Ристо Малчески

АХ, ТИЕ ПИТАГОРОВИ ТРОЈКИ

Да го разгледаме правоаголниот триаголник со катети 3 и 4. Важи: $3^2+4^2=5^2$. Катетите на овој триаголник се цели броеви кои се разликуваат за единица. Се поставува прашање дали може да се најда и други правоаголни триаголници со разгледуваното својство, при што мерните броеви на катетите ќе бидат поголеми. Јасно, во тој случај разликата, во проценти, меѓу катетите ќе биде помала и триаголникот повеќе ќе наликува на рамнокрак правоаголен триаголник. Да ги разгледаме примерите:

$$20^2+21^2=29^2 \text{ и } 119^2+120^2=169^2.$$

Во првиот пример единицата е разлика во однос на 20 единици (5%), а во вториот таа е разлика во однос на 119 единици (0,84%).

Дали можеме да најдеме примери во кои процентуалната разлика брзо ќе се намалува?

За да одредиме вакви триаголници, треба во множеството природни броеви да ја решиме равенката $x^2+(x+1)^2=y^2$, која е еквивалентна на равенката $(2x+1)^2+1=2y^2$. Со смената $z=2x+1$ последната равенка ја трансформираме во видот

(1) $$z^2-2y^2=-1.$$

Равенката (1) е равенката на Ферма-Пел, која е добро проучена и во овој случа има бесконечно многу решенија. Имено, ако за

$$z_1=a,\ y_1=b,\ c=-1,$$

важи

$$a^2-db^2=c,$$

тогаш за секој непарен по ред подреден пар на низата (z_n,y_n) дефинирана со

(2) $$z_{k+1}=az_k+dby_k; \qquad y_{k+1}=ay_k+bz_k$$

е исполнето равенството $z_{k+1}^2-dy_{k+1}^2=c$, (проверете!).

Според тоа, ако $z_1=a,\ y_1=b$, е едно решение на (1), тогаш секој непарен по ред подреден пар на низата (z_n,y_n) определен со релациите (2) е решение на (1). Притоа важи

$$z_{2k+1}>z_{2k-1} \text{ и } y_{2k+1}>y_{2k-1}.$$

Конечно, тргнувајќи од триаголникот $x_1=3,y_1=5$, т.е. од $z_1=3,y_1=5$, со помош на (2) можеме да одредиме бесконечно многу триаголници со бараното својство. На пример:

за $z_1=7,y_1=5$ го имаме триаголникот 3,4,5;

за $z_3 = 1393, y_1 = 985$ го имаме триаголникот 696,697,9855;

за $z = 275807, y_1 = 195025$ го имаме триаголникот 137903, 137904, 195025 итн.

Со претходната постапка конструиравме бесконечно многу правоаголни триаголници чии катети се разликуваат за единица и должините на катетите растат во секој нареден чекор, т.е. секој нареден триаголник се приближува кон рамнокракиот правоаголен триаголник. Ова ни овозможува да најдеме рационални апроксимации на бројот $\sqrt{2}$. Навистина, при доволно голем x важи $\frac{(x+1)^2}{x^2} \approx 1$. Ако се има предвид равенството $x^2 + (x+1)^2 = y^2$, добиваме

$$2 = \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \approx \frac{x^2 + (x+1)^2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}, \text{ т.е. } \sqrt{2} \approx \frac{y}{x}.$$

Така, на пример, имаме

$$\frac{985}{697} < \sqrt{2} < \frac{985}{696} \text{ или } \frac{195025}{137904} < \sqrt{2} < \frac{195025}{137903}$$

од каде што наоѓаме

$$1{,}413199426 < \sqrt{2} < 1{,}415229885 \text{ или } 1{,}414208435 < \sqrt{2} < 1{,}41421869$$

а $\sqrt{2}$ со точност од 10^{-8} е 1,414213562.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија