

Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 15
(збирка задачи за VI одделение - втор дел)

Скопје, 2020

Одговорен уредник
проф. д-р Алекса Малчески

Рецензенти
проф. д-р Методи Главче
проф. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математички талент 15 : (збирка задачи за VI одделение - втор дел) /
Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 267 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 261-267

ISBN 978-608-4904-53-3

COBISS.MK-ID 51290373

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Пресметувања и бројни ребуси	
I.1. Пресметувања	7
I.2. Низи	9
I.3. Бројни ребуси	10
I.4. Равенки и неравенства	12
I.5. Магични фигури	14
II Теорија на броеви	
II.1. Деливост	16
II.2. Посебни признаци за деливост	17
II.3. Најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител	19
II.4. Прости броеви	22
II.5. Диофантови равенки	23
III Текстуални задачи	
III.1. Броеви и цифри	25
III.2. Задачи со мерни броеви	28
III.3. Пазаруваме и пресметуваме пари	33
III.4. Задачи со проценти	35
III.5. Дополнителни задачи	36
IV Геометрија	
IV.1. Отсечки и агли	43
IV.2. Триаголник	44
IV.3. Квадрат и правоаголник	45
IV.4. Геометриски тела	52
IV.5. Конструктивни задачи	53
V Логика и комбинаторика	
V.1. Елементарни логички задачи	55
V.2. Логички главоболки	56
V.3. Принцип на Дирихле	58
V.4. Броења и пребројувања	59
V.5. Боења, покривања и расекувања	63
V.6. Игри и стратегии	66
V.7. Спортски турнири	67

V.8	Дополнителни задачи	68
Решенија на задачите		
I	Пресметувања и бројни ребуси	
I.1.	Пресметувања	72
I.2.	Низи	81
I.3.	Бројни ребуси	83
I.4.	Равенки и неравенства	92
I.5.	Магични фигури	97
II	Теорија на броеви	
II.1.	Деливост	102
II.2.	Посебни признаци за деливост	108
II.3.	Најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител	118
II.4.	Прости броеви	124
II.5.	Диофантови равенки	129
III	Текстуални задачи	
III.1.	Броеви и цифри	133
III.2.	Задачи со мерни броеви	142
III.3.	Пазаруваме и пресметуваме пари	154
III.4.	Задачи со проценти	160
III.5.	Дополнителни задачи	164
IV	Геометрија	
IV.1.	Отсечки и агли	180
IV.2.	Триаголник	184
IV.3.	Квадрат и правоаголник	187
IV.4.	Геометриски тела	205
IV.5.	Конструктивни задачи	207
V	Логика и комбинаторика	
V.1.	Елементарни логички задачи	213
V.2.	Логички главоболки	217
V.3.	Принцип на Дирихле	221
V.4.	Броења и пребројувања	223
V.5.	Боења, покривања и расекнувања	237
V.6.	Игри и стратегии	244
V.7.	Спортски турнири	248
V.8.	Дополнителни задачи	252
	Литература	261

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент 15* е наменета за талентираниите ученици по математика од шесто одделение и на извесен начин е продолжение на книгата *Математички 3*. Меѓутоа, сметам дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 456 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски, задачи од теорија на броеви (деливост) и задачи од теоријата на множества, приспособени за учениците на возраст од дванаесет до тринаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, текстуалните задачи се поделени во пет дела, и тоа: *Броеви и цифри*,

Задачи со мерни броеви, Пазаруваме и пресметуваме пари, Задачи со проценти и Дополнителни задачи, задачите од петтиот дел се распоредени во осум дела, и тоа: *Елементарни логички задачи, Логички главоболки, Принцип на Дирихле, Броења и пребројувања, Боења, покривања и расекувања, Игри и стратегии, Спортски турнири и Дополнителни задачи*, а истото се однесува и на разработката на геометриските и на задачите од теоријата на броеви.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгата, за што посебно им благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
мај, 2020 г.

Авторот

I ПРЕСМЕТУВАЊА И БРОЈНИ РЕБУСИ

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Секоја ѕвезда

$$11 * 4 * 3 * 2 * 1$$

е заменета со еден од знаците + или – и е пресметана вредноста на изразот. Колку различни резултати се добиени?

2. Пресметај ја вредноста на изразот

$$2025 + 720 : (72 - 9 \cdot 7) - (4 \cdot 6 - 6) \cdot 5 + 1.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот

$$78 \cdot 35 \cdot 379 + 78 \cdot 35 + 78 \cdot 35 \cdot 620 - 2000 \cdot 39 \cdot 34.$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$49 \cdot 49 + 49 \cdot 18 + 52 \cdot 52 + 52 \cdot 15.$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2018 \cdot 146 - (2018 - 18 \cdot (4 + 5 \cdot 20)) \cdot 18.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$4253 - 53 \cdot (24491 - 9558 : 27 \cdot 69) + 14 \cdot 527 - 527 \cdot 4.$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(1437 - ((11 \cdot 136 + 136 \cdot 12) : 92 \cdot 167 - 65 - 102) : 167) : 27 - 27.$$

8. Пресметај ја вредноста на изразот

$$128 \cdot 364 + 64 \cdot (20 + 30 : 5 + (17 + 3 \cdot 43)) - 128 \cdot 450.$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$239 \cdot 79 + 97 \cdot 239 + 761 \cdot 176.$$

10. Пресметај ја вредноста на изразот:

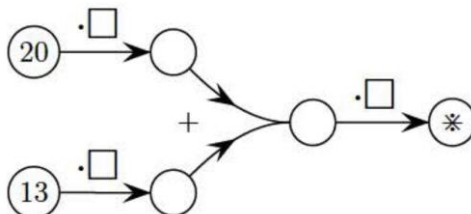
$$1 \cdot 11 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 11 + \dots + 29 \cdot 11 + 30 \cdot 11.$$

11. На цртежот десно е дадена таблица за множење до бројот 12. Опре-

	1	2	...	10	11	12
1	1	2	...	10	11	12
2	2	4	...	20	22	24
...						
10	10	20	...	100	110	120
11	11	22	...	110	121	132
12	12	24	...	120	132	144

дели го збирот на сите производи во оваа таблица.

12. Определи ја најголемата можна вредност на *, ако во квадратчињата на цртежот десно во некој распоред се запишани броевите 7, 8 и 9.



13. Определи ја цифрата на единиците на збирот $1+1 \cdot 2+1 \cdot 2 \cdot 3+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5+\dots+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2017$.
14. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{T \cdot A \cdot L \cdot E \cdot S}{P \cdot I \cdot T \cdot A \cdot G \cdot O \cdot R \cdot A}$ ако секоја буква е едноцифрен број, различните букви претставуваат различни броеви, а еднаквите букви еднакви броеви.
15. Дропката $\frac{2013201320132013}{1586158615861586}$ запиши ја како нескратлива дробка.
16. Определи го најмалиот природен број n за кој секоја од дропките $\frac{11}{n+17}, \frac{12}{n+18}, \frac{13}{n+19}, \frac{14}{n+20}$ е нескратлива.
17. Определи ја најголемата и најмалата вредност на изразот $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} + \frac{m}{n}$, каде $a, b, c, d, e, f, g, h, m, n$ се различни цифри.
18. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \frac{6}{10} - \frac{9}{21} + \frac{70}{45}$.
19. Определи го збирот на сите правилни нескратливи дробки со имени-тел 20.
20. Определи ги вредностите на изразите $a = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{2}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{77}$, $b = 5,1 \cdot 0,3 - 0,18 \cdot (0,03 \cdot 73 + 0,45 \cdot 1,8)$ и спореди ги по големина.
21. Пресметај ја вредноста на изразот $23,6 \cdot 7,39 - 2,36 \cdot 23,9$.
22. Пресметај ја вредноста на изразот $(201,3 - 20,13) : 2,013$.

23. Пресметај ја вредноста на изразот $0,5A + 0,0625B$ каде
 $A = 20,18 \cdot 237 : 5,045 + 2,018 \cdot 26750 : 50,45$ и
 $B = 1\frac{1}{3} + 2\frac{4}{15} + 3\frac{1}{5} + 4\frac{2}{15} + 5\frac{1}{15}$.
24. Пресметај ја вредноста на изразот:
 $0,7 + 9,7 + 99,7 + 999,7 + \dots + 999999999,7$.
25. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{40,72:0,002-0,108:0,00044}{(2:0,04-0,49:0,01):0,01}$$
.
26. Пресметај ја вредноста на изразот
 а) $5 \cdot 1\frac{1}{5} - \frac{2}{5} : 2\frac{1}{5}$,
 б) $\frac{(6-4\frac{1}{2}):0,03}{3\frac{1}{20}-2,65} \cdot 4 + \frac{2}{5}$.
27. Пресметај ги и спореди ги вредностите на изразите
 $A = \frac{2}{13} + \frac{2}{35} + \frac{2}{57} + \frac{2}{79}$,
 $B = \frac{20}{9 \cdot 11} + \frac{20}{10 \cdot 12} + \frac{20}{11 \cdot 13} + \frac{20}{12 \cdot 14} + \frac{20}{13 \cdot 15} + \frac{20}{14 \cdot 16} + \frac{20}{15 \cdot 17} + \frac{20}{16 \cdot 18}$.
28. Пресметај ја вредноста на изразот
 $\frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} + \frac{1}{84} + \frac{1}{112} + \frac{1}{144} + \frac{1}{180} + \frac{1}{220} + \frac{1}{264} + \frac{1}{312} + \frac{1}{364}$.
29. Пресметај ја вредноста на изразот:
 $\frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10 \cdot 13} + \frac{1}{10 \cdot 13 \cdot 16} + \frac{1}{13 \cdot 16 \cdot 19} + \frac{1}{16 \cdot 19 \cdot 22} + \frac{1}{19 \cdot 22 \cdot 25}$.
30. Од бројот 560,7489 добиј го бројот 20,09 со помош на најмал број пати користење на следниве операции:
 1) делење со бројот со 2,
 2) бришење на најлевата или најдесната цифра.

