен човек. Од условот на задачата следува  $5 \cdot 1,5x + 4x = 39,79$ , од каде добиваме  $x = 3,46$ .

Според тоа, цената на влезницата за дете е 3,46 евра. Значи, влезниците за осум возрасни луѓе и шест деца чинат

$$8 \cdot 1,5x + 6x = 12x + 6x = 18x = 18 \cdot 3,46 = 62,28\text{ евра}.$$



## Задачи

51. Павле добил кутија со бомбони. Првиот ден изел четвртина од бомбоните, а вториот ден изел четвртина од остатокот. Колку бомбони имало на почетокот во кутијата, ако на крајот на вториот ден останале 9 бомбони?
52. Три вида жетони: бели, црни и црвени, се наредени во една низа. Прво биле ставени белите жетони во една низа, потоа меѓу секои два бели жетони е ставен по еден црн жетон. На крајот меѓу секои два жетони во низата е ставен по еден црвен жетон. Определи го бројот на белите жетони, ако во низата биле ставени вкупно 397 жетони.
53. Разликата на два рационални броја е  $-371,52$ . Ако на намаленикот му се помести децималната запирка за едно место лево се добива намалителот. Определи ги овие броеви.
54. Пред 30 години бројот на годините на Иван, Ламбе и Рамиз се однесувале како  $1:2:5$ . Денес годините на Иван и Ламбе се однесуваат како  $6:7$ . Колку години има Рамиз во моментот?
55. Мартин е постар од своите три сестри Ана, Ивана и Елена по 8, 10 и 13 години, соодветно. По една година, збирот на годините на сестрите на Мартин ќе биде за 39 поголем од годините на Мартин. Колку години има Мартин денес?
56. Теодора трча со брзина поголема за  $8 \text{ km/h}$  од брзината со која пешачи. Таа пешачела 2 часа и трчала 30 минути, по што изминала вкупно  $14 \text{ km}$ . Колкава е брзината на Теодора кога пешачи?
57. Воз, долг  $450 \text{ m}$ , минува покрај знакот на пругата за 15 секунди, а покрај неподвижна платформа минува за 35 секунди. Определи ги брзината на возот и должината на платформата?
58. Павел, Агим и Филип заедно купиле таблет. Павел платил 60% од цената на таблетот, Агим платил 40% од преостанатиот дел, а Филип учествувал со 30 евра. Колку пари чинел таблетот?
59. Цената на еден производ се намалила за 5%. Потоа цената на истиот производ се зголемила за 40% и сега таа е за 135206 денари помала од двократната почетна цена. Определи ја почетната цена на производот.
60. Горан и Алекс треба да преведат 70 страници текст од македонски на германски јазик. Горан ги поделил страниците меѓу двајцата, но Алекс се побунил, дека тој има премногу страници за превод, па му дал една третина од неговиот дел на Горан. Сега, делот на Горан се зголемил три пати. По колку страници ќе преведе секој по втората распределба?

## 3.9 Линеарна равенка со две непознати

**Дефиниција 6.** Секоја алгебарска равенка што може да се сведе до обликот

$$ax + by = c, \quad (1)$$

каде што  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , ја нарекуваме *линеарна равенка со две непознати (променливи)*.

Броевите  $a$  и  $b$  ги нарекуваме *коефициенти пред непознатите*, а  $c$  - *слободен член на равенката*.

Ако со замена на непозната  $x$  со бројот  $x_0$ , а  $y$  со бројот  $y_0$  се добие дека (1) е точно бројно равенство, тогаш за подредениот пар  $(x_0, y_0)$  велиме дека е решение на равенката (1).

**Пример 58.** Подредениот пар  $(3, 4)$  е решение на равенката

$$5x - 2y = 7, \quad (2)$$

бидејќи  $5 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7$ . И подредените парови  $(5, 9)$ ,  $(1, -1)$  се решенија на оваа равенка.

За подредениот пар  $(4, 5)$  имаме  $5 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 20 - 10 = 10 \neq 7$ , што значи дека не е решение на дадената равенка.

Ќе ги определиме сите решенија на равенката (2). Равенката (2) ја доведуваме до обликот

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}.$$

Сега, ако на непозната  $x$  и дадеме произволна реална вредност, тогаш можеме да ја пресметаме вредноста на непозната  $y$  на соодветното решение на дадената равенка. На пример, на овој начин може да се добијат решенијата на равенката дадени во следнава табела:

|     |     |                 |     |                 |    |    |    |               |   |                |   |
|-----|-----|-----------------|-----|-----------------|----|----|----|---------------|---|----------------|---|
| $x$ | -5  | -4              | -3  | -2              | -1 | 0  | 1  | 2             | 3 | 4              | 5 |
| $y$ | -16 | $-\frac{27}{2}$ | -11 | $-\frac{17}{2}$ | -6 | -7 | -1 | $\frac{3}{2}$ | 4 | $\frac{13}{2}$ | 9 |

Јасно, множеството решенија на равенката (2) е  $M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}\}$ .

Аналогно како во пример 58 се покажува дека во општ случај множеството решенија на равенката (1) кога  $b \neq 0$  или  $a \neq 0$  може да се запише на следниов начин:

- ако  $b \neq 0$ , тогаш  $M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\}$ ,
- ако  $a \neq 0$ , тогаш  $M = \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}, x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}\}$ .

**Пример 59.** Реши ја равенката:

а)  $4(x + 3y) - 2(2x - y) = 15$ ,

б)  $\frac{x+2}{3} + \frac{3y-5}{2} = \frac{7x+9y+21}{6}$ .

**Решение.** а) По средувањето на равенката добиваме  $14y = 15$ , односно  $y = \frac{15}{14}$ . Бидејќи  $b \neq 0$  множеството решенија на дадената равенка е

$$M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = \frac{15}{14}\} = \{(x, \frac{15}{14}) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

б) По средувањето на равенката добиваме  $3x = -32$ , односно  $x = -\frac{32}{3}$ . Бидејќи  $a \neq 0$ , множеството решенија на дадената равенка е  $M = \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}, x = -\frac{32}{3}\} = \{(-\frac{32}{3}, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ .

Сега, ако  $a = 0$  и  $b = 0$ , т.е. ако равенката (1) е од видот  $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ , тогаш за множеството решенија  $M$  можни се два случаја:

- ако  $c = 0$ , тогаш равенката е *решлива* и секој пар реални броеи е нејзино решение, т.е.  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,
- ако  $c \neq 0$ , тогаш равенката е *нерешлива* (невозможна), т.е.  $M = \emptyset$ .

**Пример 60.** Од кој тип се следниве равенки:

а)  $3x + 5(3 - 2y) = 3(5 + x) - 10y$ ,

б)  $\frac{x}{5} + \frac{3-2y}{3} = \frac{3x-10y+21}{15}$ .

**Решение.** а) Дадената равенка е еквивалентна на равенката  $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ , што значи дека е решлива и множеството нејзини решенија е  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .



б) Дадената равенка е еквивалентна на равенката  $0 \cdot x + 0 \cdot y = 6$ , што значи дека е нерешлива, т.е. множеството нејзини решенија е  $M = \emptyset$ .

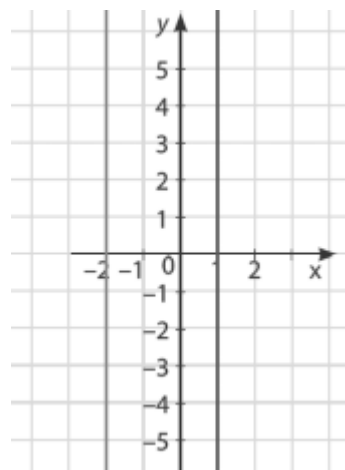
Ако во равенката  $ax + by = c$  важи  $b \neq 0$ , тогаш  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ . Сега ако ставиме  $k = -\frac{a}{b}$  и  $n = \frac{c}{b}$ , тогаш равенката го добива видот

$$y = kn + n. \quad (3)$$

Според тоа, со секоја равенка од видот (1), кога  $b \neq 0$  е зададена една линеарна функција, чиј график е права. Значи, равенката  $ax + by = c$ ,  $b \neq 0$  претставува права со коефициент на правец  $k = -\frac{a}{b}$  и истата оската  $Oy$  ја сече во точката  $(0, \frac{c}{b})$ , а оската  $Ox$  ја сече во точката  $(\frac{c}{a}, 0)$ . Притоа, велиме дека правата  $ax + by = c$  на координатните оски  $Ox$  и  $Oy$  отсекува отсечки  $m = \frac{c}{a}$  и  $n = \frac{c}{b}$ , соодветно.

Ако  $b = 0$ , тогаш равенката (1) го добива видот  $ax = c$ . Притоа сите решенија на (1) се од видот  $(\frac{c}{a}, y)$  и тоа се точките на правата која е паралелна со  $Oy$  оската и минува низ точката  $(\frac{c}{a}, 0)$ . Затоа за равенката (1) велиме дека е *равенка на права*.

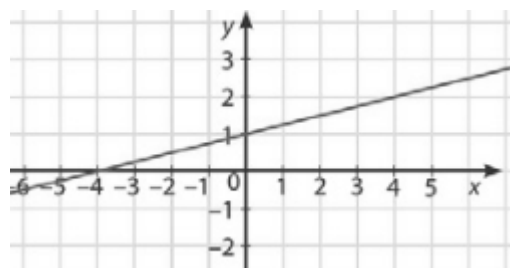
На цртежот се дадени графици на правите  $x = 1$  и  $x = -2$ .



**Пример 61.** Нацртај ја правата  $x - 4y = -4$ .

**Решение.** За  $y = 0$  добиваме  $x = -4$ , т.е. правата минува низ точката  $(-4, 0)$ . За  $x = 0$  добиваме  $y = 1$ , т.е. правата минува низ точката  $(0, 1)$ .

Определивме две точки од правата и низ овие две точки ја повлекуваме бараната права. Графикот е прикажан на цртежот.



Дадената права на оската  $Ox$  отсекува отсечка  $m = -4$ , а на оската  $Oy$  отсекува отсечка  $n = 1$ .

Како што знаеме низ две различни точки минува една и само една права. Како да ја определиме равенката на правата која минува низ две дадени точки? За да одговориме на прашањето доволно е да се потсетиме на условот за колинеарност на три точки, кој го изведовме во 3.2. Имено, ако од една права се дадени точките  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , и ако  $M(x, y)$  е произволна точка од таа права, тогаш точките  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  и  $M(x, y)$  се колинеарни, па затоа е исполнет условот за коленаарност

$$x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1) + x(y_1 - y_2) = 0, \quad (3)$$

Сега од произволноста на точката  $M(x, y)$  следува дека (3) е равенката на бараната права.

**Пример 62.** Најди ја равенката на правата која што минува низ точките  $A(3, 1)$ ,  $B(5, -2)$ .

**Решение.** Со замена во (3) за бараната равенка добиваме

$$3(-2 - y) + 5(y - 1) + x(1 - (-2)) = 0,$$

од каде наоѓаме  $3x + 2y = 11$ .



## Задачи

61. Запиши го множеството решенија на равенката:  
а)  $3x + 4y = 11$ ,      б)  $5x = 13$ ,      в)  $4y = 21$ .
62. Нацртај ја правата зададена со равенката:  
а)  $3x + 4y = 12$ ,      б)  $x + y = -1$ ,      в)  $4x - y = 8$ .
63. Определи ги отсечките кои правата ги отсекува на координатните оски, па потоа нацртај ја правата:  
а)  $x + y = -2$ ,      б)  $2x + y = 4$ ,      в)  $x - 3y = 6$ .
64. Најди равенка на права која минува низ точките:  
а)  $A(3, 2), B(-5, 2)$ ,      б)  $A(1, 1), B(4, -3)$ ,      в)  $A(-1, 1), B(5, -4)$
65. Определи ја равенката на правата која на координатните оски  $Ox$  и  $Oy$  соодветно отсекува отсечки  $m$  и  $n$ :  
а)  $m = 4$  и  $n = -3$       б)  $m = -\frac{1}{2}$  и  $n = 2$   
в)  $m = 3$  и  $n = -2$ ,      г)  $m = 2$  и  $n = 2$ .

## 3.10 Систем од две линеарни равенки со две непознати

**Пример 63.** Да ја разгледаме задачата:

*Збирот на два броја е 8, а нивната разлика е 4. Кои се тие броеви?*

Како што можеме да видиме, во оваа задача имаме два непознати броја  $x$  и  $y$ , кои треба да задоволуваат два услова. Првиот услов е збирот на двата броја да е 8 и истиот го изразуваме со равенката  $x + y = 8$ , а вториот услов е разликата на двата броја да е 4 и истиот го изразуваме со равенката  $x - y = 4$ . Со тоа добиваме две линеарни равенки со две непознати. Бараните броеви треба да ги задоволуваат двата услови, што значи дека тие се заедничко решение на двете линеарни равенки  $x + y = 8$  и  $x - y = 4$ , кои како што гледаме имаат исти непознати. Во овој случај велиме дека треба да го решиме системот од две линеарни равенки со две непознати:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 4. \end{cases} \quad (1)$$

Во врска со претходниот пример ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 7.** Множеството од две линеарни равенки со две едни исти непознати, за кои се бараат заедничките решенија, го нарекуваме *систем од две линеарни равенки со две непознати*.

Секој систем од две линеарни равенки со две непознати може да се запише во *општ облик*:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \quad (2)$$

каде што  $x$  и  $y$  се непознати, а  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  се кои и да било дадени броеви или изрази кои што не зависат од непознатите.

**Пример 64.** Системот

$$\begin{cases} 2x - \frac{y-x}{3} = 4, \\ \frac{x+1}{2} + 3y = 3, \end{cases} \quad (3)$$

сведи го на општ облик.

**Решение.** Ако првата равенка на системот ја помножиме со 3, а втората со 2 ги добиваме еквивалентните равенки  $6x - y + x = 12$  и  $x + 1 + 6y = 6$ . По средувањето на овие равенки го добиваме системот

$$\begin{cases} 7x - y = 12, \\ x + 6y = 5. \end{cases} \quad (4)$$

**Дефиниција 8.** Ако во секоја од равенките (2) непознатите  $x$  и  $y$  се заменат соодветно со реалните броеви  $x_0$  и  $y_0$  и ако тогаш добиеме точни равенства, тогаш велиме дека  $(x_0, y_0)$  е решение на системот (2).

**Пример 65.** а) Од  $6 + 2 = 8$  и  $6 - 2 = 4$  заклучуваме дека подредениот пар  $(x_0, y_0) = (6, 2)$  е решение на системот (1) од пример 63.

б) Системот равенки

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 2x + y = 7, \end{cases}$$

нема решение, бидејќи не постојат реални броеви  $x$  и  $y$  такви што изразот  $2x + y$  ќе биде еднаков и на 4 и на 7.

Значи, во врска со системот (2) разгледуваме две задачи:

а) дали системот има решенија,

б) ако системот има решение, кои подредени парови се негови решенија, односно кое е множеството решенија  $M$  на системот. Притоа, системот може да:

- има решение, т.е. е *решлив систем* ако неговото множество решенија  $M$  не е празно,
- нема решение, т.е. е *невозможен (нерешлив) систем*, ако нема ниту едно решение, т.е.  $M = \emptyset$ .

Како и кај линеарните равенки, така и кај системите равенки решавањето на даден систем го реализираме со помош на последователни трансформации во еквивалентни системи равенки. Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 9.** За два системи линеарни равенки со две непознати велиме дека се *еквивалентни* ако секое решение на првиот систем е решение и на вториот систем, и обратно, ако секое решение на вториот систем е решение и на првиот систем.

Ако два системи линеарни равенки со исти непознати немаат решенија, тогаш велиме дека те се *еквивалентни*.

Трансформирањето на системот (2) во еквивалентен систем најчесто се прави со помош на следниве теореми кои ќе ги користиме, без притоа истите да ги докажуваме.

**Теорема 6.** Ако секоја од равенките на системот (2) одделно се замени со на неа еквивалентна равенка, тогаш се добива систем еквивалентен на системот (2).

**Пример 66.** Во примерот 64 првата равенка од системот (3) ја заменивме со еквивалентната на неа равенка  $7x - y = 12$ . Втората равенка од системот (3) ја заменивме со еквивалентната на неа равенка  $x + 6y = 5$ . Затоа системот (4) е еквивалентен на системот (3).

**Теорема 7.** Ако од било која равенка на системот (2) една од непознатите се изрази со помош на другата непозната и со така добиениот израз се замени истата непозната во другата равенка, добиваме нова равенка. Новата равенка и првата равенка формираат систем кој е еквивалентен на системот (2).

**Пример 67.** Од првата равенка во системот (4) добиваме  $y = 7x - 12$ . Со замена во втората равенка ја добиваме равенката  $x + 6(7x - 12) = 5$ , која е еквивалентна на равенката  $43x = 77$ . Сега, системот

$$\begin{cases} 7x - y = 12, \\ 43x = 77, \end{cases}$$

е еквивалентен на системот (4).

**Теорема 8.** Ако едната равенка на системот (2) ја помножиме со некој број  $m \neq 0$ , а другата ја помножиме со некој број  $n \neq 0$  и ги собереме одделно левите и десните страни на така добиените равенки, ќе добиеме нова равенка, која заедно со една од равенките на системот (2) формира систем равенки еквивалентен на системот (2).

**Пример 68.** Ако првата равенка на системот (4) ја помножиме со  $-1$ , а втората ја помножиме со  $7$  ги добиваме равенките  $-7x + y = -12$  и  $7x + 42y = 35$ . Сега, ако ги собереме добиените равенки, ја добиваме равенката  $43y = 23$ , која заедно со втората равенка од системот дава еквивалентен систем

$$\begin{cases} 43y = 23, \\ x + 6y = 5. \end{cases}$$

Претходните три теореми и фактот дека линеарна равенка со две непознати е равенка на права ни овозможуваат решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати. Притоа имаме три метода:

- а) метод на замена,
- б) метод на спротивни коефициенти и
- в) графички метод.

а) *Метод на замена.* Со овој метод една од равенките на системот ја решаваме по која и да било непозната и со најдениот израз за неа, ја заменуваме соодветната непозната во другата равенка од системот. Јасно, во овој случај ја применуваме теоремата 7.

**Пример 69.** Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ x + 7y = 19 \end{cases}$$

**Решение.** Од втората равенка на системот го изразуваме  $x$  преку  $y$  и добиваме  $x = 19 - 7y$ . Сега со замена во првата равенка наоѓаме  $5(19 - 7y) + 4y = 2$  и добиваме нов систем

$$\begin{cases} 5(19 - 7y) + 4y = 2 \\ x = 19 - 7y \end{cases} \quad (5)$$

кој е еквивалентен на дадениот. Ја решаваме првата равенка во (5) и определуваме  $y = 3$ . Со замена во втората равенка за  $y = 3$  наоѓаме  $x = -2$ .

Конечно, решение на системот (5), што значи и на дадениот систем е  $x = -2$ ,  $y = 3$ .

б) *Метод на спротивни коефициенти.* Ако првата равенка на системот (2) ја помножиме со  $b_2$ , а втората со  $-b_1$  ги добиваме равенките  $b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1$  и  $-b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2$ , во кои коефициентите пред непозната  $y$  се спротивни броеви. Ги собираме добиените равенки и наоѓаме равенка по  $x$ , која заедно со една од равенките на системот (2) дава систем еквивалентен на него. Истата постапка може да се направи и со коефициентите пред  $x$ .

**Пример 70.** Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$$

**Решение.** Ако првата равенка ја помножиме со  $-2$ , ја добиваме равенката  $-6x + 2y = -4$ . Оваа равенка ја собираме со втората равенка од системот и добиваме  $x - 2y - 6x + 2y = -1 - 4$ , т.е.  $-5x = -5$ . Од последната равенка наоѓаме  $x = 1$  и со замена во втората равенка добиваме  $3 \cdot 1 - y = 2$ , т.е.  $y = 1$ . Конечно, решението на системот е  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

в) *Графички метод.* Решавањето на систем од две линеарни равенки со две непознати со овој метод се базира на фактот дека секоја линеарна равенка со непознати  $x$  и  $y$ , претставува и линеарна функција чиј график во Декартовиот правоаголен координатен систем е права. Сега од заемната положба на двете прави ги определуваме решенијата на системот. Ако двете прави се сечат, системот има единствено решение, ако се совпаѓаат има бесконечно многу решенија и ако се различни паралелни прави, тогаш системот е нерешлив.

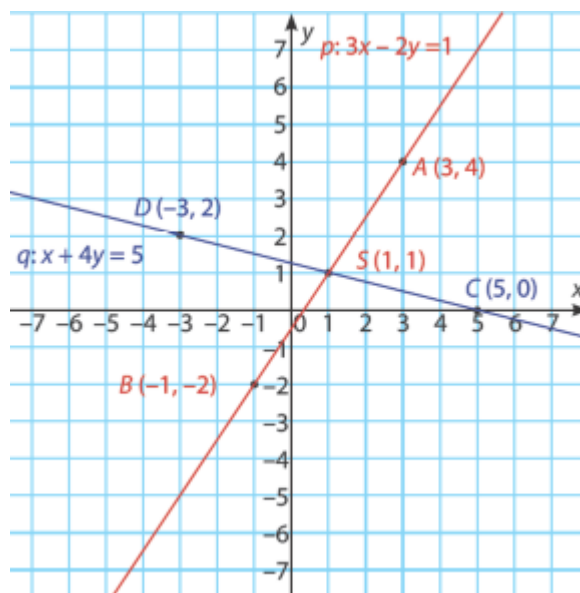
**Пример 71.** Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + 4y = 5. \end{cases}$$

**Решение.** Правата  $p$  која е график на линеарната функција  $3x - 2y = 1$  минува низ точките  $A(3, 4)$  и  $B(-1, -2)$ , а правата  $q$  која е график на линеарната функција  $x + 4y = 5$  минува низ точките  $C(5, 0)$  и  $D(-3, 2)$ .

Во координатен систем ги цртаме графиците на двете функции и наоѓаме дека тие се сечат во точката  $S(1, 1)$ . Со проверка се уверуваме дека  $(1, 1)$  навистина е решение на дадениот систем:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \text{ и } 1 + 4 \cdot 1 = 5.$$



## Задачи

66. Сведи го на општ вид системот равенки:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} \frac{2x-y}{3} - 2x = \frac{x}{2}, \\ 3(x-y) + 2x = -\frac{y}{2}, \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \frac{5x-4}{3} + \frac{3y+1}{4} = x+y, \\ \frac{7x-2}{6} - \frac{8y+1}{9} = x-y, \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} \frac{x-3}{2} + \frac{3y+2x}{5} = -x, \\ \frac{x-y}{4} - \frac{12+x-2y}{10} = \frac{1}{20}. \end{cases} \end{array}$$

67. Дали се еквивалентни системите равенки:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} x=0, \\ y=5, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x+3y=15, \\ 4y-5x=20, \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x=2, \\ x+y=3, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 5x-6y=4, \\ 2x+7y=11. \end{cases} \end{array}$$

68. Со методот на замена реши го системот равенки:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{cases} x-y=2, \\ 2x+5y=11, \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 3x-2y=15, \\ 2x+y=17, \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x-y=3, \\ 5x+4y=24, \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x-2y=1, \\ 3x+4y=13. \end{cases} \end{array}$$

69. Со методот на спротивни коефициенти реши го системот равенки:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{cases} 3x-2y=6, \\ 2x+3y=-9, \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 3x+5y=424, \\ 5x+8y=686, \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 3x+4y=25, \\ x-y=-1, \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y=8, \\ \frac{1}{4}x - \frac{7}{10}y=-6. \end{cases} \end{array}$$

70. Со графичкиот метод реши го системот равенки:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{cases} 2x+y=5, \\ y=3, \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 3x-y=9, \\ x=4, \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 3x+y=6, \\ x+3y=10, \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} 2x+y=7, \\ 4x+2y=10. \end{cases} \end{array}$$

## 3.11 Дополнителни решени задачи

При изучувањето на линеарната равенка се задржавме на равенки кои се сведуваат на линеарна равенка, на равенки со параметар и равенки во кои непознатата е и под знакот за апсолутна вредност. Во продолжение ќе решиме неколку системи од две линеарни равенки со две непознати кои содржат равенки од неведените видови.

**Пример 72.** Реша го системот равенки

$$\begin{cases} (x+2)^2 - (x-3)(x+3) - 3(y+5) = 0, \\ (2y-3)^2 - y(4y-3) + 4(3x-3\frac{3}{4}) = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Дадениот систем го сведуваме во нормален вид и добиваме еквивалентен систем:

$$\begin{cases} 4x-3y=2, \\ 12x-9y=6. \end{cases} \quad (1)$$

Втората равенка на системот (1) ја делиме со 3 и добиваме еквивалентен систем

$$\begin{cases} 4x-3y=2 \\ 4x-3y=2 \end{cases} \quad (2)$$

во кој двете равенки се исти. Решението на системот (2) е решението на равенката  $4x-3y=2$ . Оваа равенка има бесконечно многу решенија, па значи и системот (2), а со тоа и дадениот систем, има бесконечно многу решенија кои се определени со  $x=t$ ,  $y=\frac{4t-2}{3}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Пример 73.** Реша го системот равенки:

$$\begin{cases} (2x-3)^2 - (2x+3)(2x-3) = 1-y \\ \frac{2x+y}{3} - \frac{3x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

**Решение.** Дадениот систем го сведуваме во нормален вид и добиваме еквивалентен систем:

$$\begin{cases} -12x + y = -17 \\ -5x - y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ако ги собереме двете равенки на системот (3) добиваме  $-12x + y + (-5x - y) = -17$ , т.е.  $17x = 17$ . Со последната равенка и една од равенките на системот (3) на пример втората, формираме нов систем

$$\begin{cases} 17x = 17 \\ -5x - y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Од првата равенка на (4) имаме  $x = 1$  и со замена во втората имаме  $y = -5$ .

**Пример 74.** Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{3}{2x} + \frac{4}{3y} = 1\frac{1}{6} \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Решение.** Дадениот систем е определен за  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ . Имаме

$$\begin{cases} 9\frac{1}{x} + 8\frac{1}{y} = 7 \\ 8\frac{1}{x} - 2\frac{1}{y} = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Воведуваме нови непознати

$$u = \frac{1}{x} \text{ и } v = \frac{1}{y} \quad (6)$$

и системот (5) го добива видот

$$\begin{cases} 9u + 8v = 7 \\ 8u - 2v = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Решение на системот (7) е  $u = \frac{1}{3}, v = \frac{1}{2}$ . Од (6) ги определуваме  $x$  и  $y$ , т.е.  $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ , т.е.  $x = 3, y = 2$ . Определените вредности на  $x$  и  $y$  ги задоволуваат условите  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ , па затоа се решение на дадениот систем.

**Пример 75.** Нека  $a$  е параметар. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ 2x + y = a. \end{cases}$$

**Решение.** Од втората равенка го изразуваме  $y$  преку  $x$  и со замена во првата равенка го добиваме системот

$$\begin{cases} (a-2)x = 2-a \\ y = a-2x \end{cases} \quad (8)$$

кој е еквивалентен на дадениот систем. Имаме два случаи:

i) Ако  $a-2 \neq 0$ , т.е.  $a \neq 2$ , тогаш од првата равенка го определуваме  $x = \frac{2-a}{a-2} = -1$ . Ако замениме во втората равенка добиваме  $y = a+2$ . Значи, за  $a \neq 2$  решение на системот (8), а со тоа и на дадениот систем е  $x = -1, y = a+2$ .

ii) Ако  $a - 2 = 0$ , т.е.  $a = 2$  тогаш првата равенка на (8) го добива обликот  $0 \cdot x = 0$  и таа има бесконечно многу решенија. За  $a = 2$  втората равенка на (8) ќе биде  $y = 2 - 2x$ . Така решенијата на системот во овој случај се:  $x = t$ ,  $y = 2 - 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Пример 76.** Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ x + y = 1 \end{cases},$$

каде  $a$  и  $b$  се параметри.

**Решение.** Од втората равенка го изразуваме  $y$  преку  $x$  и заменуваме во првата равенка. Го добиваме еквивалентниот систем:

$$\begin{cases} (a-b)x = 2-b \\ y = 1-x \end{cases} \quad (9)$$

кој е еквивалентен на дадениот. Ги разгледуваме следниве два случаја:

i) Ако  $a - b = 0$ , т.е.  $a = b$  првата равенка на (9) се трансформира во обликот  $0 \cdot x = 2 - b$ . Можни се следниве два потслучаи:

1) Ако  $2 - b \neq 0$ , т.е.  $b \neq 2$ , тогаш системот (9) нема решение, па затоа и дадениот систем нема решение.

2) Ако  $2 - b = 0$ , т.е.  $b = 2$ , тогаш првата равенка на (9) го добива обликот  $0 \cdot x = 0$  и е задоволена за секоја вредност на  $x$ . Системот (9) при  $a = b = 2$  има бесконечно многу решенија кои се од облик:  $x = t$ ,  $y = 1 - t$  каде  $t \in \mathbb{R}$ .

ii) Ако  $a - b \neq 0$ , т.е.  $a \neq b$  решение на системот (9), па следствено и на дадениот систем е:  $x = \frac{2-b}{a-b}$ ,  $y = \frac{a-2}{a-b}$ .

**Пример 77.** Реши го системот

$$\begin{cases} |x+2| + |y-1| = 5, \\ |x+2| = 4y-4. \end{cases} \quad (10)$$

**Решение.** Ако за  $|x+2|$  од втората равенка замениме во првата равенка на (10) го добиваме системот

$$\begin{cases} |y-1| = 9-4y, \\ |x+2| = 4y-4. \end{cases}$$

Од  $|y-1| = 9-4y$  добиваме  $y = 2$ , па од  $|x+2| = 4y-4$  имаме  $|x+2| = 4$ , од што наоѓаме  $x_1 = -6$ ,  $x_2 = 2$ . Значи, системот има две решенија  $x_1 = -6$ ,  $y = 2$  и  $x_2 = 2$ ,  $y = 2$ .

**Пример 77.** Реши го системот

$$\begin{cases} |x| - 2y = 5, \\ |x| + 3|y+2| = 6. \end{cases}$$

**Решение.** Од дефиницијата на апсолутна вредност имаме

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ и } |y+2| = \begin{cases} y+2, & y+2 \geq 0 \\ -(y+2), & y+2 < 0 \end{cases},$$

па затоа треба да ги разгледаме случаите:

i)  $x \geq 0$ ,  $y+2 \geq 0$

ii)  $x \geq 0$ ,  $y+2 < 0$

$$\text{iii)} \quad x < 0, y + 2 \geq 0 \quad \text{и}$$

$$\text{iv)} \quad x < 0, y + 2 < 0.$$

Имаме:

i) Ако  $x \geq 0, y + 2 \geq 0$ , тогаш системот преминува во обликот

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

чије решение е  $x = 3, y = -1$ . Овие вредности за  $x$  и  $y$  ги задоволуваат условите  $x \geq 0, y + 2 \geq 0$ .

Значи,  $x = 3, y = -1$  е решение на дадениот систем.

ii) Ако  $x \geq 0, y + 2 < 0$ , тогаш дадениот систем го добива обликот

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x - 3y = 12 \end{cases}$$

чије решение е  $x = -9, y = -7$ . Но, определената вредност за  $x$  не го задоволува условот  $x \geq 0$ , па затоа во овој случај дадениот систем нема решение.

iii) Ако  $x < 0, y + 2 \geq 0$ , тогаш дадениот систем го се трансформира во обликот

$$\begin{cases} -x - 2y = 5 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

чије решение е  $y = -1, x = -3$ . Овие вредности за  $x$  и  $y$  ги задоволуваат условите  $x < 0, y + 2 \geq 0$ .

Значи,  $y = -1, x = -3$  е решение на дадениот систем.

iv) Ако  $x < 0, y + 2 < 0$ , тогаш дадениот систем го прима обликот

$$\begin{cases} -x - 2y = 5 \\ -x - 3y = 12 \end{cases}$$

чије решение  $y = -7, x = 9$ . Но, најдената вредност за  $x$  не го задоволува условот  $x < 0$ , па затоа во овој случај дадениот систем нема решение.

## Задачи

71. Реши го системот равенки:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} (2x - 3)^2 - (4x + 3)(x - 1) = 2y, \\ \frac{3x+5}{2y-1} = -1, \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} (x+1)^2 - (y-2)^2 = (x+2)^2 - y^2, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} = 1, \end{cases}$$

$$\text{в)} \quad \begin{cases} (x-1)^2 - (y+3)^2 = (x+1)^2 - y^2, \\ \frac{x+2}{2} - \frac{y-1}{4} = 1. \end{cases}$$

72. Реши ги системите равенки:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2, \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{2y} = \frac{11}{4}, \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 4, \\ \frac{15}{x} + \frac{4}{y} = 17, \end{cases}$$

$$\text{в)} \quad \begin{cases} \frac{1}{x+2y} + \frac{3y}{8(y-x)} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x+2y} + \frac{y}{y-x} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

73. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} ax + (2a+1)y = a, \\ -x + ay = 2a, \end{cases}$$

каде  $a$  е параметар.

74. Реши го системот равенки:



$$\text{а) } \begin{cases} \frac{a-b}{ab} - \frac{x-y}{p} = \frac{2b}{p} \\ \frac{b(x+2b)}{ay} = 1 \end{cases} \text{ каде } a, b, p \text{ се параметри.}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = b \end{cases} \text{ каде } a \text{ и } b \text{ се параметри.}$$

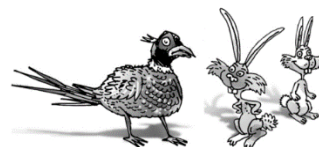
75. Реши го системот:

$$\text{а) } \begin{cases} |x| + |y| = 7, \\ |x| + |y| = 10, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 1, \\ |x| + |y| = 5, \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} |x| + |y-1| = 1, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

### 3.12 Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати

Како линеарната равенка, така и системите линеарни равенки со две непознати имаат примена во решавање практични проблеми. Во следните примери ќе покажеме како се составува и решава систем од две линеарни равенки со две непознати при решавање на практични проблеми.

**Пример 78.** Во дворот на дедо Марко има зајаци и фазани, кои заедно имаат 35 глави и 94 нозе. Колку фазани и колку зајаци има во дворот на дедо Марко.



**Решение.** Нека во дворот има  $x$  зајаци и  $y$  фазани. Од условот на задачата следува  $x + y = 35$  и  $4x + 2y = 94$ . Од првата равенка добиваме  $y = 35 - x$  и од втората равенка имаме  $4x + 2 \cdot (35 - x) = 94$ , од каде следува  $2x = 24$ , т.е.  $x = 12$ . Значи, во дворот на дедо Марко има 12 зајаци и  $35 - 12 = 23$  фазани.

**Пример 79.** Една страница од една книга има еднаков број букви во секој ред. Ако се избришат по три букви од секој ред и потоа се избришат два такви реда, бројот на сите букви ќе се намали за 145. Ако пак на секој ред се допишат по четири букви и допишеме три такви реда, тогаш бројот на сите букви ќе се зголеми за 224. Колку редови има на таа страница и по колку букви има во секој ред?

**Решение.** Нека на таа страница има  $x$  редови, а во секој ред по  $y$  букви. Од првиот услов на задачата ја формираме равенката

$$3x + 2(y - 3) = 145 \quad (1)$$

а од вториот, равенката

$$4x + 3(y + 4) = 224. \quad (2)$$

Решавајќи го системот равенки, составен од равенките (1) и (2), добиваме  $x = 29$ ,  $y = 32$ . Значи, на споменатата страница од книгата има 29 реда, а во секој ред по 32 букви.

**Пример 80.** На располагање имаме две легури од бакар и цинк. Односот на масите на бакарот и цинкот во едната легура е  $5:2$ , а во другата легура е  $3:4$ . Колку килограми треба да земеме од секоја легура за да направиме  $35 \text{ kg}$  нова легура со еднакви количества бакар и цинк во неа?

**Решение.** Нека  $x \text{ kg}$  е масата на првата легура и  $y \text{ kg}$  е масата на втората легура која треба да ја земеме. Тогаш  $x + y = 35$ . Првата легура содржи  $\frac{5}{7}x \text{ kg}$  бакар и  $\frac{2}{7}x \text{ kg}$  цинк, а втората легура содржи  $\frac{3}{7}y \text{ kg}$  бакар и  $\frac{4}{7}y \text{ kg}$  цинк. Затоа важи  $\frac{5}{7}x + \frac{3}{7}y = \frac{2}{7}x + \frac{4}{7}y$ , од каде добиваме  $5x + 3y = 2x + 4y$ , т.е.  $y = 3x$ . Со замена во  $x + y = 35$ , добиваме  $x + 3x = 35$ , т.е.  $x = 8,75$ , па затоа  $y = 3 \cdot 8,75 = 26,25$ .

Според тоа, треба да земеме  $8,75 \text{ kg}$  од првата легура и  $26,25 \text{ kg}$  од втората легура.

**Пример 81.** Во две вреќи има соодветно  $a$  и  $b$  килограми шеќер. Познато е, дека  $a - b$  е еднакво на  $2a\%$  од  $b$  и на  $a\%$  од  $a$ . Колку вкупно шеќер има во вреќите?

**Решение.** Од условот на задачата следува дека  $\frac{2a}{100}b = \frac{a}{100}a = a - b$ . Од првото равенство добиваме  $a = 2b$ . Сега од второто равенство следува  $\frac{2b}{100}2b = 2b - b$ , од каде добиваме  $b = 25$ . Според тоа,  $a = 2b = 50$ , па затоа  $a + b = 75 \text{ kg}$ .

**Пример 82.** Четворица ученици Ангел, Борис, Цветко и Дамјан собирале стара хартија. Заедно собрале  $288 \text{ kg}$  хартија. Колку килограми хартија собрал секој од нив, ако се знае дека Ангел собрал  $36 \text{ kg}$  повеќе од Борис, односно  $\frac{3}{4}$  од количината која ја собрале Борис и Цветко заедно, а Дамјан собрал два пати повеќе од Цветко?

**Решение.** Нека Борис собрал  $x \text{ kg}$ , а Цветко  $y \text{ kg}$  хартија. Тогаш Ангел собрал  $(x + 36) \text{ kg}$ , Борис  $x \text{ kg}$ , Цветко  $y \text{ kg}$  и Дамјан  $2y \text{ kg}$ . Од условот на задачата добиваме

$$(x + 36) + x + y + 2y = 288. \quad (3)$$

Бидејќи  $x + 36 = \frac{3}{4}(x + y)$ , имаме  $x = 3y - 144$  и со замена во (3) добиваме:

$$(3y - 144 + 36) + 3y - 144 + y + 2y = 288$$

Од овде  $y = 60$ ,  $x = 36$ . Значи Ангел собрал  $72 \text{ kg}$ , Борис  $36 \text{ kg}$ , Цветко  $60 \text{ kg}$  и Дамјан  $120 \text{ kg}$ .

**Пример 83.** Еден автомобил тргнал од местото  $A$ . По половина час, по него, тргнал друг автомобил и го стигнал по  $2,5$  часови возење. Продолжувајќи го возењето двата автомобили во иста насока, забележано е дека побрзиот автомобил по  $1,5$  час бил  $24 \text{ km}$  пред поспориот автомобил. Одреди ги средните брзини на овие два автомобили.

**Решение.** Брзината на првиот автомобил да ја означиме со  $x \text{ km/h}$ , а на вториот со  $y \text{ km/h}$ . Од првиот услов на задачата имаме:  $3x = 2,5y$ , а од вториот добиваме:  $1,5x + 24 = 1,5y$ .

Решавајќи го системот составен од овие две равенки добиваме  $x = 80$  и  $y = 96$ .

**Пример 84.** Воз преминал преку мост долг  $225 \text{ m}$ , возејќи со константна брзина, за  $27$  секунди, сметајќи од доаѓањето на локомотивата на мостот до излегувањето на последниот вагон од мостот. Потоа возот поминал покрај еден пешак, кој се движел спротивно од насоката на движење на возот, за  $9$  секунди. За тоа време пешакот поминал  $9 \text{ m}$ . Одреди ја должината на возот во метри и неговата брзина на движење во  $\text{km/h}$ .

**Решение.** Да претпоставиме дека возот за една секунда поминува  $y$  метри, и дека должината на возот е  $x$  метри. Тогаш локомотивата за  $27$  секунди поминува  $(225 + x)$  метри, т.е.  $27y = 225 + x$ . Пешакот се движи спротивно од движењето на возот и за  $9$  секунди локомотивата поминува  $(x - 9)$  метри, т.е.  $9y = x - 9$ . Од системот равенки

$$\begin{cases} 9y = x - 9 \\ 27y = 225 + x \end{cases}$$

наоѓаме  $x = 126$ ,  $y = 13$ . Значи, возот е долг  $126\text{ m}$ , а брзината е  $\frac{13 \cdot 3600}{1000} \text{ km/h} = 46,8 \text{ km/h}$

**Пример 85.** Лицето  $A$  се движи со чамец низводно по реката минувајќи го патот од местото  $B$  до местото  $C$  за 10 часа. Растојанието меѓу  $B$  и  $C$  е  $20\text{ km}$ . Најди ја брзината на текот на реката ако се знае дека за исто време лицето  $A$  поминува  $3\text{ km}$  низводно, а  $2\text{ km}$  во обратна насока.

**Решение.** Ако брзината на речниот тек ја означиме со  $x$ , а брзината која чамецот ја постигнува во мирна вода со  $y$ , тогаш  $y + x = 2$ , бидејќи брзината на движење на чамецот низводно е  $2\text{ km/h}$ . Освен тоа, брзината на движењето во обратна насока е  $y - x$  и притоа важи  $\frac{y-x}{y+x} = \frac{2}{3}$ .

Решавајќи го системот

$$\begin{cases} \frac{y-x}{y+x} = \frac{2}{3} \\ y + x = 2 \end{cases}$$

добиваме  $x = \frac{1}{3} \text{ km/h}$ .

**Пример 86.** По патека покрај стрмна пруга се движи пешак (по надолнина) со брзина од  $6\text{ km/h}$ . Тој забележал дека возот што доаѓа од спротивен правец минува крај него за  $12,6$  секунди. Со истиот воз, со кој по угорнина се движел со брзина од  $3,6\text{ km/h}$  се разминувал  $15$  секунди. Колку е долг возот и колкава е неговата брзина?

**Решение.** Нека брзината на возот е  $x\text{ m/s}$ , а неговата должина е  $y\text{ m}$ . Сега  $6\text{ km/h} = \frac{5}{3}\text{ m/s}$  и  $3,6\text{ km/h} = 1\text{ m/s}$ . Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} 12,6x + \frac{5}{3} \cdot 12,6 = y \\ 15x - 1 \cdot 15 = y \end{cases}$$

од каде добиваме  $x = 15$ ,  $y = 210$ . Значи, брзината на возот е  $15\text{ m/s} = 54\text{ km/h}$ , а неговата должина е  $210\text{ m}$ .

**Пример 87.** Киро му вели на Марко: „Јас сега имам двапати повеќе години отколку што имаше ти кога јас имав толку години колку што имаш ти сега. Кога ти ќе имаш толку години колку што јас имам сега, тогаш збирот на нашите години ќе биде 63“. Колку години има секој од нив?

**Решение.** Нека  $x$  е бројот на годините на Киро, а  $y$  бројот на годините на Марко во моментот на разговорот. Со овие ознаки, условите на задачата можеме да ги запишеме на следниот начин:  $x = 2(y - (x - y))$ ,  $x + (x + (x - y)) = 63$ , од каде што добиваме  $x = 28$ ,  $y = 21$ .

Значи, во моментот кога разговараат, Киро има 28 години, а Марко 21 година.

**Пример 88.** Илија и Никола меѓусебно поделиле сума од 1632 денари. Кога Илија потрошил  $\frac{3}{5}$ , а Никола  $\frac{3}{7}$  од својот дел на двајцата им останале еднакви суми. Колку пари добил секој од нив?

**Решение.** Нека Илија добил  $x$  денари, а Никола  $y$  денари. Од условите на задачата имаме

$$\begin{cases} x + y = 1632 \\ \frac{2}{5}x = \frac{4}{7}y \end{cases}$$

Решавајќи го добиениот систем равенки, добиваме  $x = 960, y = 672$ . Значи Илија добил 960, а Никола 672 денари.

**Пример 89.** Имаме две сорти на вино, едното чини 19 денари по литар, а другото 16 денари по литар. Сакаме да купиме 930 литри вино кое просечно ќе не чини 18 денари по литар. Колку литри од секоја сорта вино треба да купиме?

**Решение.** Нека од првата сорта вино треба да купиме  $x$  литри, а од втората сорта  $y$  литри. Тогаш  $x + y = 930$ , а за да цената биде 18 денари по литар, треба  $19x + 16y = 930 \cdot 18$ .

Со решавање на системот формиран од добиените равенки се добива  $x = 620, y = 310$ . Значи треба да се земе 620 литри од виното кое чини 19 денари по литар и 310 литри од виното кое чини 16 денари по литар.

**Пример 90.** Двајца косачи, работејќи едновременно, окосуваат една ливада за 5 дена. Ако првиот косач работи два пати побрзо, а вториот работник работи два пати побавно, тогаш тие ливадата ќе ја окосат за 4 дена. За колку дена секој косач самостојно ја окосува ливадата?



**Решение.** Нека првиот косач сам ја окосува ливадата за  $x$  денови, а вториот косач сам ја окосува ливадата за  $y$  денови. Од условите на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{5}{y} = 1, \\ \frac{4 \cdot 2}{x} + \frac{4}{2y} = 1. \end{cases}$$

Воведуваме смени  $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$  и по средувањето го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 5u + 5v = 1, \\ 8u + 2v = 1. \end{cases}$$

Оттука наоѓаме  $u = \frac{1}{10}, v = \frac{1}{10}$ , односно  $x = 10, y = 10$ . Според тоа, секој косач самостојно ливадата може да ја окоси за 10 дена.

#### Задачи

76. Бројот  $a$  е 92% од бројот  $b$ . Ако бројот  $b$  го зголемиме за 700, тогаш тој ќе биде поголем од бројот  $a$  за 9% од својата нова вредност. Определи ги броевите  $a$  и  $b$ .
77. Збирот на два броја е 2013. Ако едниот го зголемиме за 213, а другиот го намалиме за 202 се добиваат исти броеви. Кои се тие броеви?
78. Ако на секоја клупа во паркот седнат по 4 деца, тогаш за 2 деца ќе нема место, а ако на секоја клупа седнат по 5 деца, тогаш една клупа ќе остане празна. Колку деца и колку клупи има во паркот?
79. Имаме две смеси од злато и сребро. Во првата смеша количествата на овие метали се однесуваат како 2:3, а во втората како 3:7. Колку треба да се земе од секоја од смесите за да се добие 8 kg нова смеша во која златото и среброто ќе бидат во однос 5:11?
80. Пресметај ги брзината и должината на возот кој за 8 секунди поминува покрај неподвижен набљудувач, а за 32 секунди го поминува перонот долг 480 m.



81. Двајца велосипедисти тргнуваат од местата  $A$  и  $B$  во пресрет еден на друг. Секој од нив по пристигнувањето во другото место се враќа во местото од каде што тргнал. Првата средба помеѓу велосипедистите е на  $5\text{ km}$  од  $A$ , а втората на  $3\text{ km}$  од  $B$ . Колкаво е растојанието од  $A$  до  $B$ ?
82. Анастас патува со чамец по реката Дрим, од Струга до Глобочица и обратно. Растојанието меѓу Струга и Глобочица е  $18\text{ km}$ , а тој патува вкупно 5 часови. Колкава е брзината на реката Дрим, ако Анастас патува за исто време  $4\text{ km}$  низводно, а  $2\text{ km}$  во обратната насока?
83. Двајца сидари една работа ја сработуваат за 8 часа. Започнале да работат во исто време, при што првиот работел 6 часа и престанал да работи, а вториот работел 9 часа и престанал да работи. За времето за кое работеле сработиле  $\frac{51}{56}$  од работата. За колку часови секој од нив сам може да ја сработи целата работа?
84. Јанко и Марко, работејќи заедно, една работа можат да ја завршат за 36 минути. Ако Јанко работи сам, за да ја заврши работата му требаат 30 минути повеќе отколку кога Марко работи сам. Колку време му треба ба Јанко сам да ја заврши работата?



### 3.13 Линеарна неравенка со една непозната

Нека  $A$  и  $B$  се два агебарски изрази со една иста променлива. Ако тие се поврзат со еден од знаците  $<, \leq, >$  или  $\geq$ , на пример,

$$A \leq B, \quad (1)$$

тогаш велиме дека сме добиле *неравенка со една непозната*.

**Пример 91.** Неравенки со една непозната се

$$2a + 12 < a + 4, \quad \frac{x+3}{x^2+1} \leq 2x+1, \quad \frac{x-2}{2x+1} > 12, \quad (x-1)(x+2) \geq x^2 + 1.$$

**Дефиниција 10.** Ако за некоја вредност на непознатата неравенката (1) преминува во точно бројно неравенство, тогаш за таа бројна вредност велиме дека *е решение на неравенката* (1).

**Пример 92.** а) Множеството решенија на неравенката  $a + 4 > 2$  е множеството реални броеви поголеми од  $-2$ , т.е. интервалот  $(-2, +\infty)$ . Притоа велиме дека дадената неравенка ја задоволува секој број  $a \in (-2, +\infty)$ .

б) Решението на неравенката  $x^2 + 2 > 0$  е секој реален број  $x$ , што значи множеството  $\mathbb{R}$ , т.е. интервалот  $(-\infty, +\infty)$ .

в) Неравенката  $x^4 + 1 < 0$  нема решенија, бидејќи истата не е задоволена за ниту еден реален број  $x$ . Навистина, за секој реален број  $x$  важи  $x^4 \geq 0$ , па затоа  $x^4 + 1 \geq 1 > 0$ .

**Дефиниција 11.** За две неравенки велиме дека се *еквивалентни* ако множеството решенија на едната равенка е еднакво на множеството решение на другата равенка.

Како и во случај со равенките, така и кај неравенките решавањето на една неравенка се сведува на последователна трансформација на истата во еквивалентни на неа неравенки.

Во теорема 1.33 ги наведовме основните својства на бројните неравенства, кои во некои случаи со определени дополнувања важат и за неравенките. Имено,

- 1)  $A < B \Leftrightarrow B > A$ ,
- 2)  $A < B \Leftrightarrow A + C < B + C$ , каде што  $C$  е произволен израз кој што има смисла за допуштените вредности на непозната во неравенката  $A < B$ ,
- 3) Ако  $C > 0$ , тогаш  $A < B \Leftrightarrow AC < BC$ , каде што  $C$  е произволен израз кој што има смисла за допуштените вредности на непозната во неравенката  $A < B$  и  $C > 0$  е точно бројно неравенство за секоја допуштена вредност на непозната во  $A < B$ ,
- 4) Ако  $C < 0$ , тогаш  $A < B \Leftrightarrow AC > BC$ , каде што  $C$  е произволен израз кој што има смисла за допуштените вредности на непозната во неравенката  $A < B$  и  $C < 0$  е точно бројно неравенство за секоја допуштена вредност на непозната во  $A < B$ ,

**Пример 93.** Последователно добиваме

$$\begin{aligned} x(x+4) \geq x^2 + 5x - 2 &\Leftrightarrow x^2 + 4x \geq x^2 + 5x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - x^2 - 5x \geq x^2 + 5x - x^2 - 5x - 2 \\ &\Leftrightarrow -x \geq -2 \qquad \qquad \qquad \Leftrightarrow x \leq 2. \end{aligned}$$

**Дефиниција 12.** Секоја неравенка која со помош на својствата 1) – 4) може да се сведе на видот

$$ax < b \quad (ax \leq b) \tag{2}$$

каде  $x$  е непозната, а  $a$  и  $b$  се реални броеви ја нарекуваме *линеарна неравенка со една непозната*.

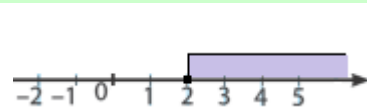
Во продолжение, преку примери, ќе покажеме како се решава линеарна неравенка со една непозната.

**Пример 94.** Реши ја неравенката:  $2x + 5 \geq 15 - 3x$ .

**Решение.** Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$2x + 3x \geq 15 - 5,$$

т.е. на неравенката  $5x \geq 10$ . Според тоа,  $x \geq \frac{10}{5} = 2$  и решение на почетната неравенка се сите реални броеви  $x \geq 2$ , т.е.  $x \in [2, \infty)$ . Графички решението на неравенката е прикажано на цртежот.



**Пример 95.** Реши ја неравенката:  $\frac{x+1}{2} - \frac{x-4}{3} < -\frac{x-3}{4}$ .

**Решение.** Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} < \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{4}{3},$$

т.е. на неравенката

$$\frac{6x - 4x + 3x}{12} < \frac{9 - 6 - 16}{12},$$

од што добиваме  $5x < -13$ , т.е.  $x < -\frac{13}{5} = -2,6$ . Значи решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот  $(-\infty, -\frac{13}{5})$ . Графички претстави го најденото решение.

**Пример 96.** Реши ја неравенката:  $|3 - x| > 1$ .

**Решение.** Од дефиницијата на апсолутна вредност имаме

$$|3 - x| = \begin{cases} 3 - x, & 3 \geq x \\ -(3 - x), & 3 < x. \end{cases}$$

Ако  $3 - x \geq 0$ , т.е.  $x \leq 3$ , тогаш дадената неравенка преминува во обликот  $3 - x > 1$ , од каде  $-x > -2$ , т.е.  $x < 2$ . Бидејќи за  $x < 2$  важи  $x \leq 3$  заклучуваме дека секој реален број од интервалот  $(-\infty, 2)$  е решение на почетната неравенка.

Ако  $3 - x < 0$ , т.е.  $x > 3$ , тогаш дадената неравенка го добива обликот  $x - 3 > 1$ , од каде  $x > 4$ . Бидејќи за  $x > 4$  важи  $x > 3$  заклучуваме дека секој реален број од интервалот  $(4, \infty)$  е решение на почетната неравенка. Значи, множеството решенија на почетната равенка е  $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ . Графички претстави го најденото решение.

**Пример 94.** Реши ја неравенката:  $|x + 2| - 2|x - 1| < 4$ .

**Решение.** Ги определуваме вредностите на  $x$  за кои се анулираат изразите под знакот на апсолутната вредност. Имам,  $x + 2 = 0$ , од што следува  $x = -2$  и  $x - 1 = 0$  од што следува  $x = 1$ . Добиените вредности  $-2$  и  $1$  ја делат бројната оска на интервалите  $(-\infty, -2)$ ,  $[-2, 1)$  и  $[1, \infty)$ . Дадената неравенка ќе ја решиме на секој од овие интервали.

i) Ако  $x \in (-\infty, -2)$ , тогаш  $x + 2 < 0$  и  $x - 1 < 0$ , па  $|x + 2| = -(x + 2)$  и  $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ . Дадената неравенка го добива обликот

$$-(x + 2) - 2(1 - x) < 4,$$

односно  $x < 8$ . Но, во случајот  $x < -2$ , па решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот  $(-\infty, -2)$ .

ii) Ако  $x \in [-2, 1)$ , тогаш  $x + 2 \geq 0$  и  $x - 1 < 0$ , па затоа  $|x + 2| = x + 2$  и  $|x - 1| = 1 - x$ . Дадената неравенка го добива обликот

$$x + 2 - 2(1 - x) < 4,$$

т.е.  $x < 1\frac{1}{3}$ . Но, во случајот  $x \in [-2, 1)$ , па затоа решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот  $[-2, 1)$ .

iii) Ако  $x \in [1, \infty)$ , тогаш  $x + 2 \geq 0$  и  $x - 1 \geq 0$ , па затоа  $|x + 2| = x + 2$  и  $|x - 1| = x - 1$ . Дадената неравенка преоѓа во видот

$$x + 2 - 2(x - 1) < 4,$$

т.е.  $x > 0$ . Но, во тој случај  $x \in [1, \infty)$ , па затоа решение на почетната неравенка е секој реален број од интервалот  $[1, \infty)$ .

Значи, множеството решенија на почетната неравенка е  $(-\infty, -2) \cup [-2, 1) \cup [1, \infty) = (-\infty, \infty)$ .

**Пример 94.** Реши ја неравенката:  $(x - 8)(x - 5) \geq (x - 7)(x - 4)$ .

**Решение.** Последователно добиваме:

$$(x - 8)(x - 5) \geq (x - 7)(x - 4),$$

$$x^2 - 8x - 5x + 40 \geq x^2 - 7x - 4x + 28,$$

$$-8x - 5x + 7x + 4x \geq 28 - 40,$$

$$-2x \geq -12,$$

$$x \leq 6.$$

Графички решението на неравенката е прикажано на цртежот.





## Задачи

85. Реши ја неравенката:

а)  $4(x-5) > 3(x+7)$ ,

б)  $x - (2 - x) < 3x + 7$ ,

в)  $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{5} - \frac{1}{4}$ ,

г)  $\frac{9z}{8} - \frac{7}{6} > \frac{5z+6}{4}$ ,

д)  $\frac{9x+7}{2} - (x - \frac{x-2}{7}) < 36$ ,

ѓ)  $\frac{x+5}{8} - \frac{7x-1}{6} \geq \frac{x+1}{3} + \frac{3x-2}{4} + \frac{37}{12}$

86. Реши ја неравенката:

а)  $|x-2| < x+3$ ,

б)  $|x+1| > 2|x+2|$ ,

в)  $|x+1| > 2|x+2|$ .

87. Реши ја неравенката:

а)  $(3x-1)^2 + (4x+3)^2 \geq (5x+4)^2$ ,

б)  $x(x+2) \leq x^2 - 8$ ,

в)  $(3a+2)(3a-2) > (3a+1)^2$ ,

г)  $2(x+4)(2x-3) < (4x-1)(x+1)$ .

## 3.14 Примена на линеарните неравенки

Како и линеарните равенки, така и линеарните неравенки имаат широка примена во секојдневниот живот и во науката. Ќе разгледаме некои едноставни примени на линеарните неравенки.

**Пример 95.** Колку литри вода загреана на  $90^\circ\text{C}$  треба да се измешаат со 40 литри вода на температура од  $15^\circ\text{C}$  за да температурата на добиената вода биде повисока од  $22^\circ\text{C}$ , а пониска од  $25^\circ\text{C}$ .

**Решение.** Ако непознатото количество вода го означиме со  $x$  литри, тогаш вкупно ќе имаме  $x + 40$  литри вода. Бидејќи количеството топлина на добиената вода е еднакво на збирот на количествата топлина на топлата и ладната вода, добиваме дека

$$22 \cdot (40 + x) < 40 \cdot 15 + x \cdot 90 < 25 \cdot (40 + x).$$

Од левата неравенка добиваме

$$880 + 22x < 600 + 90x,$$

$$280 < 68x,$$

$$\frac{70}{17} < x.$$

Од десната неравенка добиваме

$$600 + 90x < 1000 + 25x,$$

$$90x - 25x < 1000 - 600,$$

$$65x < 400,$$

$$x < \frac{80}{13}.$$

Според тоа, за количеството вода кое треба да го туриме важи  $\frac{70}{17} < x < \frac{80}{13}$ .

**Пример 96.** На еден маратон учествувале меѓу 510 и 550 ученици. Ако бројот на девојчињата кои учествувале на маратонот е за 100 помал од трикратниот број на момчињата кои учествувале



на маратонот, кој е најмалиот, а кој најголемиот можен број девојчиња кои учествувале на маратонот?

**Решение.** Нека на маратонот учествувале  $x$  мочиња. Тогаш, бројот на девојчињата е  $3x - 100$ , што значи дека на маратонот вкупно учествувале  $x + 3x - 100 = 4x - 100$  ученици. Од неравенствата

$$510 \leq 4x - 100 \leq 550,$$

добиваме  $152,5 \leq x \leq 162,5$ . Значи, на маратонот учествувале најмалку 153, а најмногу 162 девојчиња.

**Пример 97.** Шехерезада на принцот му раскажала 1001 приказна. Според принцот 10% од веселите приказни се поучни, а 8% од поучните приказни се весели. Приказните кои се тажни и не се поучни се помалку од приказните кои се и весели и поучни. Колку приказни, според принцот, се и весели и поучни?

**Решение.** Со  $2x$  да го означиме бројот на приказните кои се и весели и поучни. Тогаш поучните приказни се  $25x$ , а веселите се  $20x$ . Сега, ако  $y$  е бројот на тажните прикази кои не се поучни, тогаш  $y < 2x$  и бројот на приказните кои се весели или поучни е еднаков на  $25x + 20x - 2x = 43x$ , па затоа вкупниот број приказни е  $43x + y$ , т.е.  $43x + y = 1001$ . Од последното равенство и од  $y < 2x$  следуваат неравенствата  $43x < 1001 < 45x$ , од каде добиваме  $22\frac{11}{45} < x < 23\frac{12}{43}$ , т.е.  $x = 23$ . Конечно, 46 приказни се и весели и поучни.

**Пример 98\*.** На училишниот натпревар по математика ученикот кој освоил најмногу поени имал 4 пати помалку поени од збирот на поените на сите други ученици, ученикот кој бил треторангиран имал 9 пати помалку поени од збирот на поените на сите други ученици и ученикот кој бил најслабо рангиран имал 10 пати помалку поени од збирот на поените на сите други ученици. Колку ученици учествувале на натпреварот?

**Решение.** Нека има  $n$  ученици кои соодветно освоиле  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  поени и нека  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Од условот на задачата следува  $a_1 = \frac{S - a_1}{4}$ ,  $a_3 = \frac{S - a_3}{9}$  и  $a_n = \frac{S - a_n}{10}$ , од каде следува  $a_1 = \frac{S}{5}$ ,  $a_3 = \frac{S}{10}$  и  $a_n = \frac{S}{11}$ . Имаме,

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &\leq a_1 + a_1 + a_3 + \dots + a_3 + a_n \\ &= 2a_1 + (n-3)a_3 + a_n \\ &= \frac{2S}{5} + (n-3)\frac{S}{10} + \frac{S}{11} < (n+2)\frac{S}{10}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &\geq a_1 + a_3 + a_3 + a_n + \dots + a_n + a_n \\ &= a_1 + 2a_3 + (n-3)a_n = \frac{2S}{5} + (n-3)\frac{S}{11}. \end{aligned}$$

Од горните две неравенства следува  $n > 8$  и  $n \leq 9,6$ . Значи,  $n = 9$ .

