

ФРАКТАЛИ: ДЕФИНИЦИЈА, КОНСТРУКЦИЈА, СВОЈСТВА И ПРИМЕНА

*Елена Хаџиева*¹

*Јован Петкоски*²

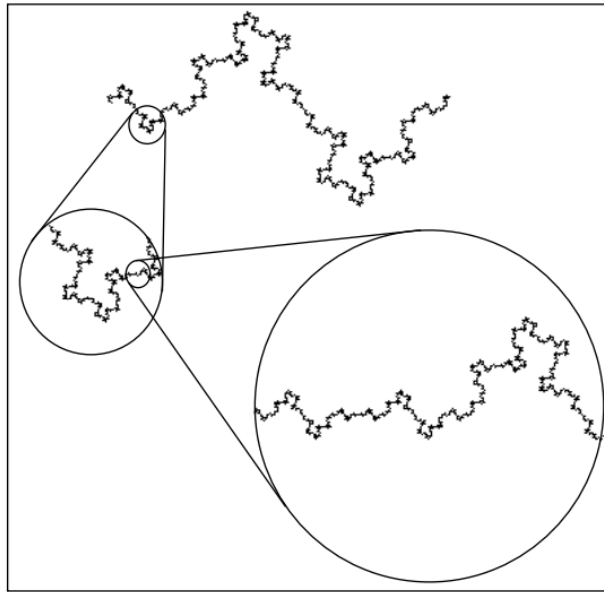
1. ВОВЕД

Една од воведните реченици на Манделброт, таткото на фракталната геометрија, во книгата [11] е: „Облаците не се сфери, планините не се конуси, крајбрежјето ниту е праволиниско, ниту кружно, крошните на дрвјата не се глатки, а ни светлината не патува по права линија.“ Со други зборови, природата сама по себе содржи комплексни форми кои не можат да бидат опишани со класичната Евклидска геометрија. Од тие причини, природно се јавила потребата од проширување на оваа геометрија со фрактална геометрија. Со фракталната геометрија се објаснуваат токму овие „неправилни“, комплексни, природни облици (Слика 1).



Слика 1. Неправилноста на природните објекти во контраст со правилноста на неприродните објекти (поглед од планината Галичица кон Преспанското Езеро).

Покрај самата комплексност, за овие форми е карактеристично и тоа дека степенот на нивната комплексност е иста независно од размерот во кој се набљудува објектот (Слика 2).



Слика 2. Илустрација на еднаквоста на степенот на коплексност кога објектот е гледан при различни размери ([4]).

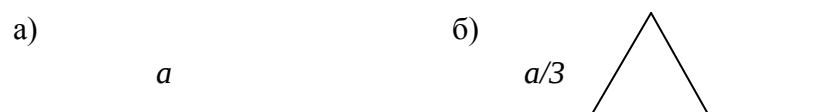
Манделброт, согледувајќи ја сличноста помеѓу сите овие облици, во 1975 година ги нарекол со едно име, „фрактали“, според латинскиот збор „fractus“, што значи скршен, искршен. Таа година се смета за почеток на фракталната геометрија, иако многу од нејзините концепти, алатки, примери и контрапримери биле развиени многу порано. Неодминливи предвесници на фракталната геометрија се Кантор (Georg Cantor), Пеано (Giuseppe Peano), Хилберт (David Hilbert), Вон Кох (Helge Von Koch), Серпински (Waclaw Sierpinski), Жулија (Gaston Julia), Хаусдорф (Felix Hausdorff), научници кои главно работеле кон крајот на 19 и почетокот на 20 век. Првите пет од гореспомнатите се изумители на исклучителните, патолошки примери во своето време, а денес типични фрактали: Канторовото множество, Пеановата крива, Хилбертовата крива, Коховата крива (но и Коховата снегулка), сунѓерот на Серпински. Овие примери, заедно со уште неколку чудни, невообичаени криви, често биле нарекувани „математички чудовишта“, бидејќи така и

во споредба со вообичаените некаде прекинати или непрекинати, некаде неглатки или глатки криви или површини ([14]). Улогата на останатите двајца научници во развојот на фракталната геометрија, ќе биде објаснета во поглавјата 3 и 6.

Подоцна, за горе спомнативе патолошки структури произлегло дека ја отсликуваат токму природата. На пример, ако го погледнете вашето тело обвиеено со непрекината надворешна површина - кожа, иако таа непрекината површина изгледа глатка, кога е погледната со микроскоп, може да се забележи дека има толку многу неправилности, што најверојатно е никаде диференцијабилна. Од друга страна, вештачки може да се произведе правилна, глатка, површина, на пример, железна топка – но колку правилни топки се среќаваат во природата? Колку вистински, глатки, конуси? Генерално, 2Д и 3Д формите кои се основни елементи од Евклидската геометрија, многу ретко се среќаваат во природата како такви.

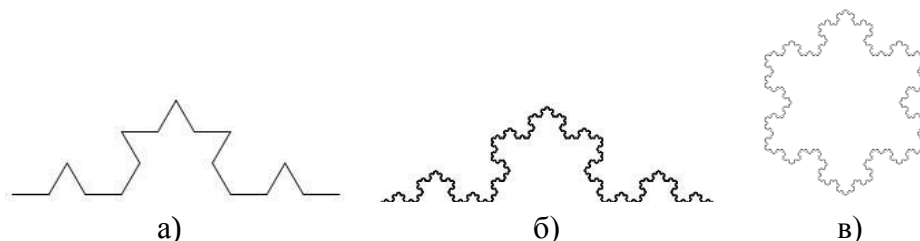
2. НЕКОИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ СВОЈСТВА НА ФРАКТАЛИТЕ

Во ова поглавје ќе бидат објаснети некои карактеристични својства на фракталите преку примерот на *Коховата крива* (Helge Von Koch 1870-1924). Да претпоставиме дека во отсечка со должина a средната третина од отсечката се заменува со две други отсечки – дел од рамностран триаголник, како што е прикажано на Сликата 3. Во оваа конструкција, отсечката се нарекува *иницијатор*, а искршената линија од Слика-та 3б), се нарекува *генератор* на Коховата крива.



Слика 3. а) Отсечка со должина a – иницијатор на Коховата крива
б) Средната третина од отсечката е заменета со двосегментниот триаголен облик – ова е генератор на Коховата крива

Потоа постапката на замена на средната третина со две отсечки продолжува со четирите отсечки од Сликата 3б). Се добива фигура како на Сликата 4а), итн. При итерирање на оваа постапка бесконечно многу пати се добива непрекинатата и никаде диференцијабилна крива, Коховата крива (види Слика 4б)). Доколку иницијаторот е рамностран триаголник, а генераторот е таков што секоја страна од триаголникот се заменува со искршената линија од Сликата 3б), се добива *Коховата снегулка* (Слика 4в)).



Слика 4. а) Втора итерација при конструкција на Коховата крива;
 б) Коховата крива (всушност ова е само 5-та итерација,
 но доволно да се почувствува обликот на Коховата крива);
 в) Кохова снегулка.

Интересно е да се разгледа периметарот на Коховата крива. Периметарот на секоја крива од итеративната постапка е редоследно:

$$a, \frac{4}{3}a, \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}a\right), \dots, \left(\frac{4}{3}\right)^n a, \dots,$$

односно, периметарот на Коховата крива, кој е гранична вредност на последната низа од периметри, е бесконечен. Уште поинтересно е дека периметарот помеѓу произволни две нејзини точки е повторно бесконечен. А Коховата снегулка, составена од три Кохови криви (Слика 4в)) исто така има бесконечен периметар, но зафаќа конечна плоштина. Конкретно, плоштината на фигурата ограничена со Коховата снегулка е $\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$.