I.2. НИЗИ

31. Првите четири члена на една низа се: 2, 0, 1, 8. Секој нареден член на низата е цифрата на единиците на збирот од претходните четири члена. (пр. петтиот член е 1). Дали 2018-тиот член на низата е парен или непарен број? Одоговорот да се образложи!

32. Дадена е низата
 $1, 2, 3, 4, 5, 8, 7, 16, 9, 32, a, b, \dots$
 Определи го збирот $a+b$.
33. Дадена е низата броеви
 $1, 2, 4, 7, a, b, 22, 29, 37, \dots$
 Определи ги членовите a и b .
34. Содржателите на бројот 7 се запишани во низа еден по друг: 7142128
 35... Која цифра во оваа низа се наоѓа на 2017 место?
35. На лист хартија еднодруго се запишани цифрите 4 и 7. Десно од нив
 е запишана цифрата на единиците на збирот на 4 и 7, т.е. цифрата 1.
 Продолжуваме така што секогаш десно ја запишуваме цифрата на
 единиците на збирот на последните две запишани цифри. Добиваме 4,
 7, 1, 8, 9, 7, 6 итн. Која цифра се наоѓа на 2018-тото место?

1.3. БРОЈНИ РЕБУСИ

36. Во ребусот со буквите R, E, K и A се означени ненулни цифри:

$$\overline{13RE} + \overline{REKA} = \overline{KA20}.$$

Определи го збирот $R + E + K + A$.

37. Во ребусот прикажан на цртежот десно на еднаквите
 букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните
 букви соодветствуваат различни цифри. Определи ја нај-
 малата можна вредност на бројот ПРАСЕ.

$$\begin{array}{r} \text{ПРАСЕ} \\ \text{ПРАСЕ} \\ \text{ПРАСЕ} \\ + \text{ПРАСЕ} \\ \hline \text{СВИЊЕ} \end{array}$$

38. Реши го бројниот ребус

$$\overline{\text{БАРОК}} + \overline{\text{БАРОК}} + \overline{\text{БАРОК}} + \overline{\text{БАРОК}} = \overline{\text{КОРАБ}}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различните
 букви соодветствуваат различни цифри.

39. Во бројниот ребус

$$\overline{\text{ЦВETE}} + \overline{\text{ЦВETE}} + \overline{\text{ЦВETE}} + \overline{\text{ЦВETE}} + \overline{\text{ЦВETE}} = \overline{\text{БУКЕТ}}$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различните букви
 соодветствуваат различни цифри. Определи ја најмалата можна
 вредност на бројот БУКЕТ.

40. Во збирот

$$\overline{MA} + \overline{TE} + \overline{MA} + \overline{TI} + \overline{KA}$$

на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Ниту една од цифрите не е 0. Определи ја најмалата можна вредност на збирот.

41. Во ребусот **РИТО + ВИТО = БРАТЕ** на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на истите букви соодветствуваат исти цифри. Определи го решението за кое бројот соодветен на зборот **БРАТЕ** е делив со 24.

42. Во ребусот

$$\overline{ДАБ} + \overline{ДАБ} + \dots + \overline{ДАБ} = \overline{ГОРИ}$$

на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти цифри соодветствуваат исти цифри. Колку најмногу „даба“ можат да „горат“?

43. Дали може на местата на ѕвездичките да се стават различни цифри така што ќе биде важи знакот за равенство

$$2*8*+38*7=2*1*+29*1?$$

44. Реши го бројниот ребус, ако се знае дека производот е делив со 3.

$$\begin{array}{r} 106.** \\ \hline **4 \\ + \\ 3** \\ \hline ***4 \end{array}$$

45. Во секое квадратче запиши по една цифра така што ќе добиеш точен производ. Која цифра треба да стои на местото на буквата x ?

$$\begin{array}{r} \square \square . \square x 9 \\ \hline \square 1 \square \\ + \square \square \square \\ \hline \square 1 \square 5 \end{array}$$

46. ѕвездите замени ги со цифри така што ќе добиеш точно равенство и секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и 9 ќе се јавува само по еднаш.

$$2**.*8=5***.$$

47. Реши го бројниот ребус

$$\begin{array}{r} ***7.*** \\ \hline ****6 \\ **203 \\ **7** \\ \hline 4***** \end{array}$$

48. Определи ги цифрите a и b ако важи

$$a \cdot b \cdot \overline{ab} = \overline{bbb}.$$

49. Горјан во десетте кругчиња ги запишал десетте цифри

$$\bigcirc \bigcirc \cdot \bigcirc = \textcircled{6} \textcircled{0}$$

$$\bigcirc \textcircled{x} \cdot \bigcirc = \bigcirc \bigcirc$$

така што добил точни равенства. Која цифра за запишал на местото на x ?

50. Во квадратчињата на дијаграмот десно запиши ги броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што ќе добиеш точни равенства.

$$\square \cdot \square \cdot \square = 84$$

$$\square \cdot \square \cdot \square = 15$$

$$\square \cdot \square \cdot \square = 288$$

$$\square \cdot \square \cdot \square = 288$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ 48 & 40 & 189 \end{array}$$

51. Реши го ребусот

$$\overline{abcd} + e \cdot \overline{fgh} = 2008$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри.

I.4. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

52. Реши ја равенката

$$x:22-12=(2121 \cdot 88):21.$$

53. Реши ја равенката

$$100:(((7x+24):5) \cdot 4+36)=1.$$

54. Реши ја равенката

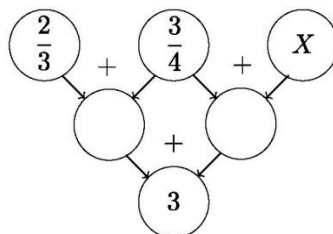
$$10,1-x=4,7+5,348.$$

55. Реши ја равенката

$$1,6+2,4:x=2.$$

56. Определи ги природните броеви x , y и z за кои важи

$$x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$



57. Кој број треба да се запише на местото на X за да пресметувањата се точни?

58. Семејството Јакопетревски секоја година патува низ Македонија. Во 2018 година тоа ги посетило знаменитостите во три општини. Определи кои општини ги посетило семејството ако се знае дека на секоја од нив соодветствува број помал од 10, кој се добива со пресметување на вредностите на дадените изрази,

$$\text{Охрид:} \quad 27,7 - 11,7 : 0,45,$$

$$\text{Битола:} \quad 38,75 \cdot 0,4 - 0,4 \cdot 8,75,$$

$$\text{Крива Паланка:} \quad 39,846 : 5,8 - 5,8$$

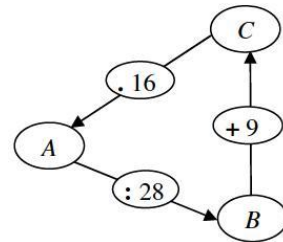
$$\text{Крушево:} \quad 23,14 - 12,104,$$

а за Ресен бројот е решението на равенката $x + (0,92 + 5,31) = 8$. Која општина е посетена прва, ако се знае дека и соодветствува најмалиот број?

59. Ако $a \otimes b = 3a + b : 2$, определи го бројот x за кој важи $20 \otimes (16 \otimes x) = 100$.

60. Ако $a \otimes b = a(a + b)$, определи ја вредноста на x за која важи $3 \otimes (3 \otimes x) = 99$.

61. Нека A, B и C се броеви за кои дијаграмот на цртежот десно е точен. Определи го збирот $A + B + C$.

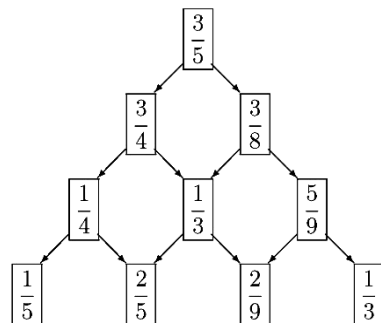


62. Спореди ги дропките $\frac{19}{157}$, $\frac{a}{35}$ и M , за кои a е најголемиот природен број таков што дропката $\frac{7}{a}$ е неправилна и $\frac{a}{105}$ е нескратлива правилна дропка, а M е непознатиот број во равенството

$$\frac{1}{7} - M = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) : 4.$$

63. Определи ги сите дропки кои се поголеми од $\frac{2}{3}$ и се помали од $\frac{5}{6}$, а чиј броител или именител е еднаков на 9.

64. Мравка тргнала од врвот на пирамидата и се движи по стрелките одејќи по маршрута така што секоја дропка е помала од претходната. До која дропка од последниот ред ќе стигне мравката?

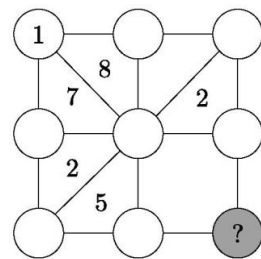


65. Дадени се четири природни броја, чии зборови по парови се еднакви на 8, 9, 12, 15, 18 и 19. Определи го збирот на најмалиот и најголемиот број.
66. Збирот на секои 5 од 1001 броеви е позитивен број. Дали може збирот на сите 1001 броеви да биде негативен број?

1.5. МАГИЧНИ ФИГУРИ

67. Даден квадрат е поделен на 16 идентични квадрати.
- а) Во малите квадрати запиши ги броеите 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3 и 3 така што збирот на броевите запишани во секој од деветте 2×2 квадрати е еднаков.
- б) Во малите квадрати запиши ги броеите 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7 и 7 така што збирот на броевите запишани во секој од деветте 2×2 квадрати е еднаков.
- в) Во малите квадрати запиши ги броеите од 0 до 15 така што збирот на броевите запишани во секој од деветте 2×2 квадрати е еднаков.

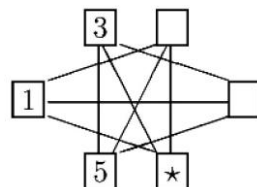
68. Во кругчињата на цртежот десно треба да се запишат природните броеви од 1 до 9 така што најголемата разлика меѓу два броја во темињата на еден триаголник да е еднаква на бројот кој е внатре во тој триаголник. Кој број треба да се запише во обоеното кругче?



69. Во полињата на табелата дадена на цртежот десно запиши едноцифрени броеви така што нивниот производ во секој ред (во секоја колона) ќе биде еднаков на бројот запишан на крајот на редот (колоната).

				243
				245
				64
				50
70	45	840	72	

70. Секој од броевите од 1 до 6 е запишан во едно од квадратчињата на шемата прикажана на цртежот десно. За секоја отсечка е пресметан производот на двата броја кои се запишани во



нејзините крајни точки. Се покажало дека меѓу добиените производи нема еднакви броеви. Кој број е запишан во квадратчето во кое е знакот *?

71. Дополни го магичниот квадрат, прикажан на цртежот десно, во кој збирот на броевите запишани во секој ред, секоја и секоја дијагонала е еднаков.

$1\frac{1}{3}$		10	
	$4\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$
	$7\frac{1}{3}$		4
$9\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$		

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

II.1. ДЕЛИВОСТ

1. Ако броевите 1199 и 1391 ги поделиме со еден ист број добиваме остаток 10 и 28, соодветно. Со кој број сме ги поделиле дадените броеви?
2. Со колку нули завршува производот на првите 150 природни броеви?
3. Во едно училиште во секоја паралелка има или 25 или 26 ученици. Во училиштето вкупно учат 742 ученици. Во колку паралелки има точно 25 ученици?
4. Од најмалиот шестцифрен број делив со 2 и со 3, одземи го најмалиот петцифрен број делив со 5 и со 9.
5. Пет девојки Ана, Ивана, Катерина, Ленка и Марија, учествувале на концерт на кој пееле песни. Секоја песна ја испеале три девојки. Секоја од своите одбрани песни секоја девојка ја испеала само еднаш. Ана испеала најмногу, 8 песни, а Ивана испеала најмалку, 5 песни. Колку вкупно песни испеале сите заедно?
6. Бројот 2009 го поделив на природен број n и добив остаток 7. Определи ја најмалата можна вредност на бројот n .
7. Гордан ги помножил цифрите на еден природен број и го добил бројот 240. Определи ги најмалиот и најголемиот број чии цифри можел да ги помножи Гордан.
8. Оливер замислил два броја. Првиот број е четирицифрен со цифра на единиците 1, а цифрата на илјадитите му е еднаква на цифрата на стотките. Вториот број е двоцифрен, а остатокот при делењето на првиот број со вториот е еднаков на 98. Определи ги броевите кои ги замислил Оливер.
9. Природниот број n при делење со 6 дава остаток 4, а при делење со 15 дава остаток 7. Определи го остатокот при делењето на бројот n со 30.
10. Определи го остатокот при делењето на збирот

$1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\dots+1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\cdot 20+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \dots\cdot 21$
со бројот 72.

11. Определи ја цифрата a така што збирот $\overline{2a}\cdot 22+\overline{3a}\cdot 33$ е делив со 6.
12. Нека a, b, c, d се природни броеви такви што

$$abcd = 2010 \text{ и } a > b > c > d.$$
 Определи ја најголемата можна вредност на a .
13. Определи го збирот на сите правилни нескратливи дробки такви што производот на броителот и именителот е еднаков на 300.
14. Определи го најмалиот можен именител на збирот на двете нескратливи дробки $\frac{a}{600}$ и $\frac{b}{700}$.
15. За природниот број ќе велиме дека е *одличен* ако има точно 6 делители. На пример, делители на бројот 12 се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12, што значи дека тој е одличен број. Колку одлични броеви се делители на бројот 2016?
16. Дадени се пет различни природни броја такви што зброт на секои четири од нив е делив со 5. Докажи дека збирот на секои три од ови броеви е делив со 5.
17. Нека n е природен број и A е број запишан со n ненулти цифри, B е број запишан со истите цифри како и A , но во друг редослед, и $A+B$ е број запишан со една единица и n нули. Докажи дека n е непарен број.
18. Докажи дека производот на збирот и разликата на два последователни непарни броја е делив со 8.
19. Определи го бројот на природните делители на бројот 400. Колку од нив се парни, а колку се непарни броеви?

II.2. ПОСЕБНИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

20. Определи ја цифрата a така што бројот $\overline{12a3}$ е делив со 3 и бројот $\overline{13a2}$ е делив со 4.
21. Секоја буква од зборот КАМИЛА е заменета со непарна цифра, така што на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти

букви соодветствуваат исти цифри. Добиениот број е делив со 3. Која цифра е запишана на местото на буквата А?

22. Определи ги сите броеви од видот \overline{bab} кои при делење со 11 даваат остаток 7, а при делење со 5 даваат остаток 1.
23. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 225 и во чиј декаден запис се само цифрите 0 и 1.
24. Кои цифри треба да стојат на местото на a, b за збирот на броевите $\overline{323a} + \overline{b410}$ биде делив со 9?
25. Иван го запишал производот на првите 37 природни броеви, а потоа две цифри заменил со буквите x и y и го добил записот:
$$1376x7530912263450463159795815809024y0000000.$$
Кои цифри ги заменил Иван?
26. Определи ја цифрата a така што бројот $\overline{a2002a}$ е делив со 12.
27. Секоја од буквите Н, С, О, Р и Г замени ја со непарни цифри така што на различните букви соодветствуваат различни цифри и бројот $\overline{НОСОРОГ}$ е делив со 9, а бројот $\overline{НОС}$ е делив со 5, но не е делив со 3. Определи го производот $\overline{Р \cdot О \cdot Г}$.
28. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{a2003b}$ ќе биде делив со 18.
29. Определи ја цифрата која треба да стои на местото на буквата a за да бројот $\overline{178a15}$ е делив со 15.
30. Определи ги сите парови од видот $\overline{b1x}$ и $\overline{37y1}$ такви што нивниот производ е делив со 15.
31. Определи ги цифрите a и b така што производот на броевите $\overline{43a}$ и $\overline{b561}$ ќе биде делив со 15.
32. Определи ги сите четирицифрени броеви од видот \overline{abba} кои се деливи со 45.
33. Определи ги сите петцифрени броеви од видот $\overline{a3b2c}$ кои се деливи со 45.
34. Определи го производот на цифрите a и b ако бројот 45 е делител на изразот: $55 \cdot 99 + \overline{aba}$

35. Определи ги сите петцифрени броеви од видот $\overline{47a9b}$ кои се деливи со бројот 18.
36. Определи ги цифрите a и b така што четирицифрениот број $\overline{a55b}$ биде делив со бројот 36.
37. Определи ги цифрите x и y така што бројот $\overline{38x75y}$ е делив со 36.
38. На бројот 2017 допиши му две цифри од десно така што добиениот шестцифрен број ќе биде делив со 72.
39. Определи ги четирицифрените содржатели на бројот 36 кои се запишани со различни цифри и чија цифра на десетките е еднаква на 5?
40. Определи го збирот на цифрите a и b за кои бројот $\overline{ab3a}$ е делив со 9 и со 44.
41. Определи ги цифрите a, b и c така што збирот на четирицифрените броеви $\overline{a27c}$ и $\overline{13b2}$ е делив со 180.
42. Бројот n е четирицифрен содржател на бројот 5, запишан со различни цифри. Ако од записот на бројот n се избрише цифрата на илјадите, тогаш се добива трицифрен број кој е делив со 9. Ако од записот на бројот n се избрише цифрата на стотките, тогаш се добива трицифрен број кој е делив со бројот 11. Ако од записот на бројот n се избрише цифрата на десетките, тогаш се добива трицифрен број кој е делив со 7. Определи ги сите броеви n со овие својства.
43. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A = 3\frac{1}{2} \cdot a - 0,15b,$$

каде a е цифрата на единиците на четирицифрениот број $\overline{136a}$ кој е делив со бројот 6, а b е решението на равенката

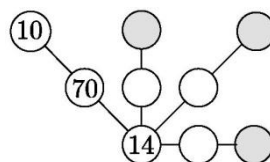
$$27 - 3 \cdot (15 - (3\frac{1}{5}b - 12,4)) = 12.$$

II.3. НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ И НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ

44. Според рецептот на Цветанка 45 грама какао се раствораат во 150 милилитри вода. Колку милилитри вода е потребно за да се растворот 27 грама какао?

45. Димитар ги запишал двоцифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3 и нивниот најмал заеднички содржател. Кои броеви ги запишал Димитар?
46. Определи ги природните броеви a и b за кои важи $a < b$, $ab = 13824$ и $\text{NZD}(a, b) = 24$.
47. Определи ги сите парови природни броеви такви што нивниот производ е еднаков на 34560, а нивниот најголем заеднички делител е 24.
48. За својот роденден Петра купила кеса со 26 карамели и кеса со 62 чоколадни бомбони. Откако пробала по два бомбони од секој вид, таа останатите бомбони од секоја кеса ги поделила подеднакво на своите гости. Колку најмногу гости може да имала Петра?
49. Дадени се четири последователни природни броја помали од 3000. Најмалиот од нив е делив со 4, следниот е делив со 7, третиот е делив со 10 и четвртиот е делив со 13. Определи го најмалиот од овие четири броја.
50. Определи го најмалиот заеднички содржател на броевите 315 и 600.
51. Иван и Самоил истовремено од иста точка, но во различни насоки со велосипеди започнуваат да возат по кружна патека. Тие се договориле за застанат кога за првпат ќе се сретнат во точката од која тргнале. Иван го обиколува стадионот за 2 минути, а Самоил за 1 минута и 20 секунди. Колку обиколки на патеката заедно ќе направат до застанувањето?
52. Производот на природните броеви m и n , $m > n$ е еднаков на 2016 и важи $\text{NZS}(m, n) = 504$. Определи ги броевите m и n .
53. Определи ги последните четири цифри на бројот $\overline{2018^{*****}}$, ако тој е делив со 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.
54. Капетанот ги построил војниците во редица и тие се пребројале: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ... Потоа, без да се разместуваат се пребројале 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Се покажало дека точно 46 војници кажале ист број и при двата начини на пребројување. Колку војници построил капетанот?
55. Горјан зел 57 црвени и 75 жолти лампиони и во градината подеднакво украсил неколку новогодишни елки. Му останале 3 црвени и 3 жолти лампиони. Кој е најголемиот можен број украсени елки?

56. Таткото јаде 10 колачи за 20 минути, мајката јаде 9 колачи за 27 минути, а Горјан јаде 7 колачи за 42 минути. За колку минути тројцата ќе изедат 24 колачи? (Секој јаде со постоја апетит цело време.)
57. Павел, Томи и Ангел возат по кружна патека во иста насока и со постојани брзини. Павел патеката ја минува за 6 минути, Томи за 10 минути, а Ангел за 15 минути. Ако тројцата тргнат истовремено од стартоот, по колку минути за првпат тројцата повторно ќе тргнат истовремено од стартоот?
58. Од едно пристаниште едноподруго тргнуваат три брода на туристичко патување.
- а) Определи ги во денови должините на патувањата ако се знае дека две од нив се деливи со 5, други две се деливи со 4, а третите две се деливи со 3. Патувањата се подолги од 12 и пократки од 30 дена.
- б) По колку дена бродовите прв ќе се сретнат во истото пристаниште, ако истовремено тргнат на патување и секој брод го повторува своето патување повеќе пати.
59. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се поделат броевите 956, 1452 и 868 за да се добијат остатоците 11, 12 и 13, соодветно.
60. Мајката на Оливера донела бецови и планирала да ги подели на другарките на Оливера така што секое девојче ќе добие еднаков број бецови. Кога се обидела да ги подели на 4, 5 или 6 девојчиња, секогаш и останувал неподелен по 1 бец. Колку најмалку бецови имала мајката на Оливера?
61. Определи го најголемиот четирицифрен број кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.
62. Определи го збирот на сите трицифрени броеви кои при делење со 3 даваат остаток 2, при делење со 4 остаток 3, а при делење со 5 остаток 4.
63. Во својата овошна градина баба Рада собрала помалку од 100, а повеќе од 50 праски. Праските можела да ги подели еднакво на 2, на 3 или на 5 внуци, но не можела да ги подели на 4 внуци. Колку праски набрала баба Рада?
64. Во кругчињата на дијаграмот даден на цртежот десно се запишани различни двоциф-



рени броеви при што бројот запишан во секое средно кругче на секоја отсечка е еднаков на најмалиот заеднички содржател на двата броја кои се запишани во кругчињата на краевите на отсечката. Така, во средното кругче на отсечката со крајни броеви 10 и 17 е запишан бројот $NZS(10,14) = 70$. Определи го збирот на броевите кои се запишани во обоените кругчиња.

II.4. ПРОСТИ БРОЕВИ

65. Нека a е најголемиот прост двоцифрен број. Реши ја равенката $15a - x = NZS(34,51,60) : NZD(68,102)$.
66. Шестоделенецот Максим ги препишал своите оценките по математика на еден лист, при што ниту еднаш не добил единица. Потоа меѓу некои од цифрите неколку пати го запишал знакот за множење и го пресметал производот кој изнесувал 2007. Колку пати одговарал Максим и кои оценки ги добил?
67. а) Определи колку од првите 10000 природни броеви имаат непарен број природни делители.
б) Определи го најмалиот природен број n за кој бројот $2007n$ има непарен број природни делители.
68. Збирот на шест последователни природни броеви е 1275. Определи ги сите прости делители на најмалиот од тие броеви.
69. Горјан замислил природен број, кој последователно го помножил со неговите цифри и го добил бројот 1716. Кој број го замислил Горјан?
70. Одреди го најмалиот четирицифрен број чиј производ на цифри е 756.
71. Производот на два двоцифрени броја е запишан само со цифрата 4. Кои се тие броеви?
72. Производот на два трицифрени броеви е запишан само со цифрата 3. Кои се тие броеви?
73. Определи ги сите седумцифрени броеви од видот $\overline{2016abc}$ кои се деливи со броевите 5, 7 и 13.
74. Определи ги сите броеви од видот \overline{xabcd} кои се деливи со бројот 72 и такви што цифрите a, b, c и d се различни прости броеви.

75. Нека a е природен број. Дали е точно дека сите броеви од видот $A = a(a+1) + 41$ се прости броеви?
76. Определи го најмалиот природен број a таков што $180a = b \cdot b \cdot b \cdot b$ и b е делител на a .
77. На 22 картончиња се запишани броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., 21 и 22. Картончињата ги групираме во парови и од секој пар формираме друпка. Така добиваме 11 друпки. Колку најмногу од тие друпки може да се природни броеви?
78. Докажи дека при делење на прост број со бројот 30 се добива остаток 1 или прост број.

II.5. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

79. Елена и Десанка заедно располагаат со шест монети од по 50 денари и 4 банкноти од по 100 денари. На колку начини може подеднакво да ги поделат парите.
80. Фросина решавала на тест по историја. Тестот се состоел од 15 прашања, при што за точно осговорено прашање се добиваат 8 бода, за делумно одговорено прашање се добиваат 3 бода, а за неточно одговорено прашање се добиваат 0 бодови. Фросина освоила 61 бод. Колку прашања неточно одговорила?
81. За роденденот на царот Самоил секој негов министер му подарил по 7 ловни кучиња, а секој владател на соседните царства му подарил по три коњи. Цар Самоил вкупно добил 23 животни. Определи го бројот на соседните царства.
82. Еден молив чини 10 денари, еден нотез чини 100 денари и една ташна чини 1000 денари. Горјан купил 40 предмети за кои платил 4000 денари. Определи колку предмети од секој вид купил Горјан.
83. На еден математички натпревар учествувале 200 ученици. Учениците биле распоредени во x простории по 10 и во y простории по 12 ученици. На колку начини може учениците да се распоредат?
84. Со $n!$ да го означиме производот на првите n природни броеви, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a!+b!+c!=d!.$$

85. Двајца гусари на пуст остров нашле сандак со златници, сребреници и дијаманти. Бидејќи не можеле да се договорат како ќе го распределат богатството, тие ги разгледувале сите можности за поделба. Секоја поделба ја разгледувале точно 10 минути и за разгледување на сите поделби потрошиле точно 8 дена 3 часа и 30 минути. Во сандакот имало најмногу сребреници, а најмалку дијаманти. Определи го бројот на сребрениците, златниците и дијамантите.

86. Определи ги сите природни броеви a, b и c такви што

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b+c} = 1.$$