Dvodimenzionalni i jednodimenzionalni tetraedar i neka njihova svojstva

Petar Svirčević[1]

Dobro nam je poznato, kako je definiran opći tetraedar, koji je zapravo trostrana piramida u trodimenzionalnom euklidskom prostoru E^3. Dakle, nećemo se striktno baviti pravilnim poliedrom. Nadalje, u ovom članku ćemo dokazati tri svojstva općeg tetraedra. Tada ćemo deduktivno doći do tih svojstava, koja se odnose za definirani *dvodimenzionalni tetraedar u* E^2 i *jednodimenzionalni tetraedar* u E^1. Analiza tetraedra u E^3 i ne mora biti potpuno jasna, ali će nam poslužiti kao ideja vodilja, da strogo dokažemo analogna svojstva tetraedara u E^2 i E^1, što je i u naslovu iskazano. I konačno ćemo na kraju, bez dokaza, heuristički iskazati ta svojstva za definirani *višedimenzionalni tetraedar* u E^n $(n > 3)$.

Napomena 1. U [5] je primijenjena indukcija na definirani tetraedar u E^1, E^2, E^3 i dokazana su njihova tri svojstva, te su na kraju heuristički iskazana svojstva tetraedra u E^n $(n > 3)$. No, takav pristup bi mogao djelovati odviše apstrakrno jer bi se npr., za jednodimenzionalni tetraedar reklo da mu je volumen zapravo duljina dužine, a za dvodimenzionalni tetraedar da mu je volumen mjerni broj površine trokuta.

Napomena 2. U ovom članku nećemo iznositi dokaz A-G nejednakosti, koja je dana u obliku

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{1}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}^+$, jer je to poznata nejednakost, za koju postoje različiti dokazi.

Definicija trodimenzionalnog općeg tetraedra i njegova tri svojstva

Definicija 1. Neka su u E^3 dane četiri točke A_1, A_2, A_3, A_4, takve da nikoje tri nisu kolinearne niti sve četiri komplanarne. Tada su one vrhovi općeg *trodimenzionalnog tetraedra*, zapravo trostrane piramide.

Napomena 3. Iz D1 slijedi da tetraedar ne može degenerirati u dvodimenzionalnu niti u jednodimenzionalnu tvorevinu. Nadalje, ako su bridovi tetraedra međusobno jednaki,

$$|A_1A_2| = |A_1A_3| = |A_1A_4| = |A_2A_3| = |A_2A_4| = |A_3A_4|,$$

tada se radi o jednom od pet pravilnih *Platonovih poliedara*, kojeg ćemo u tom slučaju zvati *pravilni tetraedar*, ali se nećemo striktno s njime baviti.

Teorem 1. *Neka su vrhovi tetraedra u točkama A_1, A_2, A_3, A_4 u skladu D1. Tada je točka $T_{(3)}$ njegovo težište onda i samo onda kada je produkt udaljenosti te točke od njegovih strana maksimalan.*

[1] Autor je profesor u miru na Tehničkoj školi u Zagrebu; e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

Dokaz. Budući da su A_1, A_2, A_3, A_4 vrhovi tetraedra $A_1A_2A_3A_4$, njegov plašt čine trokuti

$$\triangle A_1A_2A_3, \quad \triangle A_2A_3A_4, \quad \triangle A_3A_4A_1, \quad \triangle A_4A_1A_2,$$

čije su mjere površina

$$B_{123} = P(\triangle A_1A_2A_3), \quad B_{234} = P(\triangle A_2A_3A_4),$$
$$B_{341} = P(\triangle A_3A_4A_1), \quad B_{412} = P(\triangle A_4A_1A_2),$$

a duljine visina tetraedra na te baze neka su redom h_4, h_1, h_2, h_3.

Jasno je da na osnovi uvedenih oznaka volumen V_3 tetraedra $A_1A_2A_3A_4$ je dan relacijama

$$V_3 = \frac{1}{3}B_{123}h_4 = \frac{1}{3}B_{234}h_1 = \frac{1}{3}B_{341}h_2 = \frac{1}{3}B_{412}h_3. \tag{2}$$

Nadalje, neka su udaljenosti točke $T_{(3)}$ od strana tetraedra dane ovim vezama:

$$\begin{aligned} x_4 &= d(T_{(3)}, \triangle A_1A_2A_3), \quad x_1 = d(T_{(3)}, \triangle A_2A_3A_4) \\ x_2 &= d(T_{(3)}, \triangle A_3A_4A_1), \quad x_3 = d(T_{(3)}, \triangle A_4A_1A_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Dakle, podijelili smo prvotni tetraedar u njih četiri s bazama prvotnog i vrhom u $T_{(3)}$, a to znači da je zbroj njihovih volumena jednak volumenu zadanog.

Iz relacija (2) i (3) slijedi

$$B_{234}x_1 + B_{341}x_2 + B_{412}x_3 + B_{123}x_4 = 3V_3. \tag{4}$$

Treba naći $T_{(3)}$, tako da bude

$$(x_1x_2x_3x_4)_{\max}. \tag{5}$$

Iz A-G nejednakosti (1) dobivamo

$$a_1a_2a_3a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4. \tag{6}$$

Ako u (6) uvrstimo

$$a_1 = B_{234}x_1, \quad a_2 = B_{341}x_2, \quad a_3 = B_{412}x_3, \quad a_4 = B_{123}x_4,$$

te uvažimo (4), dobivamo nejednakost

$$B_{234}x_1 \cdot B_{341}x_2 \cdot B_{412}x_3 \cdot B_{123}x_4 \leq \left(\frac{3V_3}{4}\right)^4. \tag{7}$$

U (7) su sve veličine fiksne osim varijabli x_1, x_2, x_3, x_4, i možemo lako naći (5). Dakle u (7) će vrijediti jednakost (to slijedi iz (1)), kada je

$$B_{234}x_1 = B_{341}x_2 = B_{412}x_3 = B_{123}x_4 = \frac{3V_3}{4}, \tag{8}$$

a odatle je $B_{234}x_1 = \frac{3}{4}V_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}B_{234}h_1$, a odatle slijedi

$$x_1 = \frac{1}{4}h_1. \tag{9}$$

Na analogan način dobivamo i druge jednakosti, dakle

$$x_k = \frac{1}{4}h_k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{10}$$

Jasno je, da lijeva strana u (7) ima maksimalnu vrijednost, kada postoji jednakost, dakle

$$(B_{234}x_1 \cdot B_{341}x_2 \cdot B_{412}x_3 \cdot B_{123}x_4)_{\max} = (B_{234}B_{341}B_{412}B_{123})(x_1x_2x_3x_4)_{\max}$$

jer je produkt $(B_{234}B_{341}B_{412}B_{123})$ konstantan.

Ako uvažimo ovaj rezultat i (10) zaključujemo

$$(x_1x_2x_3x_4)_{\max} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 h_1h_2h_3h_4 \tag{11}$$

što je i trebalo pokazati. Dakle, dokazan je prvi smjer u ekvivalenciji iz T1 ili desna implikacija. Da bi T1 bio u potpunosti dokazan trebalo bi dokazati i lijevu, ali dokaz tog obrata nije elementaran, jer bi trebalo tražiti ekstreme funkcije četiri varijable.

Iz klasične statike znamo, da je težište tetraedra udaljeno od svake strane za jednu četvrtinu duljine odgovarajuće visine tetraedra prema toj bazi ili bočnm trokutima. Na osnovu (10) zaključujemo da je $T_{(3)}$ težište tetraedra.

Sada ćemo se pozabaviti nalaženjem volumena tetraedra u E^3. Tu je primijenjen mješoviti produkt vektora i determinante četvrtog reda, što baš i nije standardno srednjoškolsko gradivo, ali je prihvatljivo za one učenike, koji obrađuju ovo gradivo na dodatnoj nastavi. Svakako, da smo prethodni teorem mogli dokazati i skalarnim metodama, ali bi taj postupak bio previše opširan i nepregledan.

Teorem 2. *Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru E^3 postavljen Kartezijev pravokutni koordinatni sustav $O(x_1, x_2, x_3)$ i ako su u njemu zadane četiri točke*

$$A_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}\right), \quad A_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\right), \quad A_3\left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}\right), \quad A_4\left(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}\right),$$

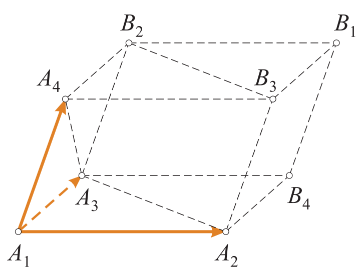
koje su desno orijentirane i koje određuju trodimenzionalni tetraedar $T_1T_2T_3T_4$, njegov volumen se može izraziti pomoću determinante četvrtog reda

$$V_3 = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \\ 1 & x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Uputa za dokaz. Do (12) možemo doći određivanjem mješovitog produkta

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_4} \cdot (\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3})}{6},$$

a to je zapravo $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3!}$ volumena paralelepipeda koji je razapet s vektorima $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$.



Objasnimo ukratko kako smo došli do (12). Naime, sa slike vidimo da je mjerni broj volumena prizme $A_1A_2B_4A_3A_4B_3B_1B_2$ jednak iznosu mješovitog produkta vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$,

$\overrightarrow{A_1A_3}$ i $\overrightarrow{A_1A_4}$. Budući da je volumen trostrane prizme $A_1A_2A_3A_4B_3B_2$ jednak polovici volumena zadane prizme, a volumen tetraedra $A_1A_2A_3A_4$ je jednak jednoj trećini volumena navedene trostrane prizme, jasno je zašto se u (12) pojavljuje koeficijent $\frac{1}{6}=\frac{1}{3!}$.

Teorem 3. *Težište navedenog tetraedra dano je s*

$$T_{(3)}\left(\frac{x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+x_1^{(3)}+x_1^{(4)}}{4},\frac{x_2^{(1)}+x_2^{(2)}+x_2^{(3)}+x_2^{(4)}}{4},\frac{x_3^{(1)}+x_3^{(2)}+x_3^{(3)}+x_3^{(4)}}{4}\right). \quad (13)$$

Uputa za dokaz. Iskažimo riječima kako se može doći do ove relacije. Dakle, postavimo pravac kroz bilo koji vrh tetraedra i težišta njemu nasuprotne strane (trokuta). On je nosilac težišnice i težišta tetraedra, a težišnica tetraedra je spojnica tih dviju točaka. Ako isti postupak provedemo za još jedan vrh tetraedra i težišta njemu nasuprotne strane, tada dobivamo još jednu težišnicu. Težišnice se sijeku u tešištu tetraedra, a u njemu se sijeku i pravci nosioci težišnica. Koordinate tog težišta se dobiju kao rješenje sustava od tri jednadžbe težišnica s tri nepoznanice. Na kraju dobivamo da su koordinate težišta tetraedra jednake aritmetičkoj sredini odgovarajućih koordinata zadanih vrhova, što se vidi i u (13).

Napomena 4. Svakako, da smo ovo zadnje razmatranje mogli koristiti i u dokazu T1. Naime, dobili bi da se udaljenosti vrha tetraedra kao i udaljenost njegovog težišta od ravnine, u kojoj se nalazi njima nasuprotna strana odnose kao $4:1$.

Napomena 5. Analiza svojstava trodimenzionalnog tetraedra je zapravo ideja vodilja za analizu analognih svojstava dvodimenzionalnog i jednodimenzionalnog tetraedra.

Definicija dvodimenzionalnog općeg tetraedra i tri njegova svojstva

Definicija 2. Neka su u E^2 dane tri nekolinearne točke A_1, A_2, A_3. One su vrhovi općeg *dvodimenzionalnog tetraedra*, zapravo trokuta.

Napomena 6. U prvi trenutak ovaj termin "*opći dvodimenzionalni tetraedar*" bi mogao zbuniti, ali će svojstva koja ćemo iskazati u T4, T5, T6, ustvari, slijediti kada u T1, T2, T3 izvršimo specijalizaciju, gdje $n=3$ zamijenimo s $n=2$.

Teorem 4. *Neka su vrhovi dvodimenzionalnog tetraedra (trokuta) u nekolinearnim točkama A_1, A_2, A_3, tada je točka $T_{(2)}$ njegovo težište onda i samo onda kada je produkt udaljenosti te točke od njegovih stranica maksimalan.*

Dokaz. Neka su x_1, x_2, x_3 udaljenosti točke $T_{(2)}$ od stranica $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, a njihove duljine su redom b_1, b_2, b_3.