3. ФРАКТАЛНИ ДИМЕНЗИИ

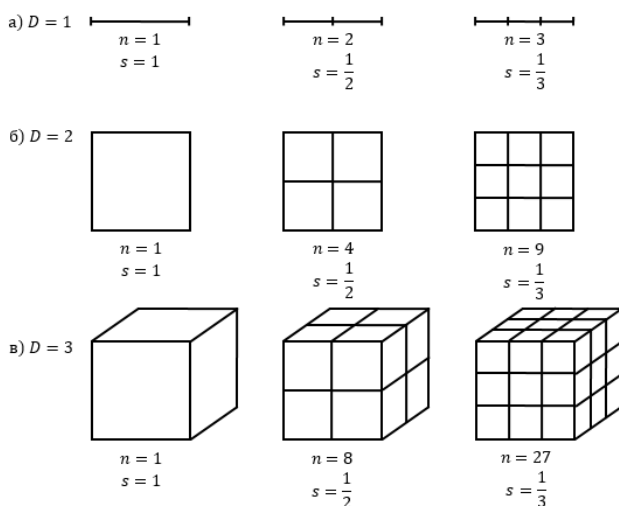
Иако Коховата снегулка има многу необични својства (никаде диференцијабилна крива со бесконечен периметар и зафаќа конечна

плоштина), таа има *тополошка димензија* (D_T) еднаква на 1. Со таква тополошка димензија, иста како и тополошката димензија на секоја глатка крива, очигледно било несоодветно да се окарактеризира оваа комплексна крива со толку испреплетувања (извивања). Затоа се јавила потреба од дефинирање нова димензија, која подобро ќе ги опишува „неправилните објекти“. Еден од наједноставните и најприродните начини на размислување при воведувањето нова димензија е опишан во следниов пасус.

Ако една отсечка со должина a се подели на n еднакви делови, тогаш секој дел може да се добие од целата отсечка со сличност (хомотетија) со коефициент на сличност $s = 1/n$. Ако пак, еден квадрат со страна a , се подели на n^2 помали квадрати со страна a/n , тогаш секој мал квадрат може да се добие од големиот со сличност со истиот коефициент, $s = 1/n$. Исто така, ако една коцка со страна a , се подели на n^3 помали коцки со страна a/n , тогаш секоја мала коцка може да се добие од големата со сличност повторно со коефициент $s = 1/n$. И во трите случаи важи формулата

$$N \cdot s^D = 1, \text{ односно } D = -\frac{\ln N}{\ln s} \quad (1)$$

каде што N е бројот на малите копии, а D е Евклидската димензија. На Сликата 5 се прикажани опишаните ситуации за $n = 1, 2, 3$ и $s = 1, 1/2, 1/3$, соодветно.



Слика 5. За трите случаи од сликава, а), б), в), важи равенството (1)

Ваквото размислување создало плодна почва за проширување на поимот димензија. На пример, кај Коховата крива, бројот $D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ го задоволува равенството (1), бидејќи тука $s = 1/3$, а $N = 4$. Оваа димензија е наречена *димензија на сличност*.

Покрај спомнатите, постојат уште неколку димензии, корисни за карактеризирање на „неправилните“ објекти: димензија на броење коцки, фрактална, Хаусдорфова (или Хаусдорф-Бесикович) димензија, димензија на Минковски, димензија на капацитет, информациска димензија,... Подолу ќе ги наведеме дефинициите на неколку поважни димензии.

Дефиниција 1. Нека е даден тополошкиот простор X . Нека C е покривка на X и нека C' е уситнување (анг. refinement) на C , што значи дека за секој $B \in C'$, постои $A \in C$, таков што $B \subset A$. Тополошкиот простор X има *тополошка димензија* n , ако за произволна покривка C постои уситнување C' , така што секоја точка од X се содржи во најмногу $n+1$ множество од C' и n е најмалиот таков број.

