

ШЕСТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

J1. Одредете ги сите тројки од прости броеви (p, q, r) кои ја задоволуваат равенката

$$p2^q + r^2 = 2025.$$

Решение. Со трансформација на дадената равенката добиваме

$$p2^q = (45 - r)(45 + r).$$

Следствено, еден од двата множителя на десната страна е степен на 2 додека другиот е производ на p со степен на 2. **(2п)**

Да забележиме дека броевите $45 - r$ и $45 + r$ се парни: имено, во спротивно обата се непарни па $q = 0$, што не е можно. Бидејќи во каноничната факторизација на збирот $(45 - r) + (45 + r) = 90$ бројот 2 се јавува со експонент 1 следува дека во едниот од броевите $45 - r$ и $45 + r$ експонентот на 2 е 1 а во другиот е $q - 1 > 1$. **(2п)**

Ги разгледуваме можностите за $45 - r \in \{2, 4, 8, 16, 32\}$ и $45 + r = 64$ (бидејќи $r < 45$ не може степенот да биде поголем од 6). Се добива $r \in \{43, 41, 37, 29, 13, 19\}$, при што можностите за кои p и q се прости се $(43, 3, 41)$, $(37, 5, 29)$ и $(13, 7, 19)$. **(3п)** \square

Забелешка. Заклучокот дека $r \notin \{43, 37, 13\}$ може да се добие од тоа што $q > 2$ мора да е непарен.



J2/C1. Патната инфраструктура во една држава се состои од парен број директни патишта, секој од кои е двонасочен. Притоа, за секои два града X и Y , има најмногу еден директен пат помеѓу нив и постои низа $X = X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = Y$ од градови такви што за секој $i = 0, \dots, n-1$ постои директен пат помеѓу X_i и X_{i+1} .

Докажете дека сите директни патишта во државата може да се ориентираат (т.е. на секој пат да се воведат еднонасочен сообраќај) така што од секој град X излегуваат парен број директни патишта.

Решение 1. Ќе докажеме дека секој сврзан едноставен граф со парен број ребра ја дозволува посакуваната ориентација. Најпрво го докажуваме следново.

Тврдeње. Множеството ребра $E(G)$ на секој сврзан едноставен граф G со парен број ребра може да се разбие на патишта со должина 2. (Претпоставката за сврзаност е неопходна, бидејќи тврдeњето не важи за граф кој има компонента со непарен број ребра.) (1п)

Доказ. Спроведуваме индукција по $|E(G)|$. За базата на индукција, постои единствен пат со должина 2 доколку $|E(G)| = 2$. За $|E(G)| > 2$, нека $P : x, y, z$ е произволен пат со должина 2 во G , и нека $G' = G - \{xy, yz\}$ е графот добиен од G со отстранување на ребрата од P . Напоменуваме дека G' не мора да е сврзан; овој граф може да има најмногу три компоненти бидејќи секое отстранување на ребро го зголемува бројот на компоненти за најмногу 1. (1п) Ако $E(G')$ се разбива на помали сврзани подграфови секој од кои има парен број ребра, тогаш индуктивната претпоставка е применлива за секое такво парче и ја добиваме посакуваната декомпозиција на G . Затоа можеме да претпоставиме дека G' содржи две компоненти G'_1 и G'_2 секоја од кои има непарен број ребра и евентуално уште една (трета) компонента со парен број ребра. (1п) Да забележиме дека секоја од компонентите G'_1 и G'_2 го содржи барем едно од темињата x, y, z (бидејќи за секое ребро чие бришење го зголемува бројот на компоненти во графот, краевите на тоа ребро припаѓаат на различни компоненти од преостанатиот граф). Значи, можеме дополнително да претпоставиме дека $\{x, y\} \cap V(G'_1) \neq \emptyset$ и $\{y, z\} \cap V(G'_2) \neq \emptyset$. (1п) Но тогаш $G'_1 + xy$ и $G'_2 + yz$ се сврзани подграфови од G кои имаат парен број ребра (1п), што повлекува дека $E(G')$ сепак се разбива на помали сврзани подграфови секој од кои има парен број ребра. \diamond

Враќајќи се на задачата, нека G е сврзан едноставен граф со парен број ребра. Горното тврдeње ни дава разбивање на $E(G)$ на патишта со должина 2. Да ги ориентираме двете ребра на секој таков пат од средишното теме кон краевите. (1п) Со оглед дека секој така ориентиран 2-пат има парен допринос (0 или 2) кон излезниот степен на произволно теме, во резултантниот ориентиран граф секое теме ќе има парен излезен степен. (1п) \square

Решение 2. Ја спроведуваме следнава постапка:

влез: сврзан едноставен граф G со парен број ребра;

чекор 1: избираме скелетно дрво T во G ; (1п)

чекор 2: произволно го ориентираме секое ребро $e \in E(G) \setminus E(T)$; (1п)

чекор 3: избираме висечко ребро f во T и го ориентираме f така што посакуваниот услов е запазен за излезниот степен на лист-теме v (во однос на T) кое е инцидентно со реброто f ; такво теме v постанува 'комплетирано' со оглед дека $E_G(v)$ е целосно ориентирано; (1п)

чекор 4: го заменуваме дрвото T со преостанатото неориентирано дрво $T - v$; (1п)

чекор 5: ако актуелното неориентирано дрво не се состои од само едно теме тогаш продолжуваме со чекор 3; (1п)

чекор 6: излезот е посакуваната ориентација на G . (1п)

Да забележиме дека резултантниот ориентиран граф ја има посакуваната особина. Навистина, секое освен едно од неговите темиња е комплетирано. Со оглед дека бројот на ребра во G



е парен, конструираната ориентација мора да го задоволува условот за излезниот степен и на некомплетираното теме. (Имено, збирот на сите излезни степени во ориентиран граф е еднаков на вкупниот број на ребра; следствено, не е можно само едно теме да има непарен излезен степен.) (1п) \square

Решение 3. Нека G е сврзан едноставен граф со парен број ребра, и нека диграфот D е ориентација на G која ја минимизира кардиналноста (бројот на елементи) на подмножеството $S = S(D)$ од $V(G)$ дефинирано на следниот начин:

$$S(D) = \{u \in V(G) : \deg_D^+(u) \text{ е непарен}\}. \quad (2п)$$

Имајќи го предвид равенството

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_D^+(v) = |E(G)|,$$

кардиналноста $|S(D)|$ е парен број. (1п)

Ако $S(D) = \emptyset$ тогаш ориентацијата D ја има посакуваната особина. Во спротивно, избираме две темиња $u, w \in S(D)$. Со оглед дека G е сврзан граф, постои пат P (во однос на G) чии краеве се u и w . (1п) Ја сменуваме ориентацијата на секое ребро долж P . (1п) Да забележиме дека за добиениот диграф D' важи $S(D') = S(D) \setminus \{u, w\}$ па така $|S(D')| < |S(D)|$. (1п) Но, ова противречи на минималниот избор на D . (1п) \square

Забелешка. Второто и третото решение ја овозможуваат следнава посилна варијанта на задачата (формулирана во терминологија од теоријата на графови):

Нека G е сврзан едноставен граф и нека $S \subseteq V(G)$. Следниве искази се еквивалентни:

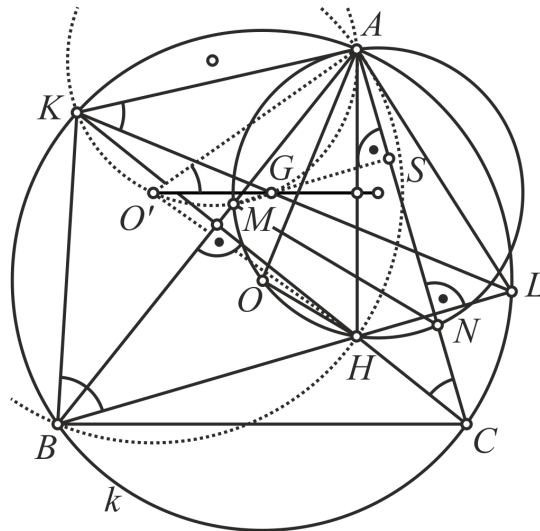
- (1) Постои ориентација D на G таква што $S = \{u \in V(G) : \deg_D^+(u) \text{ е непарен}\}$.
- (2) Кардиналностите $|S|$ и $|E(G)|$ имаат иста парност.



J3/C2. Нека $\triangle ABC$ е разностран и остроаголен во кој аголот во темето A е среден по големина, H е ортоцентарот и k е опишаната кружница со центар O . Нека опишаната кружница на $\triangle AHO$ ги сече страните AB и AC по втор пат во M и N соодветно, а висините CH и BH ја сечат k по втор пат во K и L соодветно. Докажете дека пресекот на KL и симетралата на отсечката AH е ортоцентарот на $\triangle AMN$.

Решение. Нека $\angle BAC = \alpha$. Како периферни агли во опишаната кружница и агли со заемно нормални краци имаме $\angle KBA = \angle KCA = 90^\circ - \alpha = \angle ABL = \angle LKA$ (**1п**). Оттука и бидејќи $HK \perp AB$ следува дека $\triangle HKB$ е рамнокрак и осносиметричен во однос на AB , т.е. H и K се осносиметрични во однос на AB (**1п**). Од исти причини H и L се осносиметрични во однос на AC и општо точките осносиметрични на ортоцентарот на триаголникот во однос на страните лежат на опишаната кружница.

Ако G е ортоцентарот на $\triangle AMN$, тогаш точката G' која е осносиметрична на G во однос на AM лежи на опишаната кружница околу $\triangle AMN$, т.е. околу $\triangle AMH$. Бидејќи $\triangle AMK$ и $\triangle AMH$ се осносиметрични во однос на AB од симетријата следува дека G лежи на опишаната кружница околу $\triangle AMK$ (**1п**). Ако S е подножјето на висината од M во $\triangle AMN$, добиваме дека $\angle GKA = \angle GMA \equiv \angle SMA = 90^\circ - \alpha = \angle LKA$. Оттука следува дека точките K, G и L се колинеарни (**1п**).



Нека O' е осносиметричната точка на O во однос на AB . Како и за H со K , заклучуваме дека O' лежи на опишаната кружница околу $\triangle AMK$, од каде следува дека и $\angle GO'A = 90^\circ - \alpha$ (**1п**). Од друга страна $\angle O'AH = \angle BAO + \angle BAH = 90^\circ - \angle ACB + \angle BAH = \angle HAC + \angle BAH = \alpha$, па $O'G \perp AH$ (**1п**). Освен тоа кружницата која е осносиметрична на k во однос на AB има центар O' и минува низ A, B и H . Оттука следува дека $\triangle HAO'$ е рамнокрак, па нормалата $O'G$ на основата AH е и нејзина симетрала. Според тоа и симетралата на AH минува низ G (**1п**).

Бидејќи $\triangle ABC$ е разностран, правите KL и $O'G$ не се совпаѓаат. Ако претпоставиме спротивно од $O'G \perp AH \perp BC$ добиваме дека $KL \parallel BC$, што е можно само за $\angle CKL = \angle KCB$. Но $\angle CKL = \angle CBL = 90^\circ - \angle ACB$ и $\angle KCB = 90^\circ - \angle CBA$, од каде $\angle ACB = \angle CBA$, т.е. $\triangle ABC$ е рамнокрак - контрадикција.

Заклучуваме дека симетралата на AH и правата KL имаат единствена заедничка точка (G), која е ортоцентарот на $\triangle AMN$. \square

Забелешка. Условот дека триаголникот е остроаголен е за O и H да бидат внатрешни точки, а α е среден по големина за G да биде внатрешна за $\triangle AMN$.



СЗ. Низа од реални броеви $(a_k)_{k \geq 0}$ ја нарекуваме *лог-конкавна* ако за секој $k \geq 1$, важи $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$. Нека $n, l \in \mathbb{N}$. Докажете дека низата $(a_k)_{k \geq 0}$ со со општ член

$$a_k = \sum_{i=k}^{k+l} \binom{n}{i}$$

е лог-конкавна.