Ako je P površina $\triangle A_1A_2A_3$, tada vrijedi jednakost

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 2P. \tag{14}$$

Iz A-G nejednakosti (1) za $n = 3$ dobivamo nejednakost

$$a_1a_2a_3 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^3. \tag{15}$$

Ako u (15) uvrstimo $a_i = b_ix_i$ $(i = 1, 2, 3)$ i uvažimo (14), imamo nejednakost

$$b_1x_1 \cdot b_2x_2 \cdot b_3x_3 \leq \left(\frac{2P}{3}\right)^3. \tag{16}$$

U (16) vrijedi jednakost onda i samo onda kada je

$$b_1x_1 = b_2x_2 = b_3x_3 = \frac{2P}{3}. \tag{17}$$

Ako su h_1, h_2, h_3 duljine visina trokuta na stranice $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$ i $\overline{A_1A_2}$ redom, tada iz (17) slijedi $b_1x_1 = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}b_1h_1$, odnosno $x_1 = \frac{1}{3}h_1$, pa na analogan način dobivamo i druge jednakosti. Dakle

$$x_i = \frac{1}{3}h_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Iz elementarne geometrije znamo da je težište trokuta udaljeno od svake stranice za jednu trećinu duljine odgovarajuće visine. Ta se tvrdnja dobije ako težište trokuta dijeli težišnicu na dva dijela, gdje se duljine tih dijelova odnose kao $1 : 2$. Svakako da je dužina veće duljine spojnica vrha trokuta i težišta, a dužina manje duljine je spojnica težišta i polovišta tome vrhu nasuprotne stranice. Ako se iz navedenog vrha postavi pripadna visina i primijeni Talesov poučak, dobiju se redom relacije (18), a to znači da je točka $T_{(2)}$ težište zadanog trokuta.

Jasno je da lijeva strana u (16) ima maksimalnu vrijednost kada postoji jednakost, dakle $(b_1x_1 \cdot b_2x_2 \cdot b_3x_3)_{\max} = (b_1b_2b_3)(x_1x_2x_3)_{\max}$, jer je produkt $(b_1b_2b_3)$ konstantan.

Ako se uvaži ovaj rezultat iz (18) se dobiva

$$(x_1x_2x_3)_{\max} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 h_1h_2h_3, \tag{19}$$

što je i trebalo pokazati. Dakle dokazan je prvi smjer u ekvivalenciji ili lijeva implikacija. Da bi T4 bio u potpunosti dokazan treba dokazati i desnu implikaciju. Međutim, dokaz tog obrata nije elementaran, jer bi trebalo tražiti ekstreme funkcije od tri varijable, a to nije srednjoškolsko gradivo, pa ga nećemo niti iznositi.

Teorem 5. *Ako je u dvodimenzionalnom euklidskom prostoru E^2 postavljen Kartezijev pravokutni prostorni koordinatni sustav $O(x_1, x_2)$ i ako su u njemu dane tri točke*

$$A_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right), \quad A_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right), \quad A_3\left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}\right),$$

koje su desno orijentirane i određuju dvodimenzionalni tetraedar $A_1A_2A_3$ (zapravo $\triangle A_1A_2A_3$), tada se volumen tog tetraedra (površina trokuta) može izraziti pomoću determinante trećeg reda

$$V_2 = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Uputa za dokaz. Ako su te točke desno orijentirane u sustavu $O(X_1, X_2)$, površina $\triangle A_1A_2A_3$ je dana formulom

$$P = \frac{1}{2}\left[x_1^{(1)}(x_2^{(2)} - x_2^{(3)}) + x_1^{(2)}(x_2^{(3)} - x_2^{(1)}) + x_1^{(3)}(x_2^{(1)} - x_2^{(2)})\right], \qquad (21)$$

kada se želi sačuvati orijentacija. No, ako je važan samo iznos, tada se taj izraz uzima po apsolutnoj vrijednosti. Budući da idemo na terminološko poopćenje, sada ćemo tu površinu zvati *volumen dvodimenzionalnog orijentiranog tetraedra*, te ćemo ga prikazati pomoću determinante trećeg reda u obliku (20). Svakako su formule (20) i (21) ekvivalentne, što se može lako pokazati. Napomenimo da i (20) čuva orijentaciju.

Teorem 6. *Težište dvodimenzionalnog tetraedra ili* $\triangle A_1A_2A_3$ *dano je s*

$$T_{(2)}\left(\frac{x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)}}{3}, \frac{x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)}}{3}\right). \qquad (22)$$

Uputa za dokaz. Težištu trokuta pripadaju koordinate koje su aritmetičke sredine odgovarajućih koordinata njegovih vrhova.

Definicija jednodimenzionalnog tetraedra i tri njegova svojstva

Definicija 3. Promatrajmo *jednodimenzionalni euklidski prostor* E^1 i na njemu *Kartezijev koordinatni sustav*, $O(x_1)$ koji je desno orijentiran. Ako su točke $A_1(x_1^{(1)})$ i $A_2(x_1^{(2)})$ u tom sustavu tada su one desno orijentirane u poretku A_1, A_2, ako je $x_1^{(2)} - x_1^{(1)} > 0$. Dužinu $\overline{A_1A_2}$ ćemo zvati *jednodimenzionalni tetraedar*.

Teorem 7. *Neka su vrhovi (krajevi) jednodimenzionalnog tetraedra (dužine) u točkama* A_1, A_2. *Točka je* $T_{(1)}$ *njegovo težište onda i samo onda kada je produkt udaljenosti te točke od njegovih vrhova maksimalan.*

Uputa za dokaz. Lako se pokaže da ako je točka $T_{(1)}$ unutar *jednodimenzionalnog tetraedra*, čiji su vrhovi u točkama A_1 i A_2 njegovo težište (polovište) onda i samo onda ako je produkt udaljenosti x_1 i x_2 te točke od točaka A_1 i A_2 maksimalan, naime to znači da je

$$(x_1x_2)_{\max} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 h_1h_2 \qquad (23)$$

gdje je $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{2}h_2 = \frac{1}{2}\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right|$. Dakle h_1 i h_2 su udaljenosti zadane točke od krajeva intervala.

Teorem 8. *Ako je u jednodimenzionalnom euklidskom prostoru* E^1 *postavljen Kartezijev prostorni koordinatni sustav* $O(x_1)$ *i dane su dvije točke* $A_1(x_1^{(1)})$, $A_2(x_1^{(2)})$, *koje su desno orijentirane i koje određuju jednodimenzionalni tetraedar (dužinu)* T_1T_2, *volumen (zapravo duljina dužine) tog tetraedra može se izraziti pomoću determinante drugog reda*

$$V_1 = \frac{1}{1!}\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

Uputa za dokaz. Udaljenost ovih dviju točaka dana je s

$$d(A_1, A_2) = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}, \tag{25}$$

ako želimo sačuvati orijentaciju, ili uzmemo tu vrijednost po apsolutnoj vrijednosti, ako nam je važan samo iznos. Dakle (25) je zapravo (24).

Teorem 9. *Težište jednodimenzionalnog tetraedra $\overline{A_1A_2}$ s vrhovima u $A_1(x_1^{(1)})$, $A_2(x_1^{(2)})$ dano je s*

$$T_{(1)}\left(\frac{x_1^{(1)} + x_1^{(2)}}{2}\right). \tag{26}$$

Uputa za dokaz. Prisjetimo se da je koordinata težišta (polovišta) dužine jednaka aritmetičkoj sredini koordinata njezinih krajeva.

Višedimenzionalni tetraedar i njegova tri svojstva

Sada ćemo heuristički iskazati tri teorema, koji su zapravo poopćenja iznesenih, a odnose se na n*-dimenzionalni tetraedar*. Dakle, to su tvorevine iz E^n, gdje je $n > 3$. Svakako, iz ovih teorema mogu se dobiti sve spomenute ako izvršimo specijalizacije za $n = 1, 2, 3$.

Napomena 7. Intuitivno znamo što bi sada značio uvjet nedegeneriranosti za sustav od $n+1$ točke (nikoje dvije nisu identične i nikoje tri ne leže na istom pravcu i nikoje četiri točke ne leže u istoj ravnini,..., i nikoje $n+1$ točke ne leže u n*-dimenzionalnoj ravnini*), pa ga nećemo strogo definirati, jer ionako izložene teoreme ne dokazujemo.

Teorem 10. *Točka $T_{(n)}$ unutar n-dimenzionalnog tetraedra čiji su vrhovi u točkama $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, gdje su ispunjeni uvjeti nedegeneriranosti, je njegovo težište onda i samo onda kada je produkt udaljenosti te točke od "strana" n-dimenzionalnog tetraedra maksimalan, dakle vrijedi*

$$(x_1 x_2 \ldots x_{n+1})_{\max} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} h_1 h_2 \ldots h_{n+1}. \tag{27}$$

Teorem 11. *U n-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^n postavljen je Kartezijev pravokutni koordinatni sustav $O(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dana je $n+1$ točka*

$$A_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), A_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}), \ldots, A_{n+1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_n^{(n+1)}),$$

gdje su ispunjeni uvjeti nedegeneriranosti. Te točke određuju n-dimenzionalni tetraedar, $T_1T_2 \ldots T_{n+1}$ čiji se volumen naziva volumen n-dimenzionalnog desnoorijentiranog tetraedra. Njegov volumen je dan pomoću determinante $(n+1)$-og reda

$$V_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \cdots & x_n^{(n+1)} \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Teorem 12. *Težište nedegeneriranog n-dimenzionalnog tetraedra* $T_1T_2\ldots T_{n+1}$ *dano je s*

$$T_{(n)}\left(\frac{x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+\ldots+x_1^{(n+1)}}{n+1},\frac{x_2^{(1)}+x_2^{(2)}+\ldots+x_2^{(n+1)}}{n+1},\ldots,\frac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\ldots+x_n^{(n+1)}}{n+1}\right) \tag{29}$$

ako su vrhovi u točkama

$$A_1(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}),A_2(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\ldots,x_n^{(2)}),\ldots,A_{n+1}(x_1^{(n+1)},x_2^{(n+1)},\ldots,x_n^{(n+1)}),$$

a one se nalaze u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^n*, gdje je postavljen Kartezijev pravokutni koordinatni sustav* $O(x_1,x_2,\ldots,x_n)$*.*

Napomena 8. Možemo reći, da je svrha ovoga članka da prezentira *heuristiku* (grč., znanost o metodama istraživanja novih spoznaja) ili *ars inveniendi* (lat., umijeće naslućivanja), koja ima veliku važnost u matematici, ali i u drugim naukama. Svakako, da teoremi (tvrdnje) u matematici dobiveni heurističkom metodom moraju biti potvrđeni još i strogim teorijskim dokazom, koji direktno ili indirektno slijedi iz postavljenih aksioma za konkretnu matematičku granu.

Međutim, zakoni u drugim naukama, osim u nekin granama fizike, se prihvaćaju pravovaljanima nakon konačnog broja empirijakih provjera. Tako npr. *klasična mehanika* ili *Newtonova mehanika* je izgrađena na tri aksioma, a ako se njima doda još *opći zakon gravitacije*, dobivamo mogućnost izgradnje *mehanike neba*, a njezinom primjenom možemo npr. precizno opisati staze prirodnih i umjetnih satelita. Recimo i to da uspostava klasične mehanike ne bi bila moguća, da se uvažavalo Aristotelovo tumačenje uzroka gibanja.

Također u fizici postoje zakoni, koji nisu proizašli iz aksiomatske postavke, a smatraju se valjanim jer su potvrđeni na bazi velikog broja pokusa. Taj princip potvrđivanja nekog svojstva ili pojave prihvaća se i u drugim naukama, ako te slutnje potvrdi veliki broj pokusa, jer druge metode i ne postoje.

Literatura

[1] Ilko Brnetić, *Nejednakosti među sredinama*, HMD, Zbornik radova (1. kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske), Zagreb 2000.

[2] Murray R. Spiegel, *Theoretical Mechanics*, Schaum's outline series, McGraw-Hill Book Company, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney.

[3] Boris Pavković, Branimir Dakić, Željko Hanjš, Petar Mladinić, *Male teme iz matematike*, HMD, Zagreb 1994.

[4] Petar Svirčević, *Konstrukcija težišta poligona i težišta njegovog ruba*, HMD, Zbornik radova (Šesti susret nastavnika matematike Republike Hrvatske), Zagreb 2002.

[5] Petar Svirčević, *Heuristika i višedimenzionalni tetredar*, Osječki matematički list, br. 6, Osijek 2006.

[6] *The Geometer's Sketchpad* (korišteni program za crteže).