**Пример 99\*.** Венко во подрумот има определен број буриња полни со вино. Волуменот на секое буре е 1100 литри. Ако виното се претури во буриња со волумен 900 литри, ќе бидат потребни 6 буриња повеќе и едно буре нема да биде полно. Ако виното се претури во буриња со волумен 800 литри, ќе бидат потребни 9 буриња повеќе и повторно едно буре нема да биде полно. Колку хектолитри вино има Венко во своите буриња?

**Решение.** Со  $x$  да го означиме количеството вино, а со  $n$  бројот на бурињата од 1100 литри во кои е целото количество вино. Според условот на задачата

$$1100n = x,$$

$$900(n+5) < x < 900(n+6),$$

$$800(n+8) < x < 800(n+9).$$

Од  $900(n+5) < x = 1100n$  следува  $200n > 4500$ , т.е.  $n > 22$ .

Од  $800(n+8) < x = 1100n$  следува  $300n < 7200$ , т.е.  $n < 24$ .

Значи,  $n = 23$ , па затоа  $x = 1100 \cdot 23 = 25300$ . Значи, Венко има 235 хектолитри вино.

#### Задачи

88. Цената на една книга е парен број денари. Вкупната цена на 9 примероци од оваа книга е поголема од 4200 денари, а е помала од 4300 денари, а вкупната цена на 13 примероци од истата книга е поголема од 6000 денари, а е помала од 6100 денари. Цената на книгата е цел број денари. Колкава е цената на оваа книга?
89. Определи ја најголемата од сите дробки кои го исполнуваат условот: броителот и именителот на дропката се природни броеви, нивниот збир е 101, а дропката е помала од  $\frac{1}{3}$ .
90. Во едно училиште има помалку од 300 ученици. Во шест одделенија има еднаков број ученици. Вкупниот број ученици во овие шест одделенија е поголем од 90. Преостанатиот број ученици е за 20% поголем од вкупниот број ученици во овие шест одделе-нија. Колку ученици има во ова училиште?
91. Во кутија се наоѓаат еднаков број сини и црвени топчиња. Ако во кутијата ставиме уште 3 црвени и 1 сино топче, тогаш односот на бројот на црвените топчиња и вкупниот број топчиња ќе биде поголем од 0,503. Определи го најголемиот можен број црвени топчиња во кутијата?

### Провери го своето знаење 3

1. Дадена е отсечка  $AB: A(6,5), B(x,y)$  чија средина е точката  $M(2,-3)$ . Определи ги координатите на точката  $B$ .
2. Определи ја апсцисата на точката  $M(x,-2)$  која што лежи на правата што минува низ точките  $A(3,3)$  и  $B(-1,2)$ .
3. Нацртај го графикот на функцијата  $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ .
4. Определи го реалниот број  $k$  така што графиците на функциите  $y = 2x + 7$  и  $y = (k + 2)x + 2k + 4$  се заемно нормални.

5. Состави табела на вредности и нацртај го графикот на функцијата  $y = \frac{12}{x}$ .

6. Реши ја равенката:

$$\frac{2x+1}{7} - \frac{3x+7}{4} + \frac{4x+3}{5} = 3.$$

7. За кои вредности на параметарот  $a$  равенката  $\frac{a-2x}{a} - \frac{2-ax}{2} = a - 2$  има само едно решение и тоа е еднакво на нула?

8. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} (x-1)^2 - (y+3)^2 = (x+1)^2 - y^2, \\ \frac{x+2}{2} - \frac{y-1}{4} = 1. \end{cases}$$

9. Анастас патува со чамец по реката Дрим, од Струга до Глобочица и обратно. Растојанието меѓу Струга и Глобочица е  $18 \text{ km}$ , а тој патува вкупно 5 часови. Колкава е брзината на реката Дрим, ако Анастас патува за исто време  $4 \text{ km}$  низводно, а  $2 \text{ km}$  во обратната насока?

10. Реши ја неравенката:

$$4(x-5) > 3(x+7).$$

## 4 Геометрија

- 4.1 Вектори
  - 4.1.1 Поим за вектор. Еднаквост на вектори
  - 4.1.2 Собирање и одземање на вектори
  - 4.1.3 Множење на вектор со број
  - 4.1.4 Примена на векторите
- 4.2 Сличност
  - 4.2.1 Пропорционални отсечки. Талесова теорема
  - 4.2.2 Слични триаголници. Признаци за сличност
  - 4.2.3 Својства на сличните триаголници. Евклидови и Питагорова теорема
- 4.3 Тригонометрија
  - 4.3.1 Агол, тригонометриски функции од остар агол
  - 4.3.2 Вредностите на тригонометриските функции за агли од  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и произволен остар агол
  - 4.3.3 Менување на тригонометриски функции при промена на аголот од  $0^\circ$  до  $90^\circ$
  - 4.3.4 Решавање на правоаголен триаголник
- 4.4 2Д-форми
  - 4.4.1 Централен и периферен агол во кружница. Талесова теорема
  - 4.4.2 Тетивен четириаголник
  - 4.4.3 Тангентен четириаголник
  - 4.4.4 Правилни многуаголници
  - 4.4.5 Покривање на површина со 2Д-форми

Со усвојување на содржините од оваа тема ќе можеш:

- да собираш и одземаш вектори, како и да множиш вектор со број,
- да изразуваш вектор со помош на други вектори,
- да ги применуваш векторите при решавање на проблемски ситуации,
- да ги дефинираш и запишуваш тригонометриските функции од остар агол,
- да го толкуваш менувањето на тригонометриските функции за агол од  $0^\circ$  до  $90^\circ$ ,
- да ги применуваш вредностите на функциите за агли од  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  при решавање задачи,
- да решаваш правоаголен триаголник со примена на Питагорова теорема и тригонометриски функции,
- да ги користиш тригонометриските функции при решавање практични проблеми,
- да решаваш проблеми со помош на пропорционални отсечки, вклучувајќи делење на отсечка на еднакви делови,
- да ги искажуваш и применуваш признаците за сличност на триаголници,
- да пресметуваш непозната страна и периметар на триаголник кој е сличен на даден триаголник,
- да пресметуваш непознат агол на триаголник и четириаголник со користење на својства на агли во кружница, трансверзала и агол меѓу тетива и тангента,
- да ги искажуваш и применуваш признаците за тангентен и тетивен четириаголник,
- да ги применуваш својствата меѓу елементите на триаголник, четириаголник, правилен многуаголник и круг при решавање проблеми, и
- да решаваш проблеми во врска со покривање на дадена површина.

## 4.1 Вектори

### 4.1.1 Поим за вектор. Еднаквост на вектори

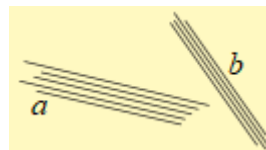
Како што знаеме две различни прави или се сечат или се паралелни. Понатаму, кога некои прави се совпаѓаат, тоа се смета за специјален случај на паралелност, па затоа можеме да кажеме дека *секоја права е паралелна самата на себе*, т.е.  $p \parallel p$ .

Од дефиницијата на паралелни прави и од погоре кажаното следува дека:

- 1)  $p \parallel p$ , за секоја права  $p$ ,
- 2) ако  $p \parallel q$ , тогаш  $q \parallel p$ ,
- 3) ако  $p \parallel q$  и  $q \parallel r$ , тогаш  $p \parallel r$ .

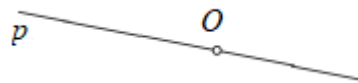
**Дефиниција 1.** Множеството од сите прави што се паралелни со дадена права  $a$  го нарекуваме *правец*, зададен со правата  $a$ .

Правата  $a$ , или било која права од правецот зададен со правата  $a$ , ја нарекуваме *претставник* на тој правец.

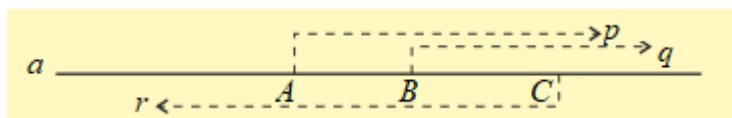


Како што знаеме, низ секоја точка во рамнината минува една и само една права паралелна на дадена права. Тоа значи, низ секоја точка во рамнината минува една и само една права од даден правец.

**Дефиниција 2.** Точката  $O$  ја дели правата  $p$  на два дела. За точката  $O$  велиме дека е *гранична точка* на секој од двата дела. Множеството точки од правата  $p$ , кои се од иста страна на точката  $O$ , заедно со неа го нарекуваме *полуправа*. За точката  $O$  велиме дека е *почетна точка* на полуправата.



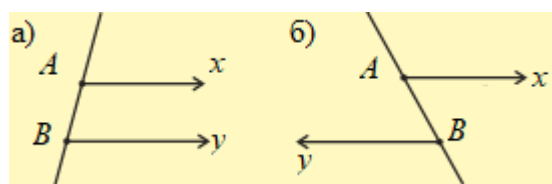
Нека е дадена права  $a$  на која се означени точките  $A, B, C$  (види цртеж). Да ги разгледаме полуправите  $Ap, Bq, Cr$ . Како што можеме



да видиме  $Bq \subset Ap$ , а додека  $Cr \not\subset Bq$ ,  $Cr \not\subset Ap$ ,  $Bq \not\subset Cr$ ,  $Ap \not\subset Cr$ . Во врска со овие инклузии ја имаме следнава дефиниција.

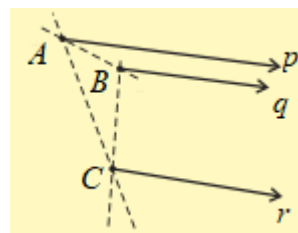
**Дефиниција 3.** Две полуправи кои лежат на една права се *истонасочени*, ако една од нив е подмножество од другата, а се *спротивно насочени* ако ниту една од нив не е подмножество од другата права.

Нека полуправите  $Ax$  и  $Bu$  лежат на две различни паралелни прави. Ако полуправите  $Ax$  и  $Bu$  припаѓаат на иста полурамнина определена со правата  $AB$ , тогаш велиме дека тие се *истонасочени* (цртеж а)), во ознака  $Ax \uparrow \uparrow Bu$ . Ако, полуправите  $Ax$  и  $Bu$  припаѓаат на различни полурамнини определени со правата  $AB$ , тогаш велиме дека тие се *спротивно насочени* (цртеж б)), во ознака  $Ax \uparrow \downarrow Bu$ .



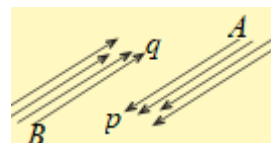
Лесно се докажува дека за истонасочените полуправи важат следниве својства.

- 1)  $Ap \uparrow\uparrow Ap$ , за секоја полуправа  $Ap$
- 2) ако  $Ap \uparrow\uparrow Bq$ , тогаш  $Bq \uparrow\uparrow Ap$ ,
- 3) ако  $Ap \uparrow\uparrow Bq$  и  $Bq \uparrow\uparrow Cr$ , тогаш  $Ap \uparrow\uparrow Cr$ .



**Дефиниција 4.** Множеството  $P$  од сите полуправи кои се истонасочени со дадена полуправа  $Ap$  го нарекуваме *насока* зададена со полуправата  $Ap$ .

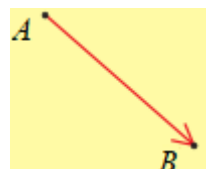
Полуправата  $Ap$ , или која било друга полуправа од насоката  $P$  ја нарекуваме *претставник* на таа насока.



Јасно, ако две полуправи лежат на две непаралелни прави, тогаш тие определуваат различни насоки. Ако, пак, полуправите лежат на паралелни прави, тогаш тие определуваат иста или спротивни насоки.

**Дефиниција 5.** Отсечката  $AB$  на која точката  $A$  се зема за почетна, а точката  $B$  за крајна ја нарекуваме *насочена отсечка* и ја означуваме со  $\overrightarrow{AB}$ .

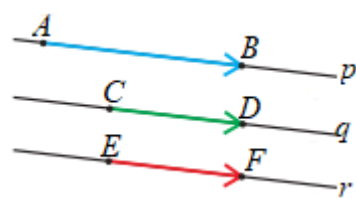
На цртежот е прикажана насочената отсечка  $\overrightarrow{AB}$ , која уште ја запишуваме и како подреден пар  $(A, B)$ . Точката  $A$  ја нарекуваме *почетна*, а точката  $B$  *крајна* точка на насочената отсечка  $\overrightarrow{AB}$ .



Насоката што ја определува полуправата  $AB$  ја нарекуваме *насока* на насочената отсечка  $\overrightarrow{AB}$ .

Должината на отсечката  $AB$  ја нарекуваме *должина (интензитет)* на насочената отсечка  $\overrightarrow{AB}$  и се означува со  $|\overrightarrow{AB}|$ .

**Пример 1.** На цртежот се прикажани насочените отсечки  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ . Како што можеме да видиме трите отсечки имаат иста насока и притоа важи  $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{EF}|$  и  $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{CD}|$ .

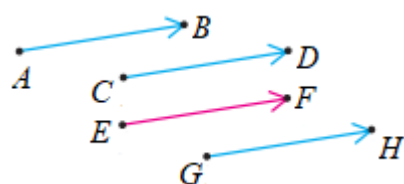


**Дефиниција 6.** Насочената отсечка чиј почеток и крај се совпаѓаат ( $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \dots$ ) ја нарекуваме *нулта насочена отсечка*.

Нултата насочена отсечка нема одредена насока, а нејзината должина е нула.

**Дефиниција 7.** За насочените отсечки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  велиме дека се *еднакви* ако имаат еднаква должина и иста насока, т.е.  $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$  и  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ . Притоа пишуваме  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Пример 2.** На цртежот се прикажани насочените отсечки  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}$  кои имаат еднаква должина и иста насока  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ .



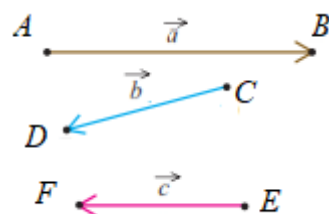
Претходниот пример покажува дека можеме да нацртаме произволно многу насочени отсечки еднакви на дадена насочена отсечка  $\overrightarrow{AB}$ . Во смисла на ова ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 8.** Множеството од една насочена отсечка и сите насочени отсечки еднакви на неа го нарекуваме *вектор*.

Множеството од сите нулти насочени отсечки го нарекуваме *нулти вектор* и го означуваме со  $\vec{0}$ .

Во натамошните разгледувања векторот на цртеж ќе го претставуваме со една насочена отсечка, т.е. со еден претставник од множеството еднакви насочени отсечки. Значи, насочената отсечка ќе ни претставува вектор.

Векторот ќе го означуваме со  $\overrightarrow{AB}$  или со мала буква и стрелка над неа. На цртежот се дадени векторите  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$  и  $\overrightarrow{EF} = \vec{c}$ .

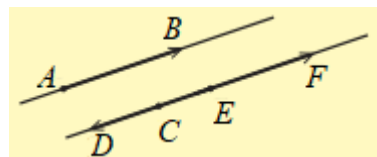


Од претходните разгледувања следува дека кај секоја насочена отсечка, односно вектор  $\overrightarrow{AB}$ , разликуваме: *должина*, *правец* и *насока на векторот*. Имено, должината на отсечката  $AB$  е *должина на векторот  $\overrightarrow{AB}$* , правецот зададен со правата  $AB$  е *правецот на векторот  $\overrightarrow{AB}$* , а насоката зададена со полуправата  $AB$  е *насока на векторот  $\overrightarrow{AB}$* .

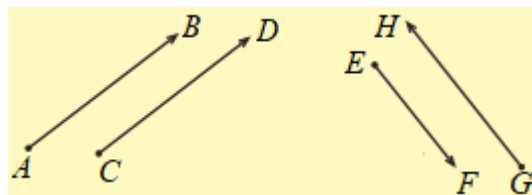
**Дефиниција 9.** Ако два вектори имаат ист правец, т.е. ако лежат на една права или на две различни паралелни прави, тогаш велиме дека тие се *колинеарни*.

Нултиот вектор го сметаме за колинеарен со секој друг вектор.

**Пример 3.** Векторите  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{EF}$  прикажани на цртежот лежат на паралелни прави, што значи дека тие се колинеарни.



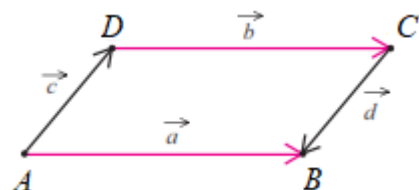
**Дефиниција 10.** За векторите  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  велиме дека се *истонасочени* и пишуваме  $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ , ако полуправите  $AB$  и  $CD$  се истонасочени, а за векторите  $\overrightarrow{EF}$  и  $\overrightarrow{GH}$  велиме дека се *спротивно насочени* и пишуваме  $\overrightarrow{EF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{GH}$ , ако полуправите  $EF$  и  $GH$  се спротивно насочени.



**Дефиниција 11.** Два вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се *еднакви* ако имаат иста насока и еднакви должини, т.е.  $\vec{a} = \vec{b}$  ако  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$  и  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .

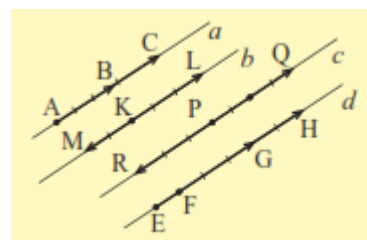
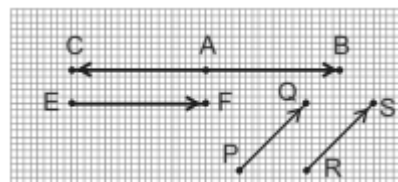
Два вектори  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  се *спротивни* ако имаат еднакви должини и спротивни насоки. Притоа за векторот  $\vec{d}$  велиме дека е *спротивен* на векторот  $\vec{c}$  и пишуваме  $\vec{d} = -\vec{c}$ .

**Пример 4.** На цртежот е даден паралелограмот  $ABCD$ . Од својствата на паралелограмот следува дека векторите  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$  се еднакви, а векторите  $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$  и  $\overrightarrow{CB} = \vec{d}$  се спротивни.



## Задачи за вежби

- Нацртај паралелограм  $ABCD$  и нека  $O$  е пресечната точка на неговите дијагонали. Кои од полуправите  $AB, DC, BA, AO, OC, DB$  се:
  - истонасочени,
  - спротивно насочени.
- Спротивни насочените полуправи  $AB$  и  $CD$  лежат на иста права. Која фигура може да биде:
  - унијата,
  - пресекот на овие полуправи.
 Направи цртеж!
- На правата  $a$  се дадени полуправите  $OA, O_1A$  и  $O_2A$  такви што  $OA \uparrow\uparrow O_1A$  и  $O_1A \uparrow\downarrow O_2A$ . Како се насочени полуправите  $OA$  и  $O_2A$ ?
- На цртежот се дадени вектори во квадратна мрежа. Како се насочени векторите?
  - $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ ,
  - $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{EF}$ ,
  - $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{EF}$ ,
  - $\overrightarrow{PQ}$  и  $\overrightarrow{RS}$ ,
  - $\overrightarrow{PQ}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .
- Познато е дека векторите  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  се колинеарни. Дали се колинеарни векторите:
  - $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$ ,
  - $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ?
- На цртежот правите  $a, b, c, d$  се паралелни. Дали е точно дека:
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG}$
  - $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KM}$
  - $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{PQ}$
  - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FH}$
  - $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{KL}$

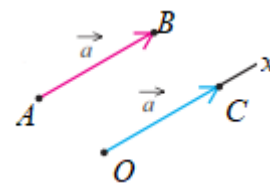


## 4.1.2 Собирање и одземање на вектори

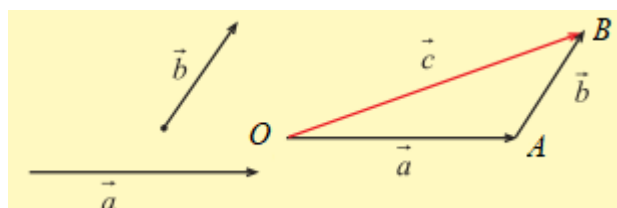
**Пример 5.** Дадени се вектор  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и точка  $O$ . Конструирај вектор  $\overrightarrow{OC}$  еднаков на векторот  $\overrightarrow{AB}$ .

**Решение.** Низ точката  $O$  повлекуваме права  $x$  паралелна со правата  $AB$ . На правата  $x$  од точката  $O$  во насока на векторот  $\overrightarrow{AB}$  нанесуваме отсечка  $OC$  таква, што  $OC = |\overrightarrow{AB}|$  и ја добиваме крајната точка на бараниот вектор  $\overrightarrow{OC}$ .

Конструкцијата на векторот  $\overrightarrow{OC}$  ја нарекуваме *пренесување на векторот  $\overrightarrow{AB}$  од точката  $O$* .



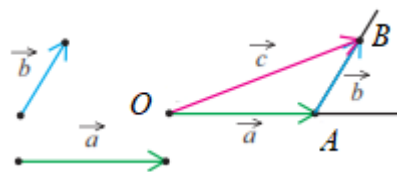
Нека  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се два вектори и  $O$  е произволна точка во рамнината. Да го пренесеме векторот  $\vec{a}$  од точката  $O$  и крајната точка ја означиме со  $A$ . Потоа да го пренесеме векторот  $\vec{b}$  од точката  $A$  и крајната точка да





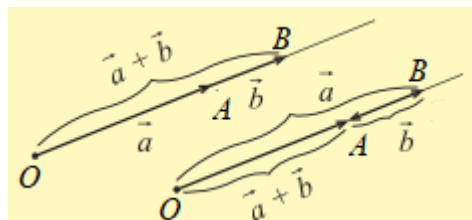
ја означиме со  $B$ , тогаш велиме дека векторот  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$  е *надоврзан вектор* на векторот  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

**Дефиниција 12.** Ако  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се два вектори,  $O$  произволна точка и  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ , а  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ , тогаш векторот  $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$  го нарекуваме *збир* на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и пишуваме  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ , т.е.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .



Правилото за собирање вектори од претходната дефиниција го нарекуваме *правило на триаголник*.

Како што може да се види од дадениот цртеж, правилото од дефиниција 12 за собирање на два вектора  $\vec{a}$  важи и кога векторите се колинеарни. Понатаму, од својствата на триаголникот непосредно следува



$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \text{ и } \|\vec{a} - \vec{b}\| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Очигледно, ако векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имаат исти правци, тогаш се можни следниве случаи:

а) ако векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имаат иста насока, тогаш нивниот збир  $\vec{a} + \vec{b}$  има интензитет  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ , а правецот и насоката се исти како и кај векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

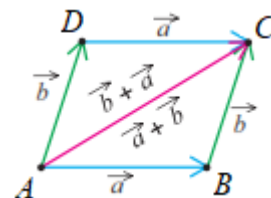
б) ако векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имаат различни насоки, тогаш нивниот збир  $\vec{a} + \vec{b}$  има интензитет  $\|\vec{a} - \vec{b}\|$ , ист правец како  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и насоката на векторот кој има поголем интензитет.

**Забелешка 1.** При наоѓањето на збирот  $\vec{a} + \vec{b}$  може да се случи крајната точка на  $\vec{b}$  да се совпадне со почетната точка на  $\vec{a}$ . Јасно, во овој случај важи  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .

Нека се дадени векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и нека векторот  $\vec{b}$  е надоврзан на векторот  $\vec{a}$ . Според дефиниција 12 векторот  $\vec{c}$  кој ги поврзува почетокот на  $\vec{a}$  и крајот на  $\vec{b}$  е збир на  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т.е.  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . На цртежот е конструиран паралелограм  $ABCD$ . Притоа имаме  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  и  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ . Според тоа,

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \vec{c},$$

т.е. важи  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ . Со тоа го докажавме следново тврдење.



**Теорема 1.** За било кои два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  е точно равенството  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ , т.е. собирањето на вектори го има комутативното својство.

При докажувањето на комутативното својство векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ги пренесовме во заеднички почеток  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ , а потоа го конструиравме паралелограмот  $ABCD$ . Притоа векторот што го определува дијагоналата  $\overrightarrow{AC}$  е еднаков на збирот на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Ова правило за собирање на вектори го нарекуваме *правило на паралелограм*.

Понатаму, нека  $\vec{a}$  е произволен вектор и  $\vec{b}$  е спротивниот вектор на  $\vec{a}$ , т.е.  $\vec{b} = -\vec{a}$ . Според забелешка 1 точно е следново тврдење.

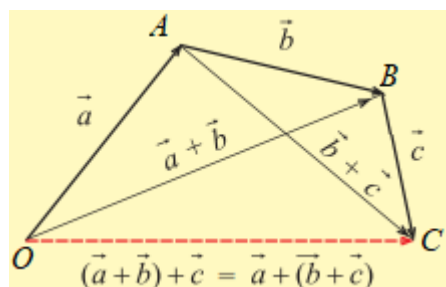
**Теорема 2.** За секој вектор  $\vec{a}$  точни се равенствата  $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ .

За збирот на векторите  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$  и  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  важи  $\vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ , што значи дека е точно тврдењето.

**Теорема 3.** За секој вектор  $\vec{a}$  точни се равенствата  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .

Нека се дадени векторите  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Ако ги собереме векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  го добиваме векторот  $\vec{a} + \vec{b}$ . Сега, ако на векторот  $\vec{a} + \vec{b}$  го додадеме векторот  $\vec{c}$  го добиваме векторот  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ . Паралелно со овој збир можеме да го најдеме векторот  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ , т.е. на векторот  $\vec{a}$  му го додаваме збирот  $\vec{b} + \vec{c}$ . Ќе докажеме дека

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$



За да го докажеме последното равенство, ќе ги надоврземе векторите  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  така, што векторот  $\vec{b}$  е надоврзан на векторот  $\vec{a}$ , а векторот  $\vec{c}$  е надоврзан на векторот  $\vec{b}$ . Притоа, со  $O$  да ја означиме почетната точка на  $\vec{a}$ , со  $A$  крајната точка на  $\vec{a}$ , со  $B$  крајната точка на  $\vec{b}$  и со  $C$  крајната точка на  $\vec{c}$ . Тогаш,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

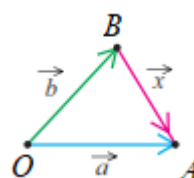
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

т.е.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ . Според тоа, точно е тврдењето.

**Теорема 4.** За секои вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  е точно равенството  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ , т.е. за собирањето на вектори важи асоцијативното својство. Затоа, збирот на трите вектори може да се запише и без загради.

**Дефиниција 13.** Нека се дадени векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . За векторот  $\vec{x}$  ќе велиме дека е *разлика* на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , во ознака  $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ , ако важи  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{x}$ .

Да ги поставиме векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  во заедничка почетна точка  $O$  и нивните крајни точки да ги означиме со  $A$  и  $B$ , соодветно. Сакаме да ја определиме разликата  $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ . Нека тоа е некој вектор со почеток во точката  $B$ . Тогаш крајната точка на овој вектор мора да се совпадне со точката  $A$ , бидејќи збирот  $\vec{x}$  со  $\vec{b}$  треба да го даде векторот  $\vec{a}$ . Според тоа,  $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$ , што значи точно е следново тврдење.



**Теорема 5.** Нека векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имаат заедничка почетна точка. Разликата  $\vec{a} - \vec{b}$  е вектор со почетна точка во крајната точка на  $\vec{b}$  и крајна точка во крајната точка на  $\vec{a}$ .

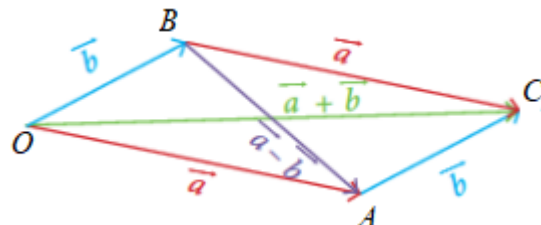
Нека се дадени векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Имаме

$$(\vec{a} + (-\vec{b})) + \vec{b} = \vec{a} + ((-\vec{b}) + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Според тоа, збирот на векторите  $\vec{a} + (-\vec{b})$  и  $\vec{b}$  го дава векторот  $\vec{a}$ , па од дефиниција 13 следува точноста на следново тврдење.

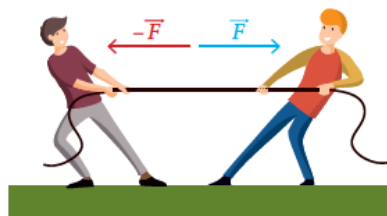
**Теорема 6.** За секои вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  важи  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

Да се вратиме на цртежот на собирање на векторите според правилото на паралелограм. Тогаш од цртежот се гледа дека ако векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  лежат на две страни на паралелограмот и имаат заедничка почетна точка, тогаш векторот определен со едната дијагонала е збирот, а векторот определен со другата дијагонала е разликата на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .



### ВЕКТОРИТЕ И ФИЗИКАТА

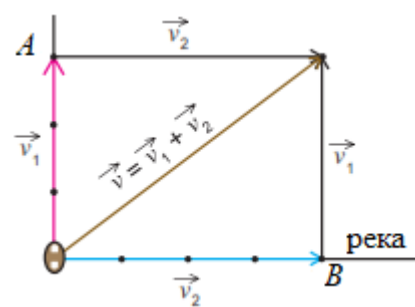
Од наставата по физика знаеш дека брзината, силата и забрзувањето се векторски величини. Според тоа, во физиката два вектора со ист смер и насока можеме да ги замислиме како сили со кои две лица дејствуваат така што со јаже влечат тело во иста насока. Силите со кои првото и второто лице дејствуваат на јагето се претставуваат со вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а вкупната сила со која се дејствува на јагето е збирот на двата вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ .



Ако на едно тело дејствуваат две спротивни сили  $\vec{F}$  и  $-\vec{F}$ , тогаш телото мирува. Така, ако две лица со еднаква сила влечат на двата краја на едно јаже, тогаш состојбата не се менува, т.е. лицата остануваат во иста положба.

**Пример 6.** Водата во една река тече со брзина  $4 \text{ m/s}$ . Еден чамец тргнува од едниот брег, нормално на другиот брег со брзина од  $3 \text{ m/s}$ . Определи во која насока ќе се движи чамецот и со која брзина.

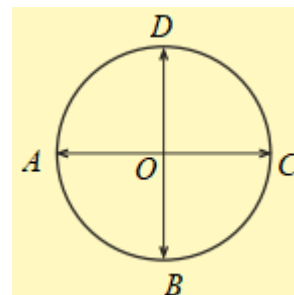
**Решение.** Со векторот  $\vec{v}_1$  ( $|\vec{v}_1| = 3$ ) е претставена брзината на чамецот во мирна вода. Со векторот  $\vec{v}_2$  ( $|\vec{v}_2| = 4$ ) е претставена брзината на реката. Бидејќи двата вектори дејствуваат на чамецот, со нивниот збир векторот  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  е претставена брзината на движење на чамецот во реката. Насоката на векторот  $\vec{v}$  е насоката на движење на чамецот, а должината на векторот  $\vec{v}$  дава колку метри во секунда се движи чамецот. Од Питагоровата теорема, која ти е позната и која покасно ќе ја докажеме, следува  $|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m/s}$ .



### Задачи за вежби

7. Радиусите  $OA, OB, OC, OD$  на кружницата  $k$  формираат четири прави агли. Конструирај ги збирите:

- а)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ , б)  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ,  
в)  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ , г)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ .



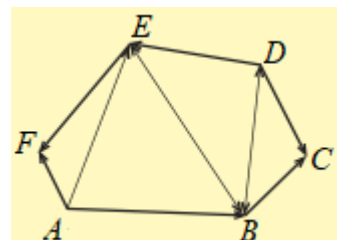
8. На цртежот е прикажан шестаголникот  $ABCDEF$ .

1) Пресметај ги збирите:

- а)  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$ , б)  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}$ , в)  $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ ,  
г)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$ , д)  $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ .

2) Според цртежот претстави го како збир на вектори, векторот:

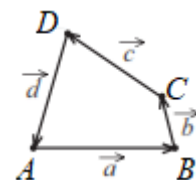
- а)  $\overrightarrow{DC}$ , б)  $\overrightarrow{BC}$ , в)  $\overrightarrow{AB}$ .



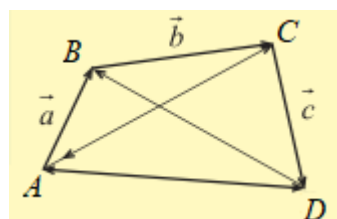
9. Ако  $\vec{a} = \vec{b}$ , тогаш  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$ . Докажи!

10. На цртежот се дадени четириаголникот  $ABCD$  и векторите  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$ . Определи ги збирите:

- а)  $\vec{a} + \vec{b}$ , б)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ , в)  $\vec{a} + \vec{d}$  и г)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ .



11. На цртежот се дадени четириаголникот  $ABCD$  и векторите  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ . Изрази ги векторите  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{DB}$  и  $\overrightarrow{DA}$  со помош на векторите  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .



12. Упрости ги изразите:

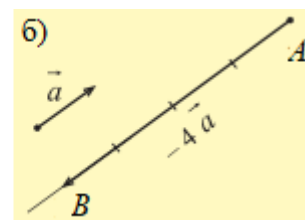
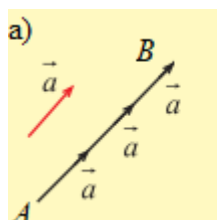
- а)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB})$ , б)  $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})$   
в)  $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD})$ .

### 4.1.3 Множење на вектор со број

**Дефиниција 14.** Нека  $\vec{a}$  е вектор и  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Векторот  $\vec{b}$  кој има ист правец како векторот  $\vec{a}$ , интензитет  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$  и иста насока како векторот  $\vec{a}$  ако  $\lambda > 0$ , а спротивна насока од векторот  $\vec{a}$  ако  $\lambda < 0$ , го нарекуваме *производ на векторот  $\vec{a}$  со скаларот  $\lambda$* .

Притоа пишуваме  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ .

**Пример 7.** На цртежот а) е даден вектор  $\vec{a}$  и е конструиран векторот  $3\vec{a}$ . На цртежот б) за даден вектор  $\vec{a}$  е конструиран векторот  $-4\vec{a}$ .



**Дефиниција 15.** Нека  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Векторот  $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$  го нарекуваме *орт* соодветен на векторот  $\vec{a}$ .

**Забелешка 2.** Нека  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . За ортот  $\vec{a}_0$  соодветен на векторот  $\vec{a}$  важи  $|\vec{a}_0| = |\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$ , т.е. тој има должина 1. Затоа ќе велиме дека ортот  $\vec{a}_0$  е *единичен вектор* колинеарен на векторот  $\vec{a}$ . Понатаму, за  $\vec{a}$  и  $\vec{a}_0$  важи  $|\vec{a}||\vec{a}_0| = |\vec{a}||\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}| = \vec{a}$ .

Претходно го воведовме поимот колинеарни вектори. Во врска со овој поим точно е следново тврдење.

**Теорема 7.** Векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се колинеарни ако и само ако  $\vec{b} = k\vec{a}$ , за некој  $k \in \mathbb{R}$ .

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Ако еден од векторите  $\vec{a}$  или  $\vec{b}$  е нултиот вектор, на пример  $\vec{b} = \vec{0}$ , тогаш  $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$ . Навистина,  $|0 \cdot \vec{a}| = 0 \cdot |\vec{a}| = 0$ , па затоа  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0} = \vec{b}$ .

Нека векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) се колинеарни и нека  $\vec{e}$  и  $\vec{e}'$  се нивните ортови, соодветно. Тогаш

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}, \vec{b} = |\vec{b}|\vec{e}'. \quad (1)$$

Очигледно

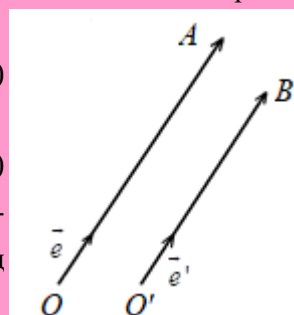
$$\vec{e} = \pm \vec{e}', \quad (2)$$

каде знакот плус соодветствува на случајот кога векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имаат иста насока, а знакот минус кога  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имаат спротивни насоки. Од формулите (1) и (2) следува

$$\vec{b} = |\vec{b}|\vec{e}' = \pm |\vec{b}|\vec{e} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}(|\vec{a}|\vec{e}) = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a},$$

и ако земеме  $k = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$  добиваме дека важи  $\vec{b} = k\vec{a}$ .

Обратно, ако е исполнето равенството  $\vec{b} = k\vec{a}$ , тогаш колинеарноста на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  непосредно следува од дефиниција 14.



Од претходното тврдење непосредно следува точноста на следново тврдење.

**Последица 1.** Ако векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не се колинеарни, тогаш од равенството  $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$  следува  $x = y = 0$ .

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не се колинеарни. Ако на пример  $x \neq 0$ , тогаш од равенството  $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$  следува  $x\vec{a} = -y\vec{b}$ , од каде добиваме  $\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$ . Сега од претходното тврдење следува дека векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се колинеарни, што противречи на претпоставката.

Од дефиницијата на множење на вектор со скалар следува точноста на следново тврдење, чиј доказ нема да го презентираме.

**Теорема 8.** За секој вектор  $\vec{a}$  и секој скалар  $\lambda \in \mathbb{R}$  производот  $\lambda\vec{a}$  е вектор, при што важи:

i)  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ , за секој вектор  $\vec{a}$ ,

ii)  $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ , за секој вектор  $\vec{a}$  и секои  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

iii)  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ , за секој вектор  $\vec{a}$  и секои  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

iv)  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ , за секои вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , и секој  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Пример 8 (делење на отсечка во даден однос).** Нека се дадени точките  $A$  и  $B$ . Ако точката  $C$  ја дели отсечката  $AB$  така што  $\overline{AC} : \overline{CB} = \lambda$ , тогаш векторите  $\overline{AC}$  и  $\overline{CB}$  се колинеарни и притоа важи

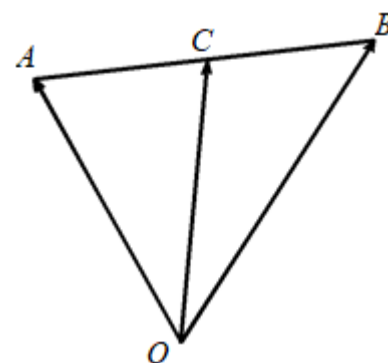
$$\overline{AC} = \lambda \overline{CB}. \quad (3)$$

Релацијата (3) можеме да ја запишеме и во друг вид ако го искористиме поимот радиус-вектор. Имено, ако положбата на секоја од точките  $A, B, C$  е определена во однос на фиксна точка  $O$  (пол) со радиус векторите  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ , при што точката  $O$  е избрана така што да не лежи на правата  $AB$ , тогаш за векторите  $\overline{AC}$  и  $\overline{CB}$  важи  $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$  и  $\overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}$ . Ако замениме во (3), последователно добиваме

$$\begin{aligned} \overline{OC} - \overline{OA} &= \lambda(\overline{OB} - \overline{OC}) \\ \overline{OC} + \lambda\overline{OC} &= \overline{OA} + \lambda\overline{OB} \\ (1 + \lambda)\overline{OC} &= \overline{OA} + \lambda\overline{OB} \\ \overline{OC} &= \frac{\overline{OA} + \lambda\overline{OB}}{1 + \lambda}. \end{aligned} \quad (4)$$

Според тоа, радиус векторот  $\overline{OC}$  на точката  $C$  која ја дели отсечката  $AB$  во даден однос се изразува со радиус векторите  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$  на крајните точки. Специјално, ако  $C$  е средина на  $AB$ , тогаш  $\overline{AC} : \overline{CB} = 1$ , па со замена во (4) добиваме

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}.$$



#### Задачи

13. Нацртај два вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а потоа конструирај ги векторите:

- а)  $\vec{a} + 2\vec{b}$ ,                      б)  $3\vec{a} - \vec{b}$ ,                      в)  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

14. Нацртај вектор  $\vec{a}$ , а потоа конструирај го векторот  $\frac{1}{4}\vec{a}$ .

15. Користејќи ги својствата на операциите на векторите упрости ги изразите:

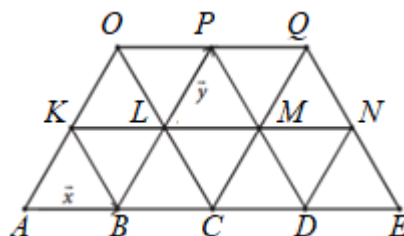
- а)  $\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{b}$ ,  
 б)  $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3(2\vec{a} + \vec{b})$ ,  
 в)  $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b})$ .

16. Сите триаголници на цртеж се рамнострани. Ако

$\overline{AB} = \vec{x}$  и  $\overline{LQ} = \vec{y}$  пресметај ги векторите:

- а)  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{OQ}$ ,  $\overline{ND}$ ,  $\overline{CQ}$ ,  $\overline{PB}$ ,  
 б)  $\overline{BK}$ ,  $\overline{CO}$ ,  $\overline{PA}$ ,  $\overline{AM}$ ,  $\overline{EL}$ ,  $\overline{AQ}$ .

На правата  $p$  се дадени точки  $A$  и  $B$ . Дали на  $p$  постои точка  $M$  таква што



#### 4.1.4 Примена на векторите

Векторите имаат широка примена во решавање на геометриски проблеми. Во продолжение ќе решиме неколку примери.

**Пример 9.** Ако  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , тогаш  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ . Докажи!

**Решение.** Од условот на задачата и од својствата на собирањето на векторите следува

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}.$$

**Пример 10.** Три ненулти вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  формираат триаголник ако и само ако  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . Докажи!

**Решение.** Да претпоставиме дека векторите  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  формираат триаголник, т.е. постои триаголник  $ABC$  така што  $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ . Тогаш

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Обратно, да претпоставиме дека  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . Нека  $A$  е произволна точка и нека  $B$  е точката, така што  $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ , а  $C$  онаа точка, така што  $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$  (направи цртеж). Тогаш за векторот  $\overrightarrow{CA}$  имаме:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{c}).$$

Од  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  следува  $\vec{b} = -(\vec{a} + \vec{c})$ , па значи  $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ , т.е. векторите  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  формираат триаголник  $ABC$ .

**Пример 11.** Точките  $M$  и  $N$  ја делат отсечката  $AB$  на три еднакви делови. Изрази ги векторите  $\overrightarrow{OM}$  и  $\overrightarrow{ON}$  со помош на векторите  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ , каде  $O$  е произволна точка која не лежи на отсечката  $AB$ .

**Решение.** Ако точката  $X$  ја дели отсечката  $AB$  во однос  $\lambda = m:n$ , тогаш  $\overrightarrow{OX} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$ .

Точката  $M$  ја дели отсечката  $AB$  во однос  $1:2$ , а точката  $N$  ја дели  $AB$  во однос  $2:1$ . Од претходно изнесеното имаме:  $\overrightarrow{OM} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3}$  и  $\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$ .

**Пример 12.** Нека  $ABCD$  е четириаголник и  $O$  е произволна точка. Ако  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ , тогаш четириаголникот  $ABCD$  е паралелограм. Докажи!

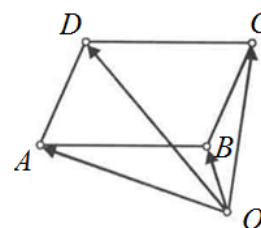
**Решение.** Од условот на задачата и правилото за одземање на вектори последователно добиваме

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD},$$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}.$$

Конечно, од последното равенство следува дека  $BA \parallel CD$  и  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ , што значи дека четириаголникот  $ABCD$  е паралелограм.

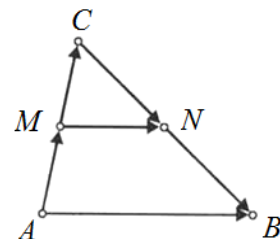


**Пример 13.** Докажи дека средната линија на триаголникот е паралелна со спротивната страна и е еднаква на половина од неа.

**Решение.** Нека  $M, N$  се средините на страните  $AC$  и  $BC$  на  $\triangle ABC$ . Имаме  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ , па затоа

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

од каде што следува  $MN \parallel AB$  и  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .



**Пример 14.** Докажи дека тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка  $T$ , која секоја тежишна линија ја дели во однос 2:1, сметајќи од темето.

**Решение.** Нека  $A', B', C'$  се соодветно средини на страните  $BC, CA, AB$  на  $\triangle ABC$  (види цртеж). Отсечката  $C'B'$  е средна линија на овој триаголник, па од решението на пример 5 следува дека  $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ . Нека  $BB' \cap CC' = T$ ,  $\overrightarrow{TB'} = \lambda \overrightarrow{TB}$  и  $\overrightarrow{TC'} = \mu \overrightarrow{TC}$ . Тогаш

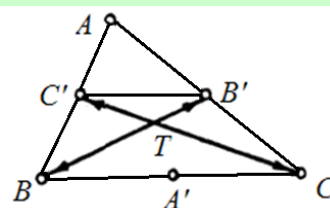
$$\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{TB'} - \overrightarrow{TC'} \text{ и } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TB}.$$

Сега, ако ги искористиме добиените равенства, последователно добиваме

$$\overrightarrow{TB'} - \overrightarrow{TC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TB}),$$

$$2\overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TB} = 2\overrightarrow{TC'} + \overrightarrow{TC},$$

$$(2\lambda + 1)\overrightarrow{TB} = (2\mu + 1)\overrightarrow{TC}.$$



Но, векторите  $\overrightarrow{TB}$  и  $\overrightarrow{TC}$  не се колинеарни, па од забелешка 4 следува дека  $2\lambda + 1 = 2\mu + 1 = 0$ , односно  $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$ . Значи,  $\overrightarrow{TB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{TB}$  и  $\overrightarrow{TC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{TC}$ , односно  $\overrightarrow{BT} = 2\overrightarrow{TB'}$  и  $\overrightarrow{CT} = 2\overrightarrow{TC'}$ , од каде следува дека точката  $T$  ги дели тежишните линии  $BB'$  и  $CC'$  во однос 2:1 сметајќи од темињата на триаголникот.

Нека  $AA' \cap BB' = T'$ . Тогаш на потполно ист начин се добива дека  $\overrightarrow{AT'} = 2\overrightarrow{T'A'}$  и  $\overrightarrow{BT'} = 2\overrightarrow{T'B'}$ , од каде следува дека точката  $T'$  ги дели тежишните линии  $AA'$  и  $BB'$  во однос 2:1 сметајќи од темињата на триаголникот.

Според тоа, точките  $T$  и  $T'$  ја делат тежишната линија  $BB'$  во однос 2:1 сметајќи од темето, па затоа  $T \equiv T'$ , од што следува тврдењето на задачата.

**Пример 15.** Докажи дека тежишните линии на секој триаголник се страни на некој триаголник.

**Решение.** *Прв начин.* Нека е даден  $\triangle ABC$  и нека  $A', B', C'$  се соодветно средините на страните  $BC, CA, AB$ . Тогаш

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

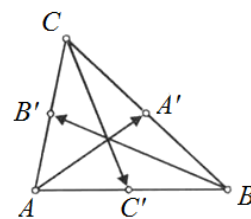
па затоа

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{3}{2}\vec{0} = \vec{0}.$$

Сега тврдењето на задачата следува од примерот 10.

*Втор начин.* При ознаки како во првиот начин на решавање, добиваме дека точките  $A', B', C'$  ги поделат страните  $BC, CA, AB$ , па затоа важи

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}, \overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{2}, \overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}.$$





Затоа важи

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}}{2} = \vec{0}.$$

Сега тврдењето на задачата следува од примерот 2.

**Пример 16.** Нека  $E$  е средината на страната  $AB$  на паралелограмот  $ABCD$  и нека  $M = AC \cap BE$ . Најди ги односите  $\overline{AM} : \overline{MC}$  и  $\overline{BM} : \overline{ME}$ .

**Решение.** Нека  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Векторите  $\overrightarrow{AM}$  и  $\overrightarrow{MC}$  се колинеарни, па затоа постои  $x \in \mathbb{R}$  така што  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$ . Бидејќи  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ , добиваме  $\overrightarrow{AM} = x(\vec{a} + \vec{b})$ . Слично, за некој  $y \in \mathbb{R}$  ќе биде  $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BE} = y(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$ . Бидејќи  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$ , добиваме

$$\vec{a} + y(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = x(\vec{a} + \vec{b})$$

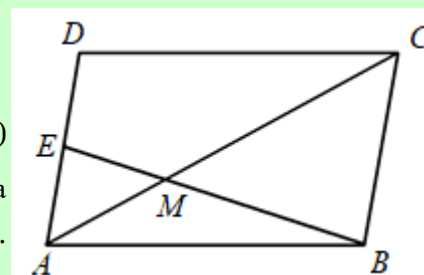
т.е.

$$(x - \frac{1}{2}y)\vec{b} + (x + y - 1)\vec{a} = \vec{0}. \quad (1)$$

Векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не се колинеарни, па од (1) следува  $x - \frac{1}{2}y = 0$  и  $x + y - 1 = 0$ , од каде што добиваме  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ .

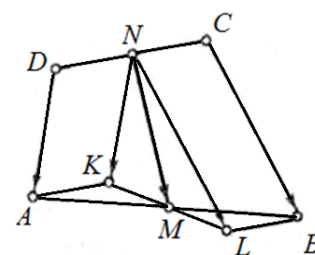
Значи,  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$ , т.е.  $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ , од каде

што следува  $\overline{AM} : \overline{MC} = 1 : 2$ . Слично, од  $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$  добиваме  $\overline{BM} : \overline{ME} = 2 : 1$ .



## Задачи

- Нека  $M$  и  $N$  се средини на страните  $AB$  и  $DC$  на четириаголникот  $ABCD$ . Докажи дека  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ .
- Докажи дека средините на страните на произволен четириаголник се темиња на паралелограм.
- Докажи дека средната линија на трапезот е паралелна со неговите основи и е еднаква на нивниот полусбир.
- Нека  $T$  е тежиште на триаголникот  $ABC$  и  $O$  е произволна точка. Докажи дека  $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ .
- Нека точките  $M$  и  $N$  се средини на страните  $AB$  и  $DC$  на четириаголникот  $ABCD$  и нека  $K$  и  $L$  се точки, такви што  $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{DA}$  и  $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{CB}$  (види цртеж). Докажи дека точката  $M$  е средина на отсечката  $KL$ .
- Нека  $ABCD$  е паралелграм. Точката  $P$  припаѓа на страната  $CD$  и е таква што  $\overline{DP} : \overline{PC} = 1 : 2$ . Ако  $AC \cap BP = \{M\}$ , определи го односот  $\overline{AM} : \overline{MC}$ .
- Нека  $K$  е средина на тежишната линија  $CC_1$  на  $\triangle ABC$  и нека  $AK \cap BC = \{M\}$ . Определи го односот  $\overline{CM} : \overline{MB}$ .
- Нека  $K$  и  $L$  се соодветно точки на страната  $AD$  и дијагоналата  $AC$  на паралелограмот  $ABCD$ , такви што  $\overline{AK} : \overline{KD} = 1 : 3$  и  $\overline{AL} : \overline{LC} = 1 : 4$ . Докажи дека точките  $K, L$  и  $B$  се колинеарни.



## 4.2 Сличност

### 4.2.1 Пропорционални отсечки. Талесова теорема

Како што знаеме, размер е количник  $a:b$  (или  $\frac{a}{b}$ ) на два неименувани броја или на две еднородни величини кои се мерат со иста мерна единица, а ако два размери  $a:b$  и  $c:d$  се еднакви, тогаш равенството  $a:b = c:d$  е пропорција.

**Дефиниција 1.** Ако величините  $a, b, c$  и  $d$  се должини на отсечки и ако  $a:b = c:d$ , тогаш за отсечките  $a, b, c$  и  $d$  велиме дека се *пропорционални*.

Вредноста  $k$  на еднаквите размери  $a:b$  и  $c:d$  на паровите пропорционални отсечки  $a, b$  и  $c, d$  ја нарекуваме коефициент на *пропорционалност*.

Секој член на пропорцијата  $a:b = c:d$  го нарекуваме *четврта (геометриска) пропорционала* на другите три члена.

**Пример 1.** а) Географската карта е нацртана во размер 1:1000000. Колку е по воздушната линија растојанието од Битола до Охрид, ако на географската карта тоа растојание е еднакво на 5,5 cm?

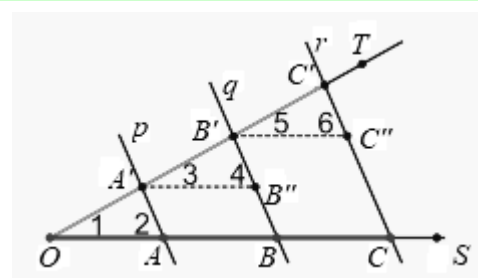
б) Определи ја должината на четвртата пропорционала  $x$  на отсечките  $a = 6\text{ cm}$ ,  $b = 8\text{ cm}$  и  $c = 12\text{ cm}$  во пропорцијата  $a:b = x:c$ .

**Решение.** а) Ако бараното растојание го означиме со  $x$ , тогаш  $1:1000000 = 5,5:x$ , од каде добиваме  $x = 1000000 \cdot 5,5\text{ cm} = 55\text{ km}$ .

б) Имаме,  $bx = ac$ , т.е.  $x = \frac{ac}{b} = \frac{6 \cdot 12}{8} = 9\text{ cm}$ .

**Пример 2.** Даден е  $\angle SOT$  и нека точките  $A, B, C$  лежат на кракот  $OS$  и се такви што  $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC}$ . Низ точките  $A, B, C$  се повлечени паралелни прави  $p, q, r$  кои кракот  $OT$  го сечат во точките  $A', B', C'$ . Докажи дека  $\overline{OA'} = \overline{A'B'} = \overline{B'C'}$ .

**Решение.** Низ точките  $A'$  и  $B'$  повлекуваме прави паралелни на правата  $OS$ , кои правите  $q$  и  $r$  ги сечат во точките  $B''$  и  $C''$ . При ознаки како на цртежот, од својствата на аглиите на трансферзалата следува  $\angle 1 = \angle 3$  и  $\angle 2 = \angle 4$ . Понатаму,  $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{A'B''}$ , па од признакот АСА следува дека триаголниците  $OAA'$  и  $A'B''B'$  се складни, па затоа  $\overline{OA'} = \overline{A'B'}$ .



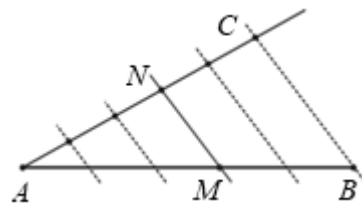
На потополно ист начин се докажува дека  $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$ .

Аналогно се докажува следнава теорема за еднакви отсечки на краците на еден агол. Обиди се самостојно истата да ја докажеш!

**Теорема 1.** Ако на едниот крак на даден агол се нанесени еднакви отсечки и низ нивните краеве се повлечени паралелни прави што го сечат другиот крак на аголот, тогаш тие прави отсекуваат и на другиот крак меѓусебно еднакви отсечки.

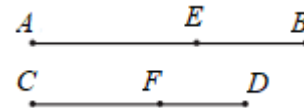
**Пример 3.** Дадена отсечка  $AB$  подели ја во однос 3:2.

**Решение.** Во точката  $A$  повлекуваме полуправа и на неа нанесуваме пет отсечки со должина  $1\text{cm}$  и точките  $N$  и  $C$  се такви што  $\overline{AC} = 5\text{cm}$ ,  $\overline{AN} = 3\text{cm}$ . Ја повлекуваме правата  $BC$  и низ точката  $N$  повлекуваме права паралелна на правата  $BC$ , која ја сече отсечката  $AB$  во точката  $M$ . Сега, од теоремата 1 следува дека  $\overline{AM} : \overline{MB} = 3 : 2$ .



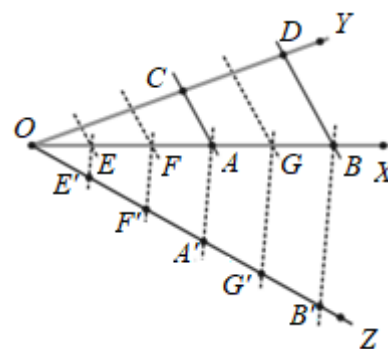
Конструкцијата дадена во пример 3 се нарекува *поделба на отсечка во даден однос*.

Отсечката  $AB$  на цртежот со точката  $E$  е поделена во однос  $3 : 2$ . Исто така, отсечката  $CD$  со точката  $F$  е поделена во истиот однос  $3 : 2$ . Според тоа, важи  $\overline{AE} : \overline{EB} = 3 : 2 = \overline{CF} : \overline{FD}$ . Затоа велиме дека отсечките  $AB$  и  $CD$  се поделени пропорционално. Во врска со ова ја имаме следнава дефиниција.



**Дефиниција 2.** За две отсечки велиме дека *се поделени пропорционално*, ако односот на деловите на едната отсечка формира пропорција со односот на деловите на другата отсечка.

**Пример 4.** Даден е конвексен  $\angle XOY$  и на него точки  $B$  и  $D$ . Повлекуваме полуправа  $OZ$  и на неа земаме точки  $E', F', A', G', B'$  такви што  $\overline{OE'} = \overline{E'F'} = \overline{F'A'} = \overline{A'G'} = \overline{G'B'}$ . Низ овие точки повлекуваме прави паралелни со правата  $BB'$  кои кракот  $OX$  редоследно го сечат во точките  $E, F, A, G$ . Од теоремата 1 следува  $\overline{OE} = \overline{EF} = \overline{FA} = \overline{AG} = \overline{GB}$  и  $\overline{OA} : \overline{AB} = 3 : 2$ . Сега низ точката  $A$  повлекуваме права паралелна со правата  $BD$  која кракот  $OY$  го сече во точката  $C$  и притоа важи  $\overline{OA} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CD} = 3 : 2$ .

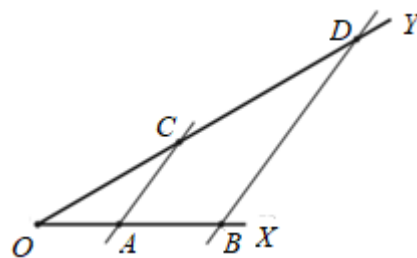


Во пример 4 краците на  $\angle XOY$  ги пресекуваме со паралелните прави  $AC$  и  $BD$  и добиваме дека важи  $\overline{OA} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CD} = 3 : 2$ . Последното не наведува на заклучокот дека важи и следново поопшто тврдење.

**Теорема 2 (Талесова теорема).** Ако краците на еден агол  $\angle XOY$  се пресечат со две паралелни прави, тогаш отсечките што се добиени на едниот крак се пропорционални со соодветните отсечки на другиот крак, т.е. ако  $AC \parallel BD$ , тогаш  $\overline{OA} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CD}$ .

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Ако количникот  $\overline{OA} : \overline{AB}$  е рационален број  $\frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , тогаш постои отсечка која  $m$  пати се содржи во отсечката  $OA$  и  $n$  пати се содржи во отсечката  $AB$ . Сега доказот на теоремата следува од теоремата 1 (Зошто?).

Ако количникот  $\overline{OA} : \overline{AB}$  е ирационален број, тогаш доказот на теоремата е покомплициран и истиот нема да го презентираме.



**Последица 1.** Ако краците на еден агол  $\angle XOY$  се пресечат со две паралелни прави, тогаш отсечките што ги отсекуваат овие прави на краците на аголот се пропорционални меѓу себе, т.е. ако  $AC \parallel BD$ , тогаш  $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OC} : \overline{OD}$ .

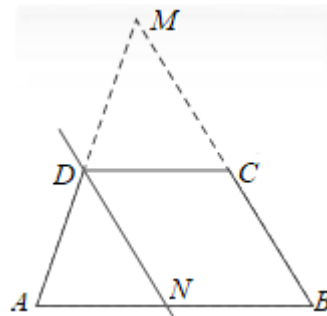
**Доказ.** Од Талесовата теорема следува  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ . Сега од својствата на пропорциите (теорема 1.43) добиваме  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA} + \overline{AB}}{\overline{OC} + \overline{CD}}$ , т.е.  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$ . Последното равенство е еквивалентно со равенството  $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OC} : \overline{OD}$ , кое требаше да го докажеме.

**Пример 5.** Нека краците  $AD$  и  $BC$  на трапезот  $ABCD$  се сечат во точката  $M$ . Ако  $\overline{AB} = 10\text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 4\text{ cm}$ ,  $\overline{AD} = 3\text{ cm}$ , определи ја должината на отсечката  $DM$ .

**Решение.** Низ точката  $D$  повлекуваме права паралелна на  $BC$  која основата  $AB$  ја сече во точката  $N$ . Четириаголникот  $NBCD$  е паралелограм, па затоа  $\overline{NB} = \overline{CD} = 4\text{ cm}$ . Значи,

$$\overline{AN} = \overline{AB} - \overline{NB} = 10 - 4 = 6\text{ cm}.$$

Сега, од Талесовата теорема следува  $\overline{AN} : \overline{NB} = \overline{AD} : \overline{DM}$ , т.е.  $6 : 4 = 3 : \overline{DM}$ , па затоа  $\overline{DM} = 2\text{ cm}$ .



Важи и обратната теорема на Талесовата теорема.

**Теорема 3.** Ако две различни прави, од краците на еден агол, отсекуваат пропорционални отсечки, тогаш тие прави се паралелни.

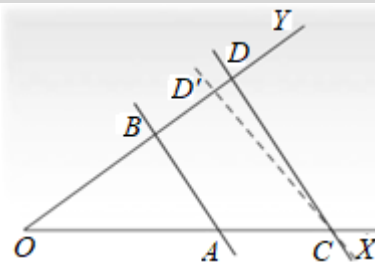
**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека правите  $AB$  и  $CD$  ги сечат краците на  $\angle XOY$  и нека важи

$$\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD}. \quad (1)$$

Низ точката  $C$  повлекуваме права паралелна на правата  $AB$  и нека истата го сече кракот  $OY$  во точката  $D'$ . Сега, од последицата 1 следува равенството

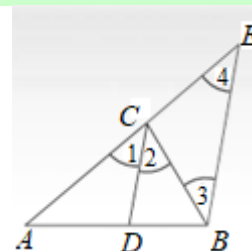
$$\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD'}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува  $\overline{OB} : \overline{OD} = \overline{OB} : \overline{OD'}$ , па затоа  $\overline{OD} = \overline{OD'}$ . Од последното равенство следува  $D' \equiv D$ , што значи  $AB \parallel CD$ .



**Пример 6.** Докажи дека симетралата на секој внатрешен агол на триаголникот ја разделува спротивната страна на отсечки кои што се пропорционални на страните кои го формираат тој агол.

**Решение.** Нека  $CD$  е симетрала на  $\angle ACB$ . Низ темето  $B$  повлекуваме права паралелна на  $CD$  која правата  $AC$  ја сече во точката  $E$ . Сега правите  $AC$  и  $BC$  се трансферзали на паралелните прави  $CD$  и  $BE$ , па затоа  $\angle 4 = \angle 2 = \angle 3$ . Значи, триаголникот  $BCE$  е рамнокрак, па затоа  $\overline{BC} = \overline{EC}$ . Сега, од Талесовата теорема следува  $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{CE}$ , т.е.  $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{BC}$ , што и требаше да се докаже.

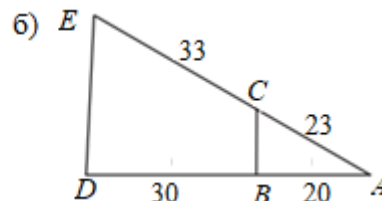
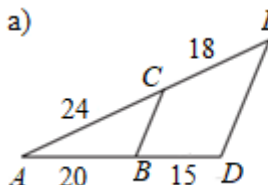


## Задачи

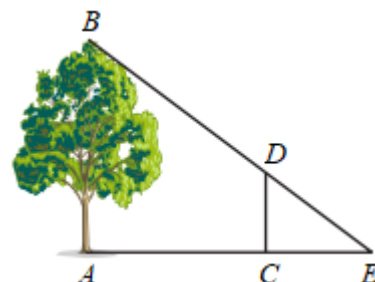
25. Воздушното растојание од меѓу градовите  $A$  и  $B$  е  $280\text{ km}$ . Колку ќе биде ова растојание на карта која е нацртана во размер  $1:2500000$ ?

26. Фудбалско игралиште чии димензии се  $100\text{ m}$  и  $90\text{ m}$  е нацртано на план со размер  $1:10000$ . Определи ги димензиите на игралиштето на тој план.

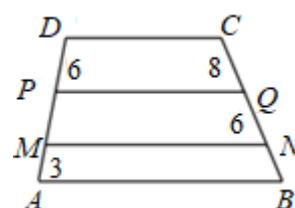
27. На секој од цртежите се означени должините на четири отсечки:  $AB, BD, AC$  и  $DE$ . Дали важи  $BC \parallel DE$ . Образложи го одговорот.



28. Определи ја височината  $AB$  на дрвото кое е прикажано на цртежот, ако должината на неговата сенка е  $AE$  е еднаква на  $20\text{ m}$ , а во истиот момент сенката на стапот  $CD$  кој е долг  $1\text{ m}$  е со должина  $1,4\text{ m}$ .



29. Во трапезот  $ABCD$  важи  $MN \parallel PQ \parallel AB$ . При ознаки како на цртежот определи ги должините на краците  $AD$  и  $BC$ . Одговорот да се образложи!

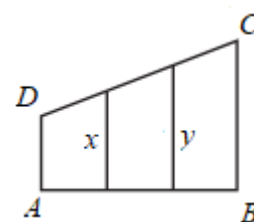


30. Нацртај три отсечки  $a, b, c$ . Потоа конструирај отсечка  $x$ , таква што:

- а)  $x:a = b:c$                       б)  $a:x = b:c$ ,                      в)  $a:b = x:c$ .

31. Нацртај отсечки  $a$  и  $b$ . Потоа конструирај отсечка  $x = \frac{a^2}{b}$ .

32. Кракот  $CD$  на трапезот  $ABCD$  со основи  $\overline{AD} = 8\text{ cm}$  и  $\overline{BC} = 20\text{ cm}$  е поделена на три еднакви делови и низ делбените точки се повлечени прави паралелни со основите (како на цртежот). Определи ги должините на означените отсечки  $x$  и  $y$ .



## 4.2.2 Слични триаголници. Признаци за сличност

Во претходната лекција ги разгледавме пропорционалните отсечки и во врска со нив Талесовата теорема и нејзината обратна теорема. Сега ќе дефинираме сличност на два триаголника и ќе ги докажеме признаците за сличност.

**Дефиниција 3.** За два триаголника  $ABC$  и  $A'B'C'$  ќе велиме дека се *слични* ако имаат еднакви агли. Притоа пишуваме  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

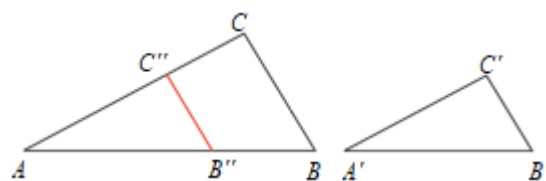
За еднаквите агли на два слични триаголника велиме дека се *соодветни агли*, а страните кои се наоѓаат наспроти еднаквите агли ги нарекуваме *соодветни страни*.

**Пример 7.** Два агли на триаголникот  $ABC$  се  $47^\circ$  и  $77^\circ$ , а два агли на триаголникот  $A'B'C'$  се  $77^\circ$  и  $56^\circ$ . Дали овие триаголници се слични.

**Решение.** Третиот агол на триаголникот  $ABC$  е еднаков на  $180^\circ - (47^\circ + 77^\circ) = 56^\circ$ , а третиот агол на  $A'B'C'$  е  $180^\circ - (56^\circ + 77^\circ) = 47^\circ$ . Значи, двата триаголника имаат еднакви агли, па затоа се слични.

**Теорема 4.** Ако  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , тогаш соодветните страни на триаголниците се пропорционални, т.е. ако  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  $\angle C = \angle C'$ , тогаш  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ .

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека  $B''$  и  $C''$  се точки на страните  $AB$  и  $AC$  на  $\triangle ABC$  такви што  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$  и  $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ . Според признакот САС имаме  $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$ , па затоа  $\angle B'' = \angle B' = \angle B$ . Но,  $AB$  е трансверзала на



$BC$  и  $B''C''$ , па затоа  $BC \parallel B''C''$ . Сега, од последица 1 следува  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$ , па затоа  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ . Аналогно се докажува дека  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ . Значи,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k.$$

Бројот  $k$  е позитивен реален број кој го нарекуваме *коефициент на пропорционалност (сличност)*.

**Пример 8.** Страните на  $\triangle ABC$  се:  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 15 \text{ cm}$ ,  $\overline{AC} = 12 \text{ cm}$ , а страните на  $\triangle PQR$  се:  $\overline{PQ} = 8 \text{ cm}$ ,  $\overline{QR} = 15 \text{ cm}$ ,  $\overline{PR} = 20 \text{ cm}$ . Дали овие триаголници се слични?

**Решение.** Ако страните на триаголниците ги подредиме по должина добиваме

$$\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC} \text{ и } \overline{PQ} < \overline{QR} < \overline{PR}.$$

Сега

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PR}} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{QR}} = \frac{4}{5} \neq \frac{3}{4},$$

па затоа овие триаголници не се слични.

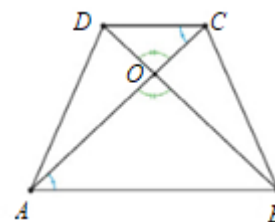
Сега ќе разгледаме неколку теореми кои се познати како признаци за сличност.

**Теорема 5 (признак АА).** Два триаголници се слични ако имаат по два еднакви агли.

**Доказ.** Ако два триаголника имаат по два еднакви агли, тогаш се еднакви и нивните трети агли, што според дефиниција 3 значи дека тие се слични.

**Пример 9.** Нека  $AB$  и  $CD$  се основите на трапезот  $ABCD$  и нека  $O$  е пресекот на неговите дијагонали. Докажи дека  $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{AO} : \overline{CO}$ .

**Решение.** За триаголниците  $ABO$  и  $CDO$  важи  $\angle AOB = \angle COD$  (накрсни агли) и  $\angle OAB = \angle OCD$  (агли со паралелни краци). Сега од теоремата 5 следува дека овие триаголници се слични. Конечно, од теоремата 4 следува дека  $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{AO} : \overline{CO} = \overline{BO} : \overline{DO}$ .



Од теорема 5 следува точноста на следнава последица.

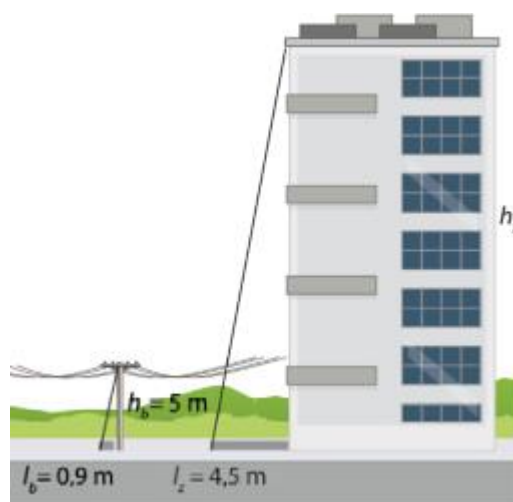
**Последица 2.** а) Два рамнокраки триаголници се слични ако им се еднакви агли при врвовите или агли при основата.

б) Два правоаголни триаголници се слични ако имаат по еден еднаков остар агол.

**Пример 10.** Колку е висока зградата на Муамер, ако должината на нејзината сенка е  $4,5\text{ m}$ , а истовремено должината на сенката на бандерата која е висока  $5\text{ m}$  е еднаква на  $90\text{ cm}$ ?

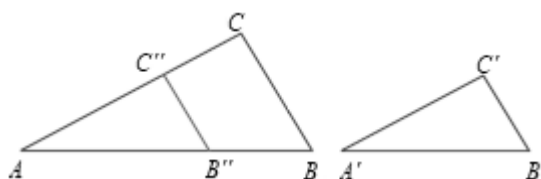
**Решение.** Нека  $h_b$  е височината на бандерата,  $h_z$  е височината на зградата,  $l_b$  е должината на сенката на бандерата и  $l_z$  е должината на сенката на зградата. Важи  $l_b = 90\text{ cm} = 0,9\text{ m}$ . Од сличноста на правоаголните триаголници (според признакот АА, објасни зошто) важи  $\frac{l_b}{l_z} = \frac{h_b}{h_z}$ . Според тоа,

$$h_z = \frac{h_b}{l_b} l_z = 25\text{ m}.$$



**Теорема 6 (признак САС).** Ако два триаголника имаат два пара пропорционални страни и ако агли зафатени со овие два пара страни се еднакви, тогаш триаголниците се слични.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека за триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C'$  важи  $\angle A = \angle A'$  и  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ . Нека  $B''$  и  $C''$  се точки на страните  $AB$  и  $AC$  на  $\triangle ABC$  такви што  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$  и  $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ . Тогаш според



признакот САС имаме  $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$ . Значи,  $\frac{AB}{AB''} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{AC''}$ , па од обратната Талесова теорема следува дека  $BC \parallel B''C''$ . Според тоа,  $\angle B''$  и  $\angle B$  се агли со паралелни краци, па затоа  $\angle B'' = \angle B$ . Но,  $\angle B'' = \angle B'$ , па затоа  $\angle B' = \angle B$ . Конечно, бидејќи  $\angle A = \angle A'$  и  $\angle B' = \angle B$  од теоремата 5 следува дека триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C'$  се слични.

**Последица 3.** Два правоаголни триаголника се слични ако катетите на едниот се пропорционални со катетите на другиот триаголник.

**Пример 11.** Правоаголниот  $\triangle ABC$  има катети со должина  $\overline{AB} = 10\text{ cm}$  и  $\overline{AC} = 25\text{ cm}$ , а правоаголниот  $\triangle A'B'C'$  има катети со должини  $\overline{A'B'} = 12\text{ cm}$  и  $\overline{A'C'} = 30\text{ cm}$ . Дали овие триаголници се слични.

**Решение.** За катетите на двата триаголника важи  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \frac{25}{30} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ , па од признакот АСА следува дека  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

**Теорема 7 (признак ССС).** Два триаголника се слични ако соодветните страни им се пропорционални.

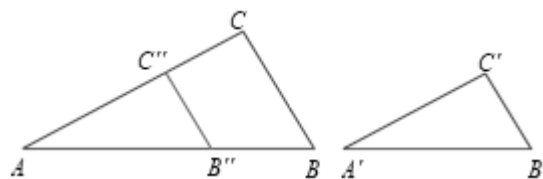


**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).**

Нека за  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$  важи

$$\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{CA}}{C'A'} = k.$$

Нека, на пример  $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ . На страната  $AB$  зе-



маме точка  $B''$  таква што  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$  и низ  $B''$  повлекуваме права паралелна со  $BC$ , која права ја сече страната  $AC$  во точката  $C''$ . Сега, од последица 1 следува  $\frac{\overline{AB}}{AB''} = \frac{\overline{AC}}{AC''}$ , т.е.  $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{AC}}{AC''}$  и како  $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{AC}}{A'C'}$ , добиваме  $\frac{\overline{AC}}{AC''} = \frac{\overline{AC}}{A'C'}$ . Од последното равенство следува  $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ .

Понатаму, според признакот АСА добиваме  $\triangle ABC \sim \triangle AB''C''$ , па затоа

$$\frac{\overline{BC}}{B''C''} = \frac{\overline{AB}}{AB''} = \frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'},$$

од каде следува  $\overline{B''C''} = \overline{B'C'}$ .

Значи,  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$  и  $\overline{B''C''} = \overline{B'C'}$ , па затоа  $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$ . Според тоа,  $\triangle ABC \sim \triangle AB''C''$  и  $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$ , па затоа  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'' = \angle B'$ ,  $\angle C = \angle C'' = \angle C'$ , од каде следува  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ .

**Последица 4.** Два рамнокраки триаголника се слични ако основата и кракот на едниот се пропорционални со основата и кракот на другиот триаголник.

**Пример 12.** Докажи дека триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C'$  имаат еднакви агли ако  $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ ,  $\overline{CA} = 10 \text{ cm}$  и  $\overline{A'B'} = 14 \text{ cm}$ ,  $\overline{B'C'} = 28 \text{ cm}$ ,  $\overline{C'A'} = 35 \text{ cm}$ .

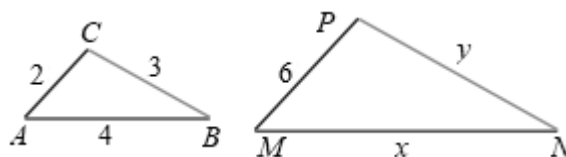
**Решение.** Имаме  $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{CA}}{C'A'} = \frac{2}{7}$ , па од теоремата 7 следува дека  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ .

Сега од дефиницијата 3 следува дека триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C'$  имаат еднакви агли.

**Задачи**

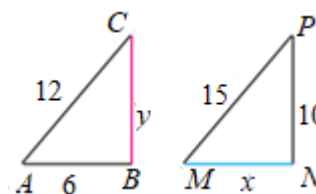
33. На цртежот важи  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ .

- Запиши ги соодветните страни.
- Запиши ги соодветните агли.
- Опреди го коефициентот на сличност.
- Опреди ги  $x$  и  $y$ .



34. На цртежот важи  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ .

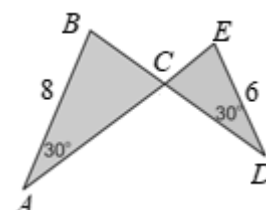
- Опреди го коефициентот на сличност,
- Опреди ги  $x$  и  $y$ ,
- Пресметај ги периметрите на двата триаголника и најди го нивниот однос.



35. Нека  $M, N, P$  се средините на страните на  $\triangle ABC$ . Докажи дека  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ .

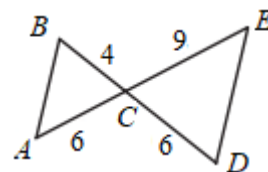
36. На цртежот е дадено  $\angle BAC = \angle CDE = 30^\circ$ .

- Докажи дека  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ .
- Опреди го коефициентот на сличност.
- Во кој однос точката  $C$  ја дели отсечката  $AE$ .





37. Докажи дека триаголниците  $ABC$  и  $DEC$  прикажани на цртежот се слични. Кој признак за сличност го употреби во доказот?

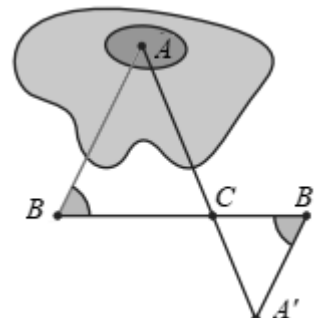


38. Аголот при врвот на еден рамнокрак триаголник е  $70^\circ$ , а аголот при основата на друг рамнокрак триаголник е  $55^\circ$ . Докажи дека овие триаголници се слични.

39. Точката  $A$  се наоѓа на остров во езерото, а точката  $B$  е на брегот на езерото. Како ќе го определиш растојанието меѓу точките  $A$  и  $B$ .

*Упатство.* Земи произволна точка  $C$  и конструирај го прикажаниот цртеж. Докажи дека триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C$  се слични и потоа користејќи ја докажаната сличност пресметај го растојанието меѓу точките  $A$  и  $B$ .

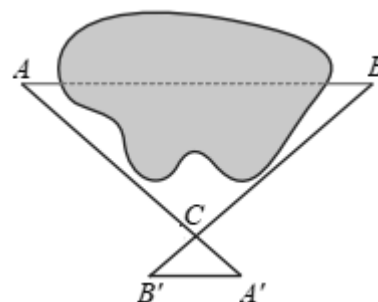
Опреди го растојанието меѓу  $A$  и  $B$  ако  $\overline{BC} = 40\text{ m}$ ,  $\overline{CB'} = 5\text{ m}$  и  $\overline{B'A'} = 13\text{ m}$ .



40. Точките  $A$  и  $B$  се наоѓаат на два спротивни брега на едно езеро. Како ќе го определиш растојанието меѓу точките  $A$  и  $B$ .

*Упатство.* Земи произволна точка  $C$  и определи точки  $A'$  и  $B'$  така што  $\overline{AC} = n\overline{A'C}$  и  $\overline{BC} = n\overline{B'C}$ . Докажи дека триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C$  се слични и потоа користејќи ја докажаната сличност пресметај го растојанието меѓу точките  $A$  и  $B$ .

Опреди го растојанието меѓу  $A$  и  $B$  ако  $\overline{AC} = 40\text{ m}$ ,  $\overline{CA'} = 5\text{ m}$  и  $\overline{B'A'} = 13\text{ m}$ .



41. Ако две тетиви на дадена кружница се сечат, тогаш производот на деловите на едната тетива е еднаков на производот на деловите на другата тетива. Докажи!
42. Основите на трапезот се долги  $13\text{ m}$  и  $24\text{ m}$ . Опреди ја должината на висината на трапезот, ако продолженијата на краците се сечат на растојание  $9\text{ m}$  од горната основа.
43. Низ точка  $S$  што лежи надвор од кружницата  $k$  минуваат прави  $a$  и  $b$ , кои ја сечат кружницата  $k$  соодветно во точките  $A, B$  и  $C, D$ . Докажи дека важи равенството  $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$ .

### 4.3.3 Својства на сличните триаголници. Евклидови и Питагорова теорема

Како што знаеш должините на страните на два складни триаголника се еднакви, па затоа и нивните параметри се еднакви. Но, кај слични триаголници  $ABC$  и  $A'B'C'$  должините на страните се пропорционални, т.е. точни се равенствата

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k,$$

каде  $k$  е коефициентот на сличност (пропорционалност). Сега, од својствата на продолжената пропорција, т.е. од теорема 1.43 следува

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k, \text{ т.е. } \frac{L}{L'} = k.$$

Според тоа, точна е следнава теорема.

**Теорема 8.** Периметрите на два слични триаголника се однесуваат како нивните соодветни страни.

**Пример 13.** Должините на најмалите страни на два слични триаголника се еднакви на 9 cm и 6 cm, а разликата на нивните периметри е еднаква на 15 cm. Определи ги периметрите на овие триаголници.

**Решение.** Коэффициентот на сличност на двата триаголника е  $k = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ . Сега, од теоремата 8 следува  $\frac{L}{L'} = \frac{3}{2}$ , т.е.  $L = \frac{3}{2}L'$ . Но, според условот на задачата важи  $L - L' = 15$  и ако замениме за  $L$  добиваме  $\frac{3}{2}L' - L' = 15$ , т.е.  $L' = 30 \text{ cm}$ . Конечно,  $L = L' + 15 = 45 \text{ cm}$ .

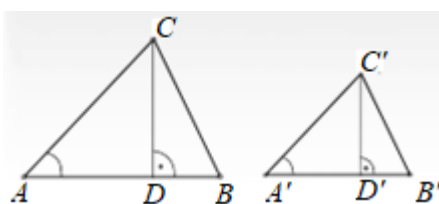
Во претходната теорема видовме дека односот на периметрите на два слични триаголници е еднаков на односот на соодветните страни. Но, што станува со другите елементи на триаголниците. Одговорот на ова прашање го дава следнава теорема.

**Теорема 9.** Соодветните

а) висини, б) тежишни линии, в) симетрали на агли,

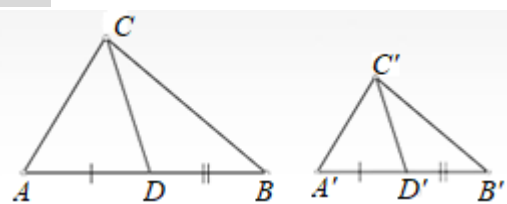
на два слични триаголника се пропорционални на соодветните страни.

**Доказ.** а) Нека триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C'$  се слични и нека  $CD$  и  $C'D'$  се висините повлечени од темињата  $C$  и  $C'$ , соодветно. Имаме  $\angle CAD = \angle C'A'D'$ , па од последицата 2 следува дека  $\triangle CAD \sim \triangle C'A'D'$ . Според тоа,  $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ .



б) Нека  $CD$  и  $C'D'$  се тежишните линии повлечени од темињата  $C$  и  $C'$ , соодветно во сличните триаголници  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Имаме,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{\frac{1}{2}\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

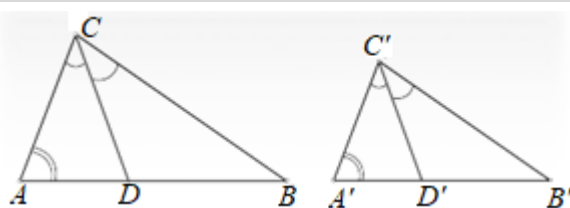


и како  $\angle CAD = \angle C'A'D'$ , од теоремата 6 следува  $\triangle CAD \sim \triangle C'A'D'$ . Според тоа,  $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ .

в) Нека  $CD$  и  $C'D'$  се симетралите на аглите повлечени во темињата  $C$  и  $C'$ , соодветно во сличните триаголници  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Тогаш

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle A'C'B' = \angle A'C'D'$$

и како  $\angle CAD = \angle C'A'D'$ , од теоремата 5 следува дека  $\triangle CAD \sim \triangle C'A'D'$ . Според тоа,  $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ .



**Пример 14.** Нека  $ABC$  и  $A'B'C'$  се два слични правоаголни триаголника. Докажи дека радиусите на опишаните кружници се однесуваат како соодветните страни?

**Решение.** Нека  $R$  и  $R'$  се радиусите на опишаните кружности околу сличните триаголници  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Тогаш  $R = \frac{c}{2}$  и  $R' = \frac{c'}{2}$ , каде  $c$  и  $c'$  се хипотенузите на триаголниците, т.е.  $R$  и  $R'$  се еднакви на тежишните линии на триаголниците. Според тоа,  $R : R' = \frac{c}{2} : \frac{c'}{2} = c : c'$ , што и требаше да се докаже.

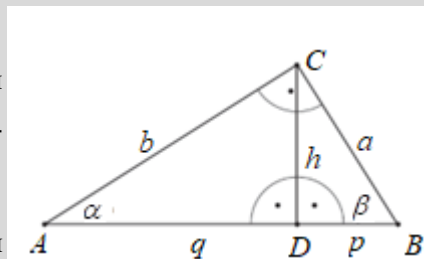
Претходно видовме дека два правоаголних триаголника се слични ако имаат по еден еднаков остар агол. Користејќи го ова својство ќе докажеме неколку својства на правоаголниот триаголник.

**Теорема 10 (Евклид).** Нека  $ABC$  е правоаголен триаголник со прав агол во темето  $C$ ,  $D$  е подножјето на висината повлечена од темето  $C$  и  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{CD} = h$ ,  $\overline{BD} = p$  и  $\overline{AD} = q$ . Тогаш важи  $a^2 = pc$ ,  $b^2 = qc$ ,  $h^2 = pq$ .

**Доказ.** За правоаголните триаголници  $ABC$  и  $CBD$  важи  $\angle CBD = \angle ABC$ , па затоа тие се слични. Значи,  $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$ , односно  $a^2 = pc$ .

За правоаголните триаголници  $ABC$  и  $ACD$  важи  $\angle CAD = \angle BAC$ , па затоа тие се слични. Значи,  $\frac{b}{q} = \frac{c}{b}$ , односно  $b^2 = qc$ .

Имаме  $\triangle ABC \sim \triangle CBD$  и  $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ , следува  $\triangle ACD \sim \triangle CBD$  (Зошто?). Според тоа,  $\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$ , односно  $h^2 = pq$ .



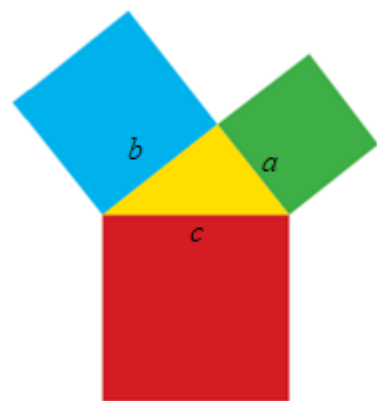
Ако ги собереме равенствата  $a^2 = pc$  и  $b^2 = qc$ , а потоа искористиме дека  $p + q = c$ , добиваме

$$a^2 + b^2 = pc + qc = c(p + q) = c \cdot c = c^2.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

**Теорема 11 (Питагора).** Кај секој правоаголен триаголник плоштината на квадратот над хипотенузата е еднаква на збирот на плоштините на квадратите над катетите.

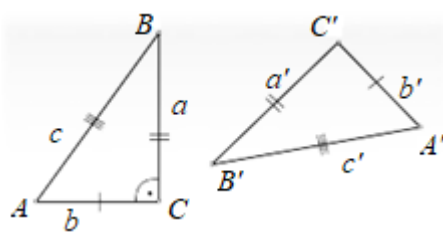
За Питагоровата теорема важи и нејзината обратна теорема.



**Теорема 12.** Ако квадратот над една страна на еден триаголник е еднаков на збирот на квадратите над другите две страни, тогаш тој триаголник е правоаголен.

**Доказ (За оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека за  $\triangle ABC$  важи равенството  $c^2 = a^2 + b^2$ . Конструираме правоаголен  $\triangle A'B'C'$ ,  $\angle C' = 90^\circ$  со катети  $a' = a$  и  $b' = b$  и хипотенуза  $c'$ . Од Питагоровата теорема следува  $c'^2 = a'^2 + b'^2$ , па затоа  $c'^2 = c^2$ , т.е.  $c' = c$ .

Според тоа,  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  (признак ССС), па како  $\triangle A'B'C'$  е правоаголен заклучуваме дека и  $\triangle ABC$  е правоаголен.



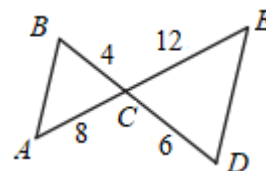
## Задачи

44. Должините на најмалите страни на два слични триаголника се еднакви на  $9\text{ cm}$  и  $6\text{ cm}$ , а збирот на нивните периметри е еднаква на  $75\text{ cm}$ . Определи ги периметрите на овие триаголници.
45. Страните  $a, b, c$  на еден триаголник  $ABC$  се однесуваат како  $3:4:6$ . Определи ги страните  $a', b', c'$  на триаголникот  $A'B'C'$  со периметар  $L' = 104\text{ cm}$ , којшто е сличен на триаголникот  $ABC$ .
46. Нека  $ABC$  и  $A'B'C'$  се два слични триаголника чии периметри се однесуваат како  $2:3$ . Определи го односот на збиравите на тежишните линии на двата триаголника.
47. Конструирај отсечка со должина  $\sqrt{3}\text{ cm}$ .
48. Едната катета на правоаголниот триаголник е  $12\text{ cm}$ , а односот на другата катета и висината над хипотенузата е  $5:3$ . Определи ги непознатите страни на триаголникот.
49. Темето  $A$  на правоаголникот  $ABCD$  е оддалечено  $12\text{ cm}$  од дијагоналата  $BD$ . Ако  $\overline{AB} = 15\text{ cm}$  пресметај го периметарот на правоаголникот.
50. Подножјето на нормалата од темето  $A$  на правоаголникот  $ABCD$  на дијагоналата  $BD$  ја дели дијагоналата во однос  $1:3$ . Ако  $\overline{AB} = 12\text{ cm}$  пресметај ја должината на страната  $BC$ .
51. Подножјето на висината на хипотенузата е оддалечено од катетите на правоаголниот триаголник  $9\text{ cm}$  и  $12\text{ cm}$ . Определи ги должините на катетите на овој триаголник.
52. Симетралата на внатрешниот агол во темето  $A$  на рамнокракиот триаголник  $ABC$ , ( $\overline{AC} = \overline{BC}$ ) го сече кракот во точката  $D$ . Ако триаголниците  $ABC$  и  $BDA$  се слични, определи ги внатрешните агли на триаголникот  $ABC$ .
53. Полуправата која го дели аголот при врвот на рамнокракиот триаголник  $ABC$ , ( $\overline{AC} = \overline{BC}$ ) во однос  $1:2$  ја сече основата во точката  $D$ . Ако триаголниците  $ABC$  и  $CAD$  се слични, определи ги внатрешните агли на триаголникот  $ABC$ .

## Провери го своето знаења 4

1. На правата  $p$  се дадени точки  $A$  и  $B$ . Дали на  $p$  постои точка  $M$  таква што  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .
2. Со помош на вектори докажи дека средната линија на трапезот е паралелна со неговите основи и е еднаква на нивниот полузбир.
3. Нека  $K$  е средина на тежишната линија  $CC_1$  на  $\triangle ABC$  и нека  $AK \cap BC = \{M\}$ . Определи го односот  $\overline{CM} : \overline{MB}$ .
4. Определи ја височината  $AB$  на дрвото кое е прикажано на цртежот, ако должината на неговата сенка е  $AE$  е еднаква на  $20\text{ m}$ , а во истиот момент сенката на стапот  $CD$  кој е долг  $1\text{ m}$  е со должина  $1,4\text{ m}$ .

5. Докажи дека триаголниците  $ABC$  и  $DEC$  прикажани на цртежот се слични. Кој признак за сличност го употреби во доказот?



6. Ако две тетиви на дадена кружница се сечат, тогаш производот на деловите на едната тетива е еднаков на производот на деловите на другата тетива. Докажи!
7. Едната катета на правоаголникот триаголник е  $12\text{ cm}$ , а односот на другата катета и висината над хипотенузата е  $5:3$ . Определи ги непознатите страни на триаголникот.
8. Триаголниците  $ABC$  и  $ADC$  имаат заедничка страна  $AC$ . Отсечките  $AD$  и  $BC$  се сечат во точка  $M$ , при што  $\angle ABC = \angle ADC = 40^\circ$ ,  $\overline{BD} = \overline{AB}$  и  $\angle AMC = 70^\circ$ . Определи ги аглиите  $\angle ABC$  и  $\angle ADC$ .

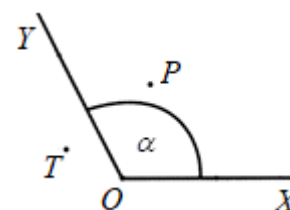
## 4.3 Тригонометрија

### 4.3.1 Агол, тригонометриски функции од остар агол

Во основното образование се запознаваме со поимот агол. Да се потсетиме!

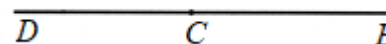
**Дефиниција 1.** Две полуправи  $OX$  и  $OY$  со заеднички почеток ја делат рамнината на два дела. Секој од овие делови заедно со двете полуправи се нарекува *агол*, во ознака  $\angle XOY$ .

Заедничката точка  $O$  на полуправите  $OX$  и  $OY$  ја нарекуваме *тема* на  $\angle XOY$ . Полуправите  $OX$  и  $OY$  ги нарекуваме *краци* на  $\angle XOY$ . Еден агол е напълно определен со точка  $P$  што не лежи на краците. Точката  $P$  што не лежи на краците ја нарекуваме *внатрешна точка*, а множеството внатрешни точки го нарекуваме *внатрешност* на аголот  $\angle XOY$ , а делот од рамнината кој не ја содржи  $P$  го нарекуваме *надворешност* на аголот  $\angle XOY$  (ја содржи точката  $T$ ).



Како што можеме да забележиме, со помош на точката  $P$  еднозначно се определени внатрешноста и надворешноста на аголот. Во натамошните разгледувања наместо да ја потенцираме точката  $P$  од дефиниција 1, за означување на внатрешноста на аголот ќе користиме кружен лак.

**Дефиниција 2.** За  $\angle DCE$  ќе велиме дека е *рамен агол*, ако полуправите  $CD$  и  $CE$  образуваат права. За аголот кој е половина од рамниот агол ќе велиме дека е *прав агол*.

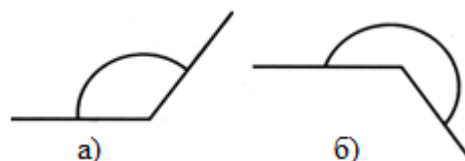


За аголот  $\alpha$  ќе велиме дека е *остар*, ако тој е помал од правиот агол, а ако е поголем од правиот агол и помал од рамниот агол, тогаш ќе велиме дека  $\alpha$  е *тан агол*.

Практичните потреби налагаат мерење на геометриските фигури, што значи и мерење на аглиите. Во основното образование се запознаваме со степенот, кој го означуваме со  $^\circ$ , како мерна единица за агол и истиот е еднаков на еден деведесетти дел од правиот агол. Исто така, вовед-

довме и помали единици од степенот за мерење на агли и тоа, минута и секунда кои ги означуваме со ' и ", соодветно. Притоа минутата ја дефинираваме како шеесетти дел од степенот, т.е.  $1^\circ = 60'$ , а секундата ја дефинираваме као шеесетти дел од минутата, т.е.  $1' = 60''$ .

**Дефиниција 3.** За аголот  $\alpha$  ќе велиме дека е *конвексен* ако тој е помал или еднаков на рамниот агол (цртеж а)), т.е. помал од или еднаков на  $180^\circ$ , а ако тој е поголем од рамниот агол го нарекуваме *конкавен* (цртеж б)).



**Пример 1. а)** Претвори го во минути аголот  $\alpha = 12^\circ 45'$ .

**б)** Претвори го во степени аголот  $\alpha = 45^\circ 15' 36''$ .

**Решение. а)** Степените ги претвораеме во минути и добиваме

$$\alpha = 12^\circ 45' = 12 \cdot 60' + 45' = 720' + 45' = 765'.$$

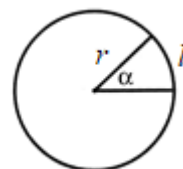
**б)** Прво секундите ги претвораеме во минути, а потоа минутите ги претвораеме во степени и добиваме

$$\alpha = 45^\circ + 15' + \left(\frac{36}{60}\right)' = 45^\circ + 15' + 0,6' = 45^\circ + 15,6' = 45^\circ + \left(\frac{15,6}{60}\right)^\circ = 45^\circ + 0,26^\circ = 45,26^\circ.$$

За мерење на аглите во математиката постои уште една мерна единица, која детално ќе ја објасниме при изучувањето на должина на лак на кружница, а овде истата ќе ја воведеме без детални објаснувања.

**Дефиниција 4.** Нека е дадена кружница  $k(O, r)$ . За централниот агол  $\alpha$  ќе велиме дека има големина од *еден радијан*, во ознака  $1 \text{ rad}$ , ако должината на припадниот кружен лак е еднаква на радиусот на кружницата.

Од дефиниција 4 следува дека, за да ја определиме големината на аголот  $\alpha$ , изразена во радијани, доволно е должината  $l$  на припадниот кружен лак да ја поделиме со радиусот на кружниот лак, т.е.  $\alpha = \frac{l}{r} \text{ rad}$ .



**Пример 2. а)** Најди ја големината на аголот  $\alpha$ , изразена во радијани, ако должината на кружниот лак соодветен на аголот е двапати поголема од радиусот.

**б)** Пресметај ја големината на правиот агол изразена во радијани.

**Решение. а)** Од условот на задачата имаме  $l = 2r$ , па затоа големината на аголот  $\alpha$  изразена во радијани е

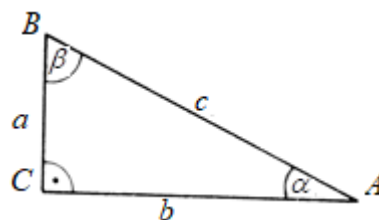
$$\alpha = \frac{l}{r} \text{ rad} = \frac{2r}{r} \text{ rad} = 2 \text{ rad}.$$

**б)** Како што знаеме, должината на кружницата со радиус  $r$  е еднаква на  $2\pi r$ , и како полниот агол е збир на четири прави агли добиваме дека должината на кружниот лак соодветен на правиот агол е  $l = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$ . Според тоа, големината на правиот агол изразена во радијани е

$$\alpha = \frac{l}{r} \text{ rad} = \frac{\frac{\pi r}{2}}{r} \text{ rad} = \frac{\pi r}{2r} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

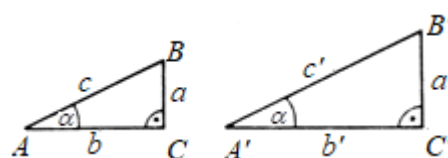
**Коментар 1.** Од пример 2 б) и фактот дека мерата на агол од  $0^\circ$  изразена во радијани е  $0rad$ , заклучуваме дека ако  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , тогаш  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , и обратно.

При изучувањето на правоаголниот триаголник видовме дека негови основни елементи се катетите  $a$  и  $b$ , хипотенузата  $c$  и остриите агли  $\alpha$  и  $\beta$ . При стандардно обележување на елементите на правоаголниот триаголник за аголот  $\alpha$  велиме дека е спротивен на катетата  $a$ , а за аголот  $\beta$  катетата  $a$  е налегната. Понатаму, бидејќи аголот при темето  $C$  е прав

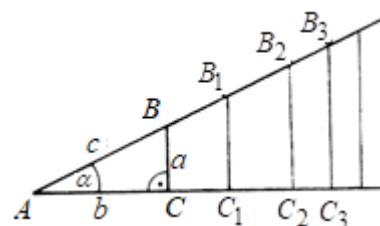


агол, од теоремата за збир на агли во триаголникот добиваме  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Исто така, видовме дека за страните на правоаголниот триаголник важи Питагоровата теорема, т.е.  $a^2 + b^2 = c^2$ , т.е. во правоаголен триаголник збирот на квадратите на катетите е еднаков на квадратот на хипотенузата.

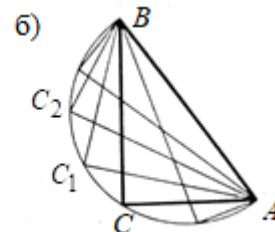
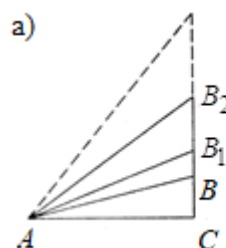
Како што знаеме два триаголници се слични, ако имаат еднакви агли. Бидејќи кај правоаголните триаголници едниот агол е прав агол, од  $\alpha + \beta = 90^\circ$  следува дека тие се слични ако имаат еднаков еден остар агол. Така, на пример, на цртежот триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C'$  се слични, што значи  $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ ,  $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$  и  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ .



Нека е даден правоаголниот триаголник  $ABC$  и преку темињата  $B$  и  $C$  да ги продолжиме краците на остриот агол  $\angle CAB$ . На кракот  $AC$  произволно избираме точки  $C_1, C_2, C_3, \dots$  и во овие точки повлекуваме прави нормални на  $AC$  кои го сечат кракот  $AB$  во точките  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , соодветно. Од претходно кажаното следува дека триаголниците  $ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, \dots$  се слични, што значи дека нивните соодветни страни се пропорционални. Така, ги имаме следните низи равенства



$$\begin{aligned} \frac{BC}{AB} &= \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \dots = \frac{a}{c} \\ \frac{AC}{AB} &= \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{AC_3}{AB_3} = \dots = \frac{b}{c} \\ \frac{BC}{AC} &= \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \dots = \frac{a}{b} \text{ и} \\ \frac{AC}{BC} &= \frac{AC_1}{B_1C_1} = \frac{AC_2}{B_2C_2} = \frac{AC_3}{B_3C_3} = \dots = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$



Од претходните равенства заклучуваме дека, за даден остар агол  $\alpha$  односите на соодветните страни во правоаголните триаголници, чиј еден агол е  $\alpha$  се константни. Но, што станува со количниците, ако остриот агол се менува (цртеж а)). Очигледно, ако аголот се менува, тогаш правоаголните триаголници имаат иста налегната катета, а различни хипотенузи и спротивни катети, што значи дека односот на катетите и односот на налегнатата катета и хипотенузата се менува, т.е.  $\frac{BC}{AC} \neq \frac{B_1C_1}{AC_1}$  и  $\frac{AC}{AB} \neq \frac{AC_1}{AB_1}$ . Слично, од цртеж б), бидејќи за сите правоаголници хипотенузата е константна, а спротивната катета се менува заклучуваме дека при про-



мена на остриот агол односот на спротивната катета и хипотенузата се менува  $\frac{\overline{AC}}{AB} \neq \frac{\overline{AC_1}}{AB}$ . Со други зборови, односот на две страни на правоаголен триаголник се менува ако се менува остриот агол на тој триаголник.

Значи, на *еден ист остар агол* или на *еднакви остри агли* секогаш им соодветствуваат *еднакви бројни вредности* на односите на страните на правоаголен триаголник на кој му припаѓа остриот агол, а на *различни остри агли* им соодветствуваат *различни бројни вредности* на односите на страните на соодветните правоаголни триаголници. Според тоа, со помош на количините на страните на правоаголниот триаголник можеме да дефинираме функции од остар агол, кои ги нарекуваме *тригонометриски функции*. Овие функции ќе бидат предмет на нашите натамошни разгледувања.

**Дефиниција 5.** а) Односот на спротивната катета  $a$  на остриот агол  $\alpha$  и хипотенузата  $c$  во правоаголниот триаголник го нарекуваме *синус* од аголот  $\alpha$  и го означуваме со  $\sin \alpha$ , т.е.  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ .

б) Односот на налегнатата катета  $b$  на остриот агол  $\alpha$  и хипотенузата  $c$  во правоаголниот триаголник го нарекуваме *косинус* од аголот  $\alpha$  и го означуваме со  $\cos \alpha$ , т.е.  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ .

**Дефиниција 6.** а) Односот на спротивната катета  $a$  и налегнатата катета  $b$  на остриот агол  $\alpha$  во правоаголниот триаголник го нарекуваме *тангенс* од аголот  $\alpha$  и го означуваме со  $\operatorname{tg} \alpha$ , т.е.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ .

б) Односот на налегнатата катета  $b$  и спротивната катета  $a$  на остриот агол  $\alpha$  во правоаголниот триаголник го нарекуваме *котангенс* од аголот  $\alpha$  и го означуваме со  $\operatorname{ctg} \alpha$ , т.е.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$ .

**Пример 3.** Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции на остриот агол во правоаголниот триаголник со катети  $a = 2\text{cm}$  и  $b = 2\sqrt{3}\text{cm}$ .

**Решение.** Прво ќе ја определиме хипотенузата на правоаголниот триаголник. Од Питагоровата теорема имаме

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} \text{ cm} = \sqrt{4 + 12} \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$$

Сега од дефинициите на тригонометриските функции за дадените вредности на  $a, b$  и  $c$  добиваме

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, & \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Определувањето на точните вредности на тригонометриските функции од произволен остар агол не е едноставна задача. Сепак, приближните вредности на овие функции, користејќи едноставен графички метод, можат да се определат. Да разгледаме еден пример.

**Пример 4.** Приближно определи ги вредностите на тригонометриските функции од аголот  $\alpha = 25^\circ$ .

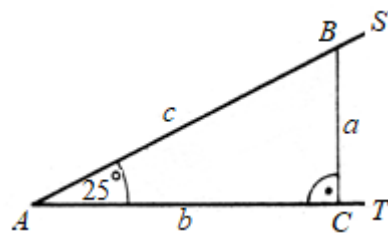


**Решение.** Цртаме  $\angle SAT = 25^\circ$  и на кракот  $AS$  земаме произволна точка  $B$  од која повлекуваме права нормална на кракот  $AT$  и ја добиваме точката  $C$ .

Ги мериме страните на  $\triangle ABC$  и добиваме  $a = 22mm$ ,  $b = 45mm$  и  $c = 50mm$ . Значи,

$$\sin 25^\circ = \frac{a}{c} \approx \frac{22}{50} = 0,44, \quad \cos 25^\circ = \frac{b}{c} \approx \frac{45}{50} = 0,9,$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{a}{b} \approx \frac{22}{45} \approx 0,489 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} 25^\circ = \frac{b}{a} \approx \frac{45}{22} \approx 2,054.$$



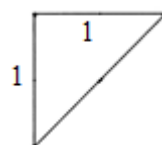
#### Задачи

54. Претвори ги во степени агли: а)  $85^\circ 36' 54''$ , б)  $25^\circ 42'$  и в)  $77^\circ 24' 42''$ .
55. Претвори ги во минути агли: а)  $55^\circ 17'$ , б)  $35^\circ 41'$  и в)  $77^\circ 24'$ .
56. Претвори ги во секунди агли: а)  $15^\circ 16' 17''$ , б)  $52^\circ 24'$  и в)  $77^\circ 24' 42''$ .
57. За правоаголниот триаголник се дадени хипотенузата  $c = 13cm$  и катетата  $a = 12cm$ . Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции од аголот  $\alpha$ .
58. Дадена е коцка со раб  $a$ . Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции за аголот формиран од дијагоналата на коцката и дијагоналата на основата на коцката.
59. Графички одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аголот:
  - а)  $\alpha = 55^\circ$ , б)  $\alpha = 35^\circ$  и в)  $\alpha = 80^\circ$ .
60. Конструирај остар агол  $\alpha$  таков, што: а)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , б)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ , в)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$ .
61. Дали може да се конструира агол  $\alpha$  таков, што  $\sin \alpha = \frac{3}{2}$ ? Одговорот да се образложи.
62. Графички определи ги вредностите на  $\cos 30^\circ$  и  $\sin 45^\circ$ .

### 4.3.2 Вредностите на тригонометриските функции за агли од $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ и произволен остар агол

При решавањето на задача 62 од задачите за вежбање, во зависност од прецизноста на цртежот, некој од вас за вредноста на  $\cos 30^\circ$  доби приближно 0,86, друг 0,87, трет 0,84 итн. Ако вака добиените приближни вредности ги користиме за натамошни пресметувања, тогаш веќе направените грешки сигурно негативно да се одразат при решавање на практични проблеми, т.е. точноста на добиените резултати нема да биде задоволителна. Затоа, логично е да се запрашаме дали од некои агли можеме едноставно да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции. Одговорот на ова прашање е позитивен и како што ќе видиме, тоа можеме да го направиме за агли со големина  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ .

Прво ќе ги определиме вредностите на тригонометриските функции од агол  $\alpha = 45^\circ$ . За таа цел да го разгледаме рамнокракиот правоаголен триаголник со катети  $a = b = 1$ .

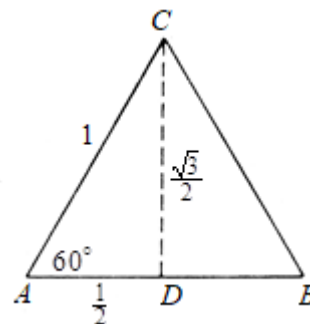


Острите агли на овој триаголник се  $\alpha = \beta = 45^\circ$ , а од Питагоровата теорема за неговата хипотенуза наоѓаме  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ . Според тоа,

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{b} = 1 \text{ и } \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{b}{a} = 1.$$

Од претходните разгледувања заклучуваме дека  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$  и  $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ$ . Важно е да напоменеме дека ова е единствениот остар агол за кој синусот е еднаков на косинусот, а тангенсот е еднаков на котангенсот, што покасно и подетално ќе го образложиме.

За да ги определиме вредностите на тригонометриските функции од  $30^\circ$  и  $60^\circ$  ќе го искористиме рамностранот триаголник  $ABC$  со страна 1. Ја повлекуваме висината  $CD$  и го добиваме правоаголниот триаголник  $CAD$  чии остри агли се  $\angle CAD = 60^\circ$  и  $\angle DCA = 30^\circ$ . За страните на овој триаголник имаме  $\overline{AC} = 1$ ,  $\overline{AD} = \frac{1}{2}$  и  $\overline{CD} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . За аголот од  $30^\circ$  имаме:



$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

а за аголот од  $60^\circ$  добиваме:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ и}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Како што можеме да забележиме, за пресметување на вредностите на тригонометриските функции од споменатите агли доволно е да ги знаеме дефинициите на тригонометриските функции и својствата на рамнокракиот правоаголен и рамностранот триаголник. Меѓутоа, заради полесно помнење и поедноставна примена можеме да ја составиме следнава табела.

|                             | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \alpha$               | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**Пример 5.** Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $3\sin 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 60^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$ ,

б)  $\frac{1}{\sin 45^\circ} + \frac{1}{\cos 45^\circ}$ .

**Решение.** За дадениот израз имаме:

а)  $3\sin 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 60^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

б)  $\frac{1}{\sin 45^\circ} + \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ .

Во досегашните разгледувања видовме како графички можеме приближно да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции од остар агол, а исто така научивме и како да ги пресметаме точните вредности на тригонометриските функции од  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Меѓутоа, најчесто

треба да определиме вредност на некоја од тригонометриските функции од агол  $\alpha$ , различен од  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ , и таа вредност мора да биде најдена со голема точност. Наоѓањето на вакви вредности се заснива на познавање на доста посложени математички теории, па затоа се користиме со калкулатор. Имено, ако сакаме да најдеме вредност на  $\sin$ ,  $\cos$  или  $\operatorname{tg}$  од некој агол  $\alpha$ , тогаш постапуваме на следниот начин:

- проверуваме дали активната мерна единица (степен или радијан) на калкулаторот се совпаѓа со мерната единица во која е изразен аголот од кој ја пресметуваме вредноста на тригонометриската функција,
- ако аголот е изразен во степени и помали единици (минути или секунди), тогаш го претвораме во степени, а ако е во радијани нема што да претвораме,
- ја внесуваме вредноста на аголот и го притискаме копчето  $\boxed{\sin}$ ,  $\boxed{\cos}$  или  $\boxed{\operatorname{tg}}$ , соодветно, со што ја добиваме бараната вредност на тригонометриската функција.

**Пример 6.** Пресметај  $\sin 39^\circ$ ,  $\cos 25^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 56^\circ 15'$  и  $\operatorname{ctg} 43^\circ 30'$ .

**Решение.** Внесуваме  $39^\circ$  и со притискање на копчето  $\boxed{\sin}$  добиваме

$$\sin 39^\circ \approx 0,6293203 \approx 0,62932,$$

при што заокруживме на пет децимали.

Внесуваме  $25^\circ$  и со притискање на копчето  $\boxed{\cos}$  добиваме  $\cos 25^\circ \approx 0,90630$ .

Бидејќи  $56^\circ 15' = 56,25^\circ$  внесуваме  $56,25^\circ$  и со притискање на копчето  $\boxed{\operatorname{tg}}$  добиваме  $\operatorname{tg} 56^\circ 15' \approx 1,49660$ .

На повеќето калкулатори нема копче за пресметување на функцијата котангенс, па затоа во овој случај ја користиме релација  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  и тоа на следниот начин: за дадениот агол пресметуваме  $\operatorname{tg} \alpha$ , а потоа го притискаме копчето  $\frac{1}{x}$  (или  $x^{-1}$ ). Според тоа, во случајот внесуваме  $43^\circ 30' = 43,5^\circ$ , го притиска копчето  $\boxed{\operatorname{tg}}$  и го притискаме копчето  $\frac{1}{x}$  и добиваме  $\operatorname{ctg} 43^\circ 30' \approx 1,05378$ .

Видовме како со помош на калкулатор може да се пресметаат вредностите на тригонометриските функции од остри агли. Логично е да се запрашаме дали можеме да го направиме обратното, т.е. ако е позната вредноста на една од тригонометриските функции, дали можеме да го определиме остриот агол во кој функцијата ја прима дадената вредност. Одговорот на ова прашање е потврден и за таа цел постапуваме на следниот начин: ја внесуваме дадената вредност на тригонометриската функција, да кажеме  $\sin \alpha = 0,5362$ , и го притискаме копчето  $\boxed{\arcsin}$  (читај аркусинус) и го добиваме аголот  $\alpha = 32,425329^\circ \approx 32^\circ 25'$ .

Во случајот имаме нова реална функција, која ја нарекуваме аркусинус и притоа ако  $\sin \alpha = a$ , тогаш  $\alpha = \arcsin a$  (читај  $\alpha$  е аркусинус од  $a$ ).

Аналогно, ако  $\cos \alpha = a$ , тогаш  $\alpha = \arccos a$  (читај  $\alpha$  е аркускосинус од  $a$ ) и ако  $\operatorname{tg} \alpha = a$ , тогаш  $\alpha = \operatorname{arctg} a$  (читај  $\alpha$  е аркусинус од  $a$ ). Притоа, ако работиме на дигитрон ги користиме копчињата  $\boxed{\arccos}$  и  $\boxed{\operatorname{arctg}}$ .

Во случај ако знаеме  $\operatorname{ctg} \alpha = a$ , тогаш прво наоѓаме  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{a}$ , а потоа го внесуваме бројот  $\frac{1}{a}$  и со притискање на копчето  $\boxed{\operatorname{arctg}}$  ја добиваме бараната вредност на аголот  $\alpha$ .

**Пример 7.** Пресметај го аголот  $\alpha$  ако: а)  $\operatorname{tg} \alpha = 2,0934$ , б)  $\cos \alpha = 0,88624$ .

**Решение.** а) На калкулаторот внесуваме 2,0934, го притискаме копчето  $\boxed{\operatorname{arctg}}$  и добиваме  $\alpha = \operatorname{arctg} 2,0934 \approx 64,4667^\circ \approx 64^\circ 28'$ .

б) На калкулаторот внесуваме 0,88624, го притискаме копчето  $\boxed{\arccos}$  и добиваме  $\alpha = \arccos 0,88624 \approx 27^\circ 35'$ .

Ако ја анализираме табелата во која се дадени вредностите на тригонометриските функции за агли од  $30^\circ$  и  $60^\circ$  ќе забележиме дека  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ ,  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ$  и  $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ$ , а аглие  $30^\circ$  и  $60^\circ$  се комплементни. Ова не наведува на претпоставка дека некои од тригонометриските функции од комплементни агли се еднакви меѓу себе. Во оваа смисла ја имаме следната теорема.

**Теорема 1.** Ако  $\alpha$  е остар агол, тогаш

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha). \quad (1)$$

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека е даден правоаголниот  $\triangle ABC$  со остри агли  $\alpha$  и  $\beta$ . Вредностите на тригонометриските функции од аголот  $\alpha$  се:

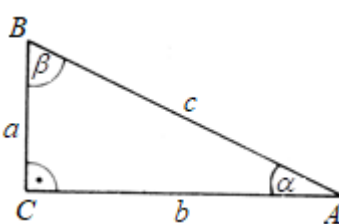
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}. \quad (2)$$

а вредностите на тригонометриските функции за аголот  $\beta$  се

$$\sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}. \quad (3)$$

Од равенствата (2) и (3) ги добиваме равенствата

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \quad (4)$$



Меѓутоа,  $\alpha$  и  $\beta$  се остри агли во правоаголен триаголник, па затоа  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , т.е.  $\beta = 90^\circ - \alpha$  и ако замениме во равенствата (4) ги добиваме равенствата

$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha),$   
што и требаше да се докаже.

**Пример 8.** Во пример 7 пресметавме дека

$$\sin 39^\circ = 0,62932, \quad \cos 25^\circ = 0,90630, \quad \operatorname{tg} 56^\circ 15' = 1,49660 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} 43^\circ 30' = 1,05378.$$

Од теорема (1) добиваме

$$\cos 51^\circ = \cos(90^\circ - 39^\circ) = \sin 39^\circ = 0,62932,$$

$$\sin 65^\circ = \sin(90^\circ - 25^\circ) = \cos 25^\circ = 0,90630,$$

$$\operatorname{ctg} 33^\circ 45' = \operatorname{ctg}(90^\circ - 56^\circ 15') = \operatorname{tg} 56^\circ 15' = 1,49660 \quad \text{и}$$

$$\operatorname{tg} 46^\circ 30' = \operatorname{tg}(90^\circ - 43^\circ 30') = \operatorname{ctg} 43^\circ 30' = 1,05378.$$

**Пример 9.** Определи го остриот агол  $\alpha$  ако:

а)  $\sin \alpha = \sin 28^\circ$  и

б)  $\sin \alpha = \cos 42^\circ$ .

**Решение.** При воведувањето на тригонометриските функции покажавме дека за кои било два различни агли меѓу  $0^\circ$  и  $90^\circ$  вредностите на синусот, а и на останатите тригонометриски

функции од тие агли се различни меѓу себе, т.е. ако  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , тогаш  $\sin \alpha_1 \neq \sin \alpha_2$ . Но, тоа значи, ако  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се остри агли и  $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$ , тогаш  $\alpha_1 = \alpha_2$  (зошто?).

Претходно изнесеното ќе го искористиме за да го определиме аголот  $\alpha$ .

а) Од  $\sin \alpha = \sin 28^\circ$  следува  $\alpha = 28^\circ$ .

б) Од теоремата 1 следува  $\sin \alpha = \cos 42^\circ = \sin(90^\circ - 42^\circ) = \sin 48^\circ$ , па затоа  $\alpha = 48^\circ$ .

**Пример 10.** Определи го остриот агол  $\alpha$  ако:

а)  $\sin(\alpha + 30^\circ) = \cos 20^\circ$  и

б)  $\sin(\alpha + 10^\circ) = \cos(\alpha + 10^\circ)$

**Решение.** а) Од теорема 1 и од условот на задачата следува  $\sin(\alpha + 30^\circ) = \sin 70^\circ$ . Понатаму, ако ја искористиме постапката од примерот 9 добиваме  $\alpha + 30^\circ = 70^\circ$ , од што следува  $\alpha = 40^\circ$ .

б) Од теоремата 1 и од условот на задачата следува  $\sin(\alpha + 10^\circ) = \sin(80^\circ - \alpha)$ . Сега, ако ја искористиме постапката од примерот 9 добиваме  $\alpha + 10^\circ = 80^\circ - \alpha$ , од што следува  $\alpha = 35^\circ$ .

**Пример 11.** Упрости го изразот  $\frac{8\operatorname{tg} 20^\circ + 2\operatorname{ctg} 70^\circ}{3\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ}$ .

**Решение.** Од теоремата 1 добиваме  $\frac{8\operatorname{tg} 20^\circ + 2\operatorname{ctg} 70^\circ}{3\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ} = \frac{8\operatorname{tg} 20^\circ + 2\operatorname{tg} 20^\circ}{3\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{10\operatorname{tg} 20^\circ}{2\operatorname{tg} 20^\circ} = 5$ .

**Пример 12.** Нека  $\alpha$  и  $\beta$  се остри агли на правоаголен триаголник. Колку е  $\frac{\sin \alpha + \cos^2 \beta}{\cos \beta + \sin^2 \alpha}$ .

**Решение.** Од теоремата 1 и равенството  $\beta = 90^\circ - \alpha$  следува

$$\frac{\sin \alpha + \cos^2 \beta}{\cos \beta + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha) + \cos^2 \beta}{\cos \beta + \cos^2(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \beta + \cos^2 \beta}{\cos \beta + \cos^2 \beta} = 1.$$

## Задачи

63. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $(1 - \sin 30^\circ)(1 + \sin 30^\circ)$ ,

б)  $\frac{2\cos 45^\circ - \sin 45^\circ}{1 + \sin^2 45^\circ}$  и

в)  $\frac{\sin^2 30^\circ + 2\sin^2 45^\circ}{3\cos^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ}$ .

64. Провери ја точноста на равенствата:

а)  $3\operatorname{tg} 30^\circ + 2\cos 30^\circ = 2\operatorname{ctg} 30^\circ$ ,

б)  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ$  и

в)  $\frac{1}{\sin 30^\circ} + \frac{1}{\cos 60^\circ} = (\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ)^2$ .

65. Пресметај: а)  $\sin 55^\circ 20'$ , б)  $\cos 84^\circ 40' 21''$ , в)  $\operatorname{tg} 25^\circ 30'$  и г)  $\operatorname{ctg} 71^\circ 39' 4''$ .

66. Одреди го остриот агол  $\alpha$  ако:

а)  $\sin \alpha = 0,1937$ ,

б)  $\sin \alpha = 0,9336$ ,

в)  $\cos \alpha = 0,8631$ ,

г)  $\cos \alpha = 0,2070$ ,

д)  $\operatorname{tg} \alpha = 0,3805$ ,

ѓ)  $\operatorname{tg} \alpha = 6,968$ ,

е)  $\operatorname{ctg} \alpha = 5,066$  и

ж)  $\operatorname{ctg} \alpha = 0,9271$ .

67. Кои од следните равенства се точни:

а)  $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ$ ,

б)  $\cos 44^\circ = \sin 36^\circ$ ,

в)  $\operatorname{tg} 38^\circ = \operatorname{ctg} 52^\circ$  и

г)  $\operatorname{ctg} 63^\circ = \operatorname{tg} 17^\circ$ .

Одговорот да се образложи.

68. Определи го остриот агол  $\alpha$  ако

- а)  $\sin \alpha = \cos 35^\circ$ , б)  $\cos \alpha = \sin 36^\circ$ , в)  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 52^\circ$  и г)  $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} 17^\circ$
69. Определи го остриот агол  $\alpha$  ако
- а)  $\sin(\alpha + 15^\circ) = \cos 35^\circ$ , б)  $\cos(\alpha + 22^\circ) = \sin 36^\circ$ .
70. Определи го остриот агол  $\alpha$  ако
- а)  $\cos(\alpha - 20^\circ) = \sin(\alpha + 20^\circ)$ , б)  $\operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha + 25^\circ)$  в)  $\operatorname{ctg}(\alpha + 20^\circ) = \operatorname{tg}(70^\circ - \alpha)$
71. Најди ги тригонометриските функции на помалиот остар агол на правоаголниот триаголник, кај кој едната катета претставува 75% од другата катета.
72. Упрости ги изразите:
- а)  $\frac{4\sin 40^\circ + \cos 50^\circ}{3\sin 40^\circ - 2\cos 50^\circ}$ , б)  $\frac{\sin^2 65^\circ - \cos 25^\circ}{\cos^2 25^\circ - \sin 65^\circ}$ , в)  $\frac{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{ctg}^2 18^\circ}{\operatorname{ctg} 18^\circ - \operatorname{tg}^2 72^\circ}$  и г)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

### 4.3.3 Менување на тригонометриски функции при промена на аголот од $0^\circ$ до $90^\circ$

Во претходните разгледувања следува дека при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  важи  $\sin \alpha_1 \neq \sin \alpha_2$ ,  $\cos \alpha_1 \neq \cos \alpha_2$  итн. Меѓутоа, сакаме да утврдиме како се однесуваат вредностите на тригонометриските функции кога вредностите на аголот  $\alpha$  се менуваат од  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . За таа цел прво ќе разгледаме еден пример.

**Пример 13.** Со пресметување на вредностите на функцијата  $\sin$  за аглиите  $25^\circ$ ,  $38^\circ$  и  $65^\circ$  добиваме  $\sin 25^\circ = 0,42261$ ,  $\sin 38^\circ = 0,61566$  и  $\sin 65^\circ = 0,9063$ . Како што можеме да видиме, со зголемување на вредноста на аргументот се зголемува и вредноста на функцијата  $\sin$ .

Да се вратиме на прашањето поставено на почетокот од овој дел. За таа цел ќе го разгледаме делот од кружницата со радиус  $r$ , во кој впишуваме правоаголни триаголници  $OA_1B_1$ ,  $OA_2B_2$ ,  $OA_3B_3$ , ...,  $OA_nB_n$ , ..., за кои хипотенузите се еднакви, т.е.

$$r = \overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \overline{OB_3} = \dots = \overline{OB_n} = \dots,$$

а за аглиите во темето  $O$  важи

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n < \dots$$

Понатаму, од цртежот гледаме дека

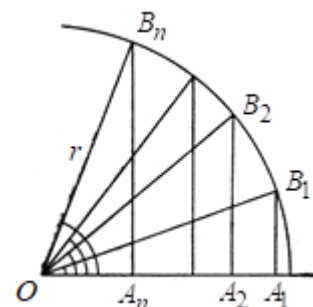
$$\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} < \overline{A_3B_3} < \dots < \overline{A_nB_n} < \dots$$

па затоа  $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} < \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} < \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} < \dots < \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OB_n}} < \dots$ , од што следува дека

$$\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2 < \sin \alpha_3 < \dots < \sin \alpha_n < \dots$$

Од досега изнесеното следува дека со зголемувањето на вредноста на аголот  $\alpha$ , се зголемува и вредноста на  $\sin \alpha$ , што значи дека функцијата  $\sin \alpha$  монотонно расте на интервалот  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Од цртежот лесно се воочува дека кога аголот  $\alpha$  се приближува до  $0^\circ$  се намалува должината на спротивната катета на впишаните триаголници и таа се приближува кон нула, а



бидејќи хипотенузата на впишаните триаголници е фиксна, заклучуваме дека количникот на катетата и хипотенузата се приближува кон нула, што значи дека  $\sin \alpha$  се приближува кон нула, па затоа можеме да ставиме  $\sin 0^\circ = 0$ . Понатаму, ако аголот  $\alpha$  се приближува до  $90^\circ$ , тогаш должината на спротивната катета на впишаните триаголници се приближува до должината на хипотенузата, а должината на хипотенузата е константна, па затоа количникот на катетата и хипотенузата се приближува до еден, па затоа можеме да ставиме  $\sin 90^\circ = 1$ .

Од претходно изнесеното и од коментар 1 следува точноста на следната теорема.

**Теорема 2.** Функцијата  $\sin \alpha$  монотонно расте на интервалот  $[0, \frac{\pi}{2}]$  и притоа  $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ , за секој  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Пример 14.** а) Без да пресметуваш, подреди ги по големина  $\sin 15^\circ 43'$ ,  $\sin 35^\circ$ ,  $\sin 75^\circ$  и  $\sin 43^\circ 12''$ .

б) Без да пресметуваш, определи го знакот на изразот  $\sin 35^\circ - \sin 42^\circ$ .

**Решение.** а) Од теоремата 2 и неравенствата  $15^\circ 43' < 35^\circ < 43^\circ 12'' < 75^\circ$  следува

$$\sin 15^\circ 43' < \sin 35^\circ < \sin 43^\circ 12'' < \sin 75^\circ.$$

б) Од теоремата 2 и неравенството  $35^\circ < 42^\circ$  следува  $\sin 35^\circ < \sin 42^\circ$ , што значи

$$\sin 35^\circ - \sin 42^\circ < 0.$$

Повторно да го разгледаме дадениот цртеж. Очигледно  $\overline{OA_1} > \overline{OA_2} > \overline{OA_3} > \dots > \overline{OA_n} > \dots$  па затоа  $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} > \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} > \frac{\overline{OA_3}}{\overline{OB_3}} > \dots > \frac{\overline{OA_n}}{\overline{OB_n}} > \dots$ , од што следува дека

$$\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2 > \cos \alpha_3 > \dots > \cos \alpha_n > \dots$$

Од досега изнесеното следува дека со зголемувањето на вредноста на аголот  $\alpha$ , се намалува вредноста на  $\cos \alpha$ , што значи дека функцијата  $\cos \alpha$  монотонно опаѓа на интервалот  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Од цртежот лесно се воочува дека кога аголот  $\alpha$  се приближува до  $0^\circ$  се зголемува налегнатата катета на впишаните триаголници и нејзината должина се приближува до должината на хипотенузата, а како должината на хипотенузата на впишаните триаголници е константна, заклучуваме дека количникот на катетата и хипотенузата се приближува кон еден, што значи дека  $\cos \alpha$  се приближува кон еден, па затоа можеме да ставиме  $\cos 0^\circ = 1$ . Понатаму, ако аголот  $\alpha$  се приближува до  $90^\circ$ , тогаш должината на налегнатата катета на впишаните триаголници се приближува до нула и како должината на хипотенузата е константна, заклучуваме дека количникот на катетата и хипотенузата се приближува до нула, па затоа можеме да ставиме  $\cos 90^\circ = 0$ .

Од претходно изнесеното и од коментар 1 следува точноста на следната теорема.

**Теорема 3.** Функцијата  $\cos \alpha$  монотонно опаѓа на интервалот  $[0, \frac{\pi}{2}]$  и притоа  $0 \leq \cos \alpha \leq 1$ , за секој  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .



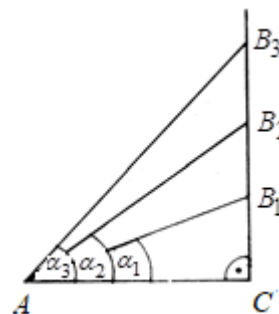
**Пример 15.** Без да пресметуваш, подреди ги по големина  $\cos 13^\circ$ ,  $\cos 82^\circ$  и  $\cos 75^\circ$ .

**Решение.** Од теоремата 3 и неравенствата  $13^\circ < 75^\circ < 82^\circ$  следува

$$\cos 13^\circ > \cos 75^\circ > \cos 82^\circ.$$

Да го разгледаме цртежот, на кој се нацртани неколку правоагол-ни триаголници со заедничка налегната катета  $\overline{AC}$  и за аглиите во темето  $A$  важи  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ . Очигледно  $\overline{CB_1} < \overline{CB_2} < \overline{CB_3}$ , па затоа  $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}} < \frac{\overline{CB_2}}{\overline{AC}} < \frac{\overline{CB_3}}{\overline{AC}}$ , од што следува дека  $\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2 < \operatorname{tg} \alpha_3$ .

Од досега изнесеното следува дека со зголемувањето на вредноста на аголот  $\alpha$ , се зголемува вредноста на  $\operatorname{tg} \alpha$ , што значи дека функцијата  $\operatorname{tg} \alpha$  монотонно расте на разгледуваниот интервал.



Од цртежот лесно се воочува дека кога аголот  $\alpha$  се приближува до  $0^\circ$  се намалува спротивната катета на вака конструираните триаголници и нејзината должина се приближува до нула, а како должината на налегнатата катета е константна, заклучуваме дека количникот на спротивната и налегнатата катета се приближува до нула, што значи  $\operatorname{tg} \alpha$  се приближува до нула, па затоа можеме да ставиме  $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$ . Понатаму, ако аголот  $\alpha$  се приближува до  $90^\circ$ , тогаш должината на спротивната катета на вака конструираните триаголници неограничено расте и како должината на налегнатата катета е константна заклучуваме дека количникот на спротивната и налегнатата катета неограничено расте. Последното можеме да го искажеме на следниот начин: ако аголот  $\alpha$  расте и се стреми кон  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ , тогаш  $\operatorname{tg} \alpha$  неограничено расте и се стреми кон бесконечност, т.е. ако  $\alpha$  тежи кон  $\frac{\pi}{2}$ , тогаш  $\operatorname{tg} \alpha$  тежи кон  $+\infty$ .

Од претходно изнесеното и од коментар 1 следува точноста на следната теорема.

**Теорема 4.** Функцијата  $\operatorname{tg} \alpha$  монотонно расте на интервалот  $[0, \frac{\pi}{2})$  и притоа  $0 \leq \operatorname{tg} \alpha < +\infty$ , за секој  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ .

**Пример 16.** а) Без да пресметуваш, подреди ги по големина  $\operatorname{tg} 13^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 82^\circ$  и  $\operatorname{tg} 75^\circ$ .

б) Без да пресметуваш, подреди ги по големина остриите агли  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ , ако се дека  $\operatorname{tg} \alpha = 0,437$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 5,678$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = 1,0234$  и  $\operatorname{tg} \delta = 25,786$ .

**Решение.** а) Од теоремата 4 и неравенствата  $13^\circ < 75^\circ < 82^\circ$  следува  $\operatorname{tg} 13^\circ < \operatorname{tg} 75^\circ < \operatorname{tg} 82^\circ$ .

б) Од  $0,437 < 1,0234 < 5,678 < 25,786$  следува  $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \gamma < \operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \delta$ , па од теоремата 4 заклучуваме дека  $\alpha < \gamma < \beta < \delta$ .

**Пример 17.** За кои вредности на остриот агол  $\alpha$  важи  $\operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$ , а за кои  $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{3}$ .

**Решение.** Знаеме дека  $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ . Сега од теоремата 4 следува: ако  $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ , тогаш  $\operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$ , а ако  $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ , тогаш  $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{3}$ .

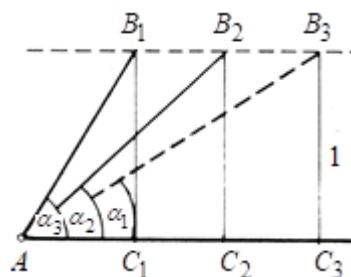
Претходно видовме дека од  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$  следува  $0 < \operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2 < \operatorname{tg} \alpha_3$ . Но за позитивни реални броеви  $x$  и  $y$  од  $x < y$  следува  $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ , па затоа од претходните неравенства следуваат



неравенствата  $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} > \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} > \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_3}$ , и ако искористиме дека за секој остар агол  $\alpha$  важи  $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$  добиваме  $\operatorname{ctg} \alpha_1 > \operatorname{ctg} \alpha_2 > \operatorname{ctg} \alpha_3$ .

Понатаму, со аналогни размислувања, како и за тангенсот можеме да заклучиме дека  $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$  и ако аголот  $\alpha$  опаѓа и се стреми кон  $0^\circ$ , тогаш  $\operatorname{ctg} \alpha$  неограничено расте и се стреми кон бесконечност, т.е. ако  $\alpha$  тежи кон  $0^\circ$ , тогаш  $\operatorname{ctg} \alpha$  тажи кон  $+\infty$ .

Од претходно изнесеното и од коментар 1 следува точноста на следната теорема.



**Теорема 5.** Функцијата  $\operatorname{ctg} \alpha$  монотонно опаѓа на интервалот  $(0, \frac{\pi}{2}]$  и притоа  $0 \leq \operatorname{ctg} \alpha < +\infty$ , за секој  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Пример 18.** а) Без да пресметуваш, определи го знакот на изразот  $\operatorname{ctg} 28^\circ - 1$ .

б) Провери дали е точно неравенството  $\operatorname{ctg} 35^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ > 0$ .

в) Без да пресметуваш, определи го знакот на изразот  $\frac{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{ctg} 37^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ}$ .

**Решение.** а) Важи  $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$  и како  $45^\circ > 28^\circ$  од теоремата 5 следува  $\operatorname{ctg} 28^\circ > \operatorname{ctg} 45^\circ$ , т.е.  $\operatorname{ctg} 28^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ > 0$ . Според тоа,  $\operatorname{ctg} 28^\circ - 1 = \operatorname{ctg} 28^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ > 0$ .

б) Ако го искористиме равенството  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$ , тогаш од теоремата 5 имаме

$$\operatorname{ctg} 35^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ = \operatorname{ctg} 35^\circ - \operatorname{ctg} 65^\circ > 0.$$

в) Бидејќи  $55^\circ > 25^\circ$  од теоремата 4 добиваме  $\operatorname{tg} 55^\circ > \operatorname{tg} 25^\circ$ , т.е.  $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ > 0$ . Но,  $37^\circ < 45^\circ$ , па затоа  $\operatorname{ctg} 37^\circ > \operatorname{ctg} 45^\circ$ , т.е.  $\operatorname{ctg} 37^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ > 0$ . Конечно,  $\frac{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{ctg} 37^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ} > 0$ .

**Пример 19.** За кои вредности на остриот агол  $\alpha$  важи  $\operatorname{ctg} \alpha < 1$ , а за кои  $\operatorname{ctg} \alpha > 1$ .

**Решение.** Знаеме дека  $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$ . Сега од теоремата 5 следува: ако  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ , тогаш  $\operatorname{ctg} \alpha > 1$ , а ако  $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ , тогаш  $\operatorname{ctg} \alpha < 1$ .

Задачи

73. Без да пресметуваш, определи кој број е поголем:

а)  $\sin 33^\circ$  или  $\sin 44^\circ$                       б)  $\sin 72^\circ$  или  $\sin 27^\circ$

74. Без да пресметуваш, подреди ги броевите да растат:

$$\sin 38^\circ, \sin 25^\circ, \sin 74^\circ, \sin 45^\circ, \sin 17^\circ 30'$$

75. Без да пресметуваш, определи кој број е поголем:

а)  $\cos 17^\circ$  или  $\cos 18^\circ$                       б)  $\operatorname{tg} 39^\circ$  или  $\operatorname{tg} 29^\circ$                       в)  $\operatorname{ctg} 56^\circ$  или  $\operatorname{ctg} 65^\circ$

76. Без да пресметуваш, подреди ги по опаѓање броевите:

- а)  $\cos 14^\circ$ ,  $\cos 25^\circ$ ,  $\cos 75^\circ$ ,  $\cos 57^\circ$ ;      б)  $\operatorname{tg} 39^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 73^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 24^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 48^\circ 50'$ .
77. Без да пресметуваш, подреди ги по големина острите агли  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ако:
- а)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\sin \beta = 0,34$ ,  $\sin \gamma = \frac{2}{5}$ ,      б)  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\cos \beta = 0,77$ ,  $\cos \gamma = \frac{7}{9}$ .
78. Без да пресметуваш, спореди ги броевите
- а)  $\sin 27^\circ$  и  $\cos 27^\circ$ ,      б)  $\operatorname{tg} 39^\circ$  и  $\operatorname{ctg} 25^\circ$ ,      в)  $\operatorname{tg} 37^\circ$  и  $\operatorname{ctg} 39^\circ$ ,
79. Определи го знакот на изразот:      а)  $\frac{\operatorname{tg} 57^\circ - \operatorname{ctg} 34^\circ}{\operatorname{ctg} 57^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ}$ ,      б)  $\frac{\sin 57^\circ - \cos 34^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 23^\circ}$
80. За кои вредности на агол  $\alpha$ ,  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  е точно неравенството:
- а)  $\operatorname{tg} \alpha < 1$ ,      б)  $\sin \alpha \leq \frac{1}{2}$ ,      в)  $\cos \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
81. Ако  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , најди ги најголемата и најмалата вредност на изразот:
- а)  $\sin \alpha + 1$ ;      б)  $2 \cos \alpha + 3$ ,      в)  $4 - 3 \cos \alpha$ .
82. Ако  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , најди во кои граници се менува вредноста на изразот:
- а)  $5 - \sin \alpha$ ,      б)  $2 + 3 \cos \alpha$ ,      г)  $4 \sin \alpha - 5$ .

#### 4.3.4 Решавање на правоаголен триаголник

Со тригонометриските функции од остар агол може да се реши правоаголен триаголник. Последното подразбира одредување на основните елементи на правоаголниот триаголник, страни и остри агли, кога се дадени два негови елементи, различни од правиот агол. Поста-вената задача има решение, во што ние ќе се увериме разгледувајќи ги четирите типа задачи за решавање на правоаголен триаголник, и тоа: *познати се хипотенузата и еден агол, познати се катета и агол, познати се катета и хипотенуза и познати се двете катети.*

**Пример 20.** Реша го правоаголниот триаголник зададен со хипотенузата  $c = 56 \text{ cm}$  и аголот  $\alpha = 53^\circ 28'$ .

**Решение.** Дадени се  $c = 56 \text{ cm}$  и  $\alpha = 53^\circ 28'$ . Треба да ги определиме  $a, b$  и  $\beta$ . Аголот  $\beta$  ќе го определиме од условот  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Имаме,

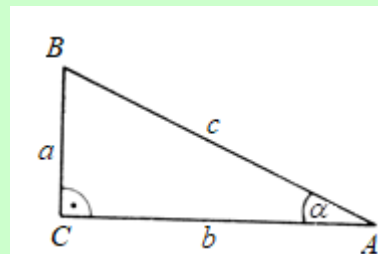
$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 53^\circ 28' = 36^\circ 32'.$$

Сега, од  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  следува

$$a = c \sin \alpha = 56 \sin 53^\circ 28' = 45 \text{ cm},$$

а од  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$  следува

$$b = c \cos \alpha = 56 \cos 53^\circ 28' = 33,3 \text{ cm}.$$



Пожелно е сите елементи на триаголникот да ги определиш со почетните податоци, би-дејќи во случај ако користиме веќе пресметани вредности, тогаш повеќекратните приближни пресметувања можат да доведат до поголеми грешки.

Исто така, добро е на крајот да направиш проверка на добиените резултати. Имено, тоа можеш да го направиш со помош на Питагоровата теорема. Во горниот пример имаме

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{45^2 + 33,3^2} = \sqrt{2025 + 1108,89} = \sqrt{3133,89} \approx 55,89.$$

**Пример 21.** Реши го правоаголниот триаголник зададен со катета  $a=123\text{cm}$  и аголот  $\beta = 41^\circ 12'$ .

**Решение.** Дадени се  $a=123\text{cm}$  и  $\beta = 41^\circ 12'$ . Треба да ги определиме  $b, c$  и  $\alpha$ . Аголот  $\alpha$  ќе го определиме од условот  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Имаме,  $\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 41^\circ 12' = 48^\circ 48'$ . Понатаму, од  $\cos \beta = \frac{a}{c}$  следува  $c = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{123}{\cos 41^\circ 12'} = 163,5\text{cm}$ , а од  $\tan \beta = \frac{b}{a}$  добиваме

$$b = a \tan \beta = 123 \tan 41^\circ 12' = 107,7.$$

**Пример 22.** Реши го правоаголниот триаголник зададен со катета  $a = 24\text{cm}$  и хипотенуза  $c = 30\text{cm}$ .

**Решение.** Дадени се  $a = 24\text{cm}$  и  $c = 30\text{cm}$ . Треба да ги определиме  $b, \alpha$  и  $\beta$ . Од Питагоровата теорема имаме

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} = 18\text{cm}.$$

Сега,  $\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{24}{30} = 0,8$ , па е  $\beta = \arccos 0,8 = 36^\circ 52'$  и  $\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 36^\circ 52' = 53^\circ 8'$ .

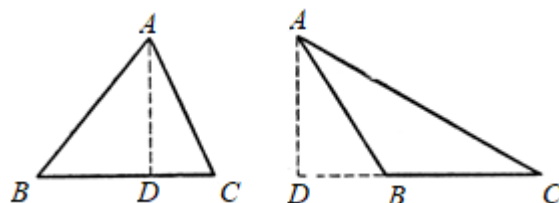
**Пример 23.** Реши го правоаголниот триаголник зададен со катети  $a = 2,4\text{cm}$  и  $b = 3,5\text{cm}$ .

**Решение.** Дадени се  $a = 2,4\text{cm}$  и  $b = 3,5\text{cm}$ . Треба да ги определиме  $c, \alpha$  и  $\beta$ . Од Питагоровата теорема имаме  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2,4^2 + 3,5^2} = \sqrt{5,76 + 12,25} = \sqrt{18,01} \approx 4,2\text{cm}$ .

Понатаму,  $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{2,4}{3,5}$ , па е  $\alpha = \arctan \frac{2,4}{3,5} = 34^\circ 26'$  и  $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 34^\circ 26' = 55^\circ 34'$ .

**За оние што сакаат да знаат повеќе.**

На цртежот се дадени остроаголен и тапоаголен триаголник. И во двата случаи со помош на висината  $AD$  добиваме два правоаголни триаголника  $ABD$  и  $ACD$ . Според тоа, за да го решиме  $\triangle ABC$  за кој се познати три елементи,



потребно е да ги решиме правоаголните  $\triangle ABD$  и  $\triangle ACD$ . Може да се покаже дека последното е секогаш можно, што ние ќе го илустрираме на еден пример.

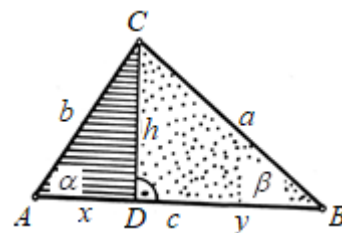
**Пример 24.** Реши го триаголникот  $ABC$  зададен со  $a = 28,5$ ,  $\alpha = 68^\circ$  и  $\beta = 54^\circ$ .

**Решение.** Од теоремата за збирот на аглиите во триаголник, за аголот  $\gamma$  добиваме  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 68^\circ - 54^\circ = 58^\circ$ . Од правоаголниот  $\triangle BCD$  имаме

$$h = a \sin \beta = 28,5 \sin 54^\circ = 23 \text{ и } y = a \cos \beta = 16,7,$$

а од правоаголниот  $\triangle CAD$  имаме

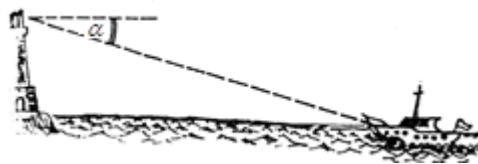
$$b = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{23}{\sin 68^\circ} = 24,8 \text{ и } x = \frac{h}{\tan \alpha} = \frac{23}{\tan 68^\circ} = 9,3.$$



Конечно, за третата страна добиваме  $c = x + y = 9,3 + 16,7 = 26$ , со што триаголникот е решен.

Да го разгледаме примерот:

Да се одреди растојанието  $a$  на бродот до езерскиот брег, ако е позната висината на светилникот  $h = 68m$  и со помош на соодветен мерен инструмент е одреден аголот  $\alpha = 1^\circ 30'$ .



Јасно, решавањето на поставениот проблем се сведува на решавање на правоаголен триаголник во кој се бара страната, и притоа  $a = h \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 68 \operatorname{tg} 88^\circ 30' = 2597m$ .

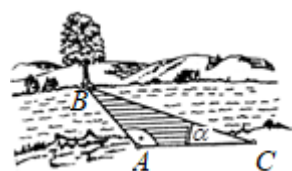
Во следните примери ќе разгледаме практични проблеми чие решавање се сведува на решавање на правоаголен триаголник.

**Пример 25.** Точките  $A$  и  $B$  се наоѓаат на спротивни брегови на една река. За одредување растојанието  $\overline{AB}$  е избрана трета точка  $C$ , така што  $CA \perp AB$  и  $\overline{AC} = 85m$  (види цртеж). Пресметај го растојанието  $\overline{AB}$ , ако  $\angle ACB = 35^\circ 40'$ .

**Решение.** Дадени се  $\overline{AC} = 85m$  и  $\alpha = \angle ACB = 35^\circ 40'$ . Треба да се одреди  $\overline{AB}$ . Од правоаголниот триаголник  $ABC$  имаме

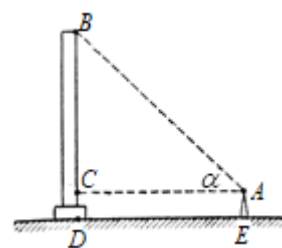
$$\overline{AB} = \overline{AC} \operatorname{ctg} \alpha = 85 \operatorname{ctg} 35^\circ 40' \approx 61m,$$

што значи, бараното растојание е приближно  $61m$ .



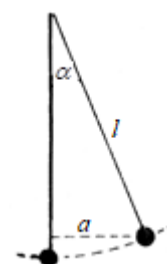
**Пример 26.** Одреди ја висината на цилиндричен фабрички оцак, кој се наоѓа на хоризонтална рамнина, ако на растојание  $\overline{AC} = 40m$  од оцакот, е поставен инструмент со висина  $\overline{AE} = 1,5m$  со кој е определен  $\angle CAB = 31^\circ$ .

**Решение.** Од условот на задачата следува дека висината на оцакот е  $\overline{DB} = \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{AE} + \overline{AB} \operatorname{ctg} \alpha = 1,5 + 40 \operatorname{ctg} 31^\circ \approx 26m$ .



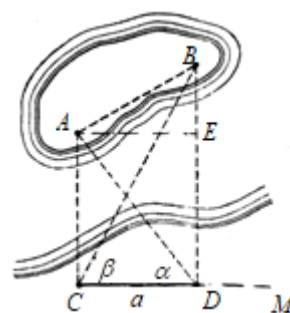
**Пример 27.** На конец закрепен на еден крај и долг  $l = 1,2m$  обесена е тешка топка (нишало). За колкав агол е отклонето нишалото од рамнотежната положба ако е направен отклон (амплитуда)  $a = 17cm$  (види цртеж).

**Решение.** Прво да ги претвориме должините на нишалото и амплитудата во иста мерна единица. Имаме,  $l = 1,2m = 120cm$  и  $a = 17cm$ . Нека со  $\alpha$  го означиме аголот за кој е отклонето нишалото од рамнотежната положба. Тогаш,  $\sin \alpha = \frac{a}{l} = \frac{17}{120} = 0,14166$ . Според тоа,  $\alpha = \arcsin 0,14166 \approx 8^\circ 9'$ .



**Пример 28\*.** Од езерскиот брег на еден остров се забележани два предмети  $A$  и  $B$  (види цртеж). Како може да се определи растојанието меѓу  $A$  и  $B$ .

**Решение.** Поставениот проблем можеме да го решиме на следниот начин. Од точката  $C$ , која се наоѓа на брегот, на правата  $AC$  повлекуваме нормална полуправа  $CM$  и на неа со помош на мерен инструмент наоѓаме точка  $D$  таква, што  $\angle CDB = 90^\circ$ . Потоа, со мерен инструмент ги определуваме аглиите  $\alpha$  и  $\beta$  и растојанието  $\overline{CD} = a$ .



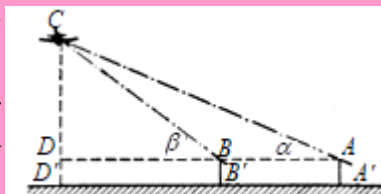
Ако замислиме дека  $AE \parallel CD$ , тогаш од правоаголниот трапез  $DBAC$  добиваме  $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2}$ , каде  $\overline{AE} = \overline{CD} = a$  и  $\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{AC}$ . Понатаму, од правоаголните  $\triangle ACD$  и  $\triangle BCD$  имаме  $\overline{DB} = \overline{CD} \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha$  и  $\overline{AC} = \overline{CD} \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{tg} \beta$ . Конечно,

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2} = \sqrt{a^2 + (\overline{BD} - \overline{AC})^2} = \sqrt{a^2 + (a \operatorname{tg} \alpha - a \operatorname{tg} \beta)^2} = a \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^2}.$$

### За оние што сакаат да знаат повеќе

Авион лета на константна висина, непозната за набљудувачите од земјата кои располагаат со два мерни инструменти за определување на агли. Дали може да се определи висината на која лета авионот?

Одговорот на поставеното прашање е позитивен. Ќе покажеме како при дадените услови може да се определи висината на која лета авионот.



Нека висината на инструментите е  $h$ . Ги поставуваме инструментите за мерење на агли  $AA'$  и  $BB'$  на хоризонтална рамнина на растојание  $\overline{A'B'} = a$ , така што рамнината  $AA'B'B$  ја сече патеката на движење на авионот (види цртеж). Во моментот кога авионот ја сече рамнината  $AA'B'B$  со двата инструменти ги мериме агли  $\alpha$  и  $\beta$ .

Од правоаголните  $\triangle CDB$  и  $\triangle CDA$  имаме  $\overline{CD} = \overline{DB} \operatorname{tg} \beta$  и  $\overline{CD} = \overline{DA} \operatorname{tg} \alpha$ , па затоа

$$\overline{DA} \operatorname{tg} \alpha = \overline{DB} \operatorname{tg} \beta.$$

Но,  $\overline{DA} = \overline{DB} + \overline{BA} = \overline{DB} + a$ , па од последното равенство добиваме  $(\overline{DB} + a) \operatorname{tg} \alpha = \overline{DB} \operatorname{tg} \beta$  т.е.

$$\overline{DB} = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}. \quad (*)$$

Ако од (\*) замениме во  $\overline{CD} = \overline{DB} \operatorname{tg} \beta$  добиваме  $\overline{CD} = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$ .

Според тоа, бараната висина на авионот е

$$\overline{CD'} = \overline{CD} + \overline{DD'} = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} + h. \quad (**)$$

На пример, ако при мерењето се добиени следните резултати:  $h = 1,5m$ ,  $a = 93,5m$ ,  $\alpha = 39^\circ$  и  $\beta = 44^\circ$ , тогаш со замена во формулата (\*\*) за висината на авионот наоѓаме

$$\overline{CD'} = \frac{93,5 \operatorname{tg} 39^\circ \operatorname{tg} 44^\circ}{\operatorname{tg} 44^\circ - \operatorname{tg} 39^\circ} + 1,5 \approx 470m.$$

### Задачи

83. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:

а)  $a = 0,5$  и  $c = 1,3$ ;

б)  $c = 15$  и  $b = 8$ .

84. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:

а)  $a = 0,5$  и  $\alpha = 22^\circ 30'$ ;

б)  $a = 236$  и  $\beta = 54^\circ$ .

85. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:

а)  $\beta = 33^\circ 22'$  и  $c = 71,5$ ;

б)  $c = 15,6$  и  $\alpha = 44^\circ 28'$ .

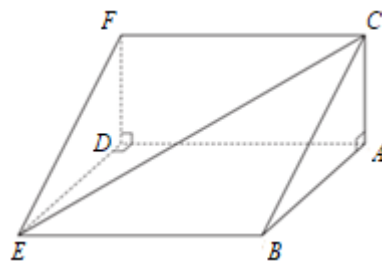
86. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:

а)  $\beta = 29^\circ 29'$  и  $b = 12,3$ ;

б)  $b = 72$  и  $\alpha = 56^\circ 10'$ .

87. Определи ги агли  $\alpha$  и  $\beta$  на правоаголниот триаголник, ако

- а)  $a=18$  и  $b=31$ ;                      б)  $a=7,9$  и  $b=5,6$
88. Одреди ги аглиите на рамнокракиот триаголник со основа 25 и висина спуштена кон основата 15.
89. Пресметај го периметарот на рамнокракиот триаголник, чиј крак е  $14\text{cm}$ , а аголот при основата е  $50^\circ$ .
90. Пресметај ги аглиите и страните на ромбот, ако неговите дијагонали се  $32\text{cm}$  и  $60\text{cm}$ .
91. Пресметај го периметарот на правоаголникот на кој аголот меѓу дијагоналите му е  $64^\circ 40'$  и дијагоналата е  $10\text{cm}$ .
92. Пресметај го периметарот на правоаголникот со страна  $a=18\text{cm}$  и агол меѓу страната  $a$  и дијагоналата  $\alpha=44^\circ$ .
93. Од подножјето на една планина до нејзиниот врв под агол  $\alpha=32^\circ 40'$  во однос на хоризонталната рамнина е праволиниски е поставена жицарница, чија должина е  $1260\text{m}$ . Пресметај ја висината на планината.
94. Колкава амплитуда (отклон) прави нишало долго  $55\text{cm}$ , ако аголот на отклонување од рамнотежната положба е  $30^\circ$ .
95. Дадена е тристрана призма  $ABCDEF$ . Пресметај го аголот меѓу дијагоналата  $EC$  и сидот  $ABED$ , ако се знае дека  $\overline{EB}=12\text{cm}$ ,  $\overline{AC}=6\text{cm}$ ,  $\overline{AB}=5\text{cm}$  и  $\angle BAC=90^\circ$ .
96. Железничка пруга се издига по  $1\text{m}$  на секои  $60\text{m}$  од патот. Најди го наклонот на тој дел од пругата.
97. Врвот на една кула од точка  $A$  во рамнината на подножјето на кулата се гледа по агол  $\alpha=27^\circ$ . Одреди ја висината на кулата, ако точката  $A$  е оддалечена  $100\text{m}$  од подножјето на кулата.
98. Еден светилник, висок  $150\text{m}$ , се гледа од брод под агол  $\alpha=9^\circ$ . Колкаво е растојанието од бродот до светилникот.



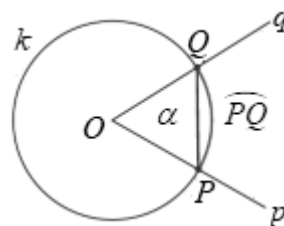
## 4.4 2Д-форми

### 4.4.1 Централен и периферен агол во кружница. Талесова теорема

Од основното образование знаеш за централен и периферен агол и Талесовата теорема. Сега ќе го повториш наученото и ќе ги прошириш своите знаења.

**Дефиниција 1.** Аголот чие теме се наоѓа во центарот на дадена кружница го нарекуваме централен агол.

На цртежот е дадена кружница  $k(O,r)$  и централен агол  $\alpha = \angle POQ$ . Краците на  $\angle POQ$  ја сечат кружницата  $k$  во точките  $P$  и  $Q$  и со тоа е определен кружниот лак  $PQ$  на кружницата  $k$  кој лежи во областа на аголот. Велиме дека кружниот лак  $PQ$  (тетивата  $PQ$ ) и централниот агол  $\angle POQ = \angle POQ$  се соодветни еден на друг.

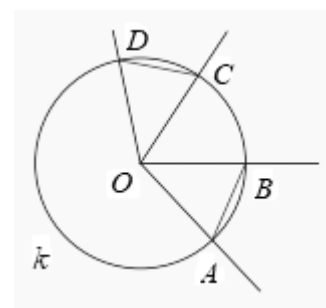


**Теорема 1.** Два централни агли во една кружница се еднакви, ако и само ако се еднакви и нивните соодветни лаци (тетиви).

**Доказ.** Нека  $k(O, r)$  е кружница и нека  $\angle AOB = \angle COD$ . Тогаш  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = r$ , па од признакот САС следува дека  $\triangle AOB \cong \triangle COD$ . Оттука следува дека  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

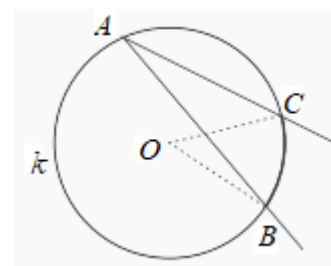
Обратно, ако  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , тогаш бидејќи  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = r$  од признакот ССС следува дека  $\triangle AOB \cong \triangle COD$ . Оттука следува дека  $\angle AOB = \angle COD$ .

Делот од тврдењето за еднакоста на кружните лаци ќе го прифатиме без истото да го докажуваме.



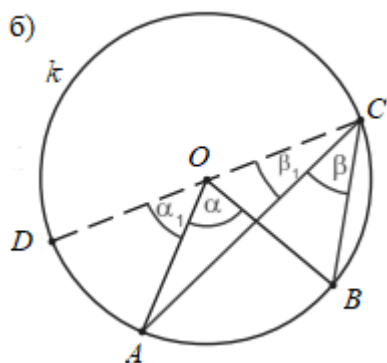
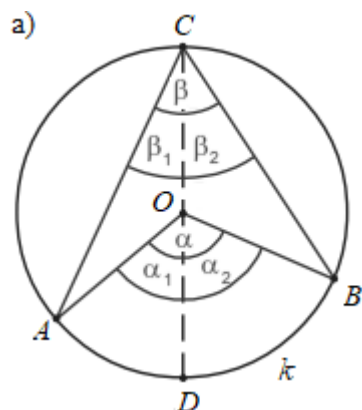
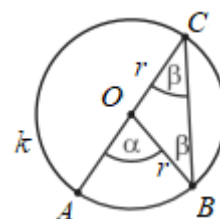
**Дефиниција 2.** Аголот чие теме е некоја точка од кружницата и неговите краци ја сечат кружницата го нарекуваме периферен агол на таа кружница.

Аголот  $\angle BAC$  е периферен за кружницата  $k(O, r)$ . За лакот  $BC$ , што лежи во областа на периферниот агол  $\angle BAC$ , велиме дека е соодветен на периферниот агол  $\angle BAC$ , а за периферниот агол  $\angle BAC$  велиме дека е над лакот  $BC$ .



**Теорема 2.** Периферниот агол во една кружница е еднаков на половината од централниот агол што е над истиот кружен лак.

**Доказ.** Нека  $\angle ACB = \beta$  е периферен во кружницата  $k(O, r)$  и  $\angle AOB = \alpha$  е соодветниот централен агол. За центарот на кружницата  $O$  можни се три случаи кои одделно ќе ги разгледаме.



а) Центарот  $O$  припаѓа на лак на  $\angle ACB = \beta$  (види цртеж). Тогаш  $\triangle BCO$  е рамнокрак, па како  $\angle AOB = \alpha$  е негов надворешен агол, заклучуваме дека

$$\angle AOB = \alpha = 2\beta = 2\angle ACB,$$

што и требаше да се докаже.

б) Центарот  $O$  е во внатрешноста на  $\angle ACB = \beta$  (цртеж а)). Повлекуваме права  $CO$ , која кружницата по втор пат ја сече во точката  $D$ . Тогаш од а) следува дека при ознаки како на цртежот добиваме

$$\begin{aligned}\angle AOB = \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 \\ &= 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta = 2\angle ACB,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

в) Центарот  $O$  е во надворешноста на  $\angle ACB = \beta$  (цртеж б)). Повлекуваме права  $CO$ , која кружницата по втор пат ја сече во точката  $D$ . Тогаш од а) следува дека при ознаки како на цртежот добиваме

$$\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1) \text{ и } \alpha_1 = 2\beta_1.$$

Ако од првото равенство го одземеме второто, добиваме  $\alpha = 2\beta$ , односно



$$\angle AOB = \alpha = 2\beta = 2\angle ACB,$$

што и требаше да се докаже.

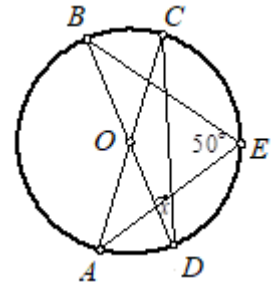
**Последица 1.** Сите периферни агли над ист кружен лак се еднакви меѓу себе.

**Доказ.** На сите периферни агли над ист кружен лак им соодветствува еден ист централен агол. Сега тврдењето следува од теоремата 2.

**Последица 2 (Талесова теорема).** Секој периферен агол над полуокружница (дијаметар) е прав агол.

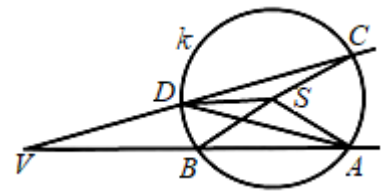
**Пример 1.** Определи го аголот  $x$  означен на цртежот десно.

**Решение.** Од условот на задачата имаме  $\angle AEB = 50^\circ$ , а бидејќи тој е периферен агол, добиваме дека  $\angle AOB = 100^\circ$ . Но, тогаш  $\angle DOC = 100^\circ$ , како накрсен агол на аголот  $\angle AOB$ . Триаголникот  $COD$  е рамнокрак со основа  $CD$ , па според тоа  $x^\circ = \angle ODC = \angle OCD = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$ .



**Пример 2.** Даден е остар агол  $\alpha$  со теме во точката  $V$ . Во внатрешноста на аголот  $\alpha$  земена е точка  $S$  која е центар на кружница  $k$ . Кружницата  $k$  го сече едниот крак на  $\alpha$  во точките  $A$  и  $B$ , а другиот крак во точките  $C$  и  $D$ , така што точките  $B$  и  $D$  се поблиску до темето  $V$  од точките  $A$  и  $C$ . Докажи, дека  $\angle AVC = \frac{1}{2}(\angle ASC - \angle BSD)$ .

**Решение.** Нека  $\angle AVC = \alpha$ ,  $\angle ASC = \beta$  и  $\angle BSD = \gamma$ . Од својството на периферниот и централниот агол за кружницата  $k$  имаме  $\angle ASC = 2\angle ADC$ , т.е.  $\angle ADS = \frac{1}{2}\beta$  и  $\angle BSD = 2\angle BAD$ , т.е.  $\angle BAD = \frac{1}{2}\gamma$ . Бидејќи  $\angle ADC$  е надворешен агол за  $\triangle DVA$



добиваме  $\angle ADC = \angle AVD + \angle VAD$ , а како  $\angle AVD = \angle AVC = \alpha$  и  $\angle VAD = \angle BAD = \frac{1}{2}\gamma$ , добиваме  $\frac{\beta}{2} = \alpha + \frac{\gamma}{2}$ , т.е.  $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ , што и требаше да се докаже.

**Пример 3.** На кружницата  $k$  редоследно во насока на движењето на стрелките на часовникот се дадени точките  $A, B, C, D$  така што важи  $\overline{AB} = \overline{CD}$ . Докажи дека  $\overline{AC} = \overline{BD}$ .

**Решение.** Имаме,  $\overline{AB} = \overline{CD}$  и бидејќи над еднакви тетиви соодветствуваат еднакви перифериски агли, добиваме

$$\angle ADB = \angle CAD = \alpha.$$

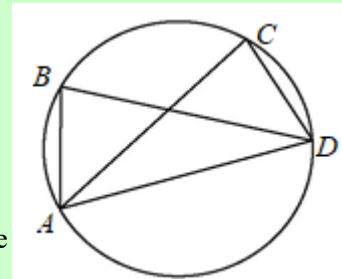
Понатаму,

$$\angle ABD = \angle ACD = \beta,$$

како перифериски агли над тетивата  $AD$ . Според тоа,

$$\angle ADC = \angle DAB = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

па од призмкот  $ACA$  следува дека триаголниците  $ABD$  и  $ACD$  се складни ( $\angle ABD = \angle ACD$ ,  $\overline{AB} = \overline{CD}$  и  $\angle ADC = \angle DAB$ ). Од оваа складност следува  $\overline{AC} = \overline{BD}$ .





**Пример 4.** Во кружница со центар во точката  $O$ , впишан е четириаголник  $ABCD$  со заемно нормални дијагонали. Докажи дека точката  $O$  е оддалечена од страната  $AB$  колку половина од должината на страната  $CD$ .

**Решение.** Нека  $\{M\} = AC \cap BD$  и од услов  $AC \perp BD$ . Нека  $\{E\} = AO \cap k$ . Тогаш од Талесова теорема  $\angle ABE = 90^\circ$ . Имаме и дека  $\angle AEB = \angle ACB$  како два перифериски агли над тетивата  $AB$  во кружницата  $k$ . Значи триаголниците  $\triangle ABE$  и  $\triangle BMC$  имаат два пара еднакви агли, т.е.

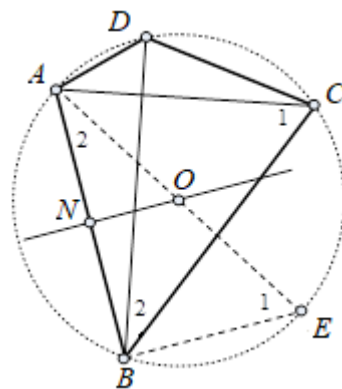
$$\angle ABE = \angle BMC = 90^\circ$$

$$\angle EAB = \angle ACB = \angle MCB$$

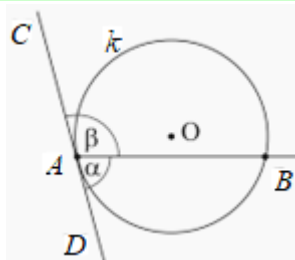
$$\angle EAB = \angle CBM = \angle CBD$$

Ова се агли над тетивите  $BE$  и  $CD$ , па следува дека  $\overline{BE} = \overline{CD}$ .

Нека  $\overline{ON}$  е растојанието од точката  $O$  до страната  $AB$ . Притоа,  $ON \parallel BE$  и  $\overline{OA} = \overline{OE} = r$  па  $ON$  е средна линија во триаголникот  $\triangle ABE$ . Тоа значи дека  $\overline{ON} = \frac{1}{2} \overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{CD}$  што и требаше да се докаже.



Нека  $AB$  е тетива во кружницата  $k$  и нека  $CD$  е тангента на кружницата во точката  $A$ . Тангентата и тетивата определуваат агли  $\angle BAD = \alpha$  и  $\angle BAC = \beta$ . Секој од овие два агли го нарекуваме агол меѓу тангентата и тетивата на кружницата.

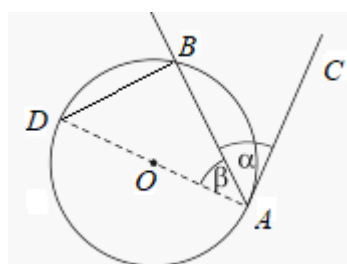


**Теорема 3.** Аголот меѓу тангентата и тетивата е еднаков на периферискиот агол над тангентата.

**Доказ.** Тврдењето ќе го докажеме кога  $\angle BAC = \alpha$  меѓу тангентата и тетивата е остар (види цртеж). Во точката  $A$  повлекуваме нормала на тангентата, која нормала минува низ центарот и кружницата ја сече по втор пат во точката  $D$ . Според Талесовата теорема триаголникот  $ABD$  е правоаголен, па затоа

$$\angle BAC = \alpha = 90^\circ - \beta = \angle ADO,$$

што и требаше да се докаже.

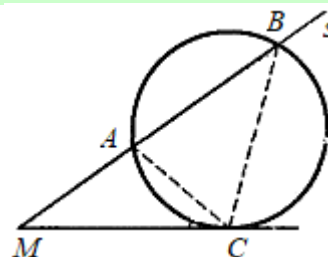


**Пример 5.** Даден се кружница  $k$  и точка  $M$  надвор од неа. Низ точката  $M$  се повлечени секанта  $s$  и тангентата  $t$ . Секантата  $s$  ја сече кружницата во точките  $A$  и  $B$ , а тангентата  $t$  ја допира кружницата во точката  $C$ . Определи ја должината на отсечката  $MC$  ако  $\overline{MA} = 4 \text{ cm}$  и  $\overline{MB} = 9 \text{ cm}$ .

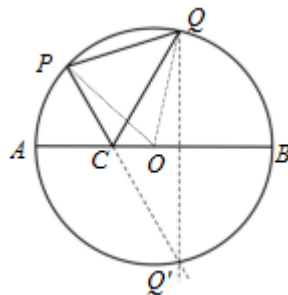
**Решение.** Имаме  $\angle CMA = \angle CMB$  и  $\angle MCA = \angle MBC$  како агол меѓу тангента и тетива и перифериски агол над тетивата  $AC$ . Според тоа,  $\triangle MBC \sim \triangle MCA$ , па затоа важи

$$\overline{MA} : \overline{MC} = \overline{MC} : \overline{MB}, \text{ т.е. } \overline{MC}^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 4 \cdot 9 = 36.$$

Значи,  $\overline{MC} = 6 \text{ cm}$ .



**Пример 6\*.** На дијаметарот  $AB$  на кружницата  $k$  избрана е произволна точка  $C$ . Точките  $P$  и  $Q$  на кружницата  $k$  се од иста страна на дијаметарот  $AB$  и важи  $\angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB = 60^\circ$ . Докажи дека должината на тетивата  $PQ$  не зависи од изборот на точката  $C$ .



**Решение.** Нека  $O$  е центарот на кружницата и нека  $Q'$  е точката симетрична на точката  $Q$  во однос на дијаметарот  $AB$ . Од својствата на симетријата следува  $\angle BCQ' = \angle BCQ = 60^\circ$ . Значи,

$$\angle PCQ' = \angle PCQ + \angle QCB + \angle BCQ' = 180^\circ,$$

па затоа точките  $P, C$  и  $Q'$  се колинеарни. Триаголникот  $CQQ'$  е рамнокрак со агол при врвот  $\angle QCQ' = 120^\circ$ , што значи дека периферниот агол над тетивата  $PQ$  е  $\angle PQ'Q = \angle CQ'Q = 30^\circ$ . Значи, централниот агол над тетивата  $PQ$  е  $\angle POQ = 60^\circ$ , па затоа триаголникот  $POQ$  е рамнострани. Конечно, должината на тетивата  $PQ$  е еднаква на радиусот на кружницата и таа не зависи од изборот на точката  $C$ .

#### Задачи

99. Колкав е периферниот агол над кружниот лак чија должина е 22% од должината на кружната линија?
100. Колкав дел од кружницата (во проценти) припаѓа на периферискиот агол еднаков на  $32^\circ 24'$ ?
101. На кружница во насока на движењето на стрелките на часовникот последователно се земени точките  $A, B, C, D, E, F$  така што важи  $\angle ADF = \angle BEC$ . Докажи дека  $AB \parallel CF$ .
102. Во паралелограмот  $ABCD$  страната  $AB$  е два пати подолга од страната  $BC$ . Нека точката  $M$  е средината на страната  $AB$ . Докажи дека отсечката  $CM$  е нормална на отсечката  $DM$ .
103. Даден е квадрат  $ABCD$ . Точката  $E$  е средина на страната  $BC$ . Ако  $F$  е точка на страната  $CD$  таква што  $EF$  е нормална на  $AE$ , докажи дека  $\angle EAB = \angle FAE$ .
104. Две кружници  $k_1$  и  $k_2$  со центри  $O_1$  и  $O_2$  се сечат во точките  $A$  и  $B$ . Произволна права која минува низ точката  $A$  ја сече  $k_1$  во  $C_1$ , а  $k_2$  во  $C_2$ . Докажи дека  $\angle BC_1O_1 = \angle BC_2O_2$ .
105. Даден е конвексен четириаголник  $ABCD$ , таков што  $\angle ABD = 50^\circ$ ,  $\angle ADB = 80^\circ$ ,  $\angle ACB = 40^\circ$ , а  $\angle DBC$  е за  $30^\circ$  поголем од  $\angle BDC$ . Определи го  $\angle DBC$ .
106. Триаголниците  $ABC$  и  $ADC$  имаат заедничка страна  $AC$ . Отсечките  $AD$  и  $BC$  се сечат во точка  $M$ , при што  $\angle ABC = \angle ADC = 40^\circ$ ,  $\overline{BD} = \overline{AB}$  и  $\angle AMC = 70^\circ$ . Определи ги аглиите  $\angle ABC$  и  $\angle ADC$ .
107. Даден е рамнокрак  $\triangle ABC$ ,  $\overline{AC} = \overline{BC}$  и  $\angle CAB = 50^\circ$ . Нека  $D$  е точка надвор од триаголникот таква што  $A$  и  $D$  се на различни страни од правата  $BC$ , при што важи  $\angle CBD = 30^\circ$  и  $\angle BAD = 20^\circ$ . Определи го  $\angle BCD$ .

## 4.4.2 Тетивен четириаголник

Во основното образование се запозна со тетивниот четириаголник. Во продолжение ќе се потсетиш на наученото и ќе ги прошириш стекнатите знаења.

**Дефиниција 3.** Четириаголникот околу кој може да се опише кружница, т.е. чии темиња лежат на една кружница, го нарекуваме *тетивен четириаголник*.

**Пример 7.** На пример, квадратот, правоаголникот и рамнокракиот трапез се тетивни четириаголници.

Во продолжение ќе докажеме неколку признаци за тетивен четириаголник.

**Теорема 4.** Четириаголникот е тетивен ако и само ако симетралите на три негови страни се сечат во една точка.

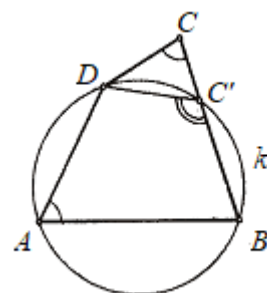
**Доказ.** Ако четириаголникот е тетивен, тогаш неговите страни се тетиви на опишаната кружница, па затоа нивните симетрали минуваат низ центарот на кружницата.

Обратно, нека симетралите на три страни од четириаголникот  $ABCD$  минуваат низ иста точка  $O$ . Тогаш  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = R$ , па затоа кружницата  $k(O, R)$  е опишана околу четириаголникот  $ABCD$ , т.е. четириаголникот  $ABCD$  е тетивен.

**Теорема 5.** Четириаголникот е тетивен ако и само ако збирот на два спротивни агли е еднаков на  $180^\circ$ .

**Доказ.** Нека  $ABCD$  е тетивен четириаголник. Тогаш точките  $A, B, C$  и  $D$  лежат на една кружница  $k$ . Темињата  $A$  и  $C$  лежат на кружницата  $k$  од различни страни од тетивата  $BD$ , па затоа  $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ .

Обратно, нека  $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$  и  $k$  е кружница опишана околу  $\triangle ABD$ . Ако точката  $C$  лежи на кружницата  $k$  доказот е завршен. Во спротивно  $C$  се наоѓа во внатрешноста или во надворешноста на кружницата. Нека  $C$  се наоѓа во надворешноста на кружницата. Отсечката  $BC$  ја сече кружницата  $k$  во точка  $C'$ , па затоа  $\angle BAD + \angle BC'D = 180^\circ$ . Значи  $\angle BCD = \angle BC'D$ . Меѓутоа  $\angle BC'D$  е надворешен за триаголникот  $C'CD$  па  $\angle BC'D > \angle BCD$ , што е контрадикција со фактот дека точката  $C$  лежи надвор од кружницата  $k$ . Аналогно се докажува случајот кога  $C$  лежи во внатрешноста на  $k$ .

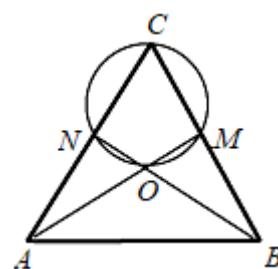


**Пример 8.** Во триаголникот  $ABC$  отсечките  $AM$  и  $BN$  се симетрали на агли ( $M \in BC, N \in AC$ ), а  $O$  е нивната пресечна точка. Точките  $C, N, O, M$  лежат на иста кружница. Определи го  $\angle ACB$ .

**Решение.** Да означиме  $\angle ACB = \gamma$ . Четириаголникот  $MCON$  е тетивен, па затоа  $\angle MON + \angle NCM = 180^\circ$ . Понатаму,

$$\angle NOM = \angle AOB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

па со замена во горното равенство, добиваме  $90^\circ + \frac{\gamma}{2} + \gamma = 180^\circ$ , т.е.  $\gamma = 60^\circ$ .

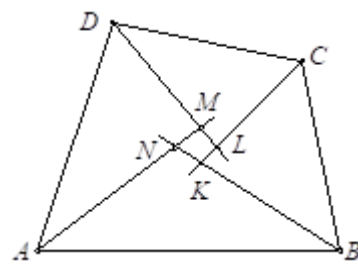


**Пример 9.** Симетралите на агли на конвексен четириаголник  $ABCD$  формираат конвексен четириаголник  $KLMN$ . Докажи дека околу  $KLMN$  може да се опише кружница.

**Решение.** Да ги означиме агли на четириаголникот  $ABCD$  со  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$  соодветно, а агли на  $KLMN$  со  $\angle K, \angle L, \angle M, \angle N$ , соодветно. Ќе докажеме дека во четириаголникот  $KLMN$  важи  $\angle L + \angle N = 180^\circ$ . Од  $\triangle DCL$  имаме  $\angle L = \frac{1}{2}(\angle D + \angle C)$  и од  $\triangle ABN$  имаме  $\angle N = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ . Значи

$$\angle N + \angle L = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle D + \angle C) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ,$$

т.е. околу  $KLMN$  може да се опише кружница.

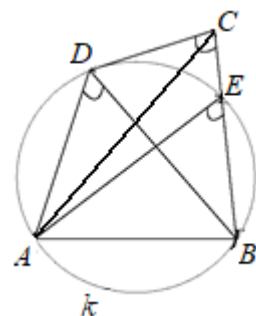


**Теорема 6.** Четириаголникот  $ABCD$  е тетивен ако и само ако  $\angle ADB = \angle ACB$ .

**Доказ.** Нека  $ABCD$  е тетивен четириаголник и  $k$  е опишаната кружница околу него. Тогаш  $\angle ACB$  и  $\angle ADB$  се перифериски агли над ист кружен лак, па затоа тие се еднакви, т.е.  $\angle ADB = \angle ACB$ .

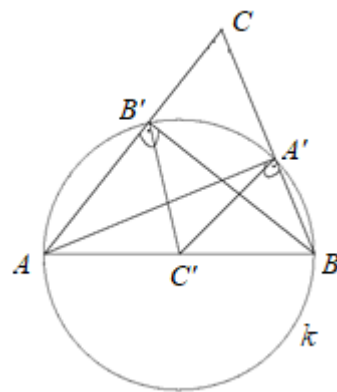
Нека во четириаголникот  $ABCD$ ,  $\angle ADB = \angle ACB$  и  $k$  е опишана кружница околу  $\triangle ABD$ . Ако  $C$  лежи на кружницата  $k$ , доказот е завршен. Затоа нека темето  $C$ , од четириаголникот  $ABCD$ , лежи во внатрешноста или во надворешноста на кружницата  $k$ . Да го разгледаме случајот кога темето  $C$  лежи надвор од кружницата. Тогаш страната  $BC$  ја сече кружницата  $k$  во точка  $E$ . Притоа  $\angle ADB = \angle AEB$ , како перифериски агли над ист лак, па затоа  $\angle ACB = \angle AEB$ . Но,  $\angle AEB$  е надворешен агол за  $\triangle AEC$ , што значи  $\angle AEB > \angle ACB$ . Последното противречи на равенството  $\angle ACB = \angle AEB$  и од добиената противречност следува дека  $C \in k$ .

Слично се докажува и случајот кога темето  $C$  лежи во внатрешноста на кружницата  $k$ .



**Пример 10.** Даден е  $\triangle ABC$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ . Докажи дека ако  $AA'$  и  $BB'$  се висини во  $\triangle ABC$ , а точката  $C'$  е средина на страната  $AB$ , тогаш  $\triangle C'A'B'$  е рамностран.

**Решение.** Имаме,  $\angle AB'B = \angle AA'B = 90^\circ$ , па затоа точките  $A, B, A'$  и  $B'$  лежат на една кружница  $k$  со центар во точката  $C'$ . Значи,  $\overline{C'A'} = \overline{C'B'}$ . Но,  $\triangle B'BC$  е правоаголен е како  $\angle ACB = 60^\circ$  добиваме  $\angle CBB' = 30^\circ$ . Значи  $\angle A'C'B' = 60^\circ$  како централен агол во кружницата  $k$  кој одговара на периферискиот  $\angle CBB' = 30^\circ$ . Според тоа  $\triangle C'A'B'$  е рамностран.



**Пример 11.** Во  $\triangle ABC$ ,  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  се висини. Докажи:

а)  $\angle BED = \angle BEF$ , б)  $\triangle BFD \sim \triangle BCA$ .

**Решение.** а) Да го означиме ортоцентарот со  $H$ . Имаме

$$\angle AEH + \angle AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

па затоа  $AFHE$  е тетивен четириаголник. Оттука следува дека  $\angle FAH = \angle HEF$ . Аналогно, од тоа што и  $ECDH$  е тетивен четириаголник, добиваме  $\angle HED = \angle DCH$ . Да забележиме дека

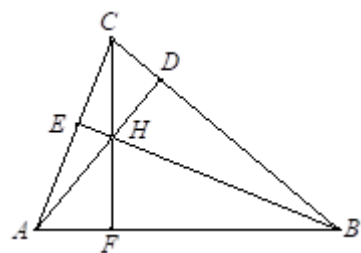
$$\angle FAH = \angle BAD, \angle BED = \angle HED \text{ и } \angle DCH = \angle BCF.$$

Од  $\triangle BAD$  и  $\triangle BCF$  следува  $\angle BAD = 90^\circ - \angle ABC = \angle BCF$ . Значи,

$$\begin{aligned} \angle BED &= \angle HED = \angle DCH = \angle BCF = \angle BAD \\ &= \angle FAH = \angle HEF = \angle BEF \end{aligned}$$

б) Од  $\angle AFC = \angle ADC = 90^\circ$  следува дека  $AFDC$  е тетивен

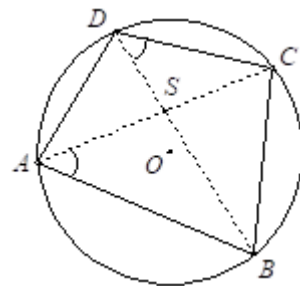
четириаголник. Сега,  $\angle BFD = 180^\circ - \angle AFD = \angle DCA$  и  $\angle DCA = \angle BCA$ , па затоа  $\angle BFD = \angle BCA$ . Но,  $\angle ABC$  е заеднички за  $\triangle BFD$  и  $\triangle BCA$ , па од признакот АА за сличност на триаголници следува дека  $\triangle BFD \sim \triangle BCA$ .



**Последица 1.** Нека  $ABCD$  е четириаголник и  $S$  е пресекот на неговите дијагонали. Тогаш четириаголникот  $ABCD$  е тетивен ако и само ако  $\triangle ABS \sim \triangle DCS$

**Доказ.** Ако  $ABCD$  е тетивен, тогаш според теоремата 6 имаме  $\angle BAC = \angle BDC$  и  $\angle ABD = \angle ACD$ . Сега, од признакот АА имаме  $\triangle ABS \sim \triangle DCS$ .

Обратно, нека  $\triangle ABS \sim \triangle DCS$ . Тогаш  $\angle BAC = \angle BDC$ , па затоа  $ABCD$  е тетивен.

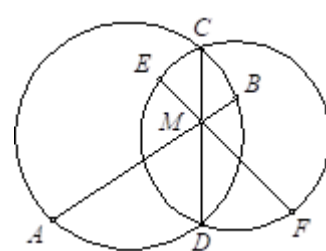


**Последица 2.** Нека  $ABCD$  е четириаголник и  $S$  е пресекот на неговите дијагонали. Тогаш четириаголникот  $ABCD$  е тетивен ако и само ако  $\overline{AS} \cdot \overline{SC} = \overline{BS} \cdot \overline{SD}$ .

**Доказ.** Имаме,  $ABCD$  е тетивен четириаголник ако и само ако  $\triangle ABS \sim \triangle DCS$  ако и само ако  $\overline{AS} : \overline{SD} = \overline{BS} : \overline{SC}$  ако и само ако  $\overline{AS} \cdot \overline{SC} = \overline{BS} \cdot \overline{SD}$ .

**Пример 12.** Две кружници се сечат во точките  $C$  и  $D$ . Низ произволна точка  $M$  од отсечката  $CD$  се повлечени отсечките  $AB$  и  $EF$ , така што  $A$  и  $B$  лежат на едната кружница, а  $E$  и  $F$  на другата. Притоа, со  $A, B, E$  и  $F$  не лежат на иста права. Докажи дека  $A, B, E$  и  $F$  лежат на иста кружница.

**Решение.** Четириаголникот  $ADBC$  е тетивен и  $M$  е пресек на неговите дијагонали, па од последицата 2 следува равенството  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ . Аналогно четириаголникот  $CEDF$  е тетивен, па затоа  $\overline{ME} \cdot \overline{MF} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ . Според тоа, важи  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{ME} \cdot \overline{MF}$ . Но,  $M$  е пресекот на дијагоналите на четириаголникот  $AFBE$ , па затоа од последица 2 следува дека  $AFBE$  е тетивен четириаголник, т.е. точките  $A, B, E$  и  $F$  лежат на иста кружница.



**За оние што сакаат да знаат повеќе**

**Теорема 4 (Птоломеј).** Производот на должините на дијагоналите на тетивен четириаголник е еднаков на збирот од производите на должините на спротивните страни.

**Доказ.** Нека  $ABCD$  е тетивен четириаголник со должини на страни  $a, b, c$  и  $d$  и должини на дијагонали  $e$  и  $f$ . Нека  $F$  е точка на дијагоналата  $AC$  таква што  $\angle BDC = \angle ADF$  (види цртеж). Бидејќи  $\angle DBC = \angle DAF$  (периферни агли над тетивата  $CD$ ) следува дека триаголниците  $AFD$  и  $BCD$  се слични, па затоа  $\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AF} : \overline{BC}$ , т.е.

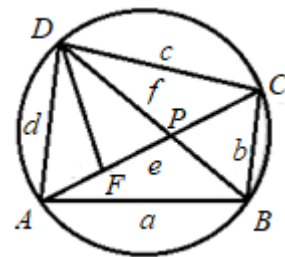
$$bd = f \cdot \overline{AF}. \quad (1)$$

Понатаму,  $\angle ADB = \angle FDC$  и како  $\angle ABD = \angle FCD$  (периферни агли над тетивата  $AD$ ) следува дека триаголниците  $FCD$  и  $ABD$  се слични, т.е

$$ac = f \cdot \overline{FC}. \quad (2)$$

Конечно, ако ги собереме равенствата (1) и (2) добиваме

$$ac + bd = f \cdot \overline{AF} + f \cdot \overline{FC} = f(\overline{AF} + \overline{FC}) = ef.$$



**Пример А.** Во кружница е впишан рамностран триаголник  $ABC$ . Произволна точка  $M$  припаѓа на лакот  $BC$  на кој не му припаѓа точката  $M$ . Докажи дека  $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$ .

**Решение.** Од теоремата на Птоломеј, применета на тетивниот четириаголник  $ABMC$  добиваме  $\overline{BM} \cdot \overline{CA} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} = \overline{BC} \cdot \overline{AM}$ . Но, триаголник  $ABC$  е рамностран, што значи  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ , па од горното равенство добиваме  $\overline{BM} \cdot \overline{AB} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AM}$  и ако последното равенство го поделеме со  $\overline{AB}$  го добиваме бараното равенство.

**Пример Б.** Рамнокрак трапез  $ABCD$  со должини на основи  $a$  и  $b$  и крак  $t$  е опишан околу кружница  $K(O, r)$ . Докажи, дека  $2r = \sqrt{ab}$ .

**Решение.** Од својствата на тангентните отсечки (види цртеж) следува  $\overline{AM} = \overline{AH}$ ,  $\overline{BN} = \overline{BH}$ ,  $\overline{CN} = \overline{CF}$ ,  $\overline{DF} = \overline{DM}$ , па затоа

$$2t = (\overline{BN} + \overline{CN}) + (\overline{AM} + \overline{DM}) = (\overline{BH} + \overline{AH}) + (\overline{CF} + \overline{DF}) = a + b,$$

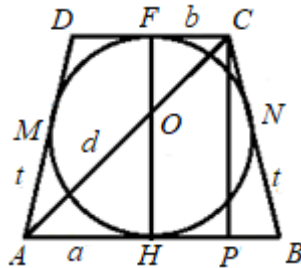
т.е.  $t = \frac{a+b}{2}$ . Понатаму, околу рамнокрак трапез може да се опише

кружница, па од теоремата на Птоломеј следува дека  $d^2 = t^2 + ab$ .

Од друга страна  $\overline{AP} = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$ , па од досега изнесеното и од

Питагоровата теорема применета на  $\triangle APC$  добиваме

$$(2r)^2 = d^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = t^2 + ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab, \text{ т.е. } 2r = \sqrt{ab}.$$



**Задача 1.** Збирот на должините на катетите на правоаголен  $\triangle ABC$  со прав агол во темето  $C$  е еднаков на  $m$ . Над хипотенузата на  $\triangle ABC$  е конструиран квадрат така што  $\triangle ABC$  и квадратот се наоѓаат од различна страна на правата  $AB$ . Определи го растојанието од точката  $C$  до центарот на квадратот.

**Задача 2.** Користејќи ја теоремата на Птоломеј докажи ја Питагоровата теорема.

**Задача 3.** Нека  $ABCD$  е квадрат впишан во кружница  $k$  и  $P$  е произволна точка на  $k$ . Докажи дека барем една од должините  $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$  е ирационален број.

## Задачи

108. Даден е триаголник  $ABC$  така што  $\angle BAC = 60^\circ$ . Нека  $O$  е центар на опишаната кружница околу триаголникот, и нека  $D$  е произволна точка на лакот  $BC$ . Докажи дека  $\angle BOC + \angle OCD = 120^\circ$ .

109. Даден е трапез  $ABCD$  таков што  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD}$ . Нека  $M$  е средина на  $CD$ . Да се најдат аглите на трапезот ако  $\angle MBC = \angle CAB$ .

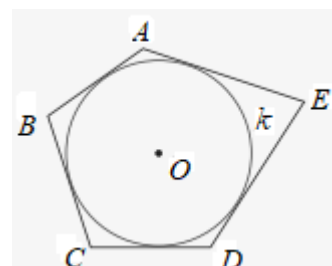


110. Нека е  $ABCD$  конвексен четириаголник во кој  $\angle DAC = \angle BDC = 36^\circ$ ,  $\angle CBD = 18^\circ$ ,  $\angle BAC = 72^\circ$ . Дијагоналите  $AC$  и  $BD$  се сечат во точката  $P$ . Одреди ја големината на аголот  $\angle APD$ .
111. Нека кружниците  $k_1$  и  $k_2$  се сечат во две различни точки  $A$  и  $B$  и нека  $t$  е заедничка тангентата на  $k_1$  и  $k_2$ , која  $k_1$  и  $k_2$  ги допира во точките  $M$  и  $N$ , соодветно. Ако  $t \perp AM$  и  $\overline{MN} = 2\overline{AM}$ , најди го  $\angle NMB$ .
112. Триаголникот  $ABC$  е впишан во кружница. Низ темето  $A$  се повлечени тетиви кои ја сечат страната  $BC$  во точките  $K$  и  $L$  и лакот  $BC$  во точките  $M$  и  $N$ , соодветно. Ако четириаголникот  $KLMN$  е тетивен, докажи дека триаголникот  $ABC$  е рамнокрак.

### 4.4.3 Тангентен четириаголник

**Дефиниција 4.** Многуаголникот во кој може да се впише кружница, т.е. кај кој сите негови страни се тангенти на една иста кружница го нарекуваме *тангентен* многуаголник.

За тангентниот многуаголник уште велиме дека е *опишан околу кружницата*.



На цртежот, пентаголот  $ABCDE$  е тангентен и тој е опишан околу кружницата  $k$ .

Како што знаеме, во секој триаголник може да се впише кружница, но ова не важи за секој четириаголник. Во оваа лекција ќе се задржиме на својствата на тангентните четириаголници и ќе докажеме две теореми во врска со овие четириаголници.

**Теорема 7.** Четириаголникот е тангентен ако и само ако симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во една точка.

**Доказ.** Нека  $ABCD$  е тангентен четириаголник и  $O$  е центар на впишаната кружница. Точката  $O$  е еднакво оддалечена од страните  $AB$  и  $AD$ , па затоа таа  $O$  лежи на симетралата на аголот кај темето  $A$  на четириаголникот  $ABCD$ . Истото важи и за симетралите на аглите кај темињата  $B, C$  и  $D$ , па затоа симетралите се сечат во една точка.

Обратно, нека симетралите на внатрешните агли на четириаголникот  $ABCD$  се сечат во точката  $O$ . Тогаш точката  $O$  е еднакво оддалечена од краците на внатрешните агли, т.е. од страните на четириаголникот  $ABCD$ . Ако тоа растојание го означиме со  $r$ , тогаш кружницата  $k(O, r)$  ги допира страните на четириаголникот  $ABCD$ , т.е. четириаголникот е тангентен.

Да забележиме дека во теорема 7 доволно е само три симетрали на аглите на четириаголникот да се сечат во една точка (Зошто?).

**Теорема 8.** Четириаголникот  $ABCD$  е тангентен ако и само ако збирите од должините на неговите спротивни страни се еднакви, т.е.

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

**Доказ.** Нека четириаголникот  $ABCD$  е тангентен и нека впишаната кружница ги допира страните  $AB, BC, CD$  и  $DA$  во точките  $P, Q, R$  и  $S$ , соодветно. Бидејќи тангентните отсечки повлечени од иста надворешна точка кон дадена кружница се еднакви, имаме:

$$\overline{AS} = \overline{AP}, \overline{BP} = \overline{BQ}, \overline{CQ} = \overline{CR}, \overline{DR} = \overline{DS}.$$

Според тоа

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AP} + \overline{BP}) + (\overline{CR} + \overline{DR}) = \overline{AS} + \overline{BQ} + \overline{CQ} + \overline{DS} \\ &= (\overline{AS} + \overline{DS}) + (\overline{BQ} + \overline{CQ}) = \overline{AD} + \overline{BC}.\end{aligned}$$

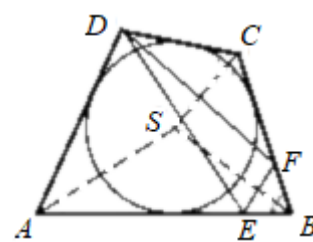
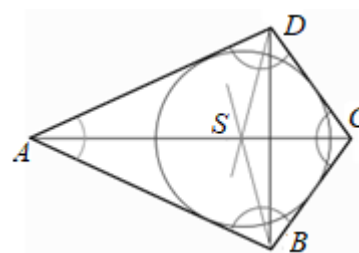
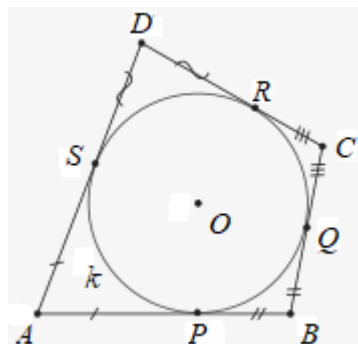
Обратно, нека за четириаголникот  $ABCD$  важи  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ . Ќе разгледаме два случаи и тоа  $\overline{AB} = \overline{AD}$  и  $\overline{AB} \neq \overline{AD}$ .

1) Ако  $\overline{AB} = \overline{AD}$ , тогаш  $\overline{BC} = \overline{CD}$ , па затоа  $ABCD$  е делтоид. Од  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$  следува дека дијагоналата  $AC$  е симетрала на  $\angle BAD$  и  $\angle BCD$ . Понатаму,  $AC$  е оска на симетрија за делтоидот  $ABCD$ , па затоа триаголникот  $\triangle ABC$  при оваа осна симетрија се пресликува во  $\triangle ADC$ . Тоа значи дека симетралата на  $\angle ABC$  се пресликува во симетралата на  $\angle ADC$ , па затоа нивниот пресек  $S$  се пресликува сам во себе. Затоа  $S \in AC$ . Значи, симетралите на внатрешните агли на делтоидот  $ABCD$  се сечат во една точка, па според теоремата 7 делтоидот  $ABCD$  е тангентен четириаголник.

2) Нека  $\overline{AB} \neq \overline{AD}$  и  $\overline{AB} > \overline{AD}$ . Од  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ , следува дека  $\overline{BC} > \overline{CD}$ . Да избереме точки  $E$  и  $F$  на страните  $AB$  и  $BC$ , соодветно, такви што  $\overline{AE} = \overline{AD}$  и  $\overline{CF} = \overline{CD}$ . Триаголниците  $AED$  и  $CDF$  се рамнокраки, а бидејќи

$$\overline{BE} = \overline{AB} - \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{BC} - \overline{CD} = \overline{BC} - \overline{CF} = \overline{BF},$$

добиваме дека  $\triangle EBF$  е рамнокрак. Според тоа, симетралите на аглите во темињата  $A, B$  и  $C$  на четириаголникот  $ABCD$  се совпаѓаат со симетралите на страните на  $\triangle DEF$ . Симетралите на страните на  $\triangle DEF$  се сечат во центарот  $S$  на опишаната кружница околу  $\triangle DEF$ . Значи, во точката  $S$  се сечат симетралите на аглите кај темињата  $A, B$  и  $C$  на четириаголникот  $ABCD$ . Конечно, од теоремата 7 следува дека  $ABCD$  е тангентен четириаголник. (Случајот  $\overline{AB} < \overline{AD}$  се докажува аналогно).



**Пример 13.** Тангентата на впишаната кружница во триаголникот  $ABC$ , паралелна на страната  $AB$ , ги сече страните  $AC$  и  $BC$  во точките  $A_1$  и  $B_1$ , соодветно. Пресметај ја должината на отсечката  $A_1B_1$ , ако должините на страните на триаголникот  $ABC$  се  $a, b$  и  $c$ .

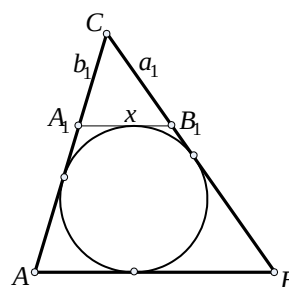
**Решение.** Нека  $\overline{A_1C} = b_1$ ,  $\overline{B_1C} = a_1$ ,  $\overline{A_1B_1} = x$ . Од сличноста на триаголниците  $ABC$  и  $A_1B_1C$  следува  $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A_1B_1} : \overline{B_1C}$  односно

$$a_1 = \frac{a}{c} x \quad (1)$$

Од истата сличност следува  $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A_1B_1} : \overline{A_1C}$ , односно

$$b_1 = \frac{b}{c} x \quad (2)$$

Бидејќи четириаголникот  $ABA_1B_1$  е тангентен, следува:





$$\overline{AB} + \overline{A_1B_1} = \overline{AA_1} + \overline{BB_1} \text{ т.е. } c + x = b - b_1 + a - a_1.$$

Од последното равенство и равенствата (1) и (2) следува  $x = \frac{a+b-c}{a+b+c} c$ .

**Пример 14.** Нека четириаголникот  $ABCD$  е и тетивен и тангентен. Ако разликата на страните  $AD$  и  $BC$  е еднаква на разликата на страните  $AB$  и  $CD$ , докажи дека  $AC$  е дијаметар на кружницата опишана околу четириаголникот  $ABCD$ .

**Решение.** Од условот  $\overline{AD} - \overline{BC} = \overline{AB} - \overline{CD}$  и од тоа што четириаголникот е тангентен, односно од  $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ , се добива дека  $\overline{BC} = \overline{CD}$  и  $\overline{AB} = \overline{AD}$ . Значи, триаголниците  $ABC$  и  $ADC$  се складни (признак CCC). Тогаш,

$$\angle ABC = \angle ADC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ADC) = 90^\circ$$

(бидејќи четириаголникот е тетивен), па затоа  $AC$  е дијаметар на опишаната кружница околу четириаголникот  $ABCD$ .

**Пример 15.** Нека  $P$  е точка во внатрешноста на  $\triangle ABC$ . Нека  $D, E$  и  $F$  се подножјата на нормалите повлечени од  $P$  на правите  $BC, CA$  и  $AB$  соодветно. Ако четириаголниците  $AEPF, BFPD$  и  $CDPE$  се тангентни, докажи дека  $P$  е центарот на впишаната кружница во  $\triangle ABC$ .

**Решение.** Бидејќи  $\angle AEP = \angle EFP = 90^\circ$  од Питагоровата теорема следува дека

$$\overline{PA}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FA}^2 = \overline{PE}^2 + \overline{EA}^2,$$

што може да се запише во видот

$$\begin{aligned} \overline{FA}^2 - \overline{PE}^2 &= \overline{EA}^2 - \overline{PF}^2 \\ (\overline{FA} - \overline{PE})(\overline{FA} + \overline{PE}) &= (\overline{EA} - \overline{PF})(\overline{EA} + \overline{PF}). \end{aligned}$$

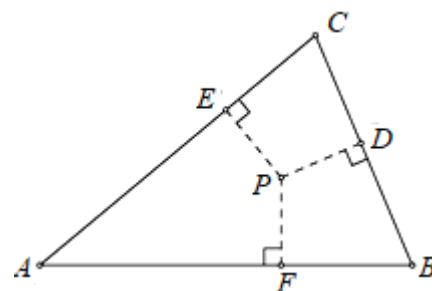
Но четириаголникот  $AFPE$  е тангентен, па затоа важи

$$\overline{FA} + \overline{PE} = \overline{EA} + \overline{PF}$$

и од горното равенство следува

$$\overline{FA} - \overline{PE} = \overline{EA} - \overline{PF}.$$

Конечно, од последните две равенства следува  $\overline{PE} = \overline{PF}$ . Аналогно се добива дека  $\overline{PD} = \overline{PE}$ , што значи дека  $P$  е центарот на впишаната кружница во  $\triangle ABC$ .



**Пример 16.** Нека  $ABCD$  е тангентен четириаголник и  $k(O, r)$  е неговата впишана кружница, која ги допира страните  $BC$  и  $AD$  во точките  $K$  и  $L$ , соодветно. Докажи дека кружницата со дијаметар  $OC$  минува низ пресекот на правите  $KL$  и  $OD$ .

**Решение.** Правата  $KC$  е тангента на  $k$ , па затоа важи

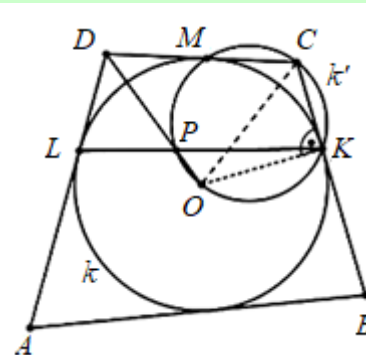
$$\angle KOL = 2\angle LKC. \quad (3)$$

Понатаму, ако  $M$  е допирната точка на  $CD$  со  $k$ , тогаш  $\triangle LOD \cong \triangle MOD$  и  $\triangle KOC \cong \triangle MOC$ , па затоа

$$\angle KOL = \angle KOM + \angle LOM = 2\angle COM + 2\angle MOD = 2\angle COD. \quad (4)$$

Од (3) и (4) следува дека  $\angle COP = \angle COD = \angle LKC = \angle CKP$ , што значи дека точките  $C, O, P, K$  лежат на иста кружница  $k'$ .

Конечно, од  $\angle OKC = 90^\circ$  следува дека  $OC$  е дијаметар на  $k'$ , што и требаше да се докаже.



## Задачи

113. Периметарот на тангентен рамнокракиот трапез  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) е еднаков на  $p$ .  
Опреди ја должината на средната линија (отсечка) на трапезот.
114. Даден е тангентен четириаголник со страни  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ,  $\overline{CD} = c$ ,  $\overline{DA} = d$  и дијагонала  $\overline{AC} = e$ . Докажи дека  $a + c > e$ .
115. Даден е тангентен четириаголник  $ABCD$ . Докажи дека впишаните кружници во триаголниците  $ABC$  и  $ACD$  се допираат.
116. Одреди ја должината на средната линија на правоаголен трапез опишан околу кружница, ако растојанијата од центарот на кружницата до темињата на подолгиот крак се 6 и 8.
117. Во тангентен четириаголник дијагоналите се заемно нормални. Докажи дека овој четириаголник е делтоид.

## 4.4.4 Правилни многуаголници

**Дефиниција 5.** Многуаголникот на кој сите страни се еднакви и сите агли се еднакви, го нарекуваме *правилен многуаголник*.

Се поставува прашање: Дали за секој природен број  $n \geq 3$  постои правилен  $n$ -аголник и како истиот да го нацртаме? Ќе докажеме дека одговорот на поставеното прашање е позитивен.

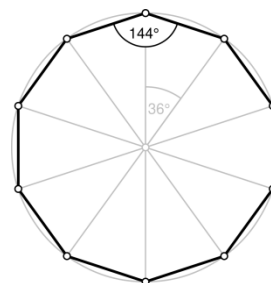
За дадено  $n \geq 3$  дадена кружница  $k$  да ја разделиме на  $n$  еднакви лаци, што може да се постигне со последователно цртање на  $n$  централни агли со големина  $\frac{360^\circ}{n}$ . Сега, ако делбените точки последователно ги поврземе со тетиви, ќе добиеме правилен  $n$ -аголник. Навистина за добиениот  $n$ -аголник важи:

а) страните му се еднакви, бидејќи се тетиви соодветни на еднакви лаци во иста кружница,

б) аглите му се еднакви, бидејќи се еднакви на  $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ , (Зошто?).

На цртежот е прикажан правилен десетаголник добиен на опишаниот начин.

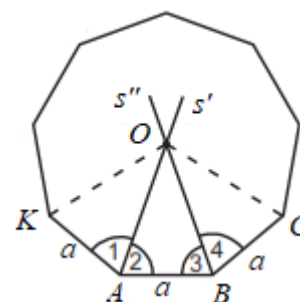
Во продолжение ќе ги докажеме поважните својства на правилните многуаголници.



**Теорема 9.** Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.

**Доказ.** Нека  $ABC...K$  е правилен многуаголник. Нека  $s'$  и  $s''$  се симетралите на два соседни агли, на пример  $\angle A$  и  $\angle B$ . Бидејќи внатрешните агли на правилниот многуаголник се помали од  $180^\circ$  симетралите  $s'$  и  $s''$  се сечат во некоја точка  $O$ . Точката  $O$  да ја поврземе со преостанатите темиња на многуаголникот.

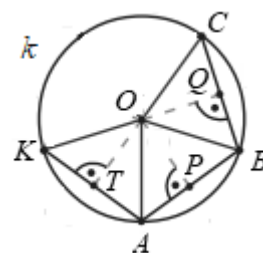
Од  $\angle 2 = \angle 3$  (половинки од еднакви агли), следува дека триаголникот  $ABO$  е рамнокрак. Понатаму,  $\overline{AB} = \overline{BC}$ ,  $\angle 3 = \angle 4$  и  $BO$  е заедничка страна, па затоа  $\triangle ABO \cong \triangle CBO$ . Според тоа,  $\overline{AO} = \overline{CO}$ . Продолжувајќи ја постапката, по конечен број чекори добиваме



$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \dots = \overline{KO}$ , што значи дека кружницата  $k(O, \overline{AO})$  е опишана околу правилниот многуаголник  $ABC\dots K$ .

**Теорема 10.** Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.

**Доказ.** Нека  $O$  е центарот на опишаната кружница околу правилниот многуаголник  $ABC\dots K$ . Тогаш триаголниците  $ABO, BCO, \dots, KAO$  се рамнокраки складни триаголници. Според тоа, нивните висини  $OP, OQ, \dots, OT$  се еднакви. Значи, кружницата  $k(O, \overline{OP})$  е впишана во правилниот многуаголник  $ABC\dots K$ .

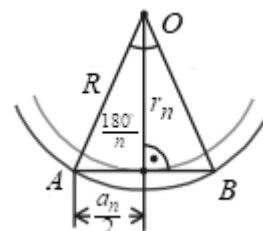


Како што гледаме опишаната и впишаната кружница околу правилен многуаголник се концентрични. За нивниот центар велиме дека е *центар на правилниот многуаголник*. Понатаму, страната  $a_n$  и радиусите  $R$  и  $r_n$  на опишаната и впишаната кружница на правилниот  $n$ -аголник  $ABC\dots K$  се елементи на еден рамнокрак триаголник  $ABO$ , кој го нарекуваме *карактеристичен триаголник* на правилниот  $n$ -аголник.

Од триаголникот  $ABO$  следува дека

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad a_n = 2r_n \tan \frac{180^\circ}{n}, \quad r_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Во следната теорема се дадени уште неколку својства на правилните многуаголници, кои е пожелно да се обидеш самостојно да ги докажеш.



**Теорема 11.** а) Секој правилен многуаголник е основно симетрична 2Д-форма. Негови оски на симетрија се симетралите на страните и симетралите на аглите.

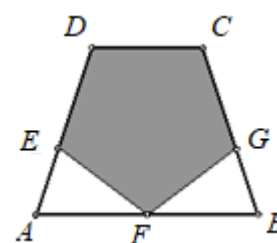
б) Ако  $n = 2k$ , тогаш спротивните страни на правилниот  $n$ -аголник се паралелни.

в) Правилниот  $n$ -аголник е централно симетричен ако и само ако  $n$  е парен број.

Во продолжение ќе разгледаме неколку примери во врска со правилните многуаголници.

**Пример 17.** На цртежот е прикажан правилен петаголник  $CDEFG$  кој е во внатрешноста на трапезот  $ABCD$ . Докажи дека  $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ .

**Решение.** Внатрешниот агол на петаголникот е еднаков на  $180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$ , а неговиот надворешен агол е еднаков на  $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ . Значи,  $\angle EDC = 108^\circ$ , па затоа  $\angle EAF = 72^\circ$ . Бидејќи  $\angle AEF = 72^\circ$ , добиваме дека  $\triangle AFE$  е рамнокрак со основа  $AE$ . Триаголниците  $\triangle AFE$  и  $\triangle GFB$  се складни (имаат исти агли и една иста страна), па според тоа  $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{AF} = \overline{FB}$ . Бидејќи петаголникот е правилен, добиваме дека  $\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{DC}$  од каде се добива дека  $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = \overline{CD} + \overline{CD} = 2\overline{CD}$ .



**Пример 18.** Нека  $ABCDE$  е правилен петаголник и нека  $P$  е пресечната точка на дијагоналите  $AD$  и  $CE$ . Докажи дека триаголникот  $ACD$  е сличен со триаголникот  $CDP$ .

**Решение.** Од својствата на периферниот и централниот агол имаме

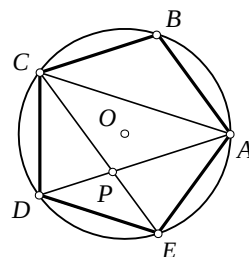
$$\angle DAC = \frac{1}{2} \angle DOC = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ.$$

Понатаму,

$$\angle ACD = \angle CDA = \angle CDP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAC) = 72^\circ,$$

$$\angle DCP = \angle DCE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CDE) = 36^\circ.$$

Значи,  $\angle DAC = \angle DCP$  и  $\angle ACD = \angle CDP$ , па од признакот АА следува дека  $\triangle ACD$  е сличен со  $\triangle CDP$ .

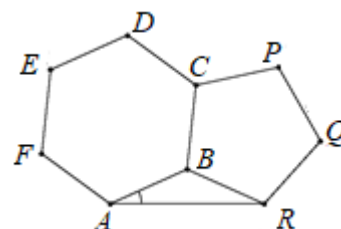


**Пример 19.** Дадени се правилен шестаголник  $ABCDEF$  и правилен петаголник  $BCPQR$  кои се наоѓаат од различни страни на правата  $BC$ . Определи го  $\angle BAR$ .

**Решение.** Од правилниот шестаголник следува  $\angle ABC = 120^\circ$ , а од правилниот петаголник следува  $\angle RBC = 108^\circ$ . Според тоа,

$$\angle ABR = 360^\circ - \angle ABC - \angle RBC = 132^\circ.$$

Понатаму, триаголникот  $ABR$  е рамнокрак со агол при врвот  $\angle ABR = 132^\circ$ , па затоа  $\angle BAR = \frac{180^\circ - 132^\circ}{2} = 24^\circ$ .



**Пример 20.** На страните на квадрат со должина 2 од надворешната страна се конструирани рамнокраки трапези, така што темињата на сите трапези се истовремено темиња на правилен дванаестаголник. Колку е периметарот на дванаестаголникот?

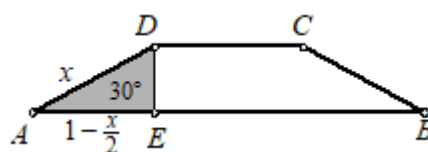
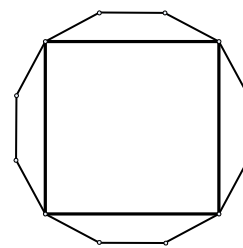
**Решение.** Да разгледаме еден трапез  $ABCD$  од дванаестаголникот.

Внатрешниот агол на дванаестаголникот е  $180^\circ - \frac{360^\circ}{12} = 150^\circ$ , па затоа  $\angle A = 30^\circ$ . Од  $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = x$  и  $\overline{AB} = 2$ , следува  $\overline{AE} = 1 - \frac{x}{2}$ . Од друга страна за правоаголникот триаголник  $AED$ , со агли  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , важи  $\overline{AE} = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Значи

$$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{x}{2}, \text{ т.е. } x = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

Затоа периметарот на дванаестаголникот

$$L = 12x = 12(\sqrt{3} - 1).$$



**Пример 21.** Правилен осумаголник со должина на страна  $a$  е впишан во квадрат со страна 1, како што е прикажано на цртежот. Докажи дека  $a^2 + 2a = 1$ .

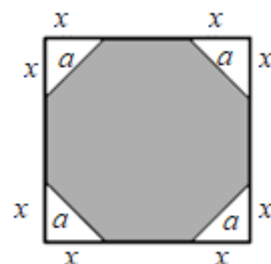
**Решение.** Квадратот е составен од осумаголник и четири рамнокраки правоаголни триаголници, со хипотенуза  $a$  и катети  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Според тоа, за страната на квадратот имаме  $a + 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = 1$ ,  $a(\sqrt{2} + 1) = 1$ ,

т.е.  $a = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} - 1$ . Сера,

$$a^2 + 2a = (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 = 1$$

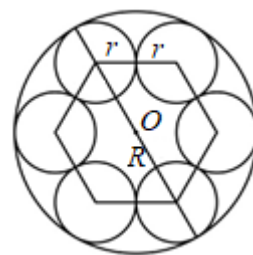
што и требаше да се докаже.



**Пример 22.** Во круг со радиус  $R$  се впишани шест еднакви мали кругови секој од кои надворешно допира два мали круга и сите внатрешно го допираат големиот круг. Определи го радиусот на еден таков мал круг.

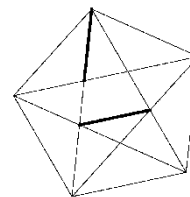
**Решение.** Центрите на малите кругови, кои го задоволуваат условот на задачата, определуваат правилен шестаголник со страна  $2r$ , каде со  $r$  го означивме радиусот на малите кругови (види цртеж). Сега, бидејќи радиусот на опишаната кружница околу правилниот шестаголник е еднаков на  $2r$ , за радиусот на големата кружницата добиваме

$$R = 2r + r = 3r,$$



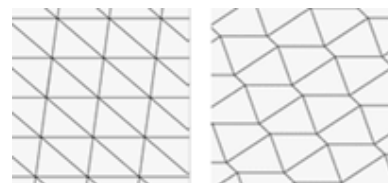
Задачи за вежби

118. Даден е правилен осумаголник  $ABCDEFGH$ . Симетралата на  $\angle ABC$  и дијагоналата  $AD$  се сечат во точката  $S$ . Определи го  $\angle ASB$ .
119. Ако над секоја страна на правилен шестаголник надвор од шестаголникот се конструира по еден квадрат и ако ги поврземе слободните темиња на вака добиените складни квадрати, тогаш ќе се добие правилен дванаесетаголник. Докажи!
120. Околу квадрат е опишана кружница со радиус  $r$ . Низ средините на секои две соседни страни на квадратот е повлечена права. Докажи дека осумте пресечни точки на овие прави и темињата на квадратот се темиња на правилен дванаесетаголник.
121. Нека  $ABCD$  е квадрат и нека  $ABH, BCK, CDM$  и  $DAT$  се рамнострани триаголници конструирани надвор од квадратот  $ABCD$ . Докажи дека средините на отсечките  $AH, BH, HK, BK, CK, KM, CM, DM, MT, DT, AT, TH$  се темиња на правилен дванаесетаголник.
122. На цртежот е даден правилен петаголник во кој се повлечени дијагоналите. Докажи, дека задебелените отсечки имаат еднаква должина.
123. Даден е правилен петаголник  $ABCDE$ . Полуправите  $AB$  и  $DC$  се сечат во точката  $F$ . Докажи дека  $\overline{FB} = \overline{AC}$ .
124. Даден е правилен деветаголник со должина на страна  $a$ . Определи ја разликата меѓу должините на најдолгата и најкратката дијагонала?



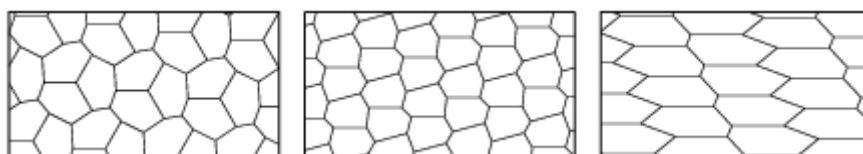
#### 4.4.5 Покривање на површина со 2Д форми

Ако една рамна површина може да се покрие користејќи само идентични копии на една иста 2Д-форма, без да се остава простор меѓу формите и без да има нивно преклопување, тогаш велиме дека таа 2Д-форма ја *паркетира* (покрива) рамнината.



Познато е дека секој триаголник и секој четириаголник, било да е конвексен или не, ја паркетира рамнината.

Понатаму, има точно три типа конвексни неправилни шестаголници со кои може да се паркетира рамнина, кои се прикажани на долните цртежи.



Исто така, докажано е дека ниту еден конвексен  $n$ -аголник ( $n \geq 7$ ) не паркетира рамнина, а за  $n=5$  досега се познати петнаесет типа конвексни петаголници кои ја паркетираат рамнината. Паркетирањето на рамнината со петаголници е интересно заради нивната можна примена во архитектурата, фармакологијата, вирусологијата, кристалографијата и слично.

Во следните разгледувања нема да ги наведуваме споменатите паркетирања со помош на неправилни петаголници туку се задржиме на паркетирањето на рамнината со помош на еден или повеќе видови правилни многуаголници.

Да ја разгледаме следната задача:

*Да се најдат сите паркетирање на рамнината со помош на правилни многуаголници, кои може да имаат различен број на страни, но сите имаат еднаква должина на страна и сите темиња на паркетирањето меѓусебно се складни.*

**Решение.** Јасно, при паркетирањето збирот на аглите во секое теме е еднаков на  $360^\circ$ , а внатрешниот агол на секој правилен  $n$ -аголник е еднаков на  $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$ .

Нека претпоставиме дека паркетирањето е реализирано со еден правилен многуаголник и нека секое теме е заедничко за точно  $k$  многуаголници. Според тоа, ја добиваме равенката  $k \frac{(n-2)180^\circ}{n} = 360^\circ$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$  која е еквивалентна на равенката  $k = 2 + \frac{4}{n-2}$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ . Од последната равенка следува  $(n-2) | 4$ , па затоа  $n-2=4$  или  $n-2=2$  или  $n-2=1$ , што значи  $(n, k) \in \{(3; 6), (4; 4), (6, 3)\}$ .

Значи, при претпоставка дека паркетирањето е извршено со еден правилен многуаголник добиваме дека тоа е можно со рамностран триаголник, квадрат или правилен шестаголник.

Нека претпоставиме дека во паркетирањето учествува повеќе од еден правилен многуаголник. Бидејќи збирот на по еден внатрешен агол на правилните триаголник, четириаголник, петаголник и шест аголник е еднаков на  $60^\circ + 90^\circ + 108^\circ + 120^\circ = 378^\circ > 360^\circ$  добиваме дека во ваквото паркетирање може да учествуваат најмногу три различни видови на правилни многуаголници.

Во случај кога во паркетирањето учествуваат два вида правилни многуаголници, ако со  $n_1$  и  $n_2$  го означиме бројот на страните на секој од овие видови многуаголници и ако во секое теме имаме по  $k_1$  и  $k_2$  многуаголници од секој вид, тогаш аналогно како погоре ја добиваме равенката  $k_1 \frac{(n_1-2)180^\circ}{n_1} + k_2 \frac{(n_2-2)180^\circ}{n_2} = 360^\circ$ ,  $k_1, k_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  која е еквивалентна на равенката  $k_1(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}) + k_2(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}) = 1$ ,  $k_1, k_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Решенијата на оваа равенка се дадени во следната табела:

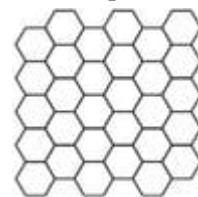
|       |    |   |    |   |   |   |
|-------|----|---|----|---|---|---|
| $k_1$ | 1  | 1 | 1  | 1 | 2 | 2 |
| $n_1$ | 3  | 4 | 10 | 6 | 3 | 4 |
| $k_2$ | 2  | 2 | 2  | 4 | 2 | 3 |
| $n_2$ | 12 | 8 | 5  | 3 | 6 | 3 |

Во случај кога во паркетањето учествуваат три вида правилни многуаголници, ако со  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  го означиме бројот на страните на секој од овие видови многуаголници и ако во секое теме имаме по  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  многуаголници од секој вид, тогаш аналогно како погоре ја добиваме равенката  $k_1 \frac{(n_1-2)180^\circ}{n_1} + k_2 \frac{(n_2-2)180^\circ}{n_2} + k_3 \frac{(n_3-2)180^\circ}{n_3} = 360^\circ$ ,  $k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$  која е еквивалентна на равенката  $k_1(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_1}) + k_2(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}) + k_3(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_3}) = 1$ ,  $k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ . Решенијата на оваа равенка се дадени во следната табела:

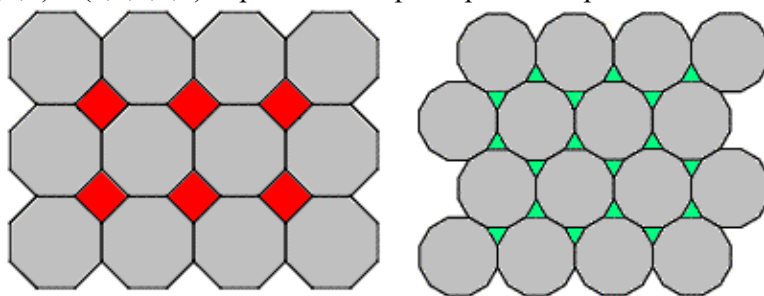
|       |    |    |    |    |    |    |   |   |
|-------|----|----|----|----|----|----|---|---|
| $k_1$ | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 |
| $n_1$ | 3  | 3  | 3  | 3  | 4  | 4  | 4 | 3 |
| $k_2$ | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1 | 1 |
| $n_2$ | 7  | 8  | 9  | 10 | 5  | 12 | 6 | 6 |
| $k_3$ | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 2  | 2 | 2 |
| $n_3$ | 42 | 24 | 18 | 15 | 20 | 3  | 4 | 4 |

Како што можеме да видиме, според претходните разгледувања имаме 17 можни паркетања при дадените услови. Но, ако земеме низа правилни многуаголници според добиените решенија на равенките ќе забележиме дека многуаголниците можеме да ги распоредиме околу една точка која е теме на паркетањето. Меѓутоа, не е можно во секој од овие случаи да продолжиме со паркетањето. Продолжувањето со паркетањето е можно во трите случаи кога имаме еден тип многуаголници и во седумте случаи кога имаме два или три типа многуаголници, кои во табелите се означени со црвени броеви.

Паркетањето со помош на правилен шестаголник, кое во теме на паркетањето е дадено со низата (6,6,6), е прикажано на цртежот. Нацртај ги паркетањата со рамностран триаголник кое се задава со низата (3,3,3,3,3,3) и квадрат кое се задава со низата (4,4,4,4).

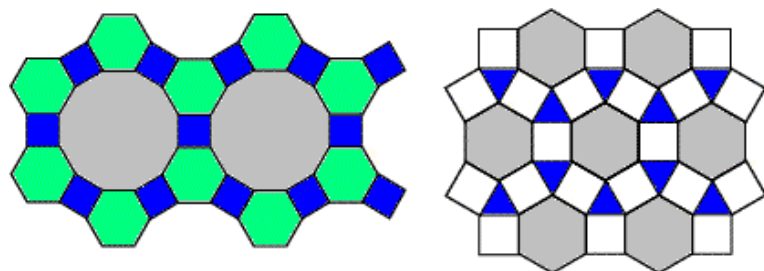


Паркетањата со два типа многуаголници се зададени со низите: (3,12,12), (4,8,8), (3,6,3,6), (3,3,3,3,6), (3,3,4,3,4) и (3,3,3,4,4). Првите две паркетања се прикажани на цртежите.



Нацртај ги паркетањата зададени со останатите четири низи.

Како што рековме со три вида правилни многуаголници имаме само две паркетања и истите се зададени со низите (4,6,12) и (3,4,6,4). Овие паркетања се прикажани на долните цртежи.



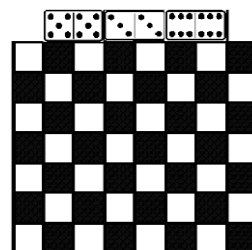


Покрај дадените покривања, интересно е покривањето на дадена површина со однапред зададени фигури, како што се: домина, тримина и тетрамина, кои се прикажани на цртежот. Во продолжение ќе разгледаме неколку примери од наведениот вид.



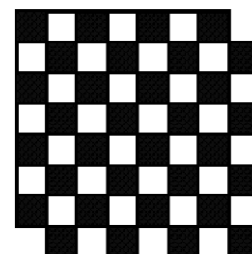
**Пример 23.** Дали е можно шаховска табла од која се отстранети двете крајни полиња на горниот ред да се покрие со домина, но така да домината не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата?

**Решение.** Можно е. Доволно е да се забележи дека најгорниот ред може да се покрие со точно 3 домина, а секој од останатите седум редови го покриваме со по 4 домина. На цртежот горниот ред е покриен со 3 домина (5+5, 3+3 и 6+6).



**Пример 24.** Од шаховска табла се отстранети 2 крајни, дијагонално поставени полиња (цртеж десно). Дали е можно таблата да се покрие со домина, но така да домината не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата?

**Решение.** Овој пат покривањето не е можно. За тоа да го докажеме, доволно е да забележиме две нешта: прво – отстранетите полиња се обоени во една иста боја (на цртежот тие се обоени во бела боја) и второ – секое домино, без разлика дали е поставено вертикално или хоризонтално, покрива точно по едно бело и по едно црно обоено поле. Бидејќи вкупно треба да се покријат  $64 - 2 = 62$ , ќе ни бидат потребни 31 домино, со кои може да се покријат 31 бело и 31 црно поле. Но, во случајов бројот на црните полиња е 32, а бројот на белите полиња е 30, па затоа бараното покривање не е можно.



**Пример 25.** Докажи дека шаховска  $8 \times 8$  табла неможе да се покрие со  $S$ -тетрамина, но може да се покрие со секое од останатите тетрамина.

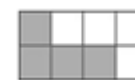
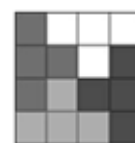
**Решение.** Покривањето на таблата со право и квадратно тетрамино е очигледно.

Секоја  $4 \times 4$  табла може да се покрие со  $T$ -тетрамина, па затоа  $8 \times 8$  табла може да се покрие со  $T$ -тетрамина покривајќи четири  $4 \times 4$  табли.

Секоја  $2 \times 4$  табла може да се покрие со  $L$ -тетрамина. Затоа  $8 \times 8$  табла може да се покрие со  $L$ -тетрамина покривајќи осум  $2 \times 4$  табли.

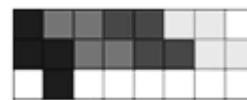
Останува да докажеме дека  $8 \times 8$  табла не може да се покрие со  $S$ -тетрамина. Да ги разгледаме првите три реда од таблата и сите можности на нивно покривање со  $S$ -тетрамина.

1° Ако првото  $S$ -тетрамино е поставено така да ги покрива првите две хоризонтални полиња од првиот ред, тогаш сите останати  $S$ -тетрамина десно од него мораат да бидат поставени на ист начин. Но, тоа значи дека последните три квадратчиња од таблата не може да се покријат со  $S$ -тетрамина.





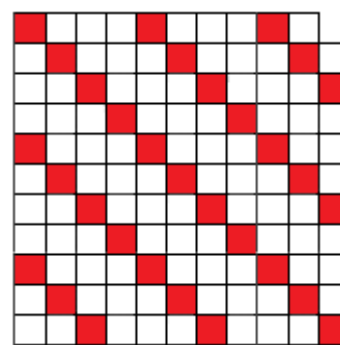
2° Ако првото  $S$ -тетрамино е поставено така да ги покрива првите две вертикални полиња од првата колона, тогаш останатите  $S$ -тетрамина десно од него мора да бидат во обратна позиција (цртеж 8). Но тогаш горното десно аглово квадратче не може да биде покриено.



Значи во било кој случај не постои покривање со  $S$ -тетрамина на првите три реда на дадената  $8 \times 8$  табла па значи не постои покривање и на дадената табла.

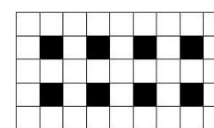
**Пример 26.** Дали може  $11 \times 11$  табла, од која е отстрането едно аголно поле, да се покрие со прави тетрамина?

**Решение.** Да ја обоиме таблата како на цртежот. Тогаш кое било право тетрамино, без разлика како е поставено, ќе покрива точно по едно црвено поле. Таблата има  $11^2 - 1 = 120$  полиња, што значи дека ако може да се покрие на саканиот начин, тогаш поставуваме  $120 : 4 = 30$  тетрамина. Тоа значи дека можеме да покриеме најмногу 30 црвени полиња, а на таблата имаме 31 црвено поле, што е противречност. Од добиената противречност следува дека саканото покривање не е можно.



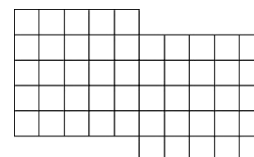
**Пример 27.** Под во форма на правоаголник е поплочен со плочки со димензии  $2 \times 2$  и  $1 \times 4$ . Една плочка случајно се скршила, но постои една плочка вишок од другата форма. Дали може со прередување, подот да се покрие со дадените плочки?

**Решение.** Да го обоиме подот како на цртежот. Тогаш секоја  $1 \times 4$  плочка покрива или 0 или 2 црни полиња, додека секоја плочка од облик  $2 \times 2$  покрива секогаш едно црно поле, од каде следува дека е невозможно да се замени скршената плочка со плочка од другата форма и притоа подот да биде целосно покриен.

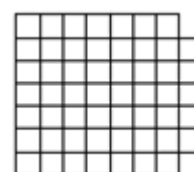


## Задачи

125. Дали две табели со димензии  $5 \times 5$ , прилепени една до друга како на цртежот, можат да се покријат со домина, но така да домината не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата?



126. Докажи дека фигурата прикажана на цртежот, која е составена од 54 единични квадрата, не може да се покрие со прави тримина.



127. Една  $9 \times 10$  табла е покриена со домина, а потоа домината се измени. Докажи дека таблата не може повторно да се покрие со овие домина, така што секое домино кое во првото покривање било во хоризонтална положба во второто покривање е во вертикална положба.

128. Дали шаховска табла со димензии  $8 \times 8$ , може да се покрие со 15  $T$ -тетрамина и едно квадратно тетрамино.

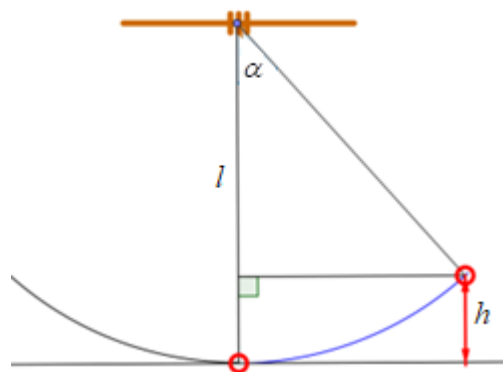
## Провери го своето знаења 5

1. Пресметај ја вредноста на изразот  $\frac{\sin^2 30^\circ + 2\sin^2 45^\circ}{3\cos^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ}$ .
2. Пресметај го остриот агол  $\alpha$  ако  $\sin(\alpha + 5^\circ) = \cos 35^\circ$ .
3. Подреди ги по големина аглиите  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ако  

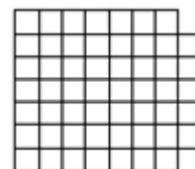
$$\sin \alpha = \frac{3}{4}, \sin \beta = 0,77, \sin \gamma = \frac{7}{9}, \sin \delta = 0,77.$$
4. Реша го правоаголниот триаголник  $\beta = 39^\circ 29'$  и  $b = 15,3$ .
5. Пресметај ја висината на фабричкиот оџак ако од точка  $M$ , што е на растојание  $76m$  од неговото подножје, оџакот се гледа под агол (спрема земјата) од  $32^\circ$ .

6. До која висина допираат пожарникарски скали долги  $30m$  кога ќе се наведнат спрема земјата под агол од  $58^\circ$ .

7. На која висина од подлогата ќе биде лулашка со должина  $1,5m$  при максимален агол на отклонување  $\alpha = 30^\circ$ .



8. Даден е трапез  $ABCD$  таков што  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD}$ . Нека  $M$  е средина на  $CD$ . Да се најдат аглиите на трапезот ако  $\angle MBC = \angle CAB$ .
9. Периметарот на тангентен рамнокракиот трапез  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) е еднаков на  $12cm$ . Определи ја должината на средната линија (отсечка) на трапезот.
10. Ако над секоја страна на правилен шестаголник надвор од шестаголникот се конструира по еден квадрат и ако ги поврземе слободните темиња на вака добиените складни квадрати, тогаш ќе се добие правилен дванаесетаголник. Докажи!
11. Докажи дека фигурата прикажана на цртежот, која е составена од 54 единични квадрата, не може да се покрие со прави тримина.



## 5 Мерење

- 5.1 Периметар и плоштина на паралелограм
- 5.2 Периметар и плоштина на триаголник
- 5.3 Периметар и плоштина на трапез и трапезоид
- 5.4 Периметар и плоштина на круг и делови на круг
- 5.5 Плоштина и волумен на права призма
- 5.6 Плоштина и волумен на прав цилиндар

Со усвојување на содржините од оваа тема ќе можеш да:

- пресметуваш периметар и плоштина на 2Д форми, како што се: квадрат, правоаголник, паралелограм, ромб, триаголник, трапез, делтоид и на сложени форми составени од нив,
- пресметуваш периметар и плоштина на круг и делови на круг,
- да ги применуваш познатите теореми при решавање на проблемски ситуации поврзани со периметар и плоштина на 2Д форми,
- да пресметуваш плоштина и волумен на права призма,
- да пресметуваш плоштина и волумен на прав цилиндар,
- да пресметуваш плоштина и волумен на сложени форми добиени со составување на прави призми и прави цилиндри.

## 5.1 Периметар и плоштина на паралелограм

Да се потсетиме на формулацијата на задачата за мерење на отсечки. Да се востанови систем за мерење на отсечки значи на секоја отсечка  $AB$  да и се придружи позитивен реален број, наречен *должина* на отсечката  $AB$ , при што се исполнети следните својства:

- 1) На складни (еднакви) отсечки им соодветствува една иста должина.
- 2) Ако точката  $B$  лежи меѓу точките  $A$  и  $C$ , тогаш должината на отсечката  $AC$  е еднаква на збирот на должините на отсечките  $AB$  и  $BC$ .

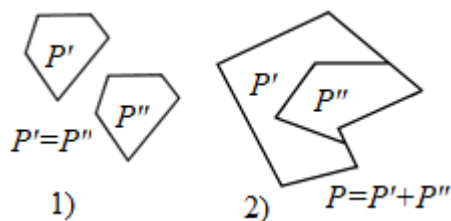
Решавањето на оваа задача ни овозможува да пресметуваме периметар на 2Д форма. Како што знаеш, збирот на должините на стстраните на еден многуаголник се нарекува периметар на многуаголникот и се означува со  $L$ . Според тоа, периметарот на четириаголникот  $ABCD$  со страни  $a, b, c, d$  се пресметува со формулата  $L = a + b + c + d$ . Понатаму, спротивните страни на паралелограмот се еднакви, па затоа ако со  $a, b$  се должините на страните на паралелограмот (правоаголникот), тогаш  $L = 2(a + b)$ . Сега, бидејќи кај ромбот (квадратот) должините на страните се еднакви, периметарот на ромб (квадрат) со страна  $a$  е  $L = 4a$ .

**Пример 1.** Пресметај го периметарот на ромб со страна дијагонали  $10\text{ cm}$  и  $24\text{ cm}$ .

**Решение.** Дијагоналите на ромбот се заемно нормални и се половат, па од Питагоровата теорема следува дека должината на страната на ромбот е  $a = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\text{ cm}$ .  
Значи, периметарот на ромбот е  $L = 4a = 52\text{ cm}$ .

Поимот плоштина на рамнинска фигура (2Д форма) се воведува аналогно на поимот должина на отсечка, на следниот начин. Да се востанови систем на мерење на површините на многуаголниците значи на секој многуаголник да му се придружи позитивен реален број, наречен негова *плоштина*, при што се исполнети следните својства:

- 1) Складни многуаголници имаат еднакви плоштини (цртеж 1)).
- 2) Ако многуаголникот е составен од два или повеќе многуаголници што не се преклопуваат, тогаш неговата плоштина е збир од плоштините на многуаголниците кои се негови делови (цртеж 2)).
- 3) Плоштината на квадрат со страна  $a$  е еднаква на  $a^2$ .



Својството 3) ни овозможува да се утврди *единица мерка за плоштина*. За ваква единица може да се земе било кој квадрат со должина на страна  $a$ , но заради усогласување на мерните единици со меѓународниот  $SI$  систем е прифатено единица мерка за плоштина да биде квадрат со страна  $1\text{ m}$ , за кој велиме дека има плоштина од еден метар квадратен и истата ја означуваме со  $1\text{ m}^2$ . Во пракса плоштините се изразуваат и со други мерни единици, на пример,  $1\text{ dm}^2$ ,  $1\text{ cm}^2$ ,  $1\text{ ar}$  и  $1\text{ ha}$ , за кои важи:

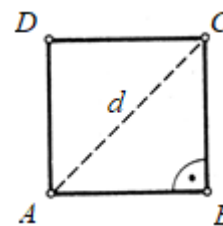
$$1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2, 1\text{ m}^2 = 10000\text{ cm}^2, 1\text{ ar} = 100\text{ m}^2 \text{ и } 1\text{ ha} = 10000\text{ m}^2.$$

**Пример 2.** Квадрат со страна  $a = 0,3\text{ m}$  има плоштина  $P = 0,09\text{ m}^2$ . Меѓутоа, ако се има предвид претходно кажаното добиваме дека плоштината на овој квадрат може да се запише на еден од следните начини  $P = 9\text{ dm}^2$ ,  $P = 900\text{ cm}^2$ ,  $P = 0,0009\text{ ar}$  и  $P = 0,000009\text{ ha}$ .

Слично, квадрат со страна  $a = 1,2 \text{ m}$  има плоштина  $P = 1,44 \text{ m}^2$ . Запиши ја истата со помош на другите мерни единици за плоштина.

Од Питагоровата теорема следува дека за дијагоналата  $d$  и страната  $a$  на квадратот  $ABCD$  важи формулата  $d = a\sqrt{2}$ , односно формулата  $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ .

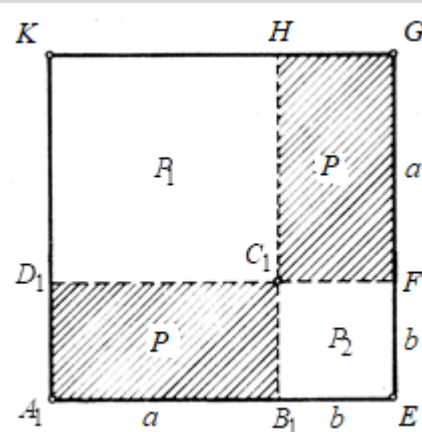
Според тоа, ако замениме во формулата  $P = a^2$ , тогаш за плоштината на квадратот изразена преку неговата дијагонала ја добиваме формулата  $P = \frac{d^2}{2}$ . Така, на пример, квадрат со дијагонала  $d = 6 \text{ cm}$  има плоштина  $P = \frac{36}{2} \text{ cm}^2 = 18 \text{ cm}^2$ .



**Теорема 1.** Плоштината на правоаголник со должини на страни  $a$  и  $b$  е еднаква на  $ab$ , т.е.  $P = ab$ .

**Доказ.** Нека е даден правоаголник  $A_1B_1C_1D_1$  чии должини на страни се  $a$  и  $b$ . Над страната  $D_1C_1$  конструираме квадрат  $D_1C_1HK$  со страна  $a$ , а над страната  $B_1C_1$  конструираме квадрат  $B_1EFC_1$  со страна  $b$  и ги продолжуваме страните  $KH$  и  $EF$  кои се сечат во точката  $G$ . Јасно, четириаголникот  $C_1FGH$  е правоаголник со страни  $a$  и  $b$ , а четириаголникот  $A_1EGK$  е квадрат со страна  $a + b$ .

Од својството 1) имаме дека секој од правоаголниците  $A_1B_1C_1D_1$  и  $C_1FGH$  има плоштина  $P$ . Понатаму, ако плоштините на квадратите  $D_1C_1HK$ ,  $B_1EFC_1$  и  $A_1EGK$  се еднакви на  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P'$ , тогаш од својството 2) следува дека  $P' = 2P + P_1 + P_2$ . Понатаму, од својството 3) добиваме дека  $P' = (a + b)^2$ ,  $P_1 = a^2$ ,  $P_2 = b^2$  и ако замениме во претходната формула наоѓаме  $(a + b)^2 = 2P + a^2 + b^2$ , од каде што следува дека  $P = ab$ .