Решение. Тврдењето следува од следните лемии.

Лема 1. За секој природен број n , низата $b_k = \binom{n}{k}_{k \geq 0}$ е лог-конкавна.

Доказ. Имаме

$$\frac{b_{k-1}b_{k+1}}{b_k^2} = \frac{\binom{n}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2} = \frac{k! \cdot (n-k)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)! \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)} < 1,$$

од каде следува $b_{k-1}b_{k+1} \leq b_k^2$, т.е. b_n е лог-конкавна. **(2п)** ◇

Лема 2. Ако $(c_k)_{k \geq 0}$ е лог-конкавна низа од позитивни броеви, тогаш за секое $l \geq 1$, низата $(c_k + c_{k+1} + \dots + c_{k+l})_{k \geq 0}$ е лог-конкавна.

Доказ. За природен број $k \geq 1$ имаме

$$c_{k-1}c_{k+2} = \frac{c_{k-1}c_{k+1}c_k c_{k+2}}{c_k c_{k+1}} \leq \frac{c_k^2 c_{k+1}^2}{c_k c_{k+1}} = c_k c_{k+1}.$$

За $m > n \geq 1$ природни броеви последното и $c_{k-1}c_{k+1} \leq c_k^2$ се обопштува до

$$c_{n-1}c_{m+1} = \frac{c_{n-1}c_{n+1}c_{m-1}c_{m+1}}{c_{n+1}c_{m-1}} \leq \frac{c_n^2 c_m^2}{c_{n+1}c_{m-1}} \leq c_n c_m. \quad \mathbf{(2п)}$$

Според ова добиваме

$$\begin{aligned} & (c_{k-1} + \dots + c_{k+m})(c_{k+1} + \dots + c_{k+m+2}) = \\ & (c_{k-1} + c_k)(c_{k+1} + \dots + c_{k+m+2}) + (c_{k+1} + \dots + c_{k+m})^2 + \\ & (c_{k+1} + \dots + c_{k+m})(c_{k+m+1} + c_{k+m+2}) \leq \\ & (c_{k+1} + \dots + c_{k+m})^2 + c_k(c_k + 2c_{k+1} + \dots + 2c_{k+m+1} + c_{k+m+2}) + \\ & (c_{k+1} + 2c_{k+2} + \dots + 2c_{k+m} + c_{k+m+1})c_{k+m+1} = \\ & (c_{k+1} + \dots + c_{k+m})^2 + 2(c_k + c_{k+m+1})(c_{k+1} + \dots + c_{k+m}) + \\ & c_k^2 + 2c_k c_{k+m+1} + c_k c_{k+m+2} - c_{k+1} c_{k+m+1} + c_{k+m+1}^2 \leq \\ & (c_{k+1} + \dots + c_{k+m})^2 + 2(c_k + c_{k+m+1})(c_{k+1} + \dots + c_{k+m}) + (c_k + c_{k+m+1})^2 \leq (c_k + \dots + c_{k+m+1})^2, \end{aligned}$$

т.е. низата $(c_k + c_{k+1} + \dots + c_{k+l})_{k \geq 0}$ е лог-конкавна. **(2п)** ◇

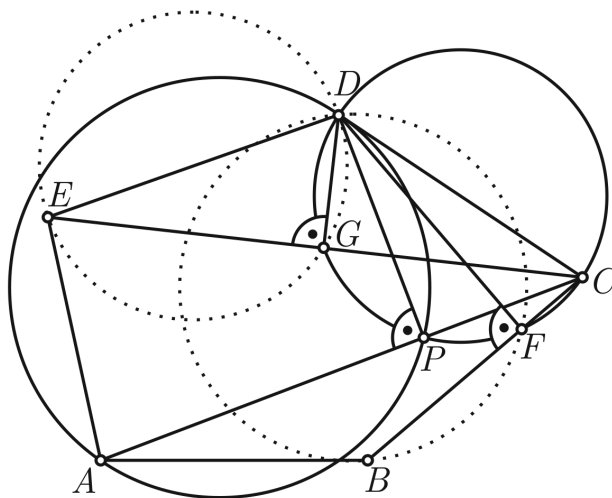
Бидејќи биномните коефициенти се позитивни, тврдењето на задачата е директна последица на лемите. **(1п)** □

Забелешка. Доколку ученикот нема добиено поени за Лема 2, може да добие **(1п)** за доказ на Лема 2, за фиксен $k \geq 2$.