Дефиниција 2 ([5]). Нека F е произволно множество и нека $s > 0$. Бројот

$$D_H(F) = \inf\{s | H^s(F) = 0\} = \sup\{s | H^s(F) = \infty\},$$

каде што

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F), \quad H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : U_i \text{ е } \delta\text{-покривка на } F \right\},$$

се нарекува *Хаусдорфова димензија* или *Хаусдорф-Бесикович димензија* (*Hausdorff-Besicovitch*) на множеството F .

Дефиниција 3 ([1]). Нека е даден $\varepsilon > 0$. Нека $N(\varepsilon)$ е најмалиот број затворени (хипер) топки со радиус $\varepsilon > 0$ потребни за да се покрие множеството F . *Фрактална димензија* на множеството F е бројот

$$D(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln \varepsilon}. \quad (2)$$

Ако во претходната дефиниција, наместо (хипер)топки, се земат (хипер)коцки со раб $1/2^n$, тогаш фракталната димензија на множеството F , $D(F)$, е еднаква на бројот

$$D_B(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(n))}{\ln 2^n} \quad (3),$$

кој се нарекува *димензија на броење коцки* на множеството F . Овде $N(n)$ е најмалиот број (хипер)коцки со раб $1/2^n$ потребни за да се покрие множеството F .

Дефиниција 4. ([12]): Нека е дадена функцијата $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f_\tau(x) = \left| \max_{|x-t|<\tau} (f(t)) - \min_{|x-t|<\tau} (f(t)) \right|$$

е τ -осцилација на функцијата f во точката x , $x \in [a, b]$. τ -варијација на функцијата f на интервалот $[a, b]$ се дефинира како средна вредност на функцијата $f_\tau(x)$ на интервалот $[a, b]$, односно:

$$\text{VAR } f_\tau = \frac{1}{b-a} \int_a^b f_\tau(x) dx.$$

Димензијата на Минковски на графот на функцијата, се дефинира со формулата:

$$D_M(G_f) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\log \text{VAR } f_\tau}{\log \tau} \right)$$

Секоја од овие димензии имаат предности и мани. Некои се корисни само за криви, но не и за површини, некои се ограничени во поглед на тополошката димензија, некои се корисни само за вештачки произведени, но не и за природни фрактали, некои се лесни за пресметување, но не задоволуваат одредени пожелни својства кои треба да ги задоволува димензија на множество. Димензијата на сличност, како и димензијата на Минковски се дефинирани само за определен тип множества, додека тополошката, Хаусдорфовата, фракталната (а со тоа и димензијата на броење коцки) се дефинирани за секое множество. Хаусдорфовата е добро дефинирана димензија од математички аспект,

но тешка е за пресметување. Како што е докажано во [5] на стр. 118, при одредени услови Хаусдорфовата и фракталната димензија се исти, а и исти со димензијата на сличност (кога е задоволен условот за отворено множество и кога фракталот е самосличен, односно составен од конечен број намалени копии од самиот себе). Ова и слични својства и врски помеѓу димензиите помагаат во пресметувањето на некои димензии, а со тоа и во карактеризирањето на кривите.

Куриозитет. Крајбрежјата се сметаат за природни фрактални криви. (Поимот *природен фрактал* означува објекти од природата кои може да се претстават со фрактално множество. Поимот фрактално множество ќе биде дефиниран во наредното поглавје.) Доколку се мери должината на карпестото крајбрежје на езеро или море, има неколку начини за тоа. Еден од историски првите начини бил следниов: се разгледува мапа со одреден размер, се апроксимира крајбрежието со искршена линија составена од еднакви отсечки, се мери должината на искршената линија и се добива конечен резултат имајќи го предвид размерот. Притоа, се смета дека една искршена линија го апроксимира крајбрежјето ако отсечките на искршената линија се спојуваат на крајбрежната линија. Потