

Ристо Малчески
Скопје

ИНВЕРЗИЈАТА ВО ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ

Во оваа статија ќе се осврнеме на примената на инверзијата во решавање на неколку олимписки задачи. Притоа ќе сметаме дека читателот е запознаен со инверзијата и нејзините својства, па затоа истите нема детално да ги презентираме, т.е. нема да ги докажуваме. Овде ќе напомниме дека читателите кои ги немаат потребните знаења потребно е да консултираат соодветна литература. За таа цел им препорачуваме да ги консултираат книгите од наведената литература.

Нека $m = r^2$ е позитивен реален број, а O е фиксна точка во рамнината Π . На секоја точка $A \neq O$ и ја придружуваме точката A' што лежи на полуправата OA и за која е исполнет условот

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = m. \quad (1)$$

Точката A' е еднозначно определена, па затоа добиваме пресликување од $\Pi \setminus \{O\}$ во Π . Од условот (1) следува дека ова пресликување е инјекција, но не е сурјекција. Меѓутоа, ако пресликувањето го разгледуваме од $\Pi \setminus \{O\}$ во $\Pi \setminus \{O\}$, тоа е биекција и истото го нарекуваме *инверзија со центар O и коефициент m* , во ознака $J(O, m)$ или само J . За инверзијата точни се следниве тврдења.

Теорема 1. Ако $J(A) = A'$, тогаш $J(A') = A$, односно $J^2 = \varepsilon$.

Теорема 2. Точката A е од кружницата $k_0(0, \sqrt{m})$ ако и само ако $J(A) = A$.

Значи, точките од кружницата $k_0(0, \sqrt{m})$ се единствените неподвжни точки за инверзијата J . Затоа оваа кружница се нарекува *кружница на инверзијата J* . Значи, инверзијата е определена или со центар и коефициент на инверзија или со кружницата на инверзија.

Теорема 3. Секоја внатрешна точка на кружницата $k_0(0, \sqrt{m})$ при инверзијата се пресликува во надворешна точка за $k_0(0, \sqrt{m})$ и обратно.

Теорема 4. Ако $J(A) = A'$ и $J(B) = B'$, тогаш

$$\angle OA'B' = \angle OBA \text{ и } \angle OB'A' = \angle OAB. \quad (2)$$

Теорема 5. Секоја права што минува низ центарот O на инверзија J се пресликува во самата себе, а секоја права што не минува низ O се пресликува во кружница што минува низ O .

Теорема 6. Ако кружницата k минува низ центарот O на инверзијата J , тогаш $J(k)$ е права што не минува низ O .

Теорема 7. Кружница што не минува низ центарот O на инверзијата J се пресликува во кружница што не минува низ центарот O .

Како што рековме при инверзија J зададена со кружницата $k_0(0, \sqrt{m})$ неподвижни се само точките од кружницата $k_0(0, \sqrt{m})$, па затоа за кружницата $k_0(0, \sqrt{m})$ ќе велиме дека е *точкасто неподвижна* за J . Одговорот на прашањето дали постојат и други кружници кои се неподвижни за J го дава следнава теорема.

Теорема 8. Кружницата k различна од $k_0(0, \sqrt{m})$ е неподвижна за инверзијата J ако и само ако k ортогонално ја сече $k_0(0, \sqrt{m})$.

Теорема 9. Ако две прави, односно права и кружница, односно две кружници имаат една заедничка точка, тогаш и нивните слики при инверзијата J имаат една заедничка точка.

Теорема 10. Ако меѓу две прави, меѓу права и кружница или меѓу две кружници се запазува при секоја инверзија.

Теорема 11. а) За секоја права p и кружница k постои инверзија J таква што $J(p) = k$.

б) Ако се дадени кружници k' и k'' , тогаш постои инверзија J која ги пресликува во:

- 1) две прави ако k' и k'' имаат заедничка точка,
- 2) две концентрични кружници ако k' и k'' се дисјунктни.

1. Даден е $\triangle ABC$ со полупериметар p . На правата AB се земени точки E и F такви што $\overline{CE} = \overline{CF} = p$. Докажи дека припишаната кружница на $\triangle ABC$ кон страната AB и опишаната кружница околу $\triangle EFC$ се допираат.

Решение. Нека P и Q се допирните точки на припишаната кружница со правите CA и CB , соодветно. Познато е дека $\overline{CP} = \overline{CQ} = p$, т.е. точките E, P, Q, F лежат на кружницата со центар C и радиус p . Нека J е инверзијата определена со оваа кружница. Со k да ја означиме опишаната кружница околу $\triangle EFC$, а со k_1 да ја означиме припишаната кружница. Бидејќи $J(P) = P$, $J(Q) = Q$ и k_1 се допира до правите CP и CQ кои при оваа инверзија се неподвижни следува дека $J(k_1) = k_1$. Од друга страна, $J(E) = E$ и $J(F) = F$, т.е. $J(k)$ е правата AB . Бидејќи k_1 се допира до AB , заклучуваме дека k и k_1 се допираат.

2. Различните кружници k_1, k_2, k_3, k_4 се такви што k_1 и k_3 надворешно се допираат во точката P , и k_2 и k_4 исто така надворешно се допираат во точката P . Нека k_1 и k_2 , k_2 и k_3 , k_3 и k_4 , k_4 и k_1 се сечат соодветно во точките

A, B, C, D различни од P . Докажи дека

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PD}^2}.$$

Решение. Да земеме инверзија со центар во P и радиус r . Со X' да ја означиме сликата на X . Кружниците k_1, k_2, k_3, k_4 се пресликуваат во правите k'_1, k'_2, k'_3, k'_4 , каде $k'_1 \parallel k'_3$ и $k'_2 \parallel k'_4$, па затоа $A'B'C'D'$ е паралелограм. Сега имаме $\overline{AB} = \frac{r^2}{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}, \overline{A'B'} = \frac{r^2}{\overline{PB}^2}$, итн. Бараното равенство се трансформира во еквивалентното равенство

$$\frac{\overline{PD}^2}{\overline{PB}^2} \cdot \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'}}{\overline{A'D'} \cdot \overline{D'C'}} = \frac{\overline{PD}^2}{\overline{PB}^2},$$

кое е точно бидејќи $\overline{A'B'} = \overline{D'C'}$ и $\overline{B'C'} = \overline{A'D'}$.

3. Нека k е кружницата опишана околу триаголникот ABC . Кружницата k_1 ги допира страните AC и BC , и одвнатре ја допира k во точката P . Тангентата на кружницата k_1 која е паралелна со AB и ја сече внатрешноста на триаголникот ABC ја допира k_1 во точката Q . Докажи дека $\angle ACP = \angle QCB$.

Решение. Нека тангентата на k_1 ги сече CA во A_1 и CB во B_1 . Со X' да ја означиме сликата на X при инверзија со центар C и даден радиус. Кружницата k се пресликува во права $A'B'$, а кружницата k_1 се пресликува во кружница k'_1 која ја ги допира правата AB и продолженијата на правите CA и CB . Значим k'_1 е припишаната кружница на триаголникот $A'B'C$ наспроти темето C , а нејзината допирна точка со $A'B'$ е сликата P' на точката P . Бидејќи Q е допирната точка на припишаната кружница со страна на триаголникот A_1B_1C кој е сличен на триаголникот $B'A'C$ важи

$$\angle QCB = \angle P'CA' = \angle PCA.$$

4. Нека ω е полукружница над дијаметар PQ . Кружницата k ја допира ω одвнатре и дијаметарот PQ во точката S . Нека AB е тангентата на кружницата k нормална на PQ , каде A е на ω и B е на отсечката CQ . Докажи дека AC е симетрала на $\angle PAB$.

Решение. Земаме инверзија со центар S . Полукружницата ω се пресликува во полукружница ω' со центар на $P'Q'$, кружницата k во тангентата на ω' паралелна на $P'Q'$, а правата AB се пресликува во кружница со центар на $P'Q'$ која ја допира k . Притоа оваа кружница ги сече ω' и $P'Q'$ во точките A' и B' , соодветно. Сега $P'A'B'$ е рамнокрак триаголник со

$$\angle PAC = \angle A'P'C = \angle A'B'C = \angle BAC.$$

5. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ ($\overline{AC} \neq \overline{BC}$) дадена е точка D таква што важи $\angle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB$. Тангентите во точката C на кружниците опишани околу $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ ги сечат правите AB и AD соодветно во точките P и Q . Докажи дека правата PQ го полови $\angle BPC$.

Решение. *Прв начин.* Со I да го означиме центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата CI ја сече страната AB во точката L и по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката M . Точката M е центар на опишаната кружница ω на $\triangle AIB$. Сега, од

$$\angle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB = \angle AIB$$

следва дека точката D исто така припаѓа на ω .

Бидејќи

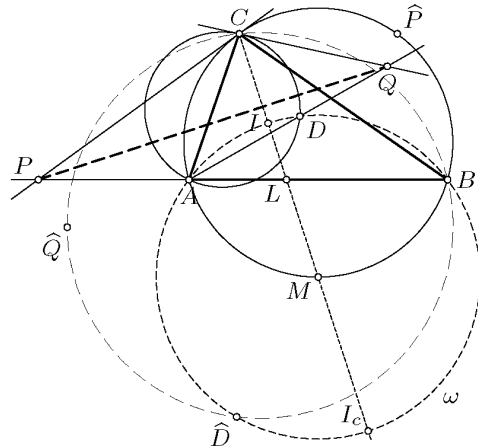
$$\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} \text{ и } \overline{QC}^2 = \overline{QA} \cdot \overline{QD},$$

точките P и Q имаат еднаков степен во однос на кружниците C (со радиус нула) и ω , па затоа PQ е радикална оска на овие две кружници. Значи, правата PQ е нормална на правата која ги поврзува центрите на овие две кружници, а тоа е правата CL . Бидејќи

$$\angle PCL = \angle PCA + \frac{1}{2}\angle ACB = \angle CBA + \frac{1}{2}\angle ACB = \angle CLP,$$

добиваме дека $\overline{PL} = \overline{PC}$, па затоа правата PQ го полови $\angle CPL = \angle BPC$.

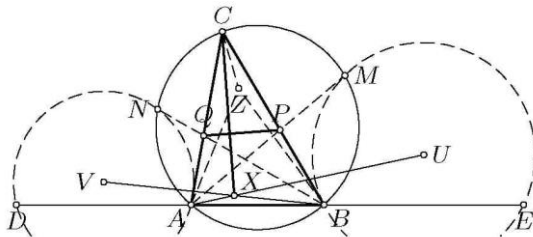
Втор начин. Со X да ја означиме сликата на било која точка X при инверзија со центар C и квадрат на радиусот $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$, комбинирана со симетрија во однос на правата CI . При оваа композиција точките A и B се пресликуваат една во друга. Бидејќи точката I се пресликува во центарот на припишаната кружница I_C наспроти точката C , заклучуваме дека кружницата ω се пресликува во самата себе, па затоа $D \in \omega$. Понатаму, кружниците ABC и ADC соодветно се пресликуваат во прави кои минуваат низ C и се паралелни со правите AB и BD . Според тоа, $BACP$ и $CBDQ$ се рамнокраки трапези ($CP \parallel AB$ и $CQ \parallel BD$), а M лежи на симетралата на отсечката BD , која воедно е симетрала и на отсечката CQ .



Треба да се докаже дека $\angle CPB = 2\angle CPQ$, т.е. $\angle CAP = 2\angle CQP$. Ова одма следува бидејќи $\overline{MP} = \overline{MC} = \overline{MQ}$, т.е. точката M е центар на кружницата CQP , па затоа $\angle CAP = \angle CMP = 2\angle CQP$.

6. Даден е триаголник ABC . Нека точките D и E припаѓаат на правата AB и се такви што $D-A-B-E$, $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{BE} = \overline{BC}$. Симетралите на внатрешните агли во темињата A и B ги сечат спротивните страни во точките P и Q , соодветно, а опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките M и N , соодветно. Правата која минува низ точката A и центарот на опишаната кружница околу триаголникот BME и правата кој минува низ точката B и центарот на опишаната кружница околу триаголникот AND се сечат во точката X , $X \neq C$. Докажи дека $CX \perp PQ$.

Решение. Со U да го означиме центарот на опишаната кружница околу $\triangle BME$. Да примениме инверзија со центар A и квадрат на радиусот на кружницата на инверзија $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$. Точките B и C се пресликуваат во точките B' и C' кои се симетрични на точките C и B во однос на правата AP , точките P и M се пресликуваат една во друга, а E се пресликува во точката E' симетрична на Q во однос на AP . Според тоа, правата AU се совпаѓа со правата која ја поврзува A со центарот на кружницата $B'PE'$. Гледаме дека таа права е симетрична на правата AZ во однос на симетралата на аголот A , каде Z е центарот на кружницата опишана околу $\triangle CPQ$.

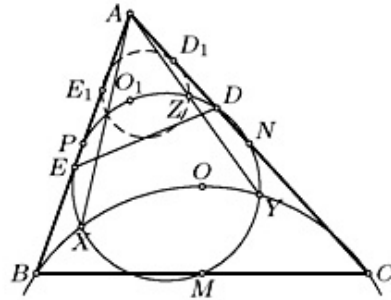


Аналогно се добива дека правата BZ е симетрична на правата која минува низ B и центарот V на кружницата AND во однос на симетралата на аголот B . Според теоремата на Чева во тригонометрски облик, правите симетрични на правите AU, BV, CX соодветно во однос на симетралите на аглиите A, B, C исто така се сечат во една точка, што значи дека правата CZ е симетрична на CX во однос на симетралата на аголот C . Но, Z е центар на кружницата CPQ , од каде што следува дека правата CX ја содржи висината на триаголникот CPQ што и сакавме да докажеме.

7. Нека M, N и P се соодветно средините на страните BC, CA и AB , а O е

центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Опишаните кружници околу триаголниците BOC и MNP се сечат во различни точки X и Y внатре во $\triangle ABC$. Докажи дека $\angle BAX = \angle CAY$.

Решение. *Прв начин.* Со k_1 и k_2 да ги означиме соодветно кружниците MNP и BOC . Кружницата k_1 е Ојлеровата кружница во $\triangle ABC$ и минува низ подножјата D, E на висините од B, C и средината O_1 на отсечката AN , каде H е ортоцентарот на $\triangle ABC$.



Ќе докажеме дека втората пресечна точка Z на правата AU и кружницата k_1 лежи на Ојлеровата кружница k_3 на триаголникот ADE . Ќе сметаме дека Z е меѓу A и Y (доказот во другиот случај е аналоген). Нека D_1 и E_1 се соодветно средините на отсечките AD и AE . Од

$$\overline{AY} \cdot \overline{AZ} = \overline{AD} \cdot \overline{AN} = \overline{AD_1} \cdot \overline{AC}$$

следува дека точките Y, Z, C, D_1 се конциклични, па затоа $\angle AZD_1 = \angle ACY$.

Аналогно $\angle AZE_1 = \angle ABY$, па затоа

$$\angle D_1ZE_1 = \angle AZD_1 + \angle AZE_1 = \angle ACY + \angle ABY = \angle BYC - \angle BAC = \angle BAC.$$

Оттука следува дека Z припаѓа на k_3 .

Бидејќи O_1 е центар на опишаната кружница околу $\triangle ADE$, трансформацијата на сличност која го пресликува $\triangle ABC$ во $\triangle ADE$ исто така ги пресликува k_1 во k_2 и k_2 во k_3 , па затоа слика на точката $X \in k_1 \cap k_2$ е точката $Z \in k_2 \cap k_3$. Според тоа, $\angle BAX = \angle DAZ = \angle CAY$.

Втор начин. Ќе ги користиме ознаките од првиот начин на решавање. Нека $\mathfrak{Z}$ е композиција на инверзија со центар A и квадрат на радиусот на кружницата на инверзија $\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ и симетријата во однос на симетралата на $\angle CAB$.

Пресликувањето $\mathfrak{Z}$ ги пресликува B, C и N, P соодветно во N, P и B, C .

Понатаму, за точката O важи $\angle ANO = \angle APO = 90^\circ$ па затоа нејзината слика O' е таква што $\angle AO'B = \angle AO'C = 90^\circ$, што значи дека $O' \equiv D$ е подножјето на висината AD на триаголникот ABC и исто така D се пресликува во O . Следува дека кружницата k_1 , која минува низ D , се пресликува во k_2 , а k_2 се пресликува во k_1 . Според тоа, пресечните точки X, Y на кружниците k_1, k_2 се пресликуваат една во друга, па затоа $\angle BAX = \angle CAY$.

Литература

1. Lopandić, D.: Geometrija, <https://www.scribd.com/document/44667591/LopandicGeometrija>
2. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazareveć, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
3. Малчески, Р., Гроздев, С., Аневска, К.: Геометрија на комплексен број, Армаганка, Скопје, 2019, <https://matematickitalent.mk/>
4. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачи на Аполониј, Природно-математички факултет, Скопје, 1988