Валентина Гоговска,
Скопје

НЕМЕНЛИВИ ГОЛЕМИНИ

Често пати се соочуваме со разгледување на проблеми во кои имаме промена на некои големини. Меѓутоа, во некои случаи само наизглед имаме некакви промени, а всушност станува збор за големини кои не се менуваат. Овде ќе разгледаме неколку задачи во кои всушност имаме неменливи големини.

Задача 1. На шаховска табла со димензии 9×9 распоредени се бумбари и муви. На секое бело поле застанат е бумбар, а на секое црно поле - мува. Може ли бумбарите и мувите да ги сменат местата така што секое поле да е повторно зафатено?

Решение. При секоја смена распоредот на мувите и бумбарите е различен и треба многу цртања за да ги запишеме сите можни распореди. Затоа се обидуваме да најдеме величина која останува постојана т.е. не се менува при извршување на операциите. Во дадената задача постојан е бројот на црни и бели полиња. Бидејќи таблата е со димензии 9×9, таа има 81 поле т.е. бројот на бели и црни полиња е различен. Значи бројот на бумбари е различен од бројот на муви, па тие не можат да ги сменат местата.

Задача 2. На шаховска табла со димензии 8×8 во долниот лев агол поставен е коњ-скокач. Дали е можно скокачот да стигне во горниот десен агол, движејќи се според шаховското правило (три право и едно поле нормално, т.е. во облик на буквата Г), но поминувајќи само по еднаш во сите останати полиња на шаховската табла?

Решение. При движење на коњот од првото до последното поле коњот прави 63 потези (бидејќи таблата има 64 полиња, а скокачот застанува на сите само по еднаш). При секое движење на скокачот се менува бојата на полето, па бидејќи 63 е непарен број, последното и првото поле ќе бидат во различна боја, но тоа не е можно бидејќи и двете припа”аат на иста дијагонала, а сите дијагонални полиња на шаховска табла се иста боја. Значи, скокачот по 63 полиња не може да дојде во десниот горен агол.

Забелешка. Ако се откажеме од барањето скокачот своето движење да го заврши во горниот десен агол тогаш движењето е можно т.е. скокачот може да ги помине сите полиња од шаховската табла и притоа на секое од нив да застане само по еднаш. Обиди се да најдеш едно вакво движење на скокачот.

Задача 3. Првоодделенец зел лист хартија и го исекол на десет помали парчиња. Едно парче од добиените исекол на десет парчиња и ја повторил истата операција неколкупати. На крајот првооделенецот се обидел да ги изброи така добиените парчиња и добил 123. Докажи дека првооддел-енецот погрешно изброил.

Решение. После првото сечење има 10 помали парчиња. Едно од нив се зема и повторно се дели на 10 помали парчиња. Значи по второто сечење има 19 парчиња, а по третото 28, ... Вкупниот број на парчиња после секое сечење е од облик $9k+1$. Бидејќи 123 при делење со 9 дава остаток 6 тој не е од облик $9k+1$ и не може да биде вкупен број на парчиња добиени со претходната постапка.

Задача 4. На табла се запишани броевите од 1 до 2003. Се земаат произволно два броја и се запишува нивниот збир, а тие се бришат. Ова се повторува при што како собироци може да се јават запишаните броеви на таблата, но и новодобиените збирови се додека на таблата не се пресмета и последниот збир т.е. не остане еден број. Каков е тој, парен или непарен?

Решение. Да забележиме дека збирот на два непарни или два парни броја е парен број, а збирот на парен и непарен е непарен. Значи бројот на непарни броеви на таблата или се намалува за два или се запазува, т.е. парноста на бројот на непарни броеви е постојана. На даската се запишани 1001 парен и 1002 непарни броеви. Бидејќи бројот на непарните броеви е парен на крајот останува број што е парен.

Задача 5. На табла знакот + е запишан 20 пати, а знакот - 25 пати. Дозволено е да се избришат два знака и наместо нив да се запише + ако избришаните знаци се еднакви и минус ако избришаните знаци се различни. Оваа операција се повторува се додека не остане само еден знак на таблата. Кој е тој?

Решение. Да забележиме дека со бришење на два исти знаци т.е. два + или два - се запишува знак +, а при бришење на + и - се запишува знак -. Значи бројот на - на таблата или се намалува за два или се запазува, т.е. парноста на бројот на - е постојана. На таблата се запишани парен број + и непарен број -. Бидејќи бројот на - е непарен на крајот останува -.

Задача 6. На таблата се запишани 1995 нули, 1996 единици и 1997 двојки. Дозволено е во еден чекор да се избришат две различни цифри и на нивно место да се запише преостанатата цифра од цифрите 0,1,2 што не е избришана во тој чекор.

а) Ако операцијата се повторува се додека на таблата не остане една цифра определи која цифра би можела да остане

б) Дали после извесен број повторувања на наведената операција можат да останат само нули?