**Пример 3.** Пресметај ја плоштината на правоаголник зададен со:

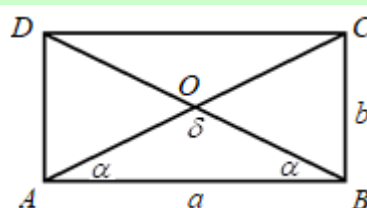
- а) страни  $a = 0,3 \text{ m}$  и  $b = 12 \text{ dm}$ , б) страна  $b = 0,05 \text{ m}$  и дијагонала  $d = 13 \text{ cm}$ .

**Решение.** а) Прво должините на страните ги изразуваме во исти мерни единици. Имаме,  $a = 0,3 \text{ m} = 3 \text{ dm}$ , па затоа плоштината на правоаголникот е  $P = 3 \cdot 12 \text{ dm}^2 = 36 \text{ dm}^2 = 0,36 \text{ m}^2$ .

б) За страната  $b$  на правоаголникот имаме  $b = 5 \text{ cm}$ . Понатаму, од Питагоровата теорема следува  $a = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$ , па затоа  $P = 5 \cdot 12 \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$ .

**Пример 4.** Пресметај ја плоштината на правоаголник зададен со дијагонала  $d = 12 \text{ cm}$  и агол меѓу дијагоналите  $\delta = 120^\circ$ .

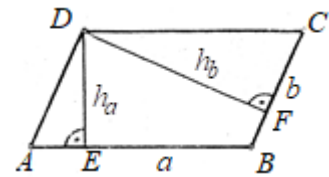
**Решение.** Страните  $a$  и  $b$  можеме да ги определиме од правоаголникот  $\triangle ABC$ , за кој е позната хипотенузата  $\overline{AC} = d$ . Од  $\triangle ABO$  имаме  $2\alpha + \delta = 180^\circ$  и како  $\delta = 120^\circ$  добиваме  $\alpha = 30^\circ$ . Сега, од  $\triangle ABC$  следува



$$a = d \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm} \text{ и } b = d \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ cm}$$

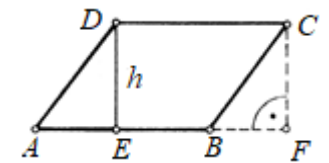
па затоа  $P = 6\sqrt{3} \cdot 6 \text{ cm}^2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

Да го разгледаме ромбоидот  $ABCD$  за кој имаме основа  $\overline{AB} = a$  и висина  $\overline{DE} = h_a$ , односно основа  $\overline{BC} = b$  и висина  $\overline{DF} = h_b$ . Формулата за пресметување на плоштината на ромбоидот ќе ја најдеме користејќи ги својствата 1) и 2).

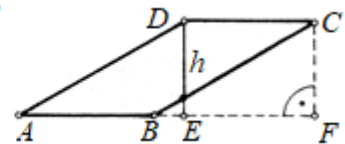
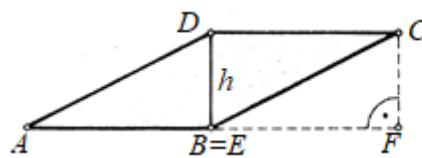


**Теорема 2.** Плоштината на ромбоид со должина на основа  $a$  и висина  $h$  е  $P = ah$ .

**Доказ.** Нека е даден правоаголник  $ABCD$  со основа  $a$  и висина  $h$ . Ги повлекуваме висините  $DE$  и  $CF$  кон основата  $AB$  и го добиваме правоаголникот  $EFCD$  чии должини на страни се  $a$  и  $h$ . Триаголниците  $AED$  и  $BFC$  се складни, па затоа  $P_{AED} = P_{BFC}$  (својство 1)). Сега од својството 2) и теоремата 1 следува



$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{AED} + P_{EBCD} \\ &= P_{BFC} + P_{EBCD} \\ &= P_{EFCD} = ah \end{aligned}$$

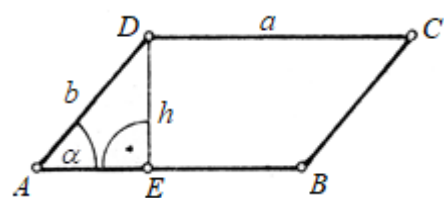


Обиди се самостојно да ги

докажеш случаите кога висините  $DE$  и  $CF$  се во положба претставена на горните цртежи.

**Пример 5.** Пресметај ја плоштината на ромбоидот зададен со страни  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$  и агол меѓу страните  $\alpha = 45^\circ$ .

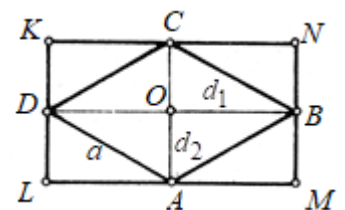
**Решение.** Од правоаголниот  $\triangle AED$  добиваме  $\sin \alpha = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{h}{b}$  т.е.  $h = b \sin \alpha$ . Од условот на задачата наоѓаме  $h = 5 \sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ . Конечно, за плоштината на ромбоидот добиваме  $P = ah = 10 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}^2 = 25\sqrt{2} \text{ cm}^2$ .



Во пример 5 видовме дека за ромбоид со страни  $a$  и  $b$  и остар агол меѓу страните  $\alpha$  важи  $h = b \sin \alpha$ . Ако замениме во формулата  $P = ah$  добиваме дека плоштината на ромбоидот може да се пресмета со формулата  $P = ab \sin \alpha$ .

Бидејќи ромбод всушност е ромбоид со еднакви страни добиваме дека неговата плоштина, во случај кога се дадени должината на страната  $a$  и висината  $h$ , може да се пресмета според формулата  $P = ah$ , а во случај кога е дадена должината на страната  $a$  и остриот агол меѓу страните  $\alpha$ , формулата (3) го добива видот  $P = a^2 \sin \alpha$ .

На крајот од овој дел ќе дадеме уште една формула за пресметување на плоштина на ромб кај кој се дадени должините на неговите дијагонали  $d_1$  и  $d_2$ . Дијагоналите на ромбот  $AC$  и  $BD$  се заемно нормални, па затоа ако во темињата  $A$  и  $C$  повлечеме прави паралелни на дијагоналата  $BD$ , а во темињата на  $B$  и  $D$  повлечеме прави паралелни на дијагоналата  $AC$ , тогаш во пресекот на овие прави ги добиваме точките  $K, L, M$  и  $N$  кои се темиња на правоаголник. Плоштината на



правоаголникот  $KLMN$  е двапати поголем од плоштината на ромбот  $ABCD$  (зошто?), т.е.  $2P_{ABCD} = P_{KLMN} = d_1 d_2$  од што следува  $P_{ABCD} = \frac{d_1 d_2}{2}$ .

**Пример 6.** Пресметај ја плоштината на ромб со страна  $a = 13 \text{ cm}$  и дијагонала  $d_2 = 10 \text{ cm}$ .

**Решение.** Од правоаголниот  $\triangle AOD$  (цртеж горе), добиваме

$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} = 12 \text{ cm} \text{ т.е. } d_1 = 24 \text{ cm}.$$

Сега, за плоштината на ромбот наоѓаме  $P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ cm}^2$ .

Во претходните разгледувања изведовме повеќе формули за пресметување на плоштините на различните видови паралелограми. Меѓутоа, како што видовме формулите  $P = ah$  и  $P = ab \sin \alpha$  се заеднички за ромбоидот и ромбот. Но, ако се има предвид дека  $\sin 90^\circ = 1$ , а кај правоаголникот и квадратот висината е еднаква на другата страна добиваме дека овие формули важат за секој паралелограм.

#### Задачи

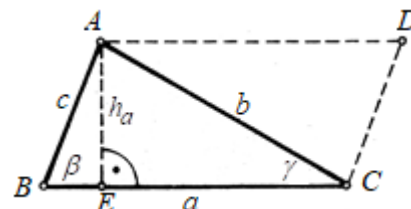
1. Пресметај плоштината и периметарот на квадратот, ако: а)  $a = 2,5 \text{ cm}$ , б)  $a = 1,7 \text{ dm}$ .
2. Одреди ја страната на квадратот чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на два квадрати со страни  $54 \text{ cm}$  и  $72 \text{ cm}$ . Колку е периметарот на овој квадрат?
3. Пресметај ја плоштината на квадратот, ако збирот на должините на неговите страна и дијагонала е  $12 \text{ cm}$ . Определи го периметарот на овој квадрат.
4. Пресметај ги плоштината и периметарот на правоаголникот со страни:  
а)  $a = 4 \text{ cm}$  и  $b = 0,3 \text{ dm}$ , б)  $a = (7 + \sqrt{3}) \text{ cm}$  и  $b = (7 - \sqrt{3}) \text{ cm}$ .
5. Колку ари има нива, во форма на правоаголник, со должина  $72,5 \text{ m}$  и ширина  $48 \text{ m}$ .
6. Пресметај го периметарот на правоаголникот чии страни се однесуваат како  $3:5$ , ако неговата плоштина е  $240 \text{ cm}^2$ .
7. Пресметај ја плоштината на правоаголникот  $ABCD$  со страна  $\overline{AB} = 14,3 \text{ cm}$  и аголот меѓу дијагоналите спроти страната  $AB$  е  $\delta = 120^\circ 46'$ .
8. Пресметај ја плоштината на правоаголник впишан во кружница со радиус  $12,5 \text{ cm}$ , ако едната страна му е  $7 \text{ cm}$ . Колку е периметарот на овој правоаголник?
9. Плоштината на еден паралелограм е  $336 \text{ cm}^2$ , а неговиот периметар е  $104 \text{ cm}$ . Пресметај го растојанието меѓу помалите страни, ако растојанието меѓу поголемите страни е  $12 \text{ cm}$ .
10. Пресметај ја страната на ромбот, ако една негова дијагонала е  $24 \text{ cm}$ , а плоштината е  $1,2 \text{ dm}^2$ .
11. Пресметај ја страната на ромбот, ако неговата плоштина е  $96 \text{ cm}^2$ , а дијагоналите се однесуваат како  $3:4$ .
12. Висината на ромбот е  $48 \text{ cm}$ , а поголемата дијагонала  $8 \text{ dm}$ . Пресметај ја страната на ромбот.
13. Пресметај ја плоштината на ромб со помала дијагонала  $6 \text{ cm}$  и радиус на впишаната кружница  $24 \text{ mm}$ .

## 5.2 Периметар и плоштина на триаголник

Да се потсетиме!

Периметарот на разностран триаголник  $ABC$  со страни  $a, b, c$  се пресметува според формулата  $L = a + b + c$ , периметарот на рамнокрак триаголник  $ABC$  со основа  $a$  и крак  $b$ , се пресметува според формулата  $L = a + 2b$  и периметарот на рамностран триаголник  $ABC$  со страна  $a$ , се пресметува според формулата  $L = 3a$ .

Да го разгледаме  $\triangle ABC$ . Низ точката  $A$  повлекуваме права паралелна на страната  $BC$ , а низ точката  $C$  права паралелна на страната  $AB$  во чиј пресек ја добиваме точката  $D$ . Четириаголникот  $ABCD$  е паралелограм, што значи  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ . Плоштината на паралелограмот  $ABCD$  е еднаква на  $ah_a$ , и таа е двапати поголема од плоштината на  $\triangle ABC$ . Со тоа ја докажавме следната теорема.



**Теорема 3.** Плоштината  $P$  на  $\triangle ABC$  со страна  $a$  и соодветна висина  $h_a$  се пресметува со формулата  $P = \frac{ah_a}{2}$ .

Секоја страна на  $\triangle ABC$  може да се земе за негова основа, па затоа точно е дека  $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ . Понатаму, ако се има предвид дека во случај кога аглите  $\beta$  и  $\gamma$  се остри, тогаш важи  $h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$  (види цртеж), со замена во формулите  $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$  добиваме  $P = \frac{absin \gamma}{2} = \frac{acsin \beta}{2}$ . На сличен начин се добива и формулата  $P = \frac{bcsin \alpha}{2}$ .

Последните формули важат и кога триаголникот е тапоаголен. Притоа, на пример, ако  $\gamma > 90^\circ$ , тогаш се користи равенството  $\sin \gamma = \sin(180^\circ - \gamma)$ , со кое ќе се запознаеш при сеопфатното проучување на тригонометриските функции.

**Пример 7.** Пресметај ја плоштината на триаголник со страни  $a = 13 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$  и агол меѓу нив  $\gamma = 30^\circ$ .

**Решение.** Ако ја искористиме формулата  $P = \frac{absin \gamma}{2}$ , тогаш за плоштината на триаголникот добиваме  $P = \frac{13 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ}{2} \text{ cm}^2 = \frac{130 \cdot \frac{1}{2}}{2} \text{ cm}^2 = 32,5 \text{ cm}^2$ .

Да се потсетиме, висината на рамностран триаголник со страна  $a$  е еднаква на  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Според тоа, со замена во  $P = \frac{ah_a}{2}$  за неговата плоштина добиваме  $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Од друга страна, кај правоаголен триаголник со катети  $a$  и  $b$  важи  $h_a = b$ , па затоа плоштината на правоаголниот триаголник се пресметува според формулата  $P = \frac{ab}{2}$ .

**Пример 8.** а) Плоштината на рамностран триаголник е еднаква на  $\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ . Пресметај го периметарот на овој триаголник.

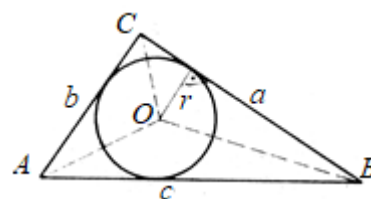


б) Плоштината на правоаголен триаголник со катета  $a = 8 \text{ cm}$  е еднаква на  $0,52 \text{ dm}^2$ . Најди ја другата катета.

**Решение.** а) Ако со  $a$  ја означеме должината на страната на рамностраниот триаголник, тогаш со замена во формулата  $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  наоѓаме  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ , од каде следува  $a^2 = 18$  т.е.  $a = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ . Значи, периметарот на триаголникот е  $L = 3a = 9\sqrt{2} \text{ cm}$

б) Ако со  $b$  ја означеме должината другата катета, тогаш со замена во формулата  $P = \frac{ab}{2}$  наоѓаме  $\frac{ab}{2} = 0,52 \text{ dm}^2 = 52 \text{ cm}^2$ , од каде наоѓаме  $b = \frac{2 \cdot 52}{13} \text{ cm} = 13 \text{ cm}$ .

Познато ни е дека во секој триаголник може да се впише кружница со радиус  $r$ . Ќе покажеме дека плоштината на триаголникот може да се пресмета ако ни е познат радиусот на впишаната кружница и полупериметарот. Да го разгледаме  $\triangle ABC$  во кој е впишана кружница со радиус  $r$ . Центарот  $O$  на впишаната кружница го поврзуваме со темињата на триаголникот и ги добиваме триаголниците  $\triangle ABO$ ,  $\triangle BCO$  и  $\triangle CAO$  чии плоштини се  $P_1 = \frac{cr}{2}$ ,  $P_2 = \frac{ar}{2}$  и  $P_3 = \frac{br}{2}$ ,



соодветно. Според тоа, за плоштината на  $\triangle ABC$  добиваме

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{a+b+c}{2} r = rs,$$

каде  $s = \frac{a+b+c}{2}$  е полупериметарот на  $\triangle ABC$ . Со тоа ја докажавме следната теорема.

**Теорема 4.** Плоштината  $P$  на  $\triangle ABC$  со полупериметар  $s$  и радиус на впишана кружница  $r$  се пресметува со формулата  $P = rs$ .

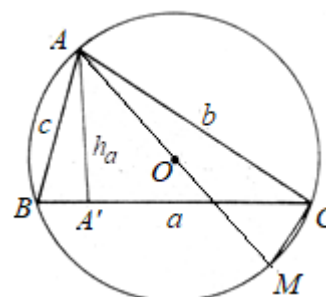
**Пример 9.** Пресметај го радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со плоштина  $480 \text{ cm}^2$  чии катети се однесуваат како 5:12.

**Решение.** Нека  $a$  и  $b$  се катетите на правоаголниот триаголник. Од условот на задачата имаме  $a:b = 5:12$  и  $ab = 2 \cdot 480$ . Од првата равенка следува  $a = \frac{5}{12}b$  и ако замениме во втората добиваме  $\frac{5}{12}b^2 = 960$ , т.е.  $b = 48 \text{ cm}$ . Според тоа,  $a = \frac{5}{12}b = 20 \text{ cm}$ . Од Питагоровата теорема за хипотенузата  $c$  добиваме  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 52 \text{ cm}$ , па неговиот полупериметар е  $s = \frac{a+b+c}{2} = 60 \text{ cm}$ . Конечно, ако замениме во формулата  $P = rs$  за радиусот на впишаната кружница наоѓаме  $480 = 60r$ , т.е.  $r = 8 \text{ cm}$ .

Како што знаеме, околу секој триаголник може да се опише кружница со радиус  $R$ . Ќе докажеме дека со помош на радиусот  $R$  и страните може да се пресмета плоштината на триаголникот.

**Теорема 5.** Плоштината  $P$  на  $\triangle ABC$  со страни  $a, b, c$  и радиус на опишан кружница  $R$  се пресметува со формулата  $P = \frac{abc}{4R}$ .

**Доказ.** Нека околу  $\triangle ABC$  е опишана кружница со радиус  $k(O, R)$  (види цртеж). Повлекуваме права  $AO$  која кружницата  $k$



ја сече и во точката  $M$ , ( $\overline{MA} = 2R$ ). Имаме  $\angle ABC = \angle AMC$ , како агли над ист лак во кружница, и како  $\triangle AMC$  е правоаголен, добиваме дека  $\triangle AMC \sim \triangle ACA'$  од што следува  $h_a : c = b : 2R$  односно  $h_a = \frac{bc}{2R}$ . Конечно, ако замениме во формулата  $P = \frac{ah_a}{2}$  добиваме  $P = \frac{a \cdot \frac{bc}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}$ , што и требаше да се докаже.

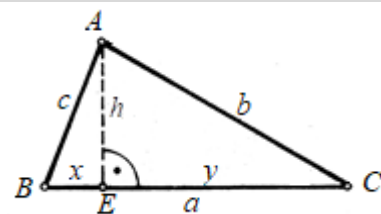
**Пример 10.** Даден е рамнокрак триаголник со основа  $a = 8 \text{ cm}$  и крак  $b = 5 \text{ cm}$ . Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

**Решение.** За висината на триаголникот соодветна на неговата основа  $a$  наоѓаме  $h_a = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm}$ . Според тоа, плоштината на триаголникот е  $P = \frac{ah_a}{2} = 12 \text{ cm}^2$ . Понатаму, ако се има предвид дека  $c = b$ , за радиусот  $R$  на опишаната кружница имаме  $R = \frac{ab^2}{4P} = \frac{25}{6} \text{ cm}$ .

Како што знаеме секој триаголник е напълно определен со неговите страни. Ќе докажеме дека плоштината на триаголникот може да се пресмета користејќи ги само неговите страни  $a, b$  и  $c$ .

**Теорема 6.** Нека  $a, b, c$  се должините на страните  $\triangle ABC$  и  $s$  е неговиот полупериметар. Тогаш плоштината  $P$  се пресметува со формулата  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Без ограничување на општоста можеме да земеме дека аголот при темето  $A$  е најголемиот внатрешен агол на  $\triangle ABC$ . При ознаки како на цртежот имаме  $a = x + y$ ,  $h^2 = c^2 - x^2$ ,  $h^2 = b^2 - y^2$ , па затоа  $c^2 - x^2 = b^2 - y^2$ , од каде добиваме  $x^2 - y^2 = c^2 - b^2$ , т.е.



$(x+y)(x-y) = c^2 - b^2$ . Со замена  $x+y = a$ , по средувањето добиваме  $x-y = \frac{c^2-b^2}{a}$ . Решението на системот од последните две линеарни равенки по  $x$  и  $y$  е  $x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ ,  $y = \frac{a^2-c^2+b^2}{2a}$ . Сега, со замена во  $h^2 = c^2 - x^2$  наоѓаме

$$\begin{aligned} h^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) = \frac{((a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2)}{4a^2} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(b-a+c)}{4a^2} = \frac{(a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2a)}{4a^2} \\ &= \frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4a^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}. \end{aligned}$$

Значи,  $h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$ , па ако замениме во  $P = \frac{ah}{2}$ , добиваме  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

Формулата  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  во литературата е позната како Херонова формула во чест на грчкиот математичар Херон.

**Пример 11.** Пресметај ја плоштината на триаголникот задаен со страните  $a = 25 \text{ cm}$ ,  $b = 39 \text{ cm}$  и  $c = 56 \text{ cm}$ .

**Решение.** Полупериметарот на триаголникот е  $s = \frac{a+b+c}{2} = 60 \text{ cm}$ . Ако ја искористиме Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{60(60-25)(60-39)(60-56)} = \sqrt{60 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 4} = 420 \text{ cm}^2.$$

**Пример 12.** Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница за  $\triangle ABC$  зададен со страните  $a = 12 \text{ cm}$ ,  $b = 35 \text{ cm}$  и  $c = 37 \text{ cm}$ .

**Решение.** Полупериметарот на триаголникот е  $s = \frac{a+b+c}{2} = 42 \text{ cm}$ . Од Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме  $P = \sqrt{42(42-12)(42-35)(42-37)} = 210 \text{ cm}^2$ . Сега, со замена во  $P = sr$  за радиусот на впишаната кружница добиваме  $r = \frac{P}{s} = 5 \text{ cm}$ , а со замена во  $P = \frac{abc}{4R}$  за радиусот на опишаната кружница добиваме  $R = \frac{abc}{4P} = \frac{37}{2} \text{ cm}$ .

На крајот од оваа точка ќе се осврнеме на плоштините на сличните триаголници.

**Теорема 7.** Плоштините на слични триаголници се однесуваат како квадратите на нивните соодветни страни.

**Доказ.** Ако  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , тогаш  $a:a' = b:b' = c:c' = k$ , каде  $a, b, c$  се страните на  $\triangle ABC$ , а  $a', b', c'$  се страните на  $\triangle A'B'C'$ . Според тоа,

$$s = ks', \quad s-a = k(s'-a'), \quad s-b = k(s'-b'), \quad s-c = k(s'-c'),$$

па затоа

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = k^2 \sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')} = k^2 P',$$

т.е.  $P:P' = k^2 = a^2:a'^2 = b^2:b'^2 = c^2:c'^2$ , што и требаше да се докаже.

**Последица 1.** а) Радиусите на впишаните кружници на слични триаголници се однесуваат како соодветните страни.

б) Радиусите на опишаните кружници на слични триаголници се однесуваат како соодветните страни.

**Доказ.** а) Ако  $r$  и  $r'$  се радиусите на впишаните кружници во сличните триаголници, тогаш од теоремите 4 и 7 следува  $r:r' = \frac{P}{s} : \frac{P'}{s'} = \frac{k^2 P'}{ks'} : \frac{P'}{s'} = k$ .

б) Ако  $R$  и  $R'$  се радиусите на впишаните кружници во сличните триаголници, тогаш од теоремите 5 и 7 следува  $R:R' = \frac{abc}{4P} : \frac{a'b'c'}{4P'} = \frac{k^3 a'b'c'}{4k^2 P'} : \frac{a'b'c'}{4P'} = k$

**Пример 13.** Нива во форма на триаголник е нацртана во размер 1:500. Плоштината на триаголникот на цртежот е  $1,2 \text{ dm}^2$ . Определи ја плоштината на нивата.

**Решение.** Ако со  $P$  ја означиме плоштината на нивата, а со  $P'$  плоштината на цртежот, тогаш, според условот на задачата  $a:a' = 500:1$ . Сега, од претходната теорема следува дека  $P:P' = 500^2$  т.е.  $P:P' = 250000:1$ . Но,  $P' = 1,2 \text{ dm}^2$  и ако замениме во последното равенство наоѓаме  $P:1,2 = 250000$ , од каде  $P = 300000 \text{ dm}^2 = 3000 \text{ m}^2 = 30 \text{ ar}$ .

**Пример 14.** Плоштините на два слични триаголника  $ABC$  и  $A'B'C'$  се  $144 \text{ cm}^2$  и  $289 \text{ cm}^2$ .

Ако страната на триаголникот  $ABC$  е  $a = 4\text{ cm}$ , најди ја соодветната страна  $a'$  на триаголникот  $A'B'C'$ .

**Решение.** Ако со  $P$  и  $P'$  ги означиме плоштините на триаголниците  $ABC$  и  $A'B'C'$ , тогаш од претходната теорема имаме  $P:P' = a^2:a'^2$ , што значи  $a'^2 = \frac{P'a^2}{P} = \frac{289 \cdot 4^2}{144} = \frac{289}{9}$  т.е.  $a' = \frac{17}{3}\text{ cm}$ .

Задачи за вежби

14. Пресметај ја плоштината на рамнострани триаголник со страна:

- а)  $a = 2,5\text{ cm}$ ,                      б)  $a = 1,7\text{ dm}$ ,                      в)  $a = 0,6\text{ m}$ .

15. Одреди го периметарот на рамнострани триаголник со плоштина  $49\sqrt{3}\text{ cm}^2$ .

16. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со основа  $12\text{ cm}$  и раб  $10\text{ cm}$ .

17. Пресметај ја плоштината на  $\triangle ABC$  зададен со страните  $b = 8\text{ cm}$ ,  $c = 12\text{ cm}$  и аголот  $\alpha = 36^\circ 40'$ .

18. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со крак  $b = 12\text{ cm}$  и агол при основата  $\alpha = 68^\circ 23'$ .

19. Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник, ако висината на хипотенузата ја дели истата на отсечки од  $9\text{ cm}$  и  $16\text{ cm}$ .

*Упатство.* Искористи ги Евклидовите теореми.

20. Пресметај го радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со плоштина  $80\text{ cm}^2$ , а катетите му се однесуваат како  $8:5$ .

21. Најди го радиусот на опишаната кружница околу рамнокракиот  $\triangle ABC$  со основа  $a = 10\text{ cm}$  и крак  $b = 13\text{ cm}$ .

22. Пресметај ја плоштината на триаголникот, ако се зададени неговите страни:

- а)  $13\text{ cm}$ ,  $14\text{ cm}$ ,  $15\text{ cm}$ ,                      б)  $13\text{ cm}$ ,  $15\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$ ,                      в)  $13\text{ cm}$ ,  $21\text{ cm}$ ,  $20\text{ cm}$ .

23. Дадени се страните во триаголникот  $50\text{ cm}$ ,  $58\text{ cm}$  и  $72\text{ cm}$ . Одреди ја најмалата висина во триаголникот.

24. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница на триаголникот со страни  $10\text{ cm}$ ,  $17\text{ cm}$ ,  $21\text{ cm}$ .

25. Најди ги страните на триаголникот, ако тие се однесуваат како  $9:10:17$ , а неговата плоштина е  $144\text{ cm}^2$ .

26. Плоштините на два слични триаголника се  $49\text{ cm}^2$  и  $64\text{ cm}^2$ , а една страна на помалиот триаголник е  $7\text{ cm}$ . Одреди ја соодветната страна на поголемиот триаголник.

27. Страните на триаголникот се однесуваат како  $2:3:4$ , а радиусот на впишаната кружница е  $\frac{\sqrt{15}}{2}\text{ cm}$ . Најди ги страните на триаголникот.

28. Пресметај ја плоштината на еден паралелограм, ако една негова страна е  $51\text{ cm}$ , а дијагоналите се  $40\text{ cm}$  и  $74\text{ cm}$ .

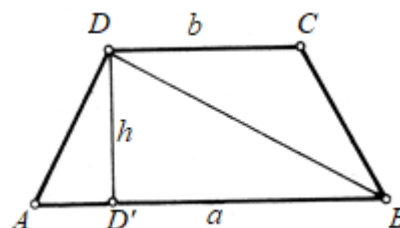
29. Низ произволна точка  $M$  во  $\triangle ABC$  се повлечени прави паралелни на неговите страни, кои го делат триаголникот на шест делови, од кои три се триаголници со плоштини  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . Изрази ја плоштината на  $\triangle ABC$  со помош на плоштините  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ .

30. Докажи дека за секој триаголник важи реалцијата  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ .

### 5.3 Периметар и плоштина на трапез и трапезоид

Како што знаеме, периметарот на трапез  $ABCD$  со основи  $a, b$  и краци  $c, d$  се пресметува со формулата  $L = a + b + c + d = 2m + c + d$ , каде  $m = \frac{a+b}{2}$  е неговата средна линија. Понатаму, периметарот на рамнокрак трапез  $ABCD$  со основи  $a, b$  и крак  $c$  се пресметува со формулата  $L = a + b + 2c = 2(m + c)$ .

Да го разгледаме трапезот  $ABCD$ , за кој ни се дадени основите  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{CD} = b$  и висината  $\overline{DD'} = h$ . Со помош на дијагоналата  $BD$  трапезот  $ABCD$  го делиме на два триаголника  $ABD$  и  $BCD$  чии плоштини се  $P_{ABD} = \frac{a \cdot h}{2}$  и  $P_{BCD} = \frac{b \cdot h}{2}$ , соодветно. Ако се искористи својството 3) на плоштините, за плоштината на трапезот  $ABCD$  имаме



$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} h.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

**Теорема 8.** Плоштината на трапезот е еднаква на производот на полузбирот од неговите основи и висината, т.е.  $P = \frac{a+b}{2} h$ .

**Пример 15.** а) Пресметај ја плоштината на трапез со основи  $7 \text{ cm}$  и  $5 \text{ cm}$  и висина  $4 \text{ cm}$ .

б) Основите на трапезот се  $23 \text{ dm}$  и  $170 \text{ cm}$ , а плоштината е  $2 \text{ m}^2$ . Најди ја висината на трапезот.

**Решение.** а) Имаме,  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$  и  $h = 4 \text{ cm}$ . Според тоа, плоштината на трапезот е  $P = \frac{a+b}{2} h = \frac{7+5}{2} \cdot 4 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$ .

б) Од условот на задачата имаме  $a = 23 \text{ dm}$ ,  $b = 170 \text{ cm} = 17 \text{ dm}$  и  $P = 2 \text{ m}^2 = 200 \text{ dm}^2$ . Ако замениме во  $P = \frac{a+b}{2} h$  добиваме  $\frac{23+17}{2} h = 200$ , т.е.  $20h = 200$ , односно  $h = 10 \text{ dm}$ .

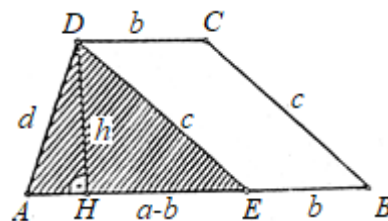
**Пример 16.** Пресметај ја плоштината на трапез со средна линија  $12 \text{ cm}$  и висина  $7 \text{ cm}$ .

**Решение.** Знаеме дека должината на средната линија на трапезот е еднаква на  $\frac{a+b}{2}$ , каде  $a$  и  $b$  се должините на основите на трапезот. Според тоа,  $\frac{a+b}{2} = 12 \text{ cm}$  и ако замениме во  $P = \frac{a+b}{2} h$  за плоштината на трапезот добиваме  $P = 12 \cdot 7 \text{ cm}^2 = 84 \text{ cm}^2$ .

**Пример 17.** Пресметај ги периметарот и плоштината на трапез со основи  $20 \text{ cm}$  и  $11 \text{ cm}$  и краци  $17 \text{ cm}$  и  $10 \text{ cm}$ .

**Решение.** Јасно, периметарот е  $L = a + b + c + d = 58 \text{ cm}$ .

Повлекуваме права  $DE \parallel BC$  и го добиваме триаголникот  $AED$  чии страни имаат должини  $a - b = 9 \text{ cm}$ ,  $17 \text{ cm}$  и  $10 \text{ cm}$ . Ја применуваме Хероновата формула и за плоштината на триаголникот добиваме



$$P_{AED} = \sqrt{18 \cdot (18-9) \cdot (18-10) \cdot (18-17)} = 36 \text{ cm}^2.$$

Според тоа, висината на триаголникот  $AED$ , која е еднаква на висината на траpezот е  $h = \frac{2P_{AED}}{a-b} = 8 \text{ cm}$ . Конечно, плоштината на траpezот е

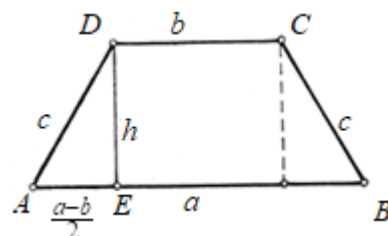
$$P = \frac{a+b}{2} h = \frac{20+11}{2} \cdot 8 \text{ cm}^2 = 124 \text{ cm}^2.$$

**Пример 18.** Пресметај ја плоштината на рамнокрак траpez со основи  $9 \text{ cm}$  и  $3 \text{ cm}$  и крак  $5 \text{ cm}$ .

**Решение.** За да ја пресметаме плоштината, прво треба да ја определиме висината на траpezот. За правоаголникот  $\triangle AED$ , имаме  $\overline{AE} = \frac{a-b}{2} = 3 \text{ cm}$ . Сега од Питагоровата теорема следува

$h = \sqrt{c^2 - (\frac{a-b}{2})^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$ . Значи, плоштината на рамнокракиот траpez е

$$P = \frac{a+b}{2} h = \frac{9+3}{2} \cdot 4 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2.$$



**Пример 19.** Пресметај ја плоштината на правоаголен траpez зададен со основи  $12 \text{ cm}$  и  $7 \text{ cm}$  и агол  $\alpha = 30^\circ$  меѓу поголемата основа и кракот.

**Решение.** Ако со  $a$  и  $b$  ги означиме основите на траpezот, тогаш за висината  $h$  имаме

$$h = (a-b) \operatorname{tg} \alpha = (12-7) \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

(направи цртеж). Според тоа, плоштината на траpezот е

$$P = \frac{a+b}{2} h = \frac{12+7}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2 = \frac{95\sqrt{3}}{6} \text{ cm}^2.$$

**Пример 20.** Пресметај ја плоштината на рамнокрак траpez со дијагонала  $12 \text{ cm}$  и ако се знае дека аголот меѓу дијагоналата и поголемата основа е еднаков на  $45^\circ$ .

**Решение.** Низ темето  $C$  повлекуваме права паралелна на дијагоналата  $BD$  и во пресекот со основата  $AB$  ја определуваме точката  $E$  (направи цртеж). Триаголникот  $AEC$  е рамнокрак правоаголен триаголник со катета  $d = 12 \text{ cm}$  и неговата плоштина е еднаква на плоштината на траpezот (Зошто!). Според тоа, за плоштината на траpezот добиваме  $P = \frac{d^2}{2} = 72 \text{ cm}^2$ .

Плоштината на произволен трапеzoид најчесто ја пресметуваме како збир на плоштини на два триаголника, добиени со повлекување на една од дијагоналите на трапеzoидот. Имено, ако се искористи својството б) на плоштините, за плоштината на трапеzoидот  $ABCD$  имаме

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD}.$$

**Пример 21.** Пресметај ја плоштината на четириаголникот  $ABCD$ , ако:  $\overline{AB} = 20 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 13 \text{ cm}$ ,  $\overline{DA} = 4 \text{ cm}$  и  $\overline{AC} = 15 \text{ cm}$ .

**Решение.** Полупериметарот на  $\triangle ABC$  е  $s = 21 \text{ cm}$ , па затоа неговата плоштина е

$$P_{ABC} = \sqrt{21 \cdot (21-20) \cdot (21-7) \cdot (21-15)} \text{ cm}^2 = 42 \text{ cm}^2.$$

Слично, за  $\triangle ACD$  имаме  $s_1 = 16 \text{ cm}$ , па затоа

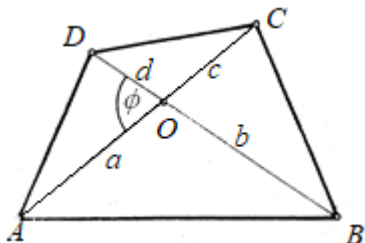
$$P_{ACD} = \sqrt{16 \cdot (16-13) \cdot (16-4) \cdot (16-15)} \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2.$$

Конечно,

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = (42 + 24) \text{ cm}^2 = 66 \text{ cm}^2.$$

Идејата плоштината на четириаголникот да ја пресметуваме како збир на плоштините на триаголниците од кои е формиран ни овозможува при определени услови да најдеме едноставни формули за пресметување на плоштина на даден четириаголник. Во следната теорема ќе разгледаме еден таков случај.

**Теорема 9.** Ако  $d_1$  и  $d_2$  се дијагоналите на даден четириаголник, а  $\phi$  е аголот меѓу дијагоналите, тогаш неговата плоштина се пресметува со формулата  $P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi$ .



**Доказ.** Нека  $O$  е пресечната точка на дијагоналите на четириаголникот  $ABCD$ , а  $\phi$  е аголот меѓу дијагоналите. Ако ставиме  $\overline{OA} = a$ ,  $\overline{OB} = b$ ,  $\overline{OC} = c$ ,  $\overline{OD} = d$  и земеме во предвид дека  $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$  добиваме

$$P_{ABO} = \frac{1}{2} ab \sin(180^\circ - \phi) = \frac{1}{2} ab \sin \phi, \quad P_{BCO} = \frac{1}{2} bc \sin \phi, \quad P_{CDO} = \frac{1}{2} cd \sin \phi \quad \text{и} \quad P_{DAO} = \frac{1}{2} ad \sin \phi.$$

Конечно, ако го искористиме својството 2) на плоштините добиваме

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABO} + P_{BCO} + P_{CDO} + P_{DAO} = \frac{1}{2} (ab + bc + cd + da) \sin \phi \\ &= \frac{1}{2} (a + c)(b + d) \sin \phi = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BD} \sin \phi = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

**Пример 22.** Пресметај ја плоштината на четириаголник со дијагонали  $d_1 = 6 \text{ cm}$  и  $d_2 = 10 \text{ cm}$ , и агол меѓу нив  $\phi = 150^\circ$ .

**Решение.** Согласно со формулата  $P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi$  за плоштината на четириаголникот добиваме

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin 150^\circ = 30 \cdot \sin(180^\circ - 150^\circ) = 30 \cdot \sin 30^\circ = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

Ако дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални, т.е. ако аголот меѓу нив е  $\phi = 90^\circ$ , тогаш за плоштината на четириаголникот добиваме  $P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin 90^\circ = \frac{1}{2} d_1 d_2$ . Според тоа, *плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали е еднаква на половината од производот на дијагоналите.*

**Пример 23.** Пресметај ја плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали  $d_1 = 6 \text{ dm}$  и  $d_2 = 10 \text{ cm}$ .

**Решение.** Имаме,  $d_1 = 6 \text{ dm} = 60 \text{ cm}$  и  $d_2 = 10 \text{ cm}$ , па како дијагоналите се заемно нормални следува дека неговата плоштина е

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 10 = 300 \text{ cm}^2 = 3 \text{ dm}^2.$$

**Пример 24.** Пресметај ја плоштината на делтоидот со страни  $17 \text{ cm}$  и  $113 \text{ cm}$  една дијагонала  $30 \text{ cm}$ .

**Решение.** Да ги означиме страните на делтоидот како на цртежот. Имаме,

$$\overline{AD} = \overline{CD} = b = 17 \text{ cm}, \quad \overline{AB} = \overline{BC} = a = 113 \text{ cm}.$$

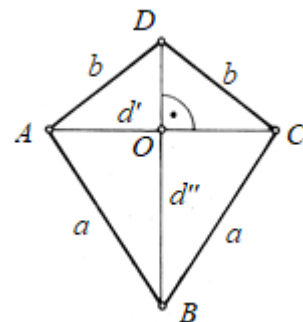


За страните на  $\triangle ABD$  важи неравенството  $\overline{AD} + \overline{DB} > \overline{AB}$ , од што добиваме  $17 + \overline{DB} > 113$ , односно  $\overline{DB} > 96$ . Бидејќи едната дијагонала на делтоидот е  $30\text{ cm}$ , од последното неравенство следува дека тоа не може да биде дијагоналата  $DB$ , што значи  $\overline{AC} = d' = 30\text{ cm}$ . Сега, од рамнокраките триаголници  $ACD$  и  $ADC$  добиваме

$$\overline{OD} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8\text{ cm},$$

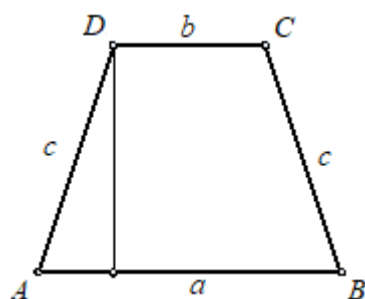
$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{113^2 - 15^2} = 112\text{ cm}$$

па затоа  $\overline{BD} = \overline{DO} + \overline{OB} = 120\text{ cm}$ . Конечно, бидејќи дијагоналите на делтоидот  $ABCD$  се заемно нормални добиваме  $P = \frac{1}{2} d' d'' = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 30 = 1800\text{ cm}^2 = 18\text{ dm}^2$ .



**Пример 25.** Во рамнокрак трапез со плоштина 20 е впишана кружница со радиус 2. Да се определат страните и периметарот на трапезот.

**Решение.** Дијаметарот на впишаната кружница е еднаков на висината  $h$  на дадениот трапез. Значи,  $h = 4$ . За плоштината на трапезот имаме  $P = \frac{a+b}{2} h = 20$ , од каде се добива дека  $a + b = 10$ . Бидејќи дадениот трапез е тангентен, зборовите на должините на спротивните страни му се еднакви па  $a + b = 2c$ , од каде добиваме дека  $c = 5$ . Од Питагоровата теорема добиваме дека:  $\frac{a-b}{2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ . Конечно решевајќи го системот равенки  $a + b = 10$ ,  $a - b = 6$ , добиваме  $a = 8$  и  $b = 2$ . Значи,  $L = a + b + 2c = 20$ .



**Пример 26.** Основите на правоаголен тангентен трапез се  $a$  и  $b$ . Пресметај ја плоштината на овој трапез.

**Решение.** Нека  $AB \parallel CD$ ,  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{CD} = b$ ,  $\overline{BC} = c$ ,  $\overline{AD} = h$ ,  $AD \perp AB$  и нека  $E \in AB$ ,  $CE \perp AB$ , тогаш  $\overline{CE} = h$  и  $\overline{EB} = a - b$ . Трапезот  $ABCD$  е тангентен трапез, па затоа

$$c + h = a + b. \quad (1)$$

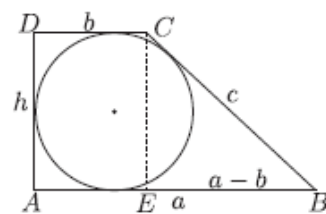
Триаголникот  $CEB$  е правоаголен, па затоа

$$c^2 - h^2 = (a - b)^2. \quad (2)$$

Со замена на (1) во (2) се добива  $(c - h)(a + b) = (a - b)^2$ , т.е.

$$c = h + \frac{(a-b)^2}{a+b}. \quad (3)$$

Со замена на (3) во (1) се добива  $h = a + b - c = \frac{1}{2} \left( a + b - \frac{(a-b)^2}{a+b} \right) = \frac{2ab}{a+b}$ , па  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = ab$ .



Задачи

31. Пресметај ја плоштината на трапез со основи  $10\text{ cm}$  и  $8\text{ cm}$  и висина  $7\text{ dm}$ .
32. Пресметај ја плоштината на трапез со основи  $30\text{ cm}$  и  $19\text{ cm}$  и краци  $13\text{ cm}$  и  $20\text{ cm}$ .
33. Пресметај ја плоштината на трапез со основи  $19\text{ cm}$  и  $2\text{ cm}$  и дијагонали  $17\text{ cm}$  и  $10\text{ cm}$ .

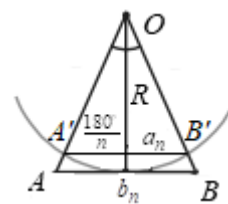


34. Пресметај ја плоштината на трапез со дијагонали  $13\text{ cm}$  и  $15\text{ cm}$ , ако неговата висина е  $12\text{ cm}$ .
35. Плоштината на трапезот е  $96\text{ cm}^2$ , а висината  $8\text{ cm}$ . Одреди ги основите на трапезот ако тие:
- а) однесуваат како  $5:3$ , б) разликуваат за  $8\text{ cm}$ .
36. Пресметај ја плоштината на правоаголен трапез со краци  $12\text{ dm}$  и  $13\text{ dm}$  и периметар  $46\text{ dm}$ .
37. Пресметај ја плоштината на правоаголен трапез со основи  $12\text{ cm}$  и  $7\text{ cm}$  и агол  $\alpha = 48^\circ 40'$  меѓу поголемата основа и кракот.
38. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи  $15\text{ cm}$  и  $7\text{ cm}$  и крак  $5\text{ cm}$ .
39. Најди го периметарот на рамнокрак трапез, ако основите и висината се однесуваат како  $4:1:2$ , а плоштината е  $5\text{ dm}^2$ .
40. Во рамнокрак трапез со основи  $18\text{ cm}$  и  $8\text{ cm}$  е впишана кружница. Пресметај ја плоштината на трапезот.
- Упатство. Трапезот е тангентен, па затоа  $a + b = 2c$ .
41. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со поголема основа  $63\text{ cm}$ , крак  $25\text{ cm}$  и дијагонала  $52\text{ cm}$ .
42. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи  $39\text{ cm}$  и  $15\text{ cm}$ , ако дијагоналите се нормални на краците.
43. Дијагоналите на трапезот  $ABCD$  се сечат во точката  $O$ . Изрази ја плоштината на трапезот со помош на плоштините  $P_1$  и  $P_2$  на триаголниците  $ABO$  и  $CDO$ .
44. Пресметај ја плоштината на четириаголник со страни  $\overline{AB} = 3\text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 6\text{ cm}$ ,  $\overline{CD} = 12\text{ cm}$  и  $\overline{DA} = 9\text{ cm}$ , и дијагонала  $\overline{AC} = 7\text{ cm}$ .
45. Пресметај ја плоштината на делтоидот, чии дијагонали се  $20\text{ dm}$  и  $30\text{ dm}$ .
46. Пресметај ја плоштината на делтоидот со страни:
- а)  $10\text{ cm}$  и  $17\text{ cm}$ , и дијагоналата (што не е оска)  $16\text{ cm}$ ;  
 б)  $13\text{ cm}$  и  $20\text{ cm}$ , и дијагоналата (што не е оска)  $21\text{ cm}$ ;
47. Во делтоид со страни  $4\text{ cm}$  и  $5\text{ cm}$  е впишана кружница со радиус  $2\text{ cm}$ . Пресметај ја плоштината на делтоидот.
48. Одреди го периметарот на делтоидот со страна  $13\text{ cm}$ , една дијагонала  $24\text{ cm}$ , ако неговата плоштина е  $480\text{ cm}^2$ .
49. Пресметај ја плоштината на четириаголникот со дијагонали  $12\text{ cm}$  и  $10\text{ cm}$ , ако аголот меѓу нив е  $30^\circ$ .

## 5.4 Периметар и плоштина на круг и делови на круг

Како што знаеме должината  $a_n$  на страната на правилен  $n$ -аголник впишан во кружница со радиус  $R$  е  $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ . Оттука добиваме дека периметарот  $l_n$  на впишаниот правилен  $n$ -аголник е

$$l_n = 2nR \sin \frac{180^\circ}{n}. \quad (1)$$



Должината на страната  $b_n$  на правилен  $n$ -аголник опишан околу кружница со радиус  $R$  е  $b_n = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ . Оттука добиваме дека периметарот  $L_n$  на опишаниот правилен  $n$ -аголник е

$$L_n = 2nR \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}. \quad (2)$$

Понатаму, од триаголниците  $OA'B'$  и  $OAB$  добиваме дека  $a_n < b_n$ , па затоа  $l_n < L_n$ , т.е.  $\frac{l_n}{2R} < \frac{L_n}{2R}$

од каде следува  $0 < \frac{L_n}{2R} - \frac{l_n}{2R}$ . Од (1) и (2) добиваме

$$\frac{l_n}{2R} = n \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ и } \frac{L_n}{2R} = n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Ако во последните формули ставиме  $n = 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768$ , добиваме:

|                                                                               |                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{l_6}{2R} = 6 \cdot \sin \frac{180^\circ}{6} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ | $\frac{L_6}{2R} = 6 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{6} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3,464101615$ |
| $\frac{l_{12}}{2R} = 12 \cdot \sin \frac{180^\circ}{12} = 3,105828541$        | $\frac{L_{12}}{2R} = 12 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{12} = 3,215390301$                  |
| $\frac{l_{24}}{2R} = 24 \cdot \sin \frac{180^\circ}{24} = 3,132628613$        | $\frac{L_{24}}{2R} = 24 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{24} = 3,159659942$                  |
| $\frac{l_{48}}{2R} = 48 \cdot \sin \frac{180^\circ}{48} = 3,139350203$        | $\frac{L_{48}}{2R} = 48 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{48} = 3,146086215$                  |
| $\frac{l_{96}}{2R} = 96 \cdot \sin \frac{180^\circ}{96} = 3,141031951$        | $\frac{L_{96}}{2R} = 96 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{96} = 3,142714599$                  |
| $\frac{l_{192}}{2R} = 192 \cdot \sin \frac{180^\circ}{192} = 3,141452472$     | $\frac{L_{192}}{2R} = 192 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{192} = 3,14187305$                |
| $\frac{l_{384}}{2R} = 384 \cdot \sin \frac{180^\circ}{384} = 3,141557608$     | $\frac{L_{384}}{2R} = 384 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{384} = 3,141662747$               |
| $\frac{l_{768}}{2R} = 768 \cdot \sin \frac{180^\circ}{768} = 3,141583892$     | $\frac{L_{768}}{2R} = 768 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{768} = 3,141610177$               |

Како што можеме да видиме со зголемувањето на  $n$  количниците  $\frac{l_n}{2R}$  постојано растат, а количниците  $\frac{L_n}{2R}$  постојано се намалуваат. Притоа имаме:

$$\begin{aligned} \frac{L_6}{2R} - \frac{l_6}{2R} &\approx 0,4641016 & \frac{L_{12}}{2R} - \frac{l_{12}}{2R} &\approx 0,2095618 & \frac{L_{24}}{2R} - \frac{l_{24}}{2R} &\approx 0,02703133 & \frac{L_{48}}{2R} - \frac{l_{48}}{2R} &\approx 0,006736 \\ \frac{L_{96}}{2R} - \frac{l_{96}}{2R} &\approx 0,0016827 & \frac{L_{192}}{2R} - \frac{l_{192}}{2R} &\approx 0,0004248 & \frac{L_{384}}{2R} - \frac{l_{384}}{2R} &\approx 0,00010514 & \frac{L_{768}}{2R} - \frac{l_{768}}{2R} &\approx 0,0000263. \end{aligned}$$

Може да се докаже дека, во општ случај со зголемувањето на  $n$  позитивната разлика  $\frac{L_n}{2R} - \frac{l_n}{2R}$  постојано се намалува и се приближува кон бројот 0. Тоа значи дека со зголемувањето на  $n$  количниците  $\frac{l_n}{2R}$  и  $\frac{L_n}{2R}$  се приближуваат кон еден ист број кој го означуваме со  $\pi$ . Овој број е ирационален и со непосредни пресметувања е добиено дека  $\pi = 3,14159265358979323846\dots$

Сега, бидејќи со зголемувањето на  $n$  количните  $\frac{l_n}{2R}$  и  $\frac{L_n}{2R}$  се приближуваат кон бројот  $\pi$ , заклучуваме дека со зголемувањето на  $n$  периметрите  $l_n$  и  $L_n$  на впишаните и опишаните правилни  $n$ -аголници во кружница со радиус  $R$  се приближуваат кон бројот  $2R\pi$ .

Периметарот на секој опишан правилен  $n$ -аголник е поголем од периметарот на кружницата, а периметарот на секој впишан правилен  $n$ -аголник е помал од периметарот на кружницата. Бидејќи со зголемувањето на  $n$  периметрите се приближуваат до бројот  $2R\pi$  заклучуваме дека периметарот на кружницата со радиус  $R$  е

$$L = 2R\pi. \quad (3)$$

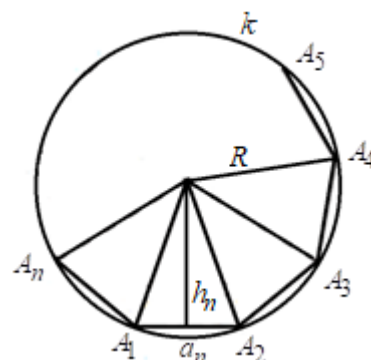
**Пример 27.** Пресметај го радиусот на кружница со периметар 125 cm .

**Решение.** Од формулата (3) наоѓаме  $125 = 2\pi r$ , т.е.  $r = \frac{125}{2\pi} \approx \frac{125}{2 \cdot 3,141592} \approx 19,894$  cm .

Дадена е кружница со радиус  $R$ , во која впишуваме правилен  $n$ -аголник. Плоштината на впишаниот  $n$ -аголник се пресметува според формулата

$$P_n = \frac{1}{2} l_n \cdot h_n,$$

каде со  $l_n$  е означен периметарот на впишаниот  $n$ -аголник, а  $h_n$  е висината на неговиот карактеристичен триаголник. Бидејќи со зголемувањето на  $n$  се зголемува и периметарот  $l_n$  на впишаниот  $n$ -аголник и висината  $h_n$  на неговиот карактеристичен триаголник, заклучуваме дека се зголемува плоштината на  $n$ -аголникот. Понатаму, ако со  $P$  ја означиме плоштината на кругот, тогаш разликата  $P - P_n$  со зголемувањето на  $n$  станува се помала и се приближува кон 0. Тоа значи дека плоштината на многуаголникот  $P_n$  се приближува кон плоштината на кругот  $P$ . Претходно видовме дека со зголемувањето на  $n$  периметарот  $l_n$  се приближува кон периметарот на кружницата  $L$  и бидејќи висината  $h_n$  се приближува кон радиусот  $R$  заклучуваме дека плоштината  $P_n = \frac{1}{2} l_n \cdot h_n$  се приближува кон  $\frac{1}{2} L \cdot R$ . Значи,  $P_n$  се приближува кон  $P$  и  $P_n$  се приближува кон  $\frac{1}{2} L \cdot R$ , па заклучуваме дека  $P = \frac{1}{2} L \cdot R$ . Конечно, од последната формула и од (3) следува дека плоштината на кругот со радиус  $R$  е  $P = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R$ , т.е.



$$P = \pi R^2. \quad (4)$$

**Пример 28.** Пресметај го периметар на кружницата, ако плоштината на кругот е  $78,54$  cm<sup>2</sup> .

**Решение.** Од формулата (4) наоѓаме  $78,54 = \pi r^2$ , т.е.  $r = \sqrt{\frac{78,54}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{78,54}{3,141592}} \approx 5$  cm . Според тоа, за периметарот на кругот добиваме  $L = 2\pi r \approx 10 \cdot 3,141592 \dots$  cm  $\approx 31,42$  cm .

Како што видовме, периметарот на кружницата со радиус  $r$  е  $L = 2\pi r$ . Меѓутоа, ако кружницата ја поделиме на 360 еднакви делови, тогаш должината на кружниот лак кој соодветствува на централен агол со големина од  $1^\circ$  е еднаква на  $\frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$ . Според тоа, ако имаме кружен лак на кој соодветствува централен агол  $\alpha$  (изразен во степени), тогаш неговата должина се пресметува според формулата

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180}. \quad (5)$$

**Пример 29.** а) Најди ја должината на кружниот лак во кружница со радиус  $r = 2$  cm, соодветен на периферниот агол  $\beta = 75^\circ$  .

б) Најди го централниот агол во кружница со радиус  $r = 3$  cm, соодветен на кружен лак со должина  $l = 2\pi$  cm .

**Решение.** а) Забележуваме дека даден ни е периферниот агол соодветен на кружниот лак, па затоа соодветниот централен агол е  $\alpha = 2\beta = 150^\circ$ . Сега, со замена во формулата (5) за должината на кружниот лак наоѓаме  $l = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 150}{180} \text{ cm} = \frac{5\pi}{3} \text{ cm}$ .

б) Од условот на задачата имаме  $l = 2\pi \text{ cm}$  и  $r = 3 \text{ cm}$  па ако замениме во формулата (5) наоѓаме  $2\pi = \frac{3\pi\alpha}{180}$ , т.е.  $\alpha = 120^\circ$ .

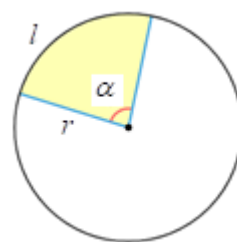
Делот од кругот што е зафатен со централен агол го нарекуваме *кружен исечок* или *кружен сектор*.

Да ја пресметаме плоштината на кружниот исечок во круг со радиус  $r$  на кој му соодветствува централен агол  $\alpha$ . Нека претпоставиме дека кругот е поделен на 360 складни исечоци, при што секој исечок има централен агол од  $1^\circ$ . Бидејќи плоштината на целиот круг е еднаква на  $\pi r^2$  и исечоците со централен агол од  $1^\circ$  се складни меѓу себе, добиваме дека плоштината на секој исечок со централен агол од  $1^\circ$  е  $P_0 = \frac{\pi r^2}{360}$ . Според тоа, ако имаме кружен исечок на кој му соодветствува централен агол  $\alpha$  (изразен во степени), тогаш неговата плоштина се пресметува според формулата

$$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}. \quad (6)$$

Ако во (6) замениме од (5) за должината на лакот во кружница со радиус  $r$  соодветен на централен агол  $\alpha$  за плоштината на кружниот исечок ја добиваме формулата

$$P = \frac{lr}{2}. \quad (7)$$



**Пример 30.** а) Најди ја плоштината на кружниот исечок во кружница со радиус  $r = 6 \text{ cm}$ , соодветен на централниот агол  $\alpha = 75^\circ$ .

б) Најди го централниот агол во кружница со радиус  $r = 3 \text{ cm}$ , соодветен на кружен исечок со плоштина  $P = 2\pi \text{ cm}^2$ .

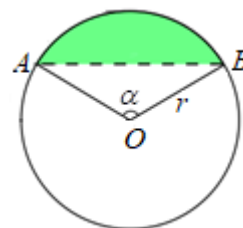
**Решение.** а) Имаме  $r = 6 \text{ cm}$  и  $\alpha = 75^\circ$  и ако замениме во (6) за плоштината на исечокот добиваме  $P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 75}{360} \text{ cm}^2 = 7,5\pi \text{ cm}^2$ .

б) Од условот на задачата имаме  $P = 2\pi \text{ cm}^2$  и  $r = 3 \text{ cm}$ , па ако замениме во формулата (6) наоѓаме  $2\pi = \frac{3^2 \pi \alpha}{360}$ , т.е.  $\alpha = 80^\circ$ .

Делот од кругот што е зафатен со еден негов лак и соодветната тетива го нарекуваме *кружен отсечок* или *кружен сегмент*.

На пртежот со обоениот дел е претставен еден кружен отсечок. Да ја определиме формулата за пресметување на плоштина на кружен отсечок. Ќе разгледаме два случаја.

а) Ако  $\alpha < 180^\circ$ , тогаш плоштината на кружниот отсечок се добива како разлика на плоштините на кружниот исечок соодветен на аголот  $\alpha$  и  $\triangle ABO$ . Притоа имаме  $P_{\triangle ABO} = r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$  и ако ја искористиме формулата (6) за плоштина на кружен исечок добиваме дека плоштината на кружниот отсечок е



$$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} - r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (8)$$

б) Ако  $\alpha > 180^\circ$ , тогаш го определуваме аголот  $\beta = 360^\circ - \alpha$  и според формулата (8) ја определуваме плоштината  $P_1$  на кружниот отсечок соодветен определен со истата тетива и помалиот припаден централен агол. Сега плоштината на дадениот кружен отсечок ја добиваме ако од плоштината на кругот ја извадиме најдената плоштина  $P_1$ , т.е.  $P = \pi r^2 - P_1$ .

**Пример 31.** Најди ја плоштината на кружниот отсечок во кружница со радиус  $r = 6 \text{ cm}$ , соодветен на централниот агол  $\alpha = 120^\circ$ .

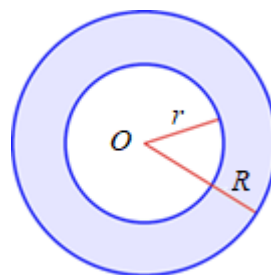
**Решение.** Имаме  $r = 6 \text{ cm}$  и  $\alpha = 120^\circ$  и ако замениме во (8) за плоштината на исечокот добиваме

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi r^2 \alpha}{360} - r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= \left( \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120}{360} - 6^2 \sin \frac{120^\circ}{2} \cos \frac{120^\circ}{2} \right) \text{ cm}^2 \\ &= (12\pi - 6\sqrt{3}) \text{ cm}^2 = 6(2\pi - \sqrt{3}) \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Дадени кружниците  $k(O, R)$  и  $k'(O, r)$ ,  $r < R$ . 2Д-формата  $F$  определена со  $A \in F$  ако и само ако  $r_1 \leq \overline{OA} \leq r$  ја нарекуваме *кружен прстен*.

Јасно, плоштината  $P$  на кружниот прстен определен со кружниците  $k(O, R)$  и  $k'(O, r)$ ,  $r < R$  е еднаква на разликата од плоштините на концентричните кругови со радиуси  $R$  и  $r$ . Значи,

$$P = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2). \quad (9)$$



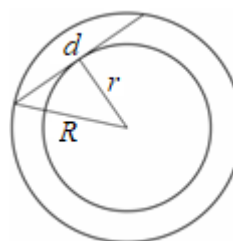
**Пример 32.** Најди ја плоштината на кружниот прстен што го формираат опишаната и впишаната кружница на правилен шестаголник со страна  $a = 12 \text{ cm}$

**Решение.** Радиусот на опишаната кружница околу правилен шестаголник е еднаков на страната на шестаголникот, а радиусот на впишаната кружница е еднаков на висината на карактеристичниот триаголник. Според тоа,  $r = a = 12 \text{ cm}$  и  $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ , па затоа плоштината на кружниот прстен е

$$P = \pi(r^2 - r_1^2) = \pi[12^2 - (6\sqrt{3})^2] \text{ cm}^2 = 36\pi \text{ cm}^2.$$

**Пример 33.** Дадени се две концентрични кружници. Тетива со должина  $d$  на поголемата кружница ја допира помалата кружница. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен кој е определен со овие две кружници.