J4. За петаголниот $ABCDE$ важи $\angle DCB < 90^\circ < \angle EDC$. Нека кружницата со дијаметар BD ја сече правата BC по втор пат во точката F , а кружницата со дијаметар DE ја сече правата CE по втор пат во точката G . Докажете дека втората пресечна точка ($\neq D$) на опишаната кружница на $\triangle DFG$ и кружницата со дијаметар AD се наоѓа на отсечката AC .

Решение. Од $\angle DCB < 90^\circ < \angle EDC$ следува дека F е внатрешна точка на отсечката BC , а G е внатрешна точка на отсечката CE . Освен тоа како агли над дијаметар важи $\angle DGE = \angle DFB = 90^\circ$ (**1п**), па и $\angle CGD = \angle CFD = 90^\circ$ (**1п**). Оттука следува дека точките F и G лежат на кружницата со дијаметар CD , т.е. тоа е опишаната кружница на $\triangle DFG$ (**2п**).



Нека P е втората пресечна точка на кружниците со дијаметри AD и CD . За аглие во неа важат $\angle DPA = \angle CPD = 90^\circ$ (**1п**), па $\angle CPA = \angle DPA + \angle CPD = 180^\circ$, т.е. P лежи на отсечката AC . Што требаше да се докаже (**2п**). \square



J5/C4. Докажете дека за секои реални броеви a , b и c поголеми од 1 важи неравенството

$$a(b^2 + c) + b(c^2 + a) + c(a^2 + b) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3abc.$$

Кога важи равенство?

Решение 1. Со префрлање на сите членови од лева страна добиваме:

$$\begin{aligned} a^2(c-1) + b^2(a-1) + c^2(b-1) + ab(1-c) + bc(1-a) + ca(1-b) = \\ a(a-b)(c-1) + b(b-c)(a-1) + c(c-a)(b-1). \quad (1п) \end{aligned}$$

Нека $x = a - 1$, $y = b - 1$ и $z = c - 1$. **(1п)** Од условот на задачата x , y и z се позитивни реални броеви. Претходниот израз се сведува на:

$$\begin{aligned} (x+1)(x-y)z + (y+1)(y-z)x + (z+1)(z-x)y = \\ xz(x-y) + yx(y-z) + zy(z-x) + xz - yz + yx - zx + zy - xy = \\ x^2z + y^2x + z^2y - 3xyz \geq 3\sqrt{x^2z \cdot y^2x \cdot z^2y} - 3xyz = 0, \quad (3п) \end{aligned}$$

при што го користиме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните реални броеви x^2z , y^2x и z^2y . Со ова го завршивме доказот на неравенството.

Равенство ќе важи кога овие три броеви се еднакви. Од $x^2z = y^2x$ добиваме дека $xz = y^2$, а од $z^2y = y^2x$, дека $z^2 = yx$. Оттука $xz^3 = xy^3$, па $y = z$, а по замена во $xz = y^2$ се добива и $x = z$. Според ова равенството важи ако и само ако $a = b = c$. **(2п)** \square

Решение 2. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека a е најмалиот меѓу броевите. Нека $u = b - a \geq 0$, а $v = c - a \geq 0$. **(1п)** Даденото неравенство се трансформира во:

$$\begin{aligned} ab(b-c) + bc(c-a) + ca(a-b) \geq a(a-c) + b(b-a) + c(c-b) &\Leftrightarrow (1п) \\ a(a+u)(u-v) + v(a+u)(a+v) - au(a+v) \geq \\ -av + (a+u)u + (a+v)(v-u) &\Leftrightarrow \\ a^2(u-v+v-u) + a(u^2 - uv + uv + v^2 - uv) + uv^2 \geq \\ a(-v+u+v-u) + u^2 + v^2 - uv &\Leftrightarrow \\ a(u^2 + v^2 - uv) + uv^2 \geq u^2 + v^2 - uv. &(3п) \end{aligned}$$

Последното неравенство важи бидејќи $a > 1$, $uv^2 \geq 0$ и $u^2 + v^2 - uv = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + (u-v)^2) \geq 0$.