Решение. Да забележиме дека во секој чекор се менува парноста на бројот на нули, бројот на единици и бројот на двојки запишани на таблата. Според тоа, после секој чекор бројот на нули и бројот на двојки кои се запишани на таблата се со иста парност, а бројот на единици е со различна парност од претходните два броја (бидејќи на почеток имавме непарен број нули, непарен број двојки и парен број единици). Затоа:

а) Цифрата може да биде само единица

б) Да претпоставиме дека тоа е можно.Во тој случај на таблата би останале нула единици и нула двојки т.е. парноста на бројот на единици и бројот на двојки би била иста, но од условот на задачата има 1996 единици и 1997 двојки. Значи не е можно да останат само нули на таблата.

Задача 7. На конкурсот "Мис бамбини" учествуваат 300 девојчиња нумерирани со броеви од 1 до 300. Во првото излегување девојчињата биле подредени последователно во колона започнувајќи со девојчето со реден број 1 до девојчето со реден број 300. Според пропозициите две девојчиња можат да ги сменат местата само ако се една преку друга. Може ли почитувајќи ги пропозициите девојчето со реден број 300 да застане прво во колоната?

Решение. Да земеме колона со помал број девојчиња на пример четири, да ги означиме девојчињата со А, Б, В, Г и да ја изведеме операцијата. Тогаш А може да се замени со В, а Б со Г. Забележуваме дека и по смената парноста на редните броеви на девојчињата не се менува т.е. тие што биле со непарен реден број повторно имаат непарен реден број, додека пак оние со парен реден број и по смената се на парно место. Бидејќи 1 и 300 имаат различна парност јасно е дека девојчето со реден број 300 не може да дојде на прво место.

Задача 8. Во низата 1, 9, 9, 7, 6,.. секоја цифра после четвртата е еднаква на последната цифра од сумата од претходните четири. Ќе се сретнат ли во таа низа последователно цифрите 9, 8, 7 и 6?

Решение. Да ги запишеме следните десетина цифри 1, 9, 9, 7, 6, 1, 3, 7, 7, 8,... Лесно се забележува дека постои зависност поме"у напишаните цифри т.е. четирипати последователно собираме три непарни и еден парен број, па пишуваме четири непарни цифри. Петтата цифра е последната цифра од збирот на четирите непарни цифри, што значи таа е парна цифра. Во низата се запишани четири непарни и една прна цифра и оваа законитост се запазува. Бидејќи во четворката 9, 8, 7 и 6 има две парни и две непарни цифри таа не е дел од горната низа.

Задача 9. Даден е еден број. Дозволено е извршување на следните две операции:

- од дадениот број да се извади сумата на неговите цифри
- кон дадениот број да се додаде сумата на неговите цифри

Дали може на овој начин од 363 да се добие 2003?

Решение. При извршување и на двете операции забележуваме дека ако дадениот број се дели со три тогаш и новодобиениот број се дели со три. Бројот 363 се дели со три и при секоја од операциите се добива број што се дели со три, а бројот 2003 не се дели со три. Следствено од 363 со помош на двете операции не може да се добие бројот 2003.

Задача 10. Змеј има 2003 глави. Витезот може со еден удар со мечот да му отсече 1, 17, 21 или 23 глави, а веднаш потоа на змејот му израснуваат 10, 14, 0 или 8 глави соодветно. Дали може витезот да му ги отсече сите глави на змејот?

Решение. При сечење на главите на змејот се случуваат следните промени +9, -3, -21 или -15. Значи секогаш се добива број делив со три. Значи, ќе може да се исечат сите глави на змејот само ако бројот на глави на змејот е делив со 3. Бидејќи 2003 не е делив со 3 на змејот не може да му се исечат сите глави.

Задачи за самостојна работа

1. Некој туристички брод има 29 кабини со вкупно 86 кревети. Кабините се 2,3 и 4-креветни. Да се докаже дека бројот на трокреветните соби е парен.

2. На лист со пенкало се запишани неколку нули и неколку единици (не се знае колку). Вршиме бришење на по две цифри и тоа наместо две избришани еднакви цифри пишуваме 1, а наместо две избришани различни цифри 0. Тоа се повторува се додека на листот не остане само една цифра. Да се докаже дека цифрата која останува последна не зависи од редоследот на бришење на цифрите.

3. Првите четири члена на една низа од цифри се 1, 2, 3 и 5. Секој нареден член на овој низа е цифрата на единиците на збирот на претходните четири члена. Да се докаже дека во оваа низа не може да се појави четворка со редослед 1,2,3,4.

4. Во полињата на квадрат со димензии 4×4 запишани се знаците + и - како на цртежот десно. Дозволено е во еден чекор да се сменат знаците во сите полиња на една колона, една редица или дијагонала. (Дијагонала та може да содржи 4, 3, 2 или едно поле т.е. сите аглови полиња се сметаат за дијагонални). Дали со повторување на оваа дозволена операција може да се добие квадрат во кој во сите полиња има запишано +?

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