**Решение.** Нека  $r$  и  $R$  се радиусите на малата и големата кружница, соодветно. Од Питагоровата теорема следува  $(\frac{d}{2})^2 = R^2 - r^2$ , па затоа плоштината на кружниот прстен е  $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi d^2}{2}$ .



**Пример 34.** Правилен седумаголник и правилен 2014-аголник имаат еднакви должини на страни. Ги разгледуваме кружните прстени определени со опишаната и впишаната кружница на седумаголникот и на 2014-аголникот. Кој од овие два кружни прстени има поголема плоштина?

**Решение.** Нека  $a$  е должината на страната на правилниот седумаголник и правилниот 2014-аголник. И во едниот и во другиот случај страната на многуаголникот е тетива на опишаната кружница која ја допира впишаната кружница. Според претходниот пример плоштината на кружниот прстен во двата случаи е еднаква на  $\frac{\pi a^2}{2}$ , што значи дека двата прстена имаат еднакви плоштини.

#### Задачи

50. Пресметај го периметарот на кружница со радиус: а)  $r = 10cm$ , б)  $d = 24dm$ .
51. Определи го радиусот на кружница, ако нејзиниот периметар е:  
а)  $18cm$ , б)  $15,7dm$ , в)  $32\pi cm$ .
52. Околу земјиниот екватор е поставен „обрач“, кој е за  $1m$  подолг од екваторот. Може ли под овој „обрач“ да помине глушец?
53. Пресметај ја плоштината на круг со радиус: а)  $20cm$  б)  $14dm$ .
54. Пресметај го радиусот на кругот, ако неговата плоштина е:  
а)  $1cm^2$  б)  $49dm^2$  в)  $100\pi cm^2$
55. Колкава е плоштината на кругот, ако неговиот периметар е  $32\pi cm$ .
56. Пресметај го периметарот на кругот, ако неговата плоштина е  $196\pi cm^2$ .
57. Две цевки го дијаметри  $10cm$  и  $24cm$  треба да се заменат со трета цевка со ист капацитет на пропустливост. Одреди го радиусот на таа цевка.
58. Колкав е радиусот на кругот на кој мерните броеви на неговата плоштина и на неговиот периметар се еднакви?
59. Пресметај ја плоштината на кругот, впишан во квадрат чија плоштина е  $64cm^2$ .
60. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во круг чија плоштина е  $256\pi cm^2$ .
61. Пресметај ја должината на кружен лак со радиус  $25cm$  и периферен агол  $20^\circ$ .
62. Периметарот на една кружница е  $27cm$ . Најди го централниот агол, чиј лак е долг  $10cm$ .
63. Кружница со радиус  $5cm$  е растегната во лак со радиус  $9cm$ . Најди го централниот агол на соодветен на лакот.
64. Кружница со радиус  $12cm$  е растегната во кружен лак со соодветен централен агол  $120^\circ$ . Најди го радиусот на лакот.
65. Пресметај ја плоштината на кружен исечок, ако  $r = 10cm$ ,  $\alpha = 50^\circ$ .
66. Најди го централниот агол на кружен исечок, ако неговата плоштина е  $2\pi cm^2$ , а радиусот  $8cm$ .
67. Пресметај ја плоштината на кружен отсечок со тетива  $a = 10cm$  и централен агол:  
а)  $120^\circ$ , б)  $60^\circ$ , в)  $240^\circ$ .
68. Во кружен прстен тетивата на поголемата кружница ја допира помалата и е еднаква на  $6cm$ . Најди ја плоштината на прстенот.
69. Пресметај ја плоштината на дел од кружен прстен со радиуси  $r = 20cm$  и  $r_1 = 1,2dm$ , што соодветствува на централен агол од  $60^\circ$ .

## 5.5 Плоштина и волумен на права призма

За 3Д-формата  $F$  ќе велиме дека е *полиедар* ако нејзината граница е составена од конечен број многуаголници.

Многуаголниците што ја формираат границата на полиедарот ги нарекуваме *сидови* на полиедарот. Страните и темињата на многуаголниците ги нарекуваме соодветно *рабови* и *темиња* на полиедарот.

Отсечката која сврзува кои било две темиња на полиедарот што не лежат на ист сид ја нарекуваме *просторна дијагонала* или само *дијагонала на полиедарот*.

За еден полиедар ќе велиме дека е *призма* ако два негови сида се складни многуаголници што лежат на две паралелни рамнини и ако останатите сидови се такви паралелограми што секој од нив има заедничка страна со споменатите два сида.

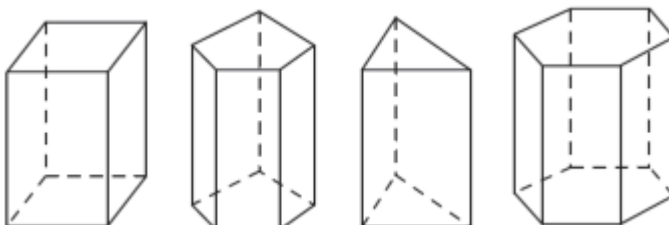
Складните сидови што лежат на паралелните страни ги нарекуваме *основи* или *бази*, а за паралелограмите ќе велиме дека се *бочни* или *околни сидови* и дека ја образуваат *бочната површина* на призмата.

Страните на основите ги нарекуваме *основни рабови*, а останатите рабови на призмата ги нарекуваме *бочни рабови*.

За една призма ќе велиме дека е *права* ако нејзините бочни рабови се нормални на нејзините основи, а во спротивно ќе велиме дека призмата е *коса*. Растојанието меѓу основите на призмата го нарекуваме *висина* на призмата.

Ако основите на призмата се правилни многуаголници, тогаш за неа ќе велиме дека е *правилна призма*. Правата која минува низ центрите на основите на правилната призма ја нарекуваме *оска* на правилната призма.

Според тоа колку страни има едната основа на призмата, т.е. дали основата е триаголник, четириаголник, петаголник, шестаголник итн., призмата ја нарекуваме *тристрана*, *четристрана*, *петстрана*, *шестстрана* итн. Посебно, ако основата на призмата е паралелограм, тогаш неа ја нарекуваме *паралелопипед*; ако, пак, тие паралелограми се правоаголници и ако паралелопипедот е прав, тогаш за него велиме дека е *правоаголен паралелопипед* или *квадар*. Конечно, квадарот кај кој сите рабови се еднакви го нарекуваме *коцка*.



При изработката на предмети кои имаат форма на полиедар е неопходно да се знае колку материјал ќе се потроши за изработка на полиедарот. Ова прашање е непосредно поврзано со прашањето за плоштина на полиедар.

Збирот на плоштините на сидовите од кои е составена границата на полиедарот го нарекуваме *плоштина на полиедарот*.

Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на пресметувањето на плоштина на права призма.

Бидејќи призмата има две складни основи и бочна површина, за да ја пресметаме нејзината плоштина доволно е да ја пресметаме плоштината  $B$  на едната основа и плоштината  $M$  на бочната површина, која ја нарекуваме *бочна плоштина*, а потоа плоштината на призмата да ја пресметаме според формулата  $P = 2B + M$ .

Бидејќи кај права призма бочниот раб и висината се еднакви добиваме дека бочната плоштина е  $M = HL$ , каде  $H$  е висината и  $L$  е периметарот на основата на призмата.



**Пример 35.** Пресметај ја плоштината на правилна шестстрана призма со основен раб  $a = 5 \text{ cm}$  и висина  $h = 12 \text{ cm}$ .

**Решение.** Според условот на задачата основите на призмата се правилни шестаголници, па затоа секоја од нив има плоштина  $B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ . Бочната плоштина на оваа призма е  $M = 6ah = 360 \text{ cm}^2$ , па затоа плоштината на призмата е

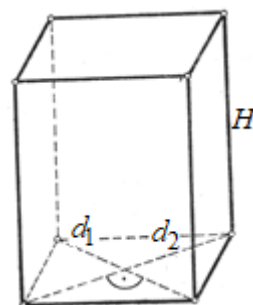
$$P = 2B + M = (2 \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2} + 360) \text{ cm}^2 = 15(5\sqrt{3} + 24) \text{ cm}^2.$$

**Пример 36.** Пресметај ја плоштината на права четиристрана призма чија основа е ромб со дијагонали  $16 \text{ cm}$  и  $12 \text{ dm}$  и висина  $2 \text{ dm}$ .

**Решение.** Од условот на имаме  $d_1 = 16 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 12 \text{ cm}$  и  $H = 20 \text{ cm}$ . Од Питагоровата теорема за страната на основата наоѓаме

$$a = \sqrt{(\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2} = \sqrt{(\frac{16}{2})^2 + (\frac{12}{2})^2} = 10 \text{ cm}.$$

Според тоа, плоштината на основата е  $B = \frac{d_1 d_2}{2} = 96 \text{ cm}^2$ , а бочната плоштина е  $M = 4aH = 800 \text{ cm}^2$ . Конечно, за плоштината на призмата наоѓаме  $P = 2B + M = (2 \cdot 96 + 800) \text{ cm}^2 = 992 \text{ cm}^2$ .



**Пример 37.** Основата на една права призма е ромб со плоштина  $6 \text{ cm}^2$ , плоштините на дијагоналните пресеци се  $Q_1 = 21 \text{ cm}^2$  и  $Q_2 = 28 \text{ cm}^2$ . Пресметај ја плоштината  $P$  на призмата.

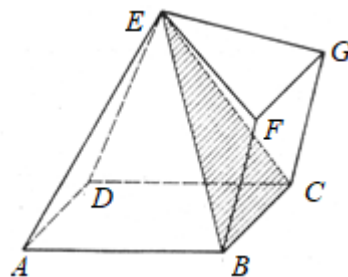
**Решение.** Основниот раб да го означиме со  $a$ , а висината со  $h$ . Плоштината на призмата е  $P = 2B + M = d_1 d_2 + 4ah$ , каде  $d_1$  и  $d_2$  се дијагоналите на ромбот. Од условот на имаме  $d_1 h = 21$ ,  $d_2 h = 28$ ,  $\frac{d_1 d_2}{2} = 6$  (зошто?). Ако ги помножиме првите две равенки и ги поделиме со третата равенка добиваме  $h^2 = 49$ , од што следува  $h = 7$ . Сега, со замена во првите две равенки на системот наоѓаме  $d_1 = 3$  и  $d_2 = 4$ . Понатаму, дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол, па од Питагоровата теорема следува  $a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2 = \frac{25}{4}$ , што значи  $a = \frac{5}{2}$ . Конечно, со замена во формулата за плоштината на призмата наоѓаме  $P = d_1 d_2 + 4ah = 82 \text{ cm}^2$ .

Поимот волумен на 3Д-форма (геометриско тело) се воведува аналогно на поимот плоштина на 2Д-форма, на следниот начин. Да се востанови систем на мерење на внатрешната област на полиедриите значи на секој полиедар да му се придружи позитивен реален број, наречен негов волумен, при што се исполнети следните својства:

а) Складни полиедри имаат еднакви волумени.

б) Ако полиедарот е составен од два или повеќе полиедри што не се преклопуваат, тогаш неговиот волумен е збир од волумените на полиедриите кои се негови делови (на цртежот волуменот на полиедарот  $ABCDEFG$  е еднаков на збирот на волумените на полиедриите  $ABCDE$  и  $BCGFE$ ).

в) Волуменот на коцка чиј раб е единична отсечка е еднаков на 1.





Својството в) ни овозможува да се утврди *единица мерка за волумен*. За ваква единица може да се земе која било коцка, но заради усогласување на мерните единици со меѓународниот SI систем е прифатено единица мерка за волумен да биде коцка со страна  $1\text{ m}$ , за кој велиме дека има волумен од еден метар кубен, и истата ја означуваме со  $1\text{ m}^3$ . Во практиката како единици мерки за волумен се среќаваат и  $1\text{ mm}^3$ ,  $1\text{ cm}^3$ ,  $1\text{ dm}^3$  итн.

Користејќи ги својствата а) – в) може да се докаже дека волуменот  $V$  на квадратот со рабови  $a, b$  и  $c$  е еднаков на  $abc$ , т.е.  $V = abc$ . Понатаму, бидејќи кај коцката сите рабови се со еднаква должина заклучуваме дека волуменот на коцката со раб  $a$  се пресметува со формулата  $V = a^3$ .

Ако правоаголникот со рабови  $a$  и  $b$  го земеме за основа на квадратот со рабови  $a, b$  и  $c$ , а работ  $c$  го земеме за негова висина, тогаш плоштината на основата е  $B = ab$ , па за волуменот на квадратот имаме  $V = abc = Bh$ .

Нека  $ABCD A' B' C' D'$  е прав паралелопипед, кој не е квадрат и  $AA'$  е негова висина, т.е.  $\overline{AA'} = h$ . Да повлечеме рамнини кои ги содржат рабовите  $AA'$  и  $BB'$  и кои се нормални на рамнината на сидот  $CDD' C'$  и оваа рамнина ја сечат во  $EE'$  и  $FF'$ . Призмите  $BCEB' C' E'$  и  $ADFA' D' F'$  се складни, па од својството а) на волуменот имаме

$$V_{BCEB' C' E'} = V_{ADFA' D' F'}.$$

Ако сега го искористиме својството б) на волуменот и фактот дека плоштината на основата на паралелопипедот  $ABCD A' B' C' D'$  е  $B = \overline{AB} \cdot \overline{BE}$ , тогаш за неговиот волумен добиваме

$$V = V_{ABEDA' B' E' D'} + V_{BCEB' C' E'} = V_{ABEDA' B' E' D'} + V_{ADFA' D' F'} = V_{ABEF A' B' E' F'} = \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{AA'} = Bh.$$

Нека е дадена права тристрана призма  $ABDEFH$ . Призмата ја надополнуваме до прав паралелопипед  $ABCDEFGH$  така, што триаголникот  $ABD$  го надополнуваме до паралелограмот  $ABCD$  итн. Јасно призмата  $ABDEFH$  и паралелопипедот  $ABCDEFGH$  имаат иста висина  $h$ . Со  $V'$  и  $B'$  да ги означиме волуменот и плоштината на основата на паралелопипедот, а со  $V$  и  $B$  волуменот и плоштината на призмата  $ABDEFH$ .

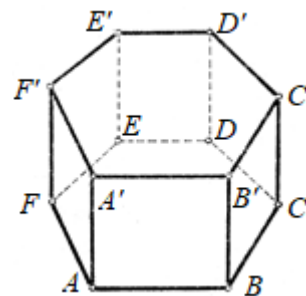
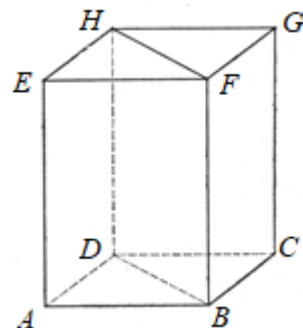
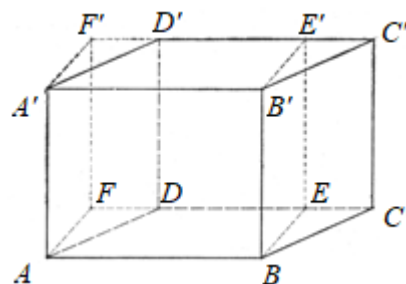
Призмите  $ABDEFH$  и  $BCDFGH$  се складни и ако се искористи својството б) на волуменот добиваме  $V' = 2V$  и како  $V' = B'h$  и  $B' = 2B$  имаме  $V = \frac{1}{2}V' = \frac{1}{2}B'h = Bh$ .

Нека е дадена произволна права призма со плоштина на основата  $B$  и висина  $h$ , на пример призмата  $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ . Од својството б) на волуменот имаме

$$\begin{aligned} V &= V_{ABCA' B' C'} + V_{ACDA' C' D'} + V_{ADEA' D' E'} + V_{AEFA' E' F'} \\ &= P_{ABC} \cdot h + P_{ACD} \cdot h + P_{ADE} \cdot h + P_{AEF} \cdot h \\ &= (P_{ABC} + P_{ACD} + P_{ADE} + P_{AEF}) \cdot h = P_{ABCDEF} \cdot h = Bh. \end{aligned}$$

Со тоа докажавме: ако со  $B$  ја означиме плоштината на основата и со  $h$  висината на права призма, тогаш нејзиниот волумен е

$$V = Bh. \quad (1)$$



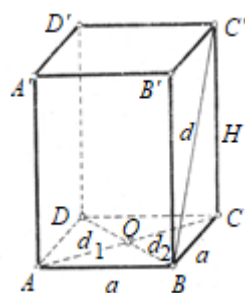
**Пример 38.** Прав насип за пруга со должина  $300\text{ m}$  има нормален пресек во форма на трапез со основи  $10\text{ m}$  и  $6\text{ m}$  и висина  $2,4\text{ m}$ . Колку кубни метри земја се потребни за оформување на насипот?

**Решение.** Очигледно насипот е призма со висина  $300\text{ m}$  и основа рамнокрак трапез  $10\text{ m}$  и  $6\text{ m}$  и висина  $2,4\text{ m}$ .

Неговиот волумен е  $V = Bh$ , каде  $B = \frac{10+6}{2} \cdot 2,4\text{ m}^2 = 19,2\text{ m}^2$  и  $h = 300\text{ m}$ . Според тоа, за изградба на насипот се потребни  $V = Bh = 19,2 \cdot 300\text{ m}^3 = 5760\text{ m}^3$  земја.

**Пример 39.** Основата на права призма е ромб со дијагонали  $18\text{ cm}$  и  $24\text{ cm}$ . Пресметај го волуменот на призмата ако дијагоналата на бочниот сид е  $17\text{ cm}$ .

**Решение.** Плоштината на основата е  $B = \frac{d_1 d_2}{2} = 216\text{ cm}^2$ . Од  $\triangle BCO$  за страната  $a$  на ромбот добиваме  $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 15\text{ cm}$ , а од  $\triangle BCC'$  за висината на призмата имаме  $h = \sqrt{d^2 - a^2} = 8\text{ cm}$ . Конечно, волуменот на призмата е  $V = Bh = 1728\text{ cm}^3$ .



**Пример 40.** Фабрика за стакло добивал нарачка да изработи стаклени украси во форма на правилна шестстрана призма. Пресметај ја должината на основниот раб на призмата ако украсот треба да биде висок  $20\text{ cm}$  и да има волумен  $300\text{ cm}^3$ .

**Решение.** Плоштината на основата на правилна шестстрана призма со основен раб е  $B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ , па затоа нејзиниот волумен е  $V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} h$ . Од условот на задачата имаме  $h = 20\text{ cm}$  и  $V = 300\text{ cm}^3$ , па затоа  $300 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 20$  т.е.  $a^2 = \frac{10}{\sqrt{3}}$ , што значи дека должината на основниот раб ќе биде  $a = \sqrt{\frac{10}{\sqrt{3}}}$ .

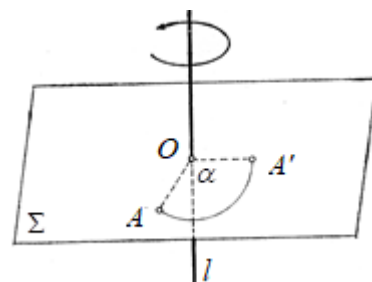
## Задачи

70. Пресметај ја плоштината на коцка ако нејзината дијагонала е  $18\text{ cm}$ .
71. Во една лимарска работилница со 5 вработени треба да се направат 2000 канти за сирење во форма на правилна четиристрана призма со основен раб  $25\text{ cm}$  и висина  $0,5\text{ m}$ . За колку денови ќе се направат кантите, ако секој вработен во текот на работното време може дневно да вгради по  $50\text{ m}^2$  лим?
72. Пресметај ја висината на права призма чија основа е ромб со дијагонали  $6\text{ cm}$  и  $0,8\text{ dm}$ , ако нејзината плоштина е  $328\text{ cm}^2$ .
73. Пресметај ја плоштината на права призма чија основа е рамнокрак трапез со основи  $21\text{ cm}$  и  $11\text{ cm}$  и крак  $13\text{ cm}$ , ако плоштината на дијагоналниот пресек е  $180\text{ cm}^2$ .
74. Плоштините на бочните сидови на права тристрана призма се  $165\text{ cm}^2$ ,  $99\text{ cm}^2$  и  $132\text{ cm}^2$ , а плоштината на основата е  $54\text{ cm}^2$ . Пресметај го бочниот раб на призмата.
75. Димензиите на еден квадар се  $3\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$  и  $2\text{ cm}$ . За колку ќе се зголеми неговиот волумен, ако при зголемување на секој негов раб за иста должина, неговата плоштина се зголемила за  $96\text{ cm}^2$ .
76. Пресметај го волуменот на квадар, со дијагонала  $14\text{ cm}$ , ако неговите страни се однесуваат како  $2:3:6$ .

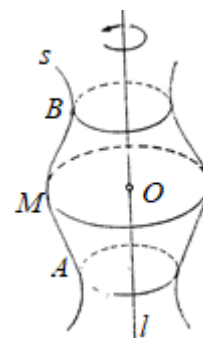
77. Паралелограм со страни  $10\text{ cm}$  и  $21\text{ cm}$  и дијагонала  $17\text{ cm}$  е основа на прав паралелолипед. Пресметај го неговиот волумен, ако неговата плоштина е  $770\text{ cm}^2$ .
78. Пресметај го волуменот на правилна четиристрана призма, ако нејзината дијагонала е  $7\text{ cm}$ , а дијагоналата на бочниот сид е  $5\text{ cm}$ .
79. Основата на права призма е ромб со дијагонали  $6\text{ cm}$  и  $8\text{ cm}$ . Пресметај ја плоштината на призмата, ако нејзиниот волумен е  $264\text{ cm}^3$ .
80. Основните рабови на права тристрана призма се еднакви на  $4\text{ cm}$ ,  $5\text{ cm}$  и  $7\text{ cm}$ , а бочниот раб е еднаков на најголемата висина на основата. Пресметај го волуменот на призмата.
81. Висината на права тристрана призма е  $5\text{ cm}$ , а нејзиниот волумен е  $480\text{ cm}^3$ . Пресметај ги должините на основните рабови на призмата, ако плоштините на нејзините бочни сидови се однесуваат како  $4:13:15$ .

## 5.6 Плоштна и волумен на прав цилиндар

Нека е дадена права  $l$  во просторот и агол  $\alpha$ . Во произволна точка  $A$  која не припаѓа на правата  $l$  повлекуваме рамнина  $\Sigma$  нормална на правата  $l$ , ја наоѓаме точката  $O = l \cap \Sigma$  и потоа со ротација  $\rho_{O,\alpha}$  определуваме точка  $A' = \rho_{O,\alpha}(A)$ . На овој начин на секоја точка  $A$  која не припаѓа на правата  $l$  и придружуваме единствена точка  $A'$ , а ако  $B \in l$ , тогаш на  $B$  и ја придружуваме самата точка  $B$ . Оваа трансформација на просторот ја нарекуваме *ротација околу правата  $l$  за агол  $\alpha$*  и ја означуваме со  $\rho_{l,\alpha}$ . Правата  $l$  ја нарекуваме *оска* на ротацијата, а  $\alpha$  е *агол* на ротацијата. Очигледно дека при ротација  $\rho_{l,\alpha}$  слика на геометричка фигура  $F$  е геометричка фигура  $F'$  складна на  $F$ . Уште повеќе, слика на права  $p$  која е паралелна со оската на ротација  $l$  е права  $p'$  паралелна на  $p$ .

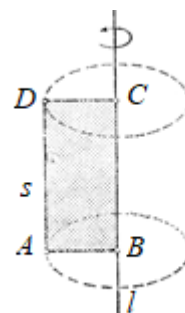


Нека сега земеме права  $l$  и крива  $s$  такви, што  $l$  и  $s$  лежат во иста рамнина. Ако кривата  $s$  ротира околу правата  $l$  за агол  $\alpha = 2\pi$ , тогаш секоја точка  $M \in s$  ќе опише кружница која лежи во рамнина нормална на оската на ротација  $l$  и чиј центар е на оската  $l$ . Очигледно, со ротација на кривата  $s$  се добива една површина која ја нарекуваме *ротациона површина*. Кривата  $s$  што ја образува ротационата површина ја нарекуваме *генератриса (изводница)* на ротационата површина, а кружниците кои ги опишуваат точките од изводницата ги нарекуваме *паралели* на ротационата површина.



Геометриското тело чија граница е ротациона површина и еден или два круга за кои соодветните кружници се паралели на ротационата површина го нарекуваме *ротационо тело*.

Ротационото тело добиено со ротација на отсечката  $AD$  паралелна на оската на ротација  $l$  и круговите кои се соодветни на паралелите на точките  $A$  и  $D$  го нарекуваме *прав кружен цилиндар* или кратко *прав цилиндар*.



Круговите соодветни на паралелите на точките  $A$  и  $D$  ги нарекуваме *основи (бази)* на цилиндарот, а радиусот  $r$  на основите го нарекуваме *радиус* на цилиндарот.

Ротационата површина добиена со ротација на отсечката  $AD$  ја нарекуваме *обвивка* или *бочна површина* на цилиндарот.

Оската на ротација  $l$  ја нарекуваме *оска* на цилиндарот, а секоја отсечка која поврзува две точки од основите на цилиндарот и е нормална на основите ја нарекуваме *висина* на цилиндарот.

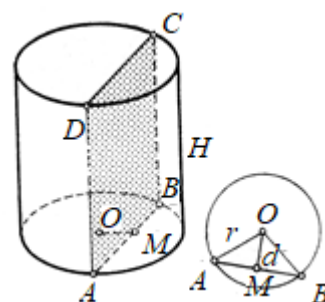
Бидејќи генератрисите на прав цилиндар се еднакви меѓу себе, а исто така и се нормални на основите заклучуваме дека генератриста е еднаква на висината на цилиндарот.

За цилиндарот ќе велиме дека е *рамностран* ако генератрисата е еднаква на дијаметарот на основата.

**Пример 41.** Висината на прав цилиндарот е  $H = 11 \text{ cm}$ , а радиусот на основата е  $r = 10 \text{ cm}$ . Пресметај ја плоштината на надолжен пресек кој од оската е оддалечен  $d = 8 \text{ cm}$ .

**Решение.** Јасно, пресекот е правоаголник со една страна  $H = 11 \text{ cm}$ , а другата страна е отсечката  $AB$  (види цртеж). Од условот на задачата имаме  $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{10^2 - 8^2} \text{ cm} = 12 \text{ cm}$ , па затоа плоштината на надолжниот пресек е

$$P = \overline{AB} \cdot H = 11 \cdot 12 \text{ cm}^2 = 132 \text{ cm}^2.$$



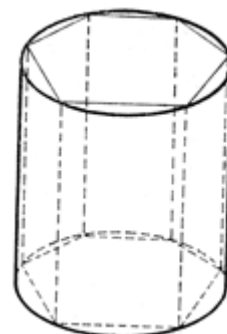
При дефинирањето на цилиндарот видовме дека неговата граница се состои од два складни круга и бочна површина (обвивка), па затоа за да ја пресметаме неговата плоштина доволно е да ја пресметаме плоштината  $B$  на кругот и плоштината  $M$  на бочната површина, која ја нарекуваме *бочна плоштина*, а потоа плоштината на цилиндарот да ја пресметаме според формулата  $P = 2B + M$ .

За да ја пресметаме бочната плоштина  $M$ , ќе ги разгледаме впишаните и опишаните призми во цилиндарот. За една призма ќе велиме дека е *впишана (опишана)* во (околу) цилиндар, ако нејзините основи се впишани (опишани) во (околу) кружниците кои се основи на цилиндарот.

Во цилиндарот впишуваме правилна призма, на пример шестстрана (види цртеж). Бочната плоштина на оваа призма е  $M_{\text{pr}} = L_{\text{pr}}h$ , каде  $L_{\text{pr}}$  е периметарот на нејзината основа. Понатаму, ако последователно го удвојуваме бројот на страните на основата на призмата, со што го удвојуваме бројот на нејзините бочни ѕидови добиваме дванаесетстрана, дваесетчетиристрана итн. впишана призма. Притоа, со зголемување на бројот на страните на основите, разликата на бочните плоштини на вака впишаните призми и бочната плоштина на цилиндарот се приближува кон нула (зошто?). Од друга страна, бидејќи висината  $h$  е константна, а периметарот  $L_{\text{pr}}$  на правилните многуаголници се стреми кон периметарот на основата, т.е. кон  $2\pi r$  добиваме дека бочните плоштини  $M_{\text{pr}}$  на впишаните призми се стремат кон  $2\pi rh$ , што значи дека бочната плоштина на цилиндарот е еднаква на  $M = 2\pi rh$ .

Од претходно кажаното и ако се има предвид фактот дека плоштината на круг со радиус  $r$  е  $B = \pi r^2$ , за плоштината на цилиндар со радиус  $r$  и висина  $h$  ја добиваме формулата

$$P = 2\pi r(r + h). \quad (1)$$



**Пример 42.** Дијагоналата  $D = 24 \text{ cm}$  на оскиниот пресек на прав цилиндар со рамнината на основата зафаќа агол од  $45^\circ$ . Пресметај ја плоштината на цилиндарот.

**Решение.** Бидејќи дијагоналата на оскиниот пресек зафаќа агол од  $45^\circ$  заклучуваме дека оскиниот пресек е квадрат, т.е. цилиндарот е рамностран. Значи,

$$2r = H = \frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} \text{ cm}, \text{ т.е. } r = 6\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Со замена во (1) за добиваме

$$P = 2\pi r(r + h) = 432\pi \text{ cm}^3.$$

При воведувањето на поимот за волумен на полиедар, ние всушност при зададена единечна мерка за полиедарот воведовме нова бројна карактеристика, а тоа е неговиот волумен кој всушност е мерен број на областа ограничена со површината на полиедарот. Ќе докажеме дека ваква бројна карактеристика може да се воведи и за цилиндарот.

Во цилиндерот впишуваме правилна призма, на пример шестстрана. Волуменот на оваа призма е  $V_{\text{пр}} = B_{\text{пр}}h$ , каде  $B_{\text{пр}}$  е плоштината на нејзината основа. Понатаму, ако последователно го удвојваме бројот на страните на основата на призмата, со што го удвојваме бројот на нејзините бочни сидови добиваме дванаесетстрана, дваесетчетиристрана итн. впишана призма. Притоа со зголемување на бројот на страните на основите, разликата на плоштините на основите на вака впишаните призми и плоштината на основата на цилиндерот се приближува кон нула (зошто?). Од друга страна, бидејќи висината  $h$  е константна, а плоштината  $B_{\text{пр}}$  на правилните многуаголници се стреми кон плоштината на основата, т.е. кон  $\pi r^2$  добиваме дека волумените  $V_{\text{пр}}$  на впишаните призми се стремат кон  $\pi r^2 h$ , што значи дека волуменот на цилиндерот

$$V = \pi r^2 h = Bh. \quad (2)$$

Имајќи предвид дека за дијаметарот  $d$  на основата важи  $d = 2r$ , т.е.  $r = \frac{d}{2}$ , за волуменот на цилиндерот ја добиваме формулата  $V = \frac{\pi d^2 h}{4}$ .

**Пример 43.** а) Бочната површина на прав цилиндар е квадрат со страна  $a$ . Пресметај го неговиот волумен.

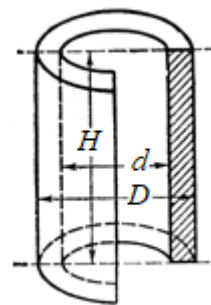
б) Пресметај го волуменот на водоводна цевка со должина  $6 \text{ m}$ , ако дијаметарот на надворешната површина е  $3 \text{ cm}$ , а дијаметарот на внатрешната површина е  $2,4 \text{ cm}$ .

**Решение.** а) Јасно, едната страна на бочната површина е висината на цилиндарот, па затоа  $H = a$ . Другата страна на бочната површина е еднаква на должината на кружницата на основата, па затоа  $a = 2\pi r$ , т.е.  $r = \frac{a}{2\pi}$ . Заменуваме во формулата

$$V = \pi r^2 h \text{ и за волуменот на цилиндерот добиваме } V = \frac{a^3}{4\pi}.$$

б) Од условот на имаме  $H = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$ ,  $D = 3 \text{ cm}$  и  $d = 2,4 \text{ cm}$ . Според тоа, волуменот на цевката е

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} - \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{\pi(D^2 - d^2)h}{4} = \frac{\pi(3^2 - 2,4^2) \cdot 600}{4} \text{ cm}^3 = 486\pi \text{ cm}^3.$$



**Пример 44.** Колкава е плоштината на чоколадниот дел на парче торта, ако тортата има цилиндрична форма со радиус на основата  $12 \text{ cm}$  и висина  $7 \text{ cm}$ , а пресеченото парче торта има агол на основата  $\alpha = 22^\circ$ .

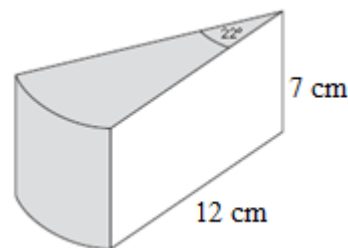
**Решение.** Парчето торта е прикажано на цртежот  $r = 12 \text{ cm}$ ,  $H = 7 \text{ cm}$ . Делот од површината кој е на основата е кружен исечок со плоштина

$$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{12^2 \cdot 22\pi}{360} = 8,8\pi \text{ cm}^2,$$

а делот од бочната површина има плоштина

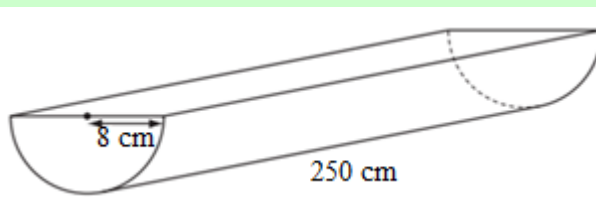
$$P' = \frac{\pi r \alpha}{180} H = \frac{12 \cdot 22 \cdot 7 \pi}{180} = \frac{462\pi}{45} \text{ cm}^2.$$

Значи, плоштината на чоколадниот прелив е  $P + P' = \frac{858}{45} \pi \text{ cm}^2$ .



**Пример 45.** Пресметај ја плоштината на греда долга  $250 \text{ cm}$ , чиј напречен пресек е полукруг со радиус  $8 \text{ cm}$ .

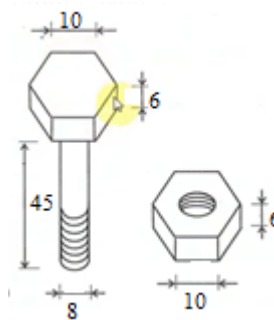
**Решение.** Гредата е прикажана на цртежот. Нејзината плоштина е збир на плоштина на правоаголник со страни  $250 \text{ cm}$  и  $16 \text{ cm}$ , и половина плоштина на цилиндар со радиус  $8 \text{ cm}$  и висина  $250 \text{ cm}$ . Значи,



$$P = 16 \cdot 250 + 8\pi(8 + 250) = 16(250 + 129\pi) \text{ cm}^2.$$

**Пример 46.** На цртежот е прикажан шраф со навртка кој е изработен од железо. Димензиите на цртежот се во  $\text{mm}$ . Колкава е масата на 10000 вакви шrafoви, ако густината на железото е  $7,8 \text{ g/cm}^3$ ?

**Решение.** Волуменот на шеден шраф се состои од волуменот на две еднакви шестаголни прави призми со основен раб  $a = 10 \text{ mm}$  и висина  $H = 6 \text{ mm}$ , и еден цилиндар со радиус  $r = 4 \text{ mm}$  и висина  $h = 33 \text{ mm}$  (Зошто?). Значи, волуменот на еден шраф е



$$V = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}H}{2} + \pi r^2 h = 1800\sqrt{3} + 528\pi \text{ mm}^3 = 4776,45 \text{ mm}^3 = 4,77645 \text{ cm}^3.$$

Значи, масата на 1000 вакви шrafoви е  $10000 \cdot 4,77645 \text{ cm}^3 \cdot 7,8 \text{ g/cm}^3 \approx 372,563 \text{ kg}$

## Задачи

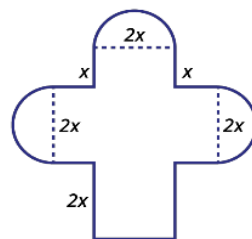
82. Оскиниот пресек на цилиндарот е квадрат со плоштина  $36 \text{ cm}^2$ . Да се пресметаат плоштината и волуменот на цилиндарот.
83. Должината на кружницата на основата на прав цилиндар е  $14\pi \text{ cm}$ , а плоштината на оскиниот пресек е  $70 \text{ cm}^2$ . Пресметај ја висината на цилиндарот.
84. Пресметај ја плоштината на надолжниот пресек на прав цилиндар со висина  $10 \text{ cm}$ , ако пресекот е оддалечен од оската на цилиндарот  $2 \text{ cm}$ , а од кругот на основата отсекува лак со централен агол од  $120^\circ$ . Колкава е плоштината на цилиндарот?
85. Колку метри кубни камен е потребен за да се созида бунар длабок  $16 \text{ m}$ , ако неговиот внатрешен дијаметар е  $1,2 \text{ m}$  и сидот е широк  $40 \text{ cm}$ .
86. Квадрат со страна  $a$  ротира околу оска паралелна со страна на квадратот и оддалечена од најблиската страна за  $\frac{a}{2}$ . Пресметај ги волуменот и плоштината на така добиеното тело.

87. Да се пресметаат волуменот и плоштината на цилиндарот впишан во права тристрана призма со основни рабови  $9\text{ cm}$ ,  $10\text{ cm}$  и  $17\text{ cm}$  и висина  $40\text{ cm}$ .
- Упатство.* Прво со помош на Хероновата формула пресметај ја плоштината на основата на призмата, а потоа користјќи ја формулата за плоштина на триаголник  $P = rs$  определи го радиусот на впишаната кружница во триаголникот.
88. Основните рабови на коса призма се  $7\text{ cm}$ ,  $8\text{ cm}$  и  $9\text{ cm}$ . Бочниот раб, кој со рамнината на основата зафаќа агол од  $60^\circ$  е долг  $12\text{ cm}$ . Пресметај ги волумените и плоштините на впишаниот и опишаниот цилиндер околу призмата.
89. Колку тони нафта ќе собере цилиндрична цистерна долга  $16,04\text{ m}$  и висока  $4,04\text{ m}$  со дебелина на сидовите на цистерната  $0,04\text{ m}$ , ако специфичната тежина на нафтата е  $0,85\text{ g/cm}^3$  и ако, согласно прописите за чување нафта,  $10\%$  од волуменот на цистерната мора да биде оставен празен.
90. Од дрвена греда долга  $4\text{ m}$  со форма на правилна четиристрана призма со раб на основата  $20\text{ cm}$ , треба да се направи греда во форма на цилиндер и притоа да има најмал отпад на материјалот. Пресметај ги плоштината и волуменот на цилиндричната греда и волуменот на отпадниот материјал.
91. Бакарна жица долга  $200\text{ m}$  тежи  $8,7\text{ kg}$ . Пресметај го дијаметарот на жицата, ако специфичната тежина на бакарот е  $8,9\text{ g/cm}^3$ .



## Провери го своето знаења 6

1. Пресметај ја плоштината на правоаголник впишан во кружница со радиус  $12,5\text{ cm}$ , ако едната страна му е  $7\text{ cm}$ . Коку е периметарот на овој правоаголник?
2. Пресметај ја плоштината на ромб со помала дијагонала  $6\text{ cm}$  и радиус на впишаната кружница  $24\text{ mm}$ .
3. Најди го радиусот на опишаната кружница околу рамнокракиот  $\triangle ABC$  со основа  $a = 10\text{ cm}$  и крак  $b = 13\text{ cm}$ .
4. Плоштините на два слични триаголника се  $49\text{ cm}^2$  и  $64\text{ cm}^2$ , а една страна на помалиот триаголник е  $7\text{ cm}$ . Одреди ја соодветната страна на поголемиот триаголник.
5. Пресметај ја плоштината на трапез со основи  $30\text{ cm}$  и  $19\text{ cm}$  и краци  $13\text{ cm}$  и  $20\text{ cm}$ .
6. Одреди го периметарот на делтоидот со страна  $13\text{ cm}$ , една дијагонала  $24\text{ cm}$ , ако неговата плоштина е  $480\text{ cm}^2$ .
7. Две цевки го дијаметри  $10\text{ cm}$  и  $24\text{ cm}$  треба да се заменат со трета цевка со ист капацитет на пропустливост. Одреди го радиусот на таа цевка.
8. Пресметај ја плоштината на фигурата прикажана на цртежот, ако  $x = 5\text{ cm}$ .
9. Пресметај го волуменот на квадар, со дијагонала  $14\text{ cm}$ , ако неговите страни се однесуваат како  $2:3:6$ .
10. Бакарна жица долга  $200\text{ m}$  тежи  $8,7\text{ kg}$ . Пресметај го дијаметарот на жицата, ако специфичната тежина на бакарот е  $8,9\text{ g/cm}^3$ .





## 6 Работа со податоци

- 6.1 Експеримент и настан. Експериментална веројатност
- 6.2 Елементарни настани. Настан и спротивен настан
- 6.3 Класична дефиниција на веројатност
- 6.4 Собирање и средовање податоци
- 6.5 Графичко претставување на податоците
- 6.6 Аритметичка средина, мода, медијана и ранг на податоци

Со усвојувањето на содржините од оваа тема ќе можеш:

- да пресметуваш веројатност на настан во експеримент со конечно многу настани,
- да определуваш веројатност на спротивен настан,
- да пресметуваш експериментална и теориска веројатност, како и да правиш разлика меѓу истите,
- да собираш и средоваш податоци во табели,
- да ги класифицираш податоците во еднакви и нееднакви интервали,
- да ги претставуваш податоците со пиктограми, кружни дијаграми, столбести дијаграми, линиски дијаграми и точкести дијаграми,
- да ги претставуваш податоците со хистограми со еднакви и нееднакви интервали,
- да читаш податоци од табели и дијаграми и истите да ги толкуваш,
- да пресметуваш аритметичка средина, мода, медијана, ранг на податоци и модален интервал, и
- да обработуваш податоци со користење на софтверски програм за табеларни пресметувања.

## 6.1 Експеримент и настан. Експериментална веројатност

Многу појави и настани во природата се случуваат по определени закони и секогаш кога се исполнети определени услови. Законите од ваков тип ги нарекуваме *детерминистички*. Луѓето со векови ги набљудувале и анализирале појавите и настаните, а потоа врз основа на научните сознанија ги формулирале законите. Типични примери за детерминистички закони се Њутновите закони во физиката. Законите од ваков вид ни овозможуваат да ги објасниме настаните од минатото и да ги предвидуваме настаните во иднината. На пример, Земјата околу Сонцето, како и Месечината околу Земјата се движат по точно определени закони. Затоа врз основа на овие закони можеме да пресметаме кога во иднината ќе имаме помрачување на Сонцето, односно помрачување на Месечината, но и да пресметаме кога во минатото се случиле такви помрачувања.

Меѓутоа, покрај појавите и настаните кои се реализираат по детерминистички закони во природата и општеството има појави и настани за кои не важат законите од овој тип. Поточно, постојат појави и настани, кои при одредени услови некогаш се реализираат, а некогаш не се реализираат. Да разгледаме еден пример.

**Пример 1.** Правилна и хомогена монета повеќе пати ја фрламе на рамна површина, при што монетата ротира околу својата оска која не е нормална на рамнината. Во секое посебно фрлање може да „падне“ една од двете страни на монетата: глава (Г) или број (Б). Во 40 последователни фрлања добиена е следнава низа на паѓање на број и глава:

Г, Б, Г, Б, Г, Б, Г, Б, Б, Б, Г, Б, Г, Б, Г, Г, Б, Г, Г, Б,

Г, Г, Б, Г, Г, Б, Г, Г, Г, Г, Б, Г, Б, Б, Б, Г, Б, Б, Б, Г.

Забележуваме дека 21 пат паднала глава, а 19 пати паднал број. Меѓутоа ако го разгледаме редоследот на паѓањето на глава и број, не можеме да забележиме дека имаме некоја законитост.



Во претходниот пример ние всушност реализиравме експеримент *фрлање монета*. Притоа однапред зададовме множество од три услови  $S$  и тоа:

- монетата е правилна и хомогена,
  - монетата се фрла на рамна површина и
  - при фрлањето монетата ротира околу својата оска која не е нормална на површината,
- кои ги реализиравме 40 пати.

Во врска со претходно изнесеното ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 1.** Нека е дадено множество услови  $S$ . Секоја реализација на ова множество услови ја нарекуваме *експеримент (опит)*  $S$ . Секој резултат на експериментот  $S$  го нарекуваме *настан* што е во врска со експериментот  $S$ .

Настаните ги означуваме со буквите  $A, B, C, D, E, F, \dots$ .

Според определеноста на настаните со условите  $S$  разликуваме два типа на експерименти. Едни, кај кои што множеството услови еднозначно определува настан и овие експерименти ги нарекуваме *детерминирани*, и други, кај кои исходот не е еднозначно определен, т.е. постојат повеќе различни исходи и овие експерименти ги нарекуваме *недетерминирани*.

Како што можеме да видиме, при реализирањето на експериментот од пример 1 можни се два различни исхода: број или глава, што значи дека станува збор за недетерминиран експеримент. Притоа појавата на број или глава во низата 40 фрлања е исклучително неправилна, т.е. таа е случајна и не може однапред да се предвиди. На прв поглед изгледа дека не постои никаква

законитост која можеме да ја доведеме во врска со резултатите добиени во низата на фрлања на монетата. Меѓутоа, изведувањето на голем број фрлања на монетата и разгледувањето на добиените резултати ни овозможуваат подобро да ја опишеме случајноста на појавување на број или глава. За таа цел ќе ги искористиме резултатите на експериментите во врска со паѓањето на број или глава реализирани од научниците Бифон, Пирсон, де Морган, Фелер и Романовски и кои се дадени во следната табела:

| научник    | број на фрлања | број на паѓања на глава |
|------------|----------------|-------------------------|
| Бифон      | 4040           | 2048                    |
| де Морган  | 4092           | 2048                    |
| Романовски | 80640          | 39699                   |
| Пирсон     | 24000          | 12012                   |
| Фелер      | 10000          | 4979                    |

Ако ги анализираме презентираниите податоци, ќе забележиме дека во сите пет серии при фрлањето на монетата приближно половина од вкупниот број фрлања паѓа глава. Попрецизно, ако со  $A$  го означиме настанот „паднала глава“, со  $n$  го означиме вкупниот број на фрлања на монетата и со  $n(A)$  бројот на реализациите на настанот  $A$ , тогаш за  $\frac{n(A)}{n}$  добиваме:

$$\text{Бифон: } \frac{n(A)}{n} = 0,50693,$$

$$\text{де Морган: } \frac{n(A)}{n} = 0,50048875,$$

$$\text{Романовски: } \frac{n(A)}{n} = 0,492299,$$

$$\text{Пирсон: } \frac{n(A)}{n} = 0,5005 \text{ и}$$

$$\text{Фелер: } \frac{n(A)}{n} = 0,4979.$$

Значи, количникот  $\frac{n(A)}{n}$  на настанот  $A$  „многу не се разликува“ од бројот  $0,5 = \frac{1}{2}$ . Според тоа, при едно фрлање не може да се предвиди што ќе се случи, но за голем број експерименти постои законитост во појавувањето на настанот  $A$  и бројот  $0,5$ , за кој може да се каже дека е показател на можноста за појавување на настанот  $A$ . Законитост од овој тип постои за голем број експерименти и настани во врска со нив. Во смисол на претходно изнесеното, ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 2.** Нека при  $n$  повторувања на експериментот  $S$  го разгледуваме настанот  $A$ . Бројот на реализации на настанот  $A$  го нарекуваме *фреквенција (честота) на настанот  $A$*  и го означуваме со  $n(A)$ . Количникот  $\frac{n(A)}{n}$  го нарекуваме *релативна фреквенција (честота) на настанот  $A$*  во  $n$  експерименти.

Во претходните разгледувања поимот настан го воведовме како резултат на експериментот  $S$ . Меѓутоа, за нашите разгледувања од посебна важност се случајните настани, т.е. настаните кои задоволуваат определени услови. Поимот случаен настан е во непосредна врска со поимот релативна честота и истиот се дефинира на следниов начин.

**Дефиниција 3.** Настанот  $A$  во врска со експериментот  $S$ , кој може да се повтори произволен број пати, го нарекуваме *случаен настан*, ако релативните честоти на настанот  $A$ , на секоја од повеќе реализирани серии на експериментот  $S$ , се броеви кои се приближно еднакви меѓу себе.

Од дефиниција 3 следува дека настанот „паднала глава“ е случаен настан. Понатаму, релативните фреквенции во сериите експерименти на Бифон, де Морган, Романовски, Пирсон и Фелер се приближно еднакви на бројот 0,5. Ваквото својство на релативните честоти на случајните настани го нарекуваме *стабилност на релативните честоти*. Стабилноста на релативните честоти е објективно својство на масовните случајни појави и е основна причина за постапката и развојот на теоријата на веројатноста. Во врска со стабилноста на релативните честоти на случајниот настан  $A$  ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 4.** Реалниот број околу кој се натрупуваат релативните честоти на случајниот настан  $A$  и кој го означуваме со  $P(A)$  го нарекуваме *веројатност на настанот  $A$* .

Оваа дефиниција за веројатност на случаен настан ја нарекуваме *експериментална (статистичка) дефиниција* на веројатноста, а веројатноста определена на овој начин ја нарекуваме *експериментална (статистичка) веројатност*.

**Пример 2.** Ако хомогена коцка за играње ја фрламе на рамна површина, при што коцката ротира околу некоја оска, тогаш во секое посебно фрлање на горната страна на коцката може да „паднат“ 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки.

Според тоа, имаме множество услови  $S$  и тоа:

- коцката за играње е хомогена,
- коцката се фрла на рамна површина и
- при фрлањето коцката ротира околу некоја оска.

Ангел, Елица, Станко и Елена направиле по  $n = 600$  фрлања на коцка, при што ги добиле следниве резултати:

|        | Број на паѓања на број на точки |     |     |     |     |     |
|--------|---------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
|        | 1                               | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| Ангел  | 98                              | 101 | 101 | 99  | 102 | 99  |
| Елица  | 97                              | 100 | 102 | 98  | 101 | 102 |
| Станко | 99                              | 102 | 101 | 98  | 103 | 97  |
| Адмир  | 102                             | 97  | 98  | 102 | 99  | 102 |

Релативните честоти на бројот на паднатите точки на нивните резултати се:

|        | Број на паѓања на број на точки |          |          |          |          |          |
|--------|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|        | 1                               | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        |
| Ангел  | 0,163333                        | 0,168333 | 0,168333 | 0,165    | 0,17     | 0,165    |
| Елица  | 0,161667                        | 0,166667 | 0,17     | 0,163333 | 0,168333 | 0,17     |
| Станко | 0,165                           | 0,17     | 0,168333 | 0,163333 | 0,171667 | 0,161667 |
| Адмир  | 0,17                            | 0,161667 | 0,163333 | 0,17     | 0,165    | 0,17     |

Со  $A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  да го означиме настанот „паднале  $i$  точки“. Како што можеме да видиме релативните честоти на секој од настаните  $A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  при четирите различни серии од 600 повторувања на експериментот се приближно исти броеви. Притоа најмалиот е 0,161667, а најголемиот е 0,171667. Сега, ако ги земеме предвид сите фрлања на Ангел, Елица, Станко и Адмир, тогаш имаме  $n = 2400$  фрлања на коцката, а честотите и релативните честоти се дадени во табелата:

|                                   | Број на паѓања на број на точки |          |        |          |         |          |
|-----------------------------------|---------------------------------|----------|--------|----------|---------|----------|
|                                   | 1                               | 2        | 3      | 4        | 5       | 6        |
| Честоти $n_i$                     | 396                             | 400      | 402    | 397      | 405     | 400      |
| Релативни честоти $\frac{n_i}{n}$ | 0,165                           | 0,166667 | 0,1675 | 0,165417 | 0,16875 | 0,166667 |

Како што можеме да видиме релативните честоти на секој од настаните  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  се помалку се разликуваат и тие се се поблиски до бројот  $\frac{1}{6} \approx 0,16666\dots$ . Оттука, можеме да претпоставиме дека  $P(A_i) = \frac{1}{6}$ , за  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Ако ги искористиме податоците од горната табела, за настанот  $B$ : *паднатиот број точки е помал од 5*, при серија од  $n = 2400$  повторувања на експериментот, неговата честота ја добиваме ако ги собереме честотите на настаните  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  (зошто?). Значи, честотата на настанот  $B$ , за наведената серија 2400 повторувања на експериментот, е  $n_B = 1595$ , а релативната честота е  $\frac{n_B}{n} = \frac{1595}{2400} \approx 0,664583$ . Оттука, можеме да препоставиме дека  $P(B) = \frac{2}{3}$ .

Како во експериментот со монетата, така и во експериментот со коцката, со определувањето на експерименталната (статистичката) веројатност ние врз основа на добиените резултати од повеќекратната реализација на експериментот при исти услови всушност ги *проценуваме* веројатностите на настаните. Јасно, притоа колку е бројот на повторувањата на експериментот поголем, толку е подобра проценката која ја правиме.

Во врска со разгледуваниот експеримент од пример 2 да го разгледаме настаните

$C$ : *паднатиот број точки е поголем од 6* и

$D$ : *паднатиот број точки е помал од 7*.

Јасно, бидејќи може да паднат најмногу шест точки, настанот  $C$  не се случува при ниту една реализација на експериментот  $S$ . Но, бројот на паднатите точки е помал или еднаков на 6, па затоа тој е помал од 7, што значи дека настанот  $D$  се случува при секоја реализација на експериментот  $S$ . Во врска со настаните  $C$  и  $D$  ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 5.** *Сигурен настан* за експериментот  $S$  е настанот што се појавува при секоја реализација на експериментот  $S$ . *Невозможен настан* за експериментот  $S$  е настанот кој што воопшто не се појавува при реализација на експериментот  $S$ .

Нека се реализирани  $n$  експерименти  $S$ . Од дефиницијата на сигурниот настан следува дека тој ќе се појави  $n$  пати, а од дефиницијата на невозможниот настан следува дека тој нема да се појави ниту еднаш, т.е. ќе се појави 0 пати. Според тоа, релативната честота на сигурниот настан е  $\frac{n}{n} = 1$ , а релативната честота на невозможниот настан е  $\frac{0}{n} = 0$  и последното важи за серија со произволен број експерименти  $S$ . Сега од дефиниција 3 следува дека сигурниот и невозможниот настан се случајни настани, а од дефиниција 4 следува дека нивните статистички веројатности се 1 и 0, соодветно. Овде уште ќе забележиме дека ако еден експеримент  $S$  го реализираме  $n$  пати, тогаш за фреквенцијата на кој било настан  $A$  важи  $0 \leq n_A \leq n$ . Значи, за релативната фреквенција на настанот  $A$  имаме  $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$ , што значи дека експериментална веројатност е ненегативен број помал или еднаков на 1.

## Задачи

1. Фрламе две коцки за играње, при што се исполнети условите од пример 2. Кој од настаните е невозможен, сигурен, има веројатност меѓу 0 и 1:
  - а) збирот на падните броеви точки е помал од 1,
  - б) збирот на паднатите броеви точки е помал од 13,
  - в) збирот на паднатите броеви точки е број делив со 3,
  - г) збирот на паднатите броеви точки е прост број.
2. Според податоците од пример 2, одделно за секоја од четирите серии и збирно, пресметај ги честотите на настаните:
  - а)  $A$ : паднатиот број точки е прост број,
  - б)  $B$ : паднатиот број точки е сложен број,
  - в)  $C$ : паднатиот број точки е делив со 3.Дали настаните  $A, B$  и  $C$  се случајни? Во случај на потврден одговор определи ја експерименталната веројатност на секој од овие настани.
3. При фрлање монета од 1 денар, ако падне глава пишуваме 0, а ако падне број пишуваме 1. Земи две монети и при услови како во пример 1 фрли ги 120 пати.
  - а) Бележи ги честотите на зборовите на запишаните броеви и пресметај ги релативните честоти.
  - б) Здружи ги резултатите со уште четири соученици кои го направиле експериментот и пресметај ги релативните честоти на добиените зборови.
4. Земи две коцки за играње и фрли ги 120 пати, при што се исполнети условите од пример 3.
  - а) Бележи ги честотите на зборовите на паднатиот број точки и пресметај ги релативните честоти.
  - б) Здружете ги добиените резултати заедно со уште четири соученици кои го направиле експериментот и пресметајте ги релативните честоти на зборовите на паднатиот број точки.

## 6.2 Елементарни настани. Настан и спротивен настан

Во примерот 2 од претходната лекција, во експериментот во кој хомогена коцка фрламе на рамна површина видовме дека во секое посебно фрлање, т.е. при секоја реализација на експериментот може да „паднат“ 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки. Јасно, при секое изведување на овој експеримент се појавува еден и само еден од настаните „бројот на паднатите точки е  $i$ “, каде  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Слична е состојбата со експериментот во пример 1, каде при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните *паѓа глава* или *паѓа број*.

Претходно изнесеното може да се направи за секој експеримент, т.е. за секој експеримент, што можеме да го замислиме или реализираме, постои едно множество  $\Omega$  на поединечни настани, со својство: при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од тие настани. Елементите на множеството  $\Omega$  ги нарекуваме *елементарни настани*, а самото множество  $\Omega$  го нарекуваме *простор (множество) елементарни настани*.

Во натамошните разгледувања за елементарен настан ќе ја користиме ознаката  $\omega$ .

**Пример 3.** а) Во експериментот на фрлање монета просторот елементарни настани е  $\Omega = \{Б, Г\}$ .

б) Во експериментот на фрлање коцка за играње просторот елементарни настани е  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Пример 4.** Монета се фрла два пати. За елементарни настани можеме да ги земеме следниве резултати на експериментот:

$\omega_1$  - во двете фрлања паднал број,

$\omega_2$  - во двете фрлања паднала глава,

$\omega_3$  - паднале еден број и една глава.

Забележуваме дека вака избраните елементарни настани не се појавуваат на „симетричен“ начин. Имено, елементарниот настан  $\omega_1$  означува дека и во првото и во второто фрлање паднало писмо, т.е. еднозначно е определен резултатот и на првото и на второто фрлање. Слично, елементарниот настан  $\omega_2$  еднозначно го определува резултатот и на првото и на второто фрлање. Наспроти тоа, елементарниот настан  $\omega_3$  допушта две можности: во првото фрлање паднал број, а во второто глава или, во првото фрлање паднала глава, а во второто број. Заради оваа „несиметрија“ која постои во наведените елементарни настани подобро е во овој случај за множество (простор) елементарни настани да се земе множеството

$$\Omega = \{ББ, БГ, ГБ, ГГ\}.$$

Јасно, при ваков избор на множеството  $\Omega$  со секој елементарен настан еднозначно е определен резултатот и во првото и во второто фрлање на монетата, т.е. меѓу елементарните настани „постои симетрија“.

**Пример 5.** Две коцки за играње се фрлаат одеднаш. За да ги определиме елементарните настани ќе земеме дека коцките се зелена и црвена. Притоа елементарниот настан: на црвената коцка паднал бројот 1, а на зелената бројот 2 и елементарниот на црвената коцка паднал бројот 2, а на зелената бројот 1 се различни, па затоа нив ги означуваме со подредените парови (1, 2) и (2, 1). Значи, просторот елементарни настани е множеството  $\Omega$  кое се состои од следните 36 исходи:



(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)  
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)  
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)  
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)  
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)  
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6).

**Пример 6.** Коцка за играње се фрла два пати. Најмалиот збир на паднатите броеви е 2, а најголемиот е 11. Бидејќи при фрлањето на двете коцки може да се добие било кој збир поголем или еднаков на 2, а помал или еднаков 12, ако не интересира само збирот на паднатите броеви точки, тогаш на овој експеримент можеме да му го придружаме следниов просторот елементарни настани  $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

Во примерите 3 и 4 на еден ист експеримент му придруживме различни простори елементарни настани. Меѓутоа, на експериментот кој се состои од две фрлања на коцка за играње обично му се придружува просторот елементарни настани кој е даден во примерот 3. Меѓу елемен-



тарните настани од примерот 3 постои симетрија во смисол што со секој од нив еднозначно е определен резултатот во првото и во второто фрлање на коцката, а кај елементарните настани во пример 4 таква симетрија нема и само со елементарните настани 2 и 12 еднозначно е определен резултатот во секое од двете фрлања.

**Пример 7.** Се фрлаат монета и коцка за играње. Множеството елементарни настани е  $\Omega = \{Б1, Б2, Б3, Б4, Б5, Б6, Г1, Г2, Г3, Г4, Г5, Г6\}$ .

**Пример 8.** Коцка за играње прво се фрла еднаш, па ако паднатиот број точки е помал од 3, тогаш коцката се фрла уште еднаш.

Ако падне бројот 3 или број поголем од 3, тогаш немаме второ фрлање. Но, ако падне бројот 1 или бројот 2, тогаш во секој од двата случаја имаме уште по шест можности. Затоа просторот елементарни настани е одреден со следните исходи:

3, 4, 5, 6, (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5) и (2,6).

**Пример 9.** Коцка за играње се фрла се додека збирот на регистрираните броеви точки не стане поголем од 2. Бидејќи збир од еден број е самиот тој број, можни се следниве случаи:

- во првото фрлање да падне број поголем од 2 и тогаш немаме второ фрлање, а можностите се: 3, 4, 5 и 6,
- во првото фрлање да падне бројот 2, тогаш имаме уште едно фрлање и можностите се: (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5) и (2,6),
- во првото фрлање паднал бројот 1, па имаме второ фрлање во кое ако падне број поголем или еднаков на 2 имаме пет можности: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) и (1,6), а ако падне бројот 1 имаме трето фрлање со шест можности: (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,1,5) и (1,1,6).