(1п)

Равенството се достигнува ако и само ако $u = v = 0$, т.е., $a = b = c$. **(1п)** \square



J6/C5. Нека $s < t$ се позитивни цели броеви. Дефинираме низа со: $a_1 = s$; $a_2 = t$; a_3 е најмалиот цел број поголем од a_2 што е делив со a_1 ; општо, a_{n+1} е најмалиот цел број поголем од a_n што е делив со $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$.

- а) Колку најмногу непарни броеви можат да се јават во ваква низа? (Образложете го одговорот.)
 б) Докажете дека a_{2025} е делив со 2^{808} , независно од изборот на s и t .

Решение.

а) За $s = 3$ и $t = 7$ се добива низата $3, 7, 9, 21, 63, 126, 189, \dots$, која има 6 непарни броеви. Ќе докажеме дека ваква низа не може да има повеќе од 6 непарни броеви.

Бидејќи a_{n-1} е делив со a_1, a_2, \dots, a_{n-4} и a_{n-3} , членот на низата a_{n+1} може да се дефинира како најмалиот број поголем од a_n кој е делив со a_{n-1} и a_{n-2} .

Ако a_i е парен, тогаш сите членови почнувајќи од a_{i+2} се деливи со a_i , па се парни. Според ова најголемиот број на непарни броеви мора да се јави на последователно на почетокот и најмногу уште еден потоа. **(1п)**

Нека за s и t се добива низа со најмалку 5 последователни непарни членови. Ако d е најголемиот заеднички делител на s и t , $a = \frac{s}{d}$ и $b = \frac{t}{d}$, тогаш a, b и d се непарни броеви. Освен тоа $a_3 = cad$ за природниот број c за кој $ca > b \geq (c-1)a$, а бидејќи е непарен мора $c \geq 3$. Сега $a_4 = abd$ бидејќи a и b се заемно прости и $b \geq (c-1)a \geq 2c-2 > c$.

Нека m е најмалиот заеднички содржател на b и c . Важи $a_5 = kamd$ за некој непарен број k , при што $(k-1)amd \leq abd \leq amd$. Бидејќи k е непарен, мора $k = 1$. Сега за a_6 знаеме дека е делив со abd и cad , т.е. со $a_5 = amd$, па мора $a_6 = 2a_5$ да е парен. Со ова докажавме дека не може да има 6 последователни непарни членови во низата. А оттука следува дека не може да има 7 непарни членови во ваква низа. **(1п)** □

б) Ја разгледуваме низата N дадена со $u, 2u, 3u, 4u, 6u, 12u, 24u, 36u, 48u, 72u, 144u, \dots$. Забележуваме дека ако шестиот член $12u$ го замениме со v низата почнувајќи од него е $v, 2v, 3v, 4v, 6v, 12v, \dots$. Со што можеме да заклучиме дека во ваква низа $a_{i+5} = 12a_i = 2^2 \cdot 3a_i$. (Во а) докажавме дека низата зависи само од последните три члена). **(1п)**

Како и во случајот а) нека d е најголемиот заеднички делител на s и t , $a = \frac{s}{d}$ и $b = \frac{t}{d}$. Јасно е дека сите членови на низата се деливи со d , па доволно е да го разгледаме случајот кога $s = a$ и $t = b$ се заемно прости.