**Пример 10.** Во врска со експериментот од пример 3 да го разгледаме настанот

*A: збирот на паднатите броеви е еднаков на 8.*

Јасно, настанот *A* е определен со елементарните настани: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3) и (6,2).

Во врска со истиот експеримет да го разгледаме настанот

*B: производот на паднатите броеви е прост број.*

Бидејќи производ на два броја е прост број, ако едниот множител е бројот 1, а другиот множител е прост број, настанот *B* е определен со елементарните настани: (1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (3,1), (5,1).

Во претходниот пример, а и за секој друг експеримент што може да се замисли или изведе, секој настан што е во врска со експериментот е определен со некое подмножество на множеството елементарни настани  $\Omega$ . Затоа, *случајните настани* ги идентификуваме со подмножества на множеството елементарни настани  $\Omega$ . Притоа ќе велиме дека *се реализирал настанот A*, ако се појавил некој од елементарните настани со кои тој е определен, т.е. ако се реализирал елементарен настан  $\omega$  за кој важи  $\omega \in A$  и во тој случај за исходот  $\omega$  ќе велиме дека е *поволен за настанот A*.

Бидејќи при секое изведување на еден експеримент се појавува еден од елементарните настани, а сите се елементи на  $\Omega$ , логично е сигурниот настан да го означиме со  $\Omega$ . Слично, не постои елементарен настан кој е поволен за невозможниот настан, па затоа овој настан ќе го означуваме со  $\emptyset$ .



Бидејќи настаните ги идентификувавме со подмножества на просторот елементарни настани, на нив можеме да ги применуваме операциите со множествата и да ги разгледуваме релациите меѓу множествата. Притоа ќе ја користиме следнава терминологија:

- ако  $A \subset B$ , тогаш ќе велиме дека настанот  $A$  го повлекува настанот  $B$ .
- ако  $A = B$ , тогаш ќе велиме дека настаните  $A$  и  $B$  се еквивалентни.

За настанот  $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \mid \omega \notin A\}$  ќе велиме дека е *спротивен* (комплементарен) на настанот  $A$ . Јасно, настанот  $\bar{A}$  се реализира, ако не се реализира настанот  $A$ , т.е. ако експериментот заврши со исход  $\omega$  за кој важи  $\omega \notin A$ . Овде уште да забележиме дека ако множеството елементарни настани  $\Omega$  има  $n$  елементи, а настанот  $A$  има  $k$  елементи, тогаш настанот  $\bar{A}$  има  $n - k$  елементи.

**Пример 11.** Монета се фрла три пати. Просторот на елементарни настани е

$$\Omega = \{\text{БББ}, \text{ББГ}, \text{БГБ}, \text{ГББ}, \text{БГГ}, \text{ГГБ}, \text{ГТГ}, \text{ГТТ}\}.$$

Со  $A$  да го означиме настанот дека ќе паднат барем два броја, а со  $B$  настанот дека ќе падне само една страна. Имаме

$$A = \{\text{БББ}, \text{ББГ}, \text{БГБ}, \text{ГББ}\} \text{ и } B = \{\text{БББ}, \text{ГТТ}\}.$$

Понатаму добиваме

$$\bar{A} = \{\text{БГГ}, \text{ГБГ}, \text{ГТБ}, \text{ГТГ}\} \text{ и } \bar{B} = \{\text{ББГ}, \text{БГБ}, \text{ГББ}, \text{БГГ}, \text{ГБГ}, \text{ГТБ}\}.$$

#### Задачи

5. Се фрлаат две монети и една коцка. Најди го просторот елементарни настани.
6. Даден е шпил од 52 карти, од кој се избира една карта и се регистрира бројот на истата. Ако за асот регистрираме 1, за цандарот 12, за дамата 13 и за попот 14, определи го просторот елементарни настани.
7. Монета е фрлена три пати. Запиши ги настаните:  
 $A$  - глава се појавила најмалку еднаш,  
 $B$  - глава се појавила во второто фрлање,  
 $C$  - број е добиен во третото фрлање,  
 $D$  - ниту еднаш не се појавила глава.
8. Коцка за играње се фрла два пати. Определи ги настаните:  
а) во двете фрлања паднал број поголем од четири,  
б) паднала барем една шестка,  
в) збирот на паднатите броеви е поголем од пет.
9. Монета се фрла два пати. Ако и двата пати падне иста страна, тогаш монетата се фрлат и трет пат, а ако паднале различни страни, тогаш еднаш се фрла коцка за играње. Определи го просторот елементарни настани, настанот  $A$  дека во третото фрлање не е регистриран број и неговиот спротивен настан  $\bar{A}$ .

### 6.3 Класична дефиниција на веројатност

Нека  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  е множеството елементарни настани на некој експеримент. За секој  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  на елементарниот настан  $\omega_j$ , му придружуваме број  $p(\omega_j) = p_j$  така што се исполнети следниве услови:

- 1)  $p_j \geq 0$ , за секој  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  и
- 2)  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

Бројот  $p_j$  го нарекуваме *веројатност на елементарниот настан  $\omega_j$* .

Ако  $A$  е некој настан, тогаш како што знаеме тој е множеството чии елементи се елементарните настани (исходи) кои се поволни за него, т.е.  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ , со  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Бројот  $P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$  го нарекуваме *веројатност на настанот  $A$* .

Значи, веројатноста на настанот  $A$  ја дефинираме како збир на веројатностите на елементарните настани кои се поволни за настанот  $A$ . Ќе го разгледаме само случајот кога на сите елементарни настани (исходи)  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  им е придружена еднаква веројатност, односно кога важи  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ . Со замена во  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  добиваме  $np = 1$ , односно  $p = p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ . Во овој случај за елементарните настани велиме дека се *еднаково-веројатни* и тогаш веројатноста на настанот  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$  е дадена со

$$P(A) = \frac{k}{n}. \quad (1)$$

Според тоа, во случај на еднаково-веројатни елементарни настани веројатноста на произволен настан  $A$  е еднаква на количникот на бројот на елементарните настани поволни за настанот  $A$  и вкупниот број елементарни настани.

Ваквото определување на веројатноста на настаните во случај на експеримент со еднаково-веројатни елементарни настани го нарекуваме *класична (Паскалова) дефиниција на веројатноста*.

Но, кои елементарни настани можеме да ги сметаме еднаково-веројатни? Одговорот на ова прашање е дека еднаково-веројатни елементарни настани се оние за кои немаме логичка причина да сметаме дека еден елементарен настан е привилегиран во однос на другите. На пример,

- при фрлањето коцка секој од броевите точки 1, 2, 3, 4, 5 и 6 е еднаково-веројатен,
- при фрлањето монета секоја од можностите Б и Г е еднаково-веројатна,
- ако во кутија имаме 20 по големина и маса еднакви топчиња и извлекуваме едно топче без гледање, тогаш секое топче е еднаково-веројатно,
- коа од шпил од 52 карти без гледање извлекуваме една карта, тогаш секоја карта е еднаково-веројатна,
- при фрлањето две коцки за играње секој од добиените 36 подредени парови во пример 3 од претходната лекција е еднаково-веројатен итн.

Од (1) следува: ако просторот елементарни настани  $\Omega$  е конечен и ако елементарните настани се еднаково-веројатни, тогаш пресметувањето на веројатноста на настанот  $A \subseteq \Omega$  се сведува на определување на бројот на елементите на множествата  $A$  и  $\Omega$ , т.е. на определување на бројот на исходите поволни за настанот  $A$  и на бројот на сите можни исходи. Да разгледаме неколку примери.

**Пример 12.** Во една торба има 5 зелени, 7 црвени и 13 жолти топчиња, кои се еднакви по големина и маса. Од торбата без да гледаме вадиме едно топче. Колку е веројатноста изваденото топче да е:

- а) црвено,                      б) жолто,                      в) црвено или жолто,  
г) да не е зелено,              д) ниту зелено, ниту жолто.

**Решение.** Вкупно имаме  $5 + 7 + 13 = 25$  топчиња, што значи дека имаме  $n = 25$  можни еднаквоверојатни исходи.

а) Во торбата имаме  $k = 7$  црвени топчиња, па затоа веројатноста на настанот  $A$ : изваденото топче е црвено е  $P(A) = \frac{7}{25} = 0,28$ .

б) Во торбата имаме  $k = 13$  жолти топчиња, па затоа веројатноста на настанот  $B$ : изваденото топче да е жолто е  $P(B) = \frac{13}{25} = 0,52$ .

в) Во торбата имаме 7 црвени и 13 жолти топчиња, па затоа  $k = 7 + 13 = 20$  и веројатноста на настанот  $C$ : изваденото топче да е црвено или жолто е  $P(C) = \frac{20}{25} = 0,8$ .

г) Ако топчето не е зелено, тогаш тоа е црвено или жолто, што значи дека тоа е настанот  $C$ : изваденото топче да е црвено или жолто и  $P(C) = \frac{20}{25} = 0,8$ .

д) Ако топчето не е ниту зелено, ниту жолто, тогаш тоа е црвено, што значи дека тоа е настанот  $A$ : изваденото топче е црвено и  $P(A) = \frac{7}{25} = 0,28$ .

Во пример 12 бараните веројатности ги искажавме со дропки, односно со децимални броеви. Но, веројатностите се искажуваат и со проценти. Така, веројатноста на настанот  $C$  од пример 1 искажана во проценти е  $0,8 \cdot 100 = 80\%$ , а веројатноста на настанот  $B$  искажана во проценти е  $0,52 \cdot 100 = 52\%$ .

**Пример 13.** Од шпил од 52 карти случајно извлекуваме една карта. Колкава е веројатноста извлечената карта да е деветка или десетка.

**Решение.** Имаме 52 карти, што значи  $n = 52$ . Понатаму, бидејќи извлекувањето на секоја карта е еднаквоверојатно, а имаме 4 деветки и 4 десетки, добиваме дека бројот на поволни исходи е  $k = 4 + 4 = 8$ . Значи, бараната веројатност е  $p = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$ .

**Пример 14.** Фрламе две коцки за играње. Пресметај ги веројатностите на настаните:

$Q$  - квадратниот корен на збирот на паднатите броеви е природен број,

$S_2$  - збирот на паднатите броеви е делив со 2,

$S_3$  - збирот на паднатите броеви е делив со 3,

$S_4$  - збирот на паднатите броеви е делив со 4.

**Решение.** Множеството елементарни настани има  $n = 36$  елементи.

За да квадратен корен е природен број, треба збирот да е точен квадрат, односно да е еднаков на 4 или 9. Оттука добиваме  $Q = \{(1,3), (3,1), (2,2), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4)\}$ , па затоа  $k = 7$  и  $P(Q) = \frac{7}{36}$ .

Збирот на паднатите броеви е делив со 2 ако или двата се парни или двата се непарни, од каде добиваме:

$$S_2 = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5), \\ (2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}.$$

Последното значи, дека  $k = 18$ , па затоа  $P(S_2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ .

Збирот на паднатите броеви е делив со 3 ако тој е еднаков на 3, 6, 9 или 12. Оттука добиваме  $S_3 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$ , т.е.  $k = 12$ , па затоа  $P(S_3) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .

Конечно, збирот на паднатите броеви е делив со 4 ако тој е еднаков на 4, 8 или 12, од каде добиваме  $S_4 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4), (6, 6)\}$ . Значи,  $k = 9$ , т.е.  $P(S_4) = \frac{9}{36}$ .

**Пример 15.** Коцка за играње се фрла два пати и во секое фрлање се бележи паднатиот број точки. Која веројатност е поголема: збирот на паднатите броеви да е еднаков на 7 или збирот на паднатите броеви да е еднаков на 8?

**Решение.** Бидејќи коцката се фрла два пати и во секое фрлање се бележи паднатиот број точки добиваме дека бројот на сите елементарни настани е еднаков на 36, односно  $n = 36$ .

Бројот 7 може да се добие како збир на два собирци со реализација на следниве елементарни настани: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) и (6, 1), па во случајов имаме  $k = 6$ . Значи, бараната веројатност е  $p = \frac{6}{36}$ .

Бројот 8 може да се добие како збир на два собирци со реализација на следниве елементарни настани: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) и (6, 2), па во случајов имаме  $k = 5$ . Значи, бараната веројатност е  $q = \frac{5}{36}$ .

Конечно,  $q = \frac{5}{36} < \frac{6}{36} = p$ , што значи поголема е веројатноста збирот на паднатите броеви да е 7.

**Пример 16.** Во една торба има 56 црвени, 44 зелени и определен број жолти топчиња, кои се еднакви по големина и маса. Веројатноста случајно да извлечеме жолто топче е еднаква на 20%. Колку жолти топчиња има во торбата? Колкава е веројатноста случајно да извлечеме црвено топче, а колкава е веројатноста случајно извлеченото топче да е зелено?

**Решение.** Нека во торбата имаме  $z$  жолти топиња. Тогаш вкупниот број топчиња е  $n = 56 + 44 + z = 100 + z$ . При извлекување на жолто топче бројот на поволни исходи е  $k = z$ , па затоа  $\frac{z}{100+z} = 0,20$ , од каде добиваме  $z = 20 + 0,2z$ , т.е.  $z = 25$ . Значи, во торбата има 25 жолти топчиња.

Во торбата вкупно има  $100 + 25 = 125$  топчиња, т.е.  $n = 125$ . При извлекување на црвено топче имаме  $k = 56$  поволни исходи, па затоа веројатноста да се извлече црвено топче е  $p = \frac{56}{125} = 0,448$ .

Слично, веројатноста да се извлече зелено топче е  $q = \frac{44}{125} = 0,352$ .

Во претходната лекција видовме дека ако просторот еднаковеројатни елементарни настани има  $n$  елементи и настанот  $A$  има  $k$  елементи, тогаш спротивниот настан  $\bar{A}$  има  $n - k$  елементи. Значи, веројатноста на настанот  $A$  е  $P(A) = \frac{k}{n}$ , а веројатноста на настанот  $\bar{A}$  е

$$P(\bar{A}) = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P(A). \quad (2)$$

**Пример 17.** Коцка за играње се фрла три пати. Колкава е веројатноста дека меѓу паднатите броеви точки има барем два различни броја?

**Решение.** Во пример 3 од претходната лекција видовме дека при фрлање на две коцки просторот елементарни настани има 36 елементи. Сега, ако за секој од овие елементи земеме предвид дека при третото фрлање имаме 6 можни исходи добиваме дека кога коцката се фрла три пати просторот  $\Omega$  има  $6 \cdot 36 = 216$  елементарни настани, односно  $n = 216$ .

Со  $A$  да го означиме настанот: сите паднати броеви се еднакви. Бројот на поволни исходи за  $A$  е еднаков на 6 (зошто?). Според тоа,  $P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ .

Спротивниот настан на  $A$  е настанот  $\bar{A}$ : меѓу паднатите броеви точки има барем два различни броја. Сега, со замена во равенството (2) добиваме  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ .

**Пример 18.** Матеј фрла две коцки за играње. Пресметај ја веројатноста производот на паднатите броеви точки да не е делив со 10.

**Решение.** Јасно,  $n = 36$ . Ќе ја пресметаме веројатноста на настанот  $A$ : производот на паднатите броеви точки е делив со 10. Настанот  $A$  се реализира ако на едната коцка бројот на паднатите точки е 5, а на другата тој е парен број. Значи, поволни исходи се:

(5, 2), (5, 4), (5, 6), (2, 5), (4, 5) и (6, 5),

па затоа  $k = 6$ . Според тоа,  $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

Спротивниот настан на  $A$  е настанот  $\bar{A}$ : производот на паднатите броеви точки не е делив со 10. Сега, со замена во равенството (2) добиваме  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

#### Задачи

10. Имаме шпил од 52 карти за играње, од кој без гледање влечиме една карта. Пресметај ја веројатноста на настанот  $A$ : извлечена е карта со знакот детелинка.
11. Во кутија имаме 11 сини, 17 црвени и 12 зелени топчиња. Без гледање влечиме едно топче. Пресметај ја веројатноста на настанот:
  - а) извлечено е црвено топче,
  - б) извлечено е сино или зелено топче,
  - в) извлеченото топче не е зелено.
12. Во една торба има 46 црвени, 38 зелени и определен број жолти топчиња, кои се еднакви по големина и маса. Веројатноста случајно да извлечеме жолто топче е еднаква на 30%. Колку жолти топчиња има во торбата? Колкава е веројатноста случајно да извлечеме црвено топче, а колкава е веројатноста случајно извлеченото топче да е зелено?
13. Се фрлаат монета и коцка за играње. Пресметај ја веројатноста на монетата да падне глава, а на коцката прост број. Колкава е веројатноста на спротивниот настан?
14. Ивана во бројот  $\overline{214a}$  на местото на буквата  $a$  случајно запишува цифра. Колкава е веројатноста бројот кој што ќе го добие да биде делив со 3?
15. Арлинда во збирот  $\overline{21a4} + \overline{357b}$  на местата на буквите  $a$  и  $b$  случајно запишува цифри. Колкава е веројатноста добиениот збир да не е делив со 3?  
*Упатство.* Искористи дека збирот на два броја е делив со 3 ако збирот на нивните остатоци при делење со 3 е делив со 3. Потоа пресметај ги веројатноста дадениот збир да е делив со 3 и веројатноста на спротивниот настан.

## 6.4 Собирање и средување податоци

Како што знаеме до податоци најчесто доаѓаме со набљудување, мерење, споредување, броење и со поставување прашања, односно со пополнување прашалник. Меѓутоа, до податоци може да се дојде и со пребарување списанија, енциклопедии и друга научна и стручна литература.

Понатаму, прибраните податоци ги обработуваме, што најчесто подразбира нивно претставување во низи, табели и со дијаграми. Табелата е составена од правоаголници (полиња) кои се подредени во колони и редови, во кои се внесуваат податоците. Притоа, ако еден податок  $x$  е застапен  $k$  пати велиме дека тој има честота (фреквенција)  $k$ .

**Дефиниција 6.** Честота (фреквенција) е бројот што покажува колку пати е застапен некој податок во групата податоци која ја разгледуваме.

Дијаграм е графичкото претставување на податоците со точки, прави, 2Д форми и 3Д форми.

**Пример 19.** Сафет решил да истражи кој од понудените шест градови Амстердам, Копенхаген, Фиренца, Варшава, Цирих и Истанбул најмногу сакаат да го посетата учениците од неговата гимназија. Тој анкетирал 80 ученици на кои им поделил по едно картонче на кое требало да ја запишат првата буква на одбраниот град. Откако учениците ги пополниле картончињата и ги вратиле назад, тој ја добила низата:

К, А, Ф, Ц, В, А, И, Ф, Ц, И, В, А, И, К, И, В, И, Ф, А, К,  
А, Ф, К, А, Ф, В, К, И, Ц, Ц, И, А, В, И, Ф, К, И, В, А, Ф,  
Ф, А, Ц, А, Ф, К, А, Ц, Ф, В, А, Ф, А, Ц, В, А, В, А, Ц, А,  
И, В, А, И, К, Ц, И, А, И, Ф, И, В, И, Ф, И, Ц, А, Ф, А, Ц,

Ако ги преброиме добиените податоци ќе ја добиеме табелата:

| Град    | Амстердам | Копенхаген | Фиренца | Варшава | Цирих | Истанбул |
|---------|-----------|------------|---------|---------|-------|----------|
|         |           |            |         |         |       |          |
| Честота | 20        | 8          | 14      | 11      | 11    | 16       |

Од податоците во табелата можеме да видиме дека учениците од понудените градови најмногу сакаат Амстердам, а најмалку Копенхаген.

**Пример 20.** Со случајно одбирање се земени 150 продавници и во нив е бележена мало-продажната цена на еден ист производ изразена во денари. Податоците се дадени во табелата:

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 441 | 441 | 442 | 440 | 439 | 434 | 442 | 440 | 438 | 441 | 438 | 439 | 445 | 434 | 440 | 446 | 434 |
| 440 | 446 | 430 | 436 | 441 | 446 | 451 | 435 | 442 | 442 | 443 | 444 | 440 | 439 | 438 | 442 | 434 |
| 442 | 434 | 440 | 446 | 435 | 441 | 442 | 435 | 441 | 447 | 437 | 437 | 442 | 447 | 446 | 436 | 443 |
| 443 | 434 | 442 | 441 | 440 | 434 | 443 | 435 | 443 | 435 | 441 | 442 | 436 | 442 | 443 | 436 | 442 |
| 442 | 438 | 438 | 443 | 442 | 437 | 437 | 444 | 444 | 442 | 443 | 442 | 442 | 435 | 444 | 437 | 444 |
| 436 | 442 | 443 | 437 | 443 | 444 | 437 | 443 | 443 | 439 | 439 | 444 | 443 | 438 | 438 | 445 | 445 |
| 443 | 434 | 444 | 443 | 437 | 445 | 439 | 445 | 437 | 443 | 438 | 438 | 444 | 438 | 438 | 44  | 444 |
| 434 | 440 | 445 | 444 | 433 | 439 | 446 | 446 | 439 | 434 | 442 | 444 | 439 | 442 | 440 | 442 | 438 |
| 444 | 439 | 439 | 445 | 439 | 439 | 445 | 435 | 435 | 434 | 435 | 430 | 434 | 440 |     |     |     |

Честотите на податоците се дадени во долната табела.

| Цена ( $x_i$ )    | 434 | 435 | 436 | 437 | 438 | 439 | 440 | 441 | 442 | 443 | 444 | 445 | 446 |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Честото ( $n_i$ ) | 12  | 9   | 7   | 9   | 12  | 14  | 10  | 10  | 20  | 17  | 14  | 9   | 7   |

Од втората табела можеме да видиме дека најниската цена по која се продава производот е 434 денари, а додека неговата највисока цена е 446 денари. Притоа производот најчесто се продава по цена од 442 денари и тоа во 20 продавници. Според тоа, најголема фреквенција има цената 442 денари, а најмалите се фреквенциите на цените 436 и 446 денари, кои се еднакви на 7.

Во претходниот пример ние всушност ги групиравме податоците во тринаесет групи: од 434 до 446 денари. Притоа во секоја група ги ставивме еднаквите податоци, со што всушност ја добивме честотата на секој податок од нашето истражување.

**Пример 21.** На тестот по математика може да се освојат најмногу 55 поени. Биле тестирани 150 ученици и добиените резултати се прикажани во следната табела:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 47 | 41 | 42 | 40 | 39 | 34 | 48 | 40 | 32 | 41 | 32 | 39 | 45 | 34 | 40 | 46 | 34 |
| 40 | 46 | 30 | 36 | 41 | 46 | 51 | 35 | 48 | 42 | 43 | 44 | 40 | 39 | 32 | 42 | 34 |
| 42 | 34 | 40 | 46 | 35 | 41 | 48 | 35 | 41 | 47 | 31 | 37 | 42 | 47 | 52 | 36 | 49 |
| 43 | 34 | 42 | 41 | 40 | 34 | 43 | 35 | 43 | 35 | 41 | 48 | 36 | 42 | 49 | 36 | 42 |
| 48 | 32 | 38 | 43 | 48 | 31 | 37 | 50 | 44 | 42 | 43 | 42 | 42 | 35 | 44 | 37 | 44 |
| 36 | 42 | 49 | 37 | 43 | 50 | 37 | 43 | 49 | 33 | 39 | 44 | 49 | 32 | 38 | 51 | 45 |
| 43 | 34 | 44 | 43 | 37 | 45 | 39 | 45 | 37 | 43 | 32 | 38 | 44 | 32 | 38 | 44 | 50 |
| 34 | 40 | 45 | 50 | 33 | 39 | 52 | 46 | 39 | 34 | 48 | 44 | 39 | 48 | 40 | 48 | 38 |
| 44 | 33 | 39 | 45 | 33 | 39 | 45 | 27 | 35 | 25 | 27 | 30 | 34 | 40 |    |    |    |

Професорот Маркоски направил преглед на резултатите и ја добил следната табела за честотите на бројот на освоените поени.

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 25 | 27 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| $n_i$ | 1  | 2  | 2  | 2  | 7  | 4  | 11 | 7  | 5  | 7  | 5  | 10 | 10 |
| $x_i$ | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 |    |
| $n_i$ | 7  | 12 | 12 | 10 | 7  | 5  | 3  | 8  | 5  | 4  | 2  | 2  |    |

На тој начин тој учениците ги распределил во 23 групи. Притоа забележал дека најголем број учениците освоиле 42 или 43 поени, по 12 ученици во секоја група, а најмал број поени освоил еден ученик и тоа 25 поени.

Како што можеме да видиме од претходниот пример учениците се распределени во 23 групи, па тешко можеме да извлечеме заклучок за постигнатиот успех на учениците во целина. Како што знаеме, вреднувањето на успехот на учениците професорите го вршат на тој начин што за освоени поени од определен интервал се добива точно определена оценка. Тоа всушност е групирање на податоци во интервали. Притоа бројот на интервалите во кои се групираат податоците најчесто зависи од:

- бројот на податоците,
- интервалот во кој се наоѓаат податоците,
- видот на истражувањето,
- целта на истражувањето итн.

Сепак, не постои еднозначен одговор колкав треба да биде бројот на интервалите  $r$ . Бројот на интервалите се пресметува според определени формули, кои овде нема да ги презентираме, бидејќи користат функции кои не сме ги учеле.



Откако ќе се одлучиме за бројот на интервалите, треба да ги определиме и самите интервали. Притоа, треба да се имаат предвид следниве правила:

- интервалите по правило треба да бидат со иста должина,
- долната граница на првиот интервал и горната граница на последниот интервал се избираат така што тие не треба да се совпаѓаат со најмалиот и најголемиот податок,
- како претставник на секој интервал ја земаме неговата средина,
- ако некои податоци се совпаѓаат со границите на внатрешните интервали, тогаш можни се два случаи:

- половина од податоците ги сместуваме во едниот, а другата половина во другиот интервал,
- сите податоци ги сместуваме или во едниот или во другиот интервал,

при што правилото за кое ќе се одлучиме на почетокот го применуваме за сите интервали.

Пред да преминеме на следниот пример да се потсетиме дека податоците може графички да се претставуваат на различни начини. Еден од начините за претставување на интервално групирани податоци е хистограмот.

**Дефиниција 7.** *Хистограм* е низа од правоаголници поставени еден до друг во правоаголен координатен систем. Едната страна на лежи на  $x$ -оската и истата се совпаѓа со интервалот во кој се наоѓаат дел од вредностите на бројните податоци, а другата страна е со должина еднаква на честотата на бројните податоци што припаѓаат на тој интервал.

**Пример 22.** Да се вратиме на пример 11. Професорот Маркоски ги знае формулите за определување на бројот на интервалите, па затоа решил податоците да ги подели во  $r = 8$  интервали со еднаква должина.

Според правилото б), а бидејќи најмалиот и најголемиот податок се 25 и 52, направил проширување на интервалот (25,52) од лево и од десно за 0,5 и го добил интервалот (24,5;52,5), чија должина е  $52,5 - 24,5 = 28$ .

Понатаму, бидејќи бројот на интервалите е  $r = 8$  според правилото а) секој од овие осум интервали ќе биде со должина  $28:8 = 3,5$ . Според тоа, расположливите податоци ги групирал во осум интервали секој со должина 3,5, т.е. ги добил следниве интервали:

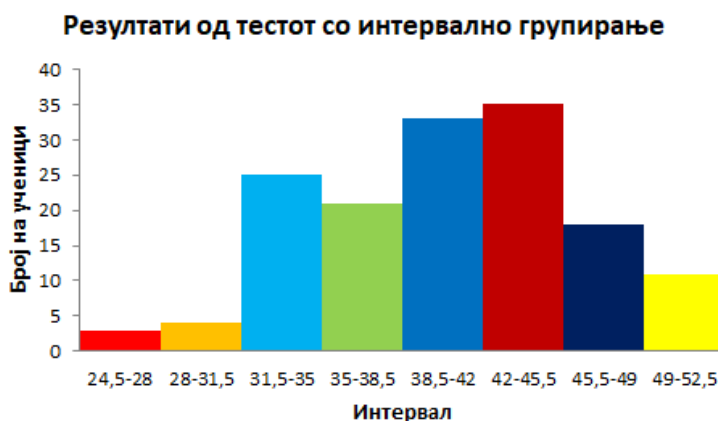
(24,5; 28), (28; 31,5), (31,5; 35), (35; 38,5),  
(38,5; 42), (42; 45,5), (45,5; 49), (49; 52,5)

Согласно со правилото г) зел податоците кои се совпаѓаат со границите на интервалите по половина да припаѓаат на секој од граничните интервали. Така ја добил табелата.

На овој начин професорот Маркоски добил попрегледна слика за резултатите од тестот, кои ги претставил со хистограм со еднакви интервали.

Потоа тој преминал кон оценувањето на учениците. Бидејќи, според дадениот критериум ако ученик освои 40% и повеќе проценти од

| Р. бр. | Интервал | Средина | Честота |
|--------|----------|---------|---------|
| 1      | 24,5-28  | 26,25   | 3       |
| 2      | 28-31,5  | 29,75   | 4       |
| 3      | 31,5-35  | 33,25   | 25      |
| 4      | 35-38,5  | 36,75   | 21      |
| 5      | 38,5-42  | 40,25   | 33      |
| 6      | 42-45,5  | 43,75   | 35      |
| 7      | 45,5-49  | 47,25   | 18      |
| 8      | 49-52,5  | 50,75   | 11      |





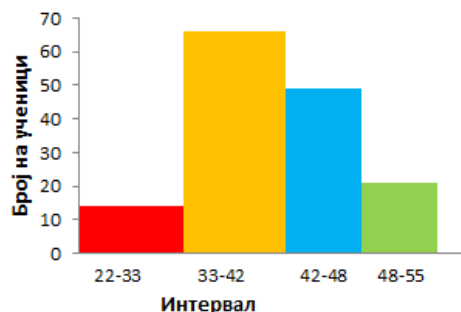
вкупниот број поени, т.е. 22 и повеќе поени, тој добива преодна оценка, а имаме четири преодни оценки, тој резултатите ги поделил во четири интервали и тоа

(22;33), (33;42), (42,48) и (48,55),

при што бидејќи учениците кои освојуваат ист број поени мора да имаат исти оценки, податоците кои се на границите на интервалите ги сместил во десниот интервал. Така ја добил следнава табела, за која нацртал хистограм со нееднакви интервали.

| Р. бр. | Интервал | Честота |
|--------|----------|---------|
| 1      | 22-33    | 3       |
| 2      | 33-42    | 4       |
| 3      | 42-48    | 25      |
| 4      | 48-55    | 21      |

**Резултати од тестот со интервално групирање со нееднакви интервали**



### Задачи

16. Јанко прибрал податоци за бројот на членовите на семејството на учениците во прва година од неговата гимназија и ги добил податоците:

4, 5, 6, 5, 3, 6, 5, 5, 3, 4, 5, 6, 3, 5, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5, 3, 6, 5, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5,  
5, 6, 5, 4, 3, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 3, 6, 4, 3, 3, 6, 3, 4, 6, 4, 3, 3, 5, 6, 4, 3, 3, 6, 3, 4,  
4, 6, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 6, 3, 4, 6, 6, 5, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 6.

Состави табела од добиените податоци.

17. На тест по математика максималниот број поени е 20. Учениците од прва година во една гимназија ги освоиле следниве поени:

6, 15, 17, 14, 4, 7, 10, 15, 16, 7, 20, 14, 20, 10, 13, 15, 17, 16, 4, 18, 12, 16, 12, 13, 16, 19, 12,  
14, 19, 14, 11, 7, 17, 9, 12, 15, 18, 12, 5, 13, 7, 14, 13, 18, 13, 12, 9, 16, 16, 17, 15, 8, 11, 17,  
13, 14, 11, 14, 5, 18, 8, 12, 15, 12, 11, 15, 13, 8, 9, 8, 13, 8, 7, 9, 15, 19, 13, 7, 14, 16, 6, 9, 18,  
15, 6, 8, 13, 9, 8, 15, 7, 13, 8, 15, 9, 10, 12, 14, 9, 13, 12, 15, 18, 12, 5, 13, 7, 14, 13, 12, 15, 18,  
12, 5, 13, 7, 14, 13, 12, 15, 18, 12, 5, 13, 7, 14, 13, 12, 15, 18, 12, 5, 13, 7, 14, 13.

а) Состави табела од добиените податоци.

б) Добиените податоци групирај ги во пет интервали со еднаква должина и нацртај го хистограмот на честотите.

18. Случајно се избираат 150 посетители на еден супермаркет. Времето кое тие го минуваат во продавницата, изразено во минути, е:

10, 12, 15, 23, 11, 57, 34, 23, 45, 55, 33, 35, 13, 10, 45, 44, 54, 31, 33, 34, 37, 40, 43, 42, 11,  
16, 18, 17, 22, 24, 45, 48, 52, 56, 51, 50, 22, 14, 16, 35, 45, 43, 33, 27, 18, 19, 32, 36, 48, 12,  
10, 12, 15, 23, 11, 57, 34, 23, 45, 55, 33, 35, 13, 10, 45, 44, 54, 31, 33, 34, 37, 40, 43, 42, 14,  
16, 18, 17, 22, 24, 45, 48, 52, 56, 51, 50, 22, 14, 16, 35, 45, 43, 33, 27, 18, 19, 32, 36, 48, 13,  
10, 12, 15, 23, 11, 57, 34, 23, 45, 55, 33, 35, 13, 10, 45, 44, 54, 31, 33, 34, 37, 40, 43, 42, 12,  
16, 18, 17, 22, 24, 45, 48, 52, 56, 51, 50, 22, 14, 16, 35, 45, 43, 33, 27, 18, 19, 32, 36, 48, 19.

Податоците да се групираат во:

а) 6 интервали со иста должина,

б) 8 интервали со иста должина

и за вака групирани податоци да се нацртаат хистограмите на честотите.

## 6.5 Графичко претставување на податоците

Како што знаеме податоците можат да се претставуваат со сликовит дијаграм (пиктограм), секторски (кружен) дијаграм, столбест дијаграм и линиски дијаграм

Да се потсетиме:

*Сликовит дијаграм (пиктограм)* е начин на претставување на податоци со користење слики и симболи.

*Секторскиот (кружниот) дијаграм* е круг во кој со кружни исечоци се претставуваат делови од целото, кои прво се изразуваат во проценти.

*Столбестиот дијаграм* се состои од вертикални (хоризонтални) правоаголници кои имаат иста основа, а висината го претставува бројот на податоците.

*Линискиот дијаграм* е искршена линија која се добива така што во координатен систем на хоризонталната оска се нанесува едниот податок а на вертикалната линија се нанесува другиот податок и добиените точки се поврзуваат со отсечки.

**Пример 23.** Во една продавница за спортска опрема продажбата на дресовите од еден вид е дадена со пиктограмот прикажан на цртежот.

а) Колку дресови се продавале во секој од наведените месеци?

б) Колку дресови биле продадени од почетокот на септември до крајот на јануари?

**Решение.** а) Според пиктограмот една слика означува 5500 дресови. За септември имаме 6 цели и половина дрес, што значи дека се продадени  $5500 \cdot 6,5 = 36300$  дресови. На потполно ист начин се добива дека во октомври се продадени 33000 дресови, во ноември 24750 дресови, во декември 38500 дресови и во јануари 24750 дресови.

б) Во разгледуваниот период вкупно се продадени 156750 дресови.



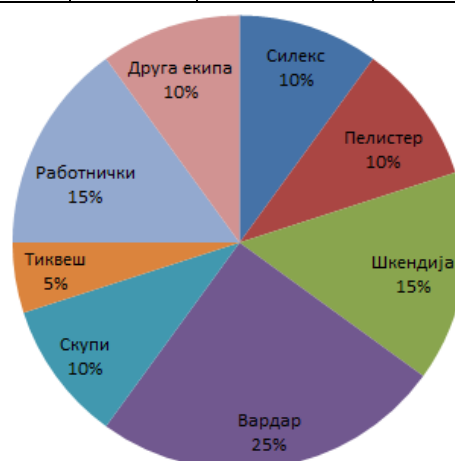
**Пример 24.** Фудбаската федерација на Македонија анкетирала 1200 фудбалски фанови, се со цел да се добие сознание за бројот на навивачите на екипите кои учествуваат во Првата македонска лига. Добиените податоци од анкетата се дадени во следната табела:

| Екипа    | Силекс | Пелистер | Шкендија | Вардар | Скупи | Тиквеш | Работнички | Друга екипа |
|----------|--------|----------|----------|--------|-------|--------|------------|-------------|
| Навивачи | 120    | 120      | 180      | 300    | 120   | 60     | 180        | 120         |

Ако бројот на навивачите за секоја екипа го изразиме во проценти, добиваме:

Силекс – 10%,  
 Пелистер – 10%,  
 Шкендија – 15%,  
 Вардар – 25%,  
 Скупи – 10%,  
 Тиквеш – 5%,  
 Работички – 15% и  
 Друга екипа – 10%.

Добиените податоци се преставени со дадениот секторски дијаграм.



**Пример 25.** Глигор направил анкета за омилениот спорт на учениците од прва година во неговата гимназија.

а) Податоците претставени на дијаграмот внеси ги во табела.

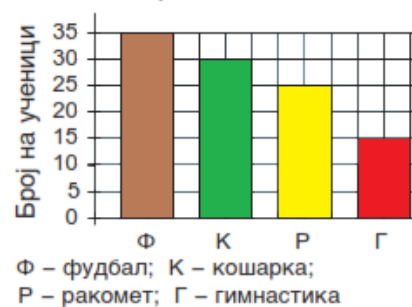
б) Колку ученици анкетирал Глигор?

в) Дали повеќе ученици сакаат фудбал и гимнастика, или пак кошарка и ракомет?

**Решение.** а) Од столбестиот дијаграм ја добиваме табелата:

| Спорт   | Фудбал | Кошарка | Ракомет | Гимнастика |
|---------|--------|---------|---------|------------|
| Ученици | 35     | 30      | 25      | 15         |

Омилен спорт



б) Глигор вкупно анкетирал  $35 + 30 + 25 + 15 = 105$  ученици.

в) Фудбал и гимнастика сакаат  $35 + 15 = 50$  ученици, а кошарка и ракомет  $30 + 25 = 55$  ученици.

**Пример 26.** Во пример 22 ја составивме табелата

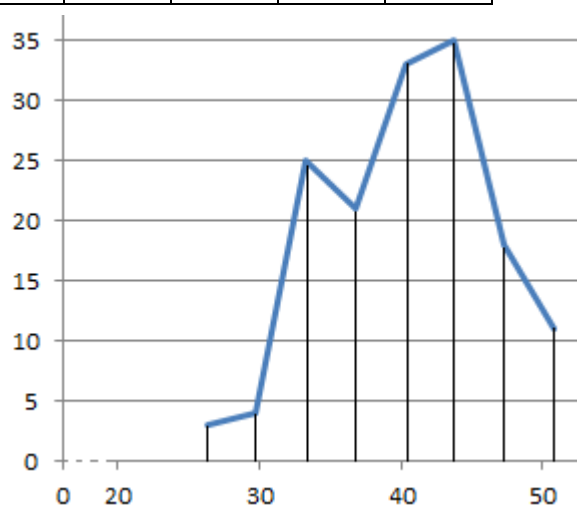
| Интервал | 26,25 | 29,75 | 33,25 | 36,75 | 40,25 | 43,75 | 47,25 | 50,75 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Честота  | 3     | 4     | 25    | 21    | 33    | 35    | 18    | 11    |

во која се содржани податоците за средините на интервалите во кои професорот Маркоски ги групирал постигнатите поени и честотата (бројот) на учениците кои освоиле поени кои се во овие интервали.

На цртежот е прикажан линискиот дијаграм.

Од табелата, но и од линискиот дијаграм забележуваме дека повеќе од две третини од учениците освоиле поени кои се наоѓаат во централните четири интервали.

Што ова ни говори за распределбата на поените кои учениците ги освоиле на тестот?



Претставувањето на податоците може да се прави и со дијаграм со точки. Ваков дијаграм користиме кога имаме експеримент во кој мериме две променливи кои зависат едната од другата. Притоа, податоците се дадени како подредени парови, па затоа истите можеме да ги претставиме во координатен систем како точки.

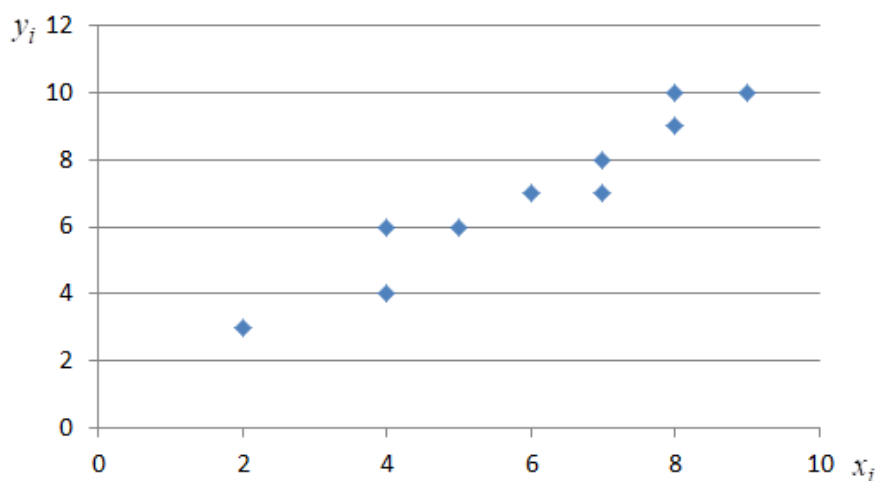
**Пример 27.** При реализирање на еден експеримент се набљудувани две применливи и притоа се добиени следниве податоци.

|       |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| $x_i$ | 2 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8  | 9  |
| $y_i$ | 3 | 4 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 |

Претстави ги добиените податоци со точкест дијаграм.

**Решение.** Претставувањето на податоците со точкест дијаграм го реализираме така што точките  $A(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 10$  ги внесуваме во ист координатен систем.

Бараниот точкест дијаграм е прикажан на цртежот.



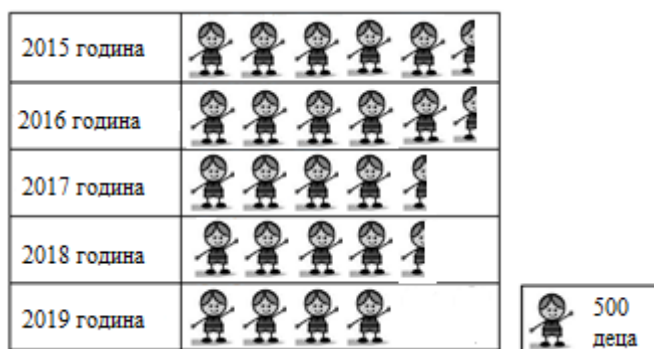
### Задачи

19. Промената на бројот на живородените деца во градот  $X$  е прикажана на дадениот пиктограм на цртежот.

а) Пресметај колку деца се раѓале во секоја од разгледуваните години?

б) Колкав е процентот на родените деца во годините 2016, 2017, 2018 и 2019 во однос на 2015 година?

в) Колку деца се вкупно родени во разгледуваниот период?



20. Во еден овоштарник има 600 садници. Бројот на садниците според видот е прикажана со секторскиот дијаграм прикажа на цртежот.

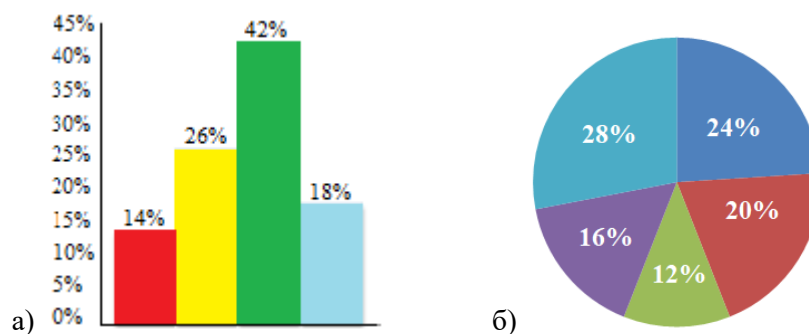
а) Колку садници има од секој вид овошје?

б) Состави столбест дијаграм за бројот на садниците во овош-тарникот.

21. Семејниот буџет на Пееви го сочинуваат 68000 денари платата на таткото, 50000 денари плата на мајката, 46000 пензијата на дедото, 40000 пензијата на бабата и 6000 денари степендијата на Иван. Прикажи ги со кружен дијаграм вкупните месечни приходи на семејството Пееви.

22. а) Податоците од столбестиот дијаграм претстави ги на секторски (кружен) дијаграм.  
б) Податоците што се прикажани на секторскиот (кружниот) дијаграм прикажи ги со столбест дијаграм.





## 6.6 Аритметичка средина, мода, медијана и ранг на податоци

При обработката на податоци од посебен интерес е наоѓањето на определени бројни карактеристики, со кои се запозна во основното образование.

**Дефиниција 8.** *Аритметичка средина* на два или повеќе броја е количникот од збирот на тие броеви и бројот на собирците.

Од претходната дефиниција следува дека, ако се дадени податоците  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , тогаш нивната аритметичка средина е

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1)$$

Понатаму, ако податокот  $x_1$  се јавува  $n_1$  пати, податокот  $x_2$  се јавува  $n_2$  пати, ..., податокот  $x_k$  се јавува  $n_k$  пати, тогаш вкупниот број податоци е еднаков  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , а нивниот збир е  $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k$ , па затоа нивната аритметичка средина е

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}. \quad (2)$$

**Пример 28.** Се набљудува температурата што е измерена во 14 часот во текот на месец март. Случајно се избрани 20 денови во кои температурата измерена во Целзиусови степени изнесува: 15, 12, 8, 11, 7, 12, 6, 4, 17, 5, 11, 14, 9, 12, 4, 5, 4, 5, 9, 15.

Пресметај ја аритметичката средина за дадените податоци.

**Решение.** Аритметичката средина за дадените податоци е:

$$\bar{x} = \frac{15+12+8+11+7+12+6+4+17+5+11+14+9+12+4+5+4+5+9+15}{20} = \frac{185}{20} = 9,25.$$

**Пример 29.** Набљудувано е продаденото количество  $n_i$  на еден производ според висината на остварената цена  $x_i$  за единица производ. Добиените податоци се дадени во табелата.

| Остварена цена $x_i$ | Прод. количество $n_i$ | Остварена вредност $n_i x_i$ |
|----------------------|------------------------|------------------------------|
| 20                   | 3                      | 60                           |
| 25                   | 18                     | 450                          |
| 28                   | 12                     | 336                          |
| 30                   | 9                      | 270                          |
| Збир                 | 42                     | 1116                         |

Врз основа на податоците од претходната табела добиваме

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} = \frac{1116}{42} \approx 26,57.$$

Според тоа, просечната цена е 26,57 денари за единица производ.

Ако за  $n_1$  податоци  $x_i, i = 1, 2, \dots, n_1$  за обележјето  $X$  е пресметана аритметичката средина  $\bar{x}_1$ , за  $n_2$  податоци  $x_i, i = 1, 2, \dots, n_2$  за обележјето  $X$  е пресметана аритметичката средина  $\bar{x}_2$ , ..., за  $n_k$  податоци  $x_i, i = 1, 2, \dots, n_k$  за обележјето  $X$  е пресметана аритметичката средина  $\bar{x}_k$ , тогаш аритметичката средина на сите податоци ја наоѓаме според формулата

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \dots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}. \quad (3)$$

**Пример 30.** Запослените во една компанија се поделени во пет оддели, при што за секој оддел е познат бројот на вработените и просечната месечна плата остварена во текот на месец декември 2025 година. Податоците се дадени во табелата.

| Проф. центар | Број на запос. | Прос. плата |
|--------------|----------------|-------------|
| <b>A</b>     | 283            | 31150       |
| <i>B</i>     | 27             | 34300       |
| <i>C</i>     | 7              | 59140       |
| <i>D</i>     | 245            | 33600       |
| <i>E</i>     | 233            | 45600       |

За да ја пресметаме просечната плата исплатена во компанијата ќе ја искористиме формулата (3). Имаме:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \dots + n_5\bar{x}_5}{n_1 + n_2 + \dots + n_5} \\ &= \frac{283 \cdot 31150 + 27 \cdot 34300 + 7 \cdot 59140 + 245 \cdot 33600 + 233 \cdot 45600}{283 + 27 + 7 + 245 + 233} \\ &= \frac{29012330}{795} = 36493,50. \end{aligned}$$

**Дефиниција 9.** Податокот кој што се јавува најчесто во една низа податоци го нарекуваме *мода* и го означуваме со  $Mo$ . Ако податоците се групирани во интервали со еднаква должина, тогаш интервалот кој содржи најмногу податоци го нарекуваме *модална класа*.

Податокот кој се наоѓа во средината на низата, кога членовите на низата ќе се подредат почнувајќи од најмалиот го нарекуваме *медијана* и го означуваме со  $Me$ . Ако низата има парен број членови, тогаш за медијана се зема аритметичката средина на два средни членови на низата, а при непарен број членови тоа е средниот член

Разликата меѓу најголемата вредност на податоците и најмалата вредност на податоците ја нарекуваме *ранг* (*opseg*).

**Пример 31.** Во едно истражување за малопродажната цена изразена во денари на еден ист вид млеко се добиени податоци од 100 продавници, кои се дадени во следната табела

|                    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------|----|----|----|----|----|----|
| Цена на млекото    | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| Број на продавници | 17 | 16 | 23 | 17 | 14 | 13 |

За добиените податоци на цртежот е прикажан линискиот дијаграм на фреквенциите.

Од табелата гледаме дека најчесто се појавува цената 67 денари. Тоа значи дека  $M_o = 67$ .

Понатаму, најниската цена е 65, а највисоката е 70 денар, па затоа рангот (опсегот) на податоците е еднаков на  $70 - 65 = 5$ .

Бидејќи бројот на податоците е парен медијаната е еднаква на аритметичката средина на двата средни податоци, т.е.

$$M_e = \frac{67+67}{2} = 67.$$

Во случајов имаме групирани податоци, па затоа аритметичката средина ја пресметуваме според формулата (2) и добиваме

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{17 \cdot 65 + 16 \cdot 66 + 23 \cdot 67 + 17 \cdot 68 + 14 \cdot 69 + 13 \cdot 70}{17 + 16 + 23 + 17 + 14 + 13} = \frac{6734}{100} = 67,34.$$



**Пример 32.** На прашањето со кој од шесте спортови сакаат да се занимаваат на летниот камп група од 175 ученици ги дале одговорите прикажани во табелата.

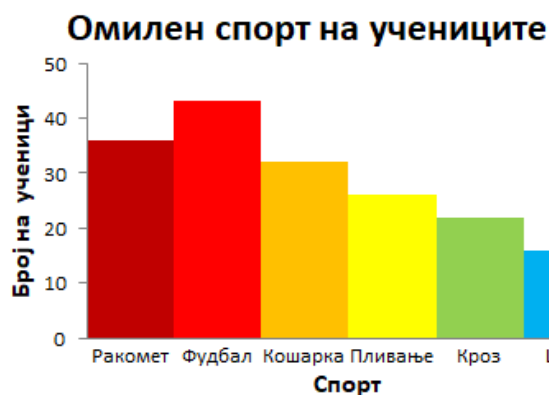
|         | Омилен спорт на учениците |        |         |         |      |     |
|---------|---------------------------|--------|---------|---------|------|-----|
| Спорт   | Ракомет                   | Фудбал | Кошарка | Пливање | Кроз | Шах |
| Ученици | 32                        | 29     | 30      | 40      | 23   | 16  |

а) За добиените податоци состави столбест дијаграм.

б) Најди ја модата на добиените податоци?

**Решение.** а) Столбестиот дијаграм за дадените податоци е прикажан на цртежот.

б) Како што можеме да видиме најмногу ученици сакаат да се занимаваат со пливање и тоа 40. Тоа значи дека во случајов модата е пливање и таа има вредност  $M_o = 40$ .



**Пример 33.** На систематскиот преглед на учениците од прва година од една гимназија била мерена височината на секој од прегледаните 170 ученици. Мерењата ги извршила со точност до 0,5 cm. Добиено е дека најнискиот ученик е висок 150,5 cm, а највисокиот ученик е висок 179 cm. Затоа податоците биле групирани во шест интервали со еднаква должина, при што е добиена табелата.

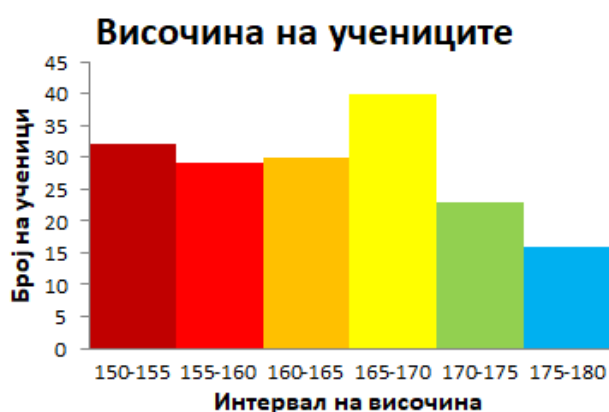
|          | Височина на учениците |         |         |         |         |         |
|----------|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Интервал | 150-155               | 155-160 | 160-165 | 165-170 | 170-175 | 175-180 |
| Ученици  | 32                    | 29      | 30      | 40      | 23      | 16      |

а) За групирани податоци состави столбест дијаграм.

б) Најди ја модалната класа за вака групирани податоци?

**Решение.** а) Столбестиот дијаграм за дадените податоци е прикажан на цртежот.

б) Како што можеме да видиме најмногу ученици има во интервалот од 165 – 170 *cm*, што значи дека овој интервал е модалната класа.



**Пример 34.** Во табелата се дадени групирани податоци

|       |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
| $n_i$ | 4  | 16 | 20 | 11 | 25 | 16 | 8  |

Опреди ги аритметичката средина, модата, медијаната и рангот на податоците.

**Решение.** Ако ја искористиме формулата (2) за аритметичката средина добиваме

$$\bar{x} = \frac{45 \cdot 4 + 50 \cdot 16 + 55 \cdot 20 + 60 \cdot 11 + 65 \cdot 25 + 70 \cdot 16 + 75 \cdot 8}{4 + 16 + 20 + 11 + 25 + 16 + 8} = 60,85.$$

Понатаму, како што гледаме во низата податоци најчесто се јавува податокот 65, што значи дека  $M_o = 65$ . Понатаму, имаме 100 податоци, па затоа медијаната е еднаква на аритметичката средина на педесеттиот и педесет и првиот податок, односно  $Me = \frac{60 + 60}{2} = 60$ . Конечно, најмалиот податок е 45, а најголемиот е 75, па затоа рангот на податоците е еднаков на  $75 - 45 = 30$ .

**Пример 35.** Утрово во едно одделение просечната височина на сите дваесет и два ученика беше 163,5 *cm*. Денес на пладне во одделението се запиша уште еден ученик со што просечната се зголеми за 0,3 *cm*, а попладнево една ученичка се отпиша од одделението со што просечната височина повторно се зголеми, но сега за 0,4 *cm*. Колку сантиметри е висока ученичката која се отпиша од одделението?

**Решение.** Утрово просечната височина на сите 22 ученици беше 163,5 *cm*, а по запишувањето на новиот ученик на пладне просечната височина на сите 23 ученици беше  $163,5 + 0,3 = 163,8$  *cm*. Значи, на пладне вкупната височина на сите 23 ученици беше  $v_{23} = 23 \cdot 163,8 = 3767,4$  *cm*. Понатаму, по отпишувањето на една ученичка попладне просечната височина на сите 22 ученици е  $163,8 + 0,4 = 164,2$  *cm*. Значи, попладне вкупната височина на преостанатите 22 ученици е  $v_{22} = 22 \cdot 164,2 = 3612,4$  *cm*. Конечно, височината на ученичката која се отпиша е еднаква на  $v_{23} - v_{22} = 3767,4 - 3612,4 = 155$  *cm*.

Задачи

23. За низата податоци определи ги модата, медијаната, рангот и аритметичката средина:

а) 1, 4, 4, 4, 3, 6, 3, 5, 6, 2, 3, 2, 4, 3, 3;      б) 2, 2, 1, 5, 2, 8, 4, 1, 9, 7, 8, 2, 3, 2, 3, 4, 5,

24. Учениците Ивана, Баки и Кирил во текот на учебната година направиле осум теста по математика и ги освоиле следниве бодови:



|       | I тест | II тест | III тест | IV тест | V тест | VI тест | VII тест | VIII тест |
|-------|--------|---------|----------|---------|--------|---------|----------|-----------|
| Ивана | 77     | 76      | 78       | 79      | 77     | 78      | 76       | 84        |
| Баки  | 82     | 80      | 80       | 81      | 84     | 80      | 76       | 76        |
| Кирил | 80     | 81      | 78       | 80      | 82     | 82      | 80       | 84        |

Со точност до две децимални места определи го просечниот број освоени бодови на секој ученик одделно и рангирај ги според покажаниот успех.

25. Коста ја истражувал цената на јунешкото месо без коски. За таа цел направил истражување со посета на продавници за месо и ги забележал следниве цени:

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 79  | 785 | 805 | 810 | 820 | 810 | 790 | 780 | 825 | 805 |
| 78  | 800 | 790 | 800 | 810 | 800 | 800 | 790 | 800 | 800 |
| 80  | 810 | 790 | 780 | 790 | 820 | 805 | 810 | 780 | 810 |
| 581 | 800 | 820 | 790 | 780 | 810 | 810 | 800 | 780 | 800 |

Определи ги аритметичката средина, модата, медијаната и рангот на податоците кои ги добила Коста.

26. Нацртај столбест дијаграм и определи ја модалната класа за податоците дадени во табелата

| Маса на учениците во килограми |       |       |       |       |       |       |       |
|--------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Интевал                        | 60-63 | 63-66 | 66-69 | 69-72 | 72-75 | 75-78 | 78-81 |
| Ученици                        | 28    | 30    | 32    | 36    | 15    | 8     | 6     |

27. Бојан направил истражување за бојата на очите на учениците од неговата гимназија одделение. Тој анкетирал 160 учениците и ги добил податоците:

сина – 38, зелена 34, сива – 22, кафеава – 26 и црна 40.

а) За добиените податоци состави столбест дијаграм.

б) Определи ја модата за податоците кои ги добил Бојан?

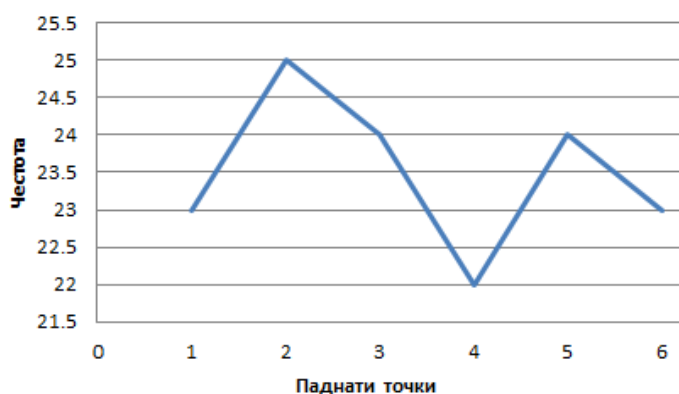
28. На цртежот е даден линиски дијаграм со кој е опишан експеримент фрлање коцка за играње.

а) Податоците претставени на дијаграмот внеси ги во табела?

б) Колку пати е реализиран експериментот?

в) Пресметај ја модата, медијаната и аритметичката средина на добиените податоци.

**Линиски дијаграм за фрлање коцка**



## Провери го своето знаења 7

1. Фрламе две коцки за играње. Кој од настаните е невозможен, сигурен, има веројатност меѓу 0 и 1:  
а) збирот на падните броеви точки е помал од 1,  
б) збирот на паднатите броеви точки е помал од 13,  
в) збирот на паднатите броеви точки е број делив со 4,
2. Коцка за играње се фрла два пати. Определи го настанот: во двете фрлања паднал број поголем од четири.
3. Се фрлаат монета и коцка за играње. Пресметај ја веројатноста на монетата да падне број, а на коцката прост број. Колкава е веројатноста на спротивниот настан?
4. Јанко прибрал податоци за бројот на членовите на семејството на учениците во прва година од неговата гимназија и ги добил податоците:  
4, 5, 6, 5, 3, 6, 5, 5, 3, 4, 5, 6, 3, 5, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5, 3, 6, 5, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5,  
5, 6, 5, 4, 3, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 3, 6, 4, 3, 3, 6, 3, 4, 6, 4, 3, 3, 5, 6, 4, 3, 3, 6, 3, 4,  
4, 6, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 6, 3, 4, 6, 6, 5, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 6.  
Состави табела од добиените податоци.
5. Јанко прибрал податоци за бројот на членовите на семејството на учениците во прва година од неговата гимназија и ги добил податоците:  
4, 5, 6, 5, 3, 6, 5, 5, 3, 4, 5, 6, 3, 5, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5, 3, 6, 5, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5,  
5, 6, 5, 4, 3, 6, 4, 6, 3, 6, 4, 3, 6, 4, 3, 3, 6, 3, 4, 6, 4, 3, 3, 5, 6, 4, 3, 3, 6, 3, 4,  
4, 6, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 6, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 6, 3, 4, 6, 6, 5, 3, 4, 3, 5, 3, 4, 3, 3, 6.  
Состави табела од добиените податоци.
6. За низата податоци определи ги модата, медијаната, рангот и аритметичката средина:  
1, 4, 4, 4, 3, 6, 3, 5, 6, 7, 2, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 3, 6, 7.
7. Бојан направил истражување за бојата на очите на учениците од неговата гимназија одделение. Тој анкетирал 160 учениците и ги добил податоците:  
сина – 35, зелена 33, сива – 24, кафеава – 28 и црна – 40.  
а) За добиените податоци состави столбест дијаграм.  
б) Се избира еден ученик. Колкава е веројатноста бојата на неговите очи да е кафеава или црна?