За $a = 1$ ако $b = 2$ ја имаме низата N ($a_{10} = 144$), а за $b > 2$ првите членови се $1, b, b+1, 2b, b(b+1)$. Ако b е парен следните три члена се $a_6 = 2b(b+1)$, $a_7 = 4b(b+1)$ и $a_8 = 6b(b+1)$ со што се продолжува со низата N и $a_{10} = 6a_6$ е делив со 4. Ако пак b е непарен следните членови се $2b(b+1)$ и $3b(b+1)$, низата N почнува од петтиот член и $a_{10} = 12a_5$ е делив со 4. Во секој од случаите имаме дека $4 \mid a_{10}$, а од $a_{2025} = 2^{806} \cdot 3^{403} \cdot a_{10}$ следува дека 2^{808} е делител на a_{2025} .

(2п)

Нека сега $a \geq 2$ и како во а) третиот член е ac , така што $a(c-1) \leq b < ac$. Од $b \geq a(c-1) \geq 2c-2 \geq c$ следува дека $a_4 = 2ab$ ако $a = c = 2$ и $a_4 = ab$ во спротивно. За $a = c = 2$, мора $b = 3$, па низата е $2, 3, 6, 12, 18, \dots$, т.е. низата N започнува од третиот член. Во спротивно имаме низа a, b, ac, ab, \dots . Нека m е најмалиот заеднички содржател на b и c . Важи $a_5 = kam$ за некој природен број k , при што важат неравенствата $(k-1)am \leq ab \leq am$. Оттука $k \in \{1, 2\}$, каде $k = 2$ ако и само ако $b = m$. Во овој случај $c \mid b$, па следните членови се $a_5 = 2ab$, $a_6 = 3ab$, т.е. низата N почнува од четвртиот член. Во случајот кога $k = 1$ имаме $a_5 = am$, $a_6 = 2am$ (мора да е делив со ab и ac и да е поголем од am) и $a_7 = 3am$, па во овој случај низата N почнува од петтиот член. Во секој од случаите имаме дека $a_{2025} = 2^{808} \cdot 3^{404} \cdot a_5$ е делив со 2^{808} . **(2п)** □



С6. Дадени се $n \geq 7$ точки во рамнина, никои три од кои не се колинеарни. Барем 7 парови од точките се поврзани со отсечки. За секоја таква отсечка s , нека $t(s)$ е бројот на триаголници за кои отсечката s е страна. Докажете дека постојат различни отсечки s_1, s_2, s_3 и s_4 за кои важи

$$t(s_1) = t(s_2) = t(s_3) = t(s_4).$$

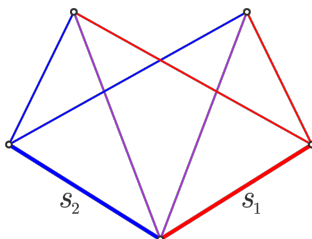
Решение. Да претпоставиме дека постои конфигурација кај која не постојат четири отсечки кои се страни на еднаков број на триаголници. Тогаш постојат најмногу 3 отсечки кои не се страни на ниту еден триаголник. Ги разгледуваме останатите m отсечки; ова е *редуцираната конфигурација* и јасно $m \geq 7 - 3 = 4$. Секоја од овие m отсечки учествува во најмалку 1 триаголник и за секој $k \geq 1$ има најмногу 3 отсечки кои учествуваат во точно k триаголници. Според ова, ако s_1 е отсечка која учествува во максимален број триаголници, да речеме r на број, тогаш редуцираната конфигурација има најмногу $3r$ отсечки; следствено, $t(s_1) = r \geq \lceil \frac{m}{3} \rceil$. Слично, ако s_2 е отсечка $\neq s_1$ за која $t(s_2)$ се максимизира, да речеме $t(s_2) = q$ (не е исклучено дека $q = r$), тогаш редуцираната конфигурација има најмногу $3q + 1$ отсечка; следствено, $t(s_2) = q \geq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$. Да забележиме и дека, независно од тоа дали $q = r$ или $q < r$, неравенството $m \leq 3q + 1$ повлекува дека $m \leq 2q + r$. **(1п)**

Бидејќи секој триаголник е еднозначно определен со две свои страни, триаголниците кои ја содржат s_1 опфаќаат $2r + 1$ отсечки. Ги боиме овие отсечки во црвена боја. **(1п)**

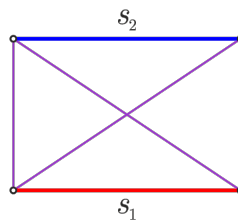
Слично, страните на триаголниците кои како страна ја имаат отсечката s_2 ги боиме во сина боја; притоа, ако некоја од тие отсечки е претходно обоена во црвено тогаш нејзината боја постанува виолетова (= црвена + сина). На овој начин сме обоиле $2q + 1$ отсечка со сина боја. Нека c е бројот на црвени, b е бројот на сини и v е бројот на виолетови отсечки. Според претходната дискусија имаме $c + v = 2r + 1$ и $b + v = 2q + 1$. **(1п)** За бројот на обоени отсечки важи $b + c + v \leq m \leq 2q + r$, па имаме

$$(1) \quad v \geq (b + v) + (c + v) - m \geq (2q + 1) + (2r + 1) - (2q + r) = r + 2. \quad (1п)$$

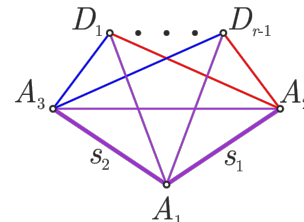
Ги разгледуваме трите можни случаи.



Случај 1



Случај 2



Случај 3

Случај 1. Отсечката s_2 не е виолетова, но има заедничко теме со отсечката s_1 . Тогаш има најмногу r виолетови отсечки (од заедничкото теме на s_1 и s_2), односно $v \leq r$. Но ова противречи на неравенството (1). \diamond

(1п)

Случај 2. Отсечката s_2 не е виолетова и нема заедничко теме со s_1 . Значи има најмногу 4 виолетови отсечки (имено, секоја виолетова отсечка мора да поврзува теме на s_1 со теме s_2). Од (1) следува дека $r \leq 2$. Така, од неравенствата $2r + 1 + 1 \leq m \leq 3r$ и $m \geq 4$, имаме дека $r = 2$ и $m = 6$. Значи, $v = 4$ и редуцираната конфигурација се состои од шесте отсечки над



темињата на s_1 и s_2 . Но тогаш секоја од тие 6 отсечки учествува во точно два триаголника, што противречи на појдовната претпоставка. \diamond

(1п)

Случај 3. *Отсечката s_2 е виолетова.* Тогаш триаголникот кој го формираат s_1 и s_2 е виолетов. Дополнително имаме најмногу уште $q - 1$ виолетова отсечка (од заедничкото теме на s_1 и s_2); значи $v \leq q + 2$. Така, имајќи ги предвид неравенствата $q \leq r$ и (1), заклучуваме дека $q = r = v - 2$. Следствено, $c = b = r - 1$ и $c + b + v = 3r \geq m$. Значи $r \geq 2$. Заклучуваме и дека $c + b + v = m = 3r$, што ни кажува дека нема необоена отсечка во редуцираната конфигурација. Оваа конфигурација мора да се состои од триаголник $A_1A_2A_3$ чии две страни се $A_1A_2 \equiv s_1$ и $A_1A_3 \equiv s_2$, и темиња D_1, D_2, \dots, D_{r-1} кои со отсечки се поврзани единствено со темињата A_1, A_2 и A_3 . Секоја отсечка A_iD_j учествува во точно два триаголника (со уште по едно од останатите A -темиња). Така најдовме барем $3(r - 1)$ отсечки кои учествуваат во точно два триаголника. Оттаму, $3(r - 1) \leq 3$ односно $r \leq 2$. Следствено, $r = 2$. Но тогаш редуцираната конфигурација се состои од вкупно 6 отсечки (над 4 темиња A_1, A_2, A_3, D_1), и секоја од овие отсечки е страна на точно два триаголника, што противречи на појдовната претпоставка. \diamond

(1п)

Во секој од случаите добивме контрадикција, што значи дека секогаш постојат 4 отсечки кои се страни на еднаков број триаголници. \square

Забелешка. Претпоставката дека има барем 7 отсечки не може да се релаксира. На пример, долеприкажаната конфигурација се состои од еден триаголник и уште три независни отсечки, и ја нема посакуваната особина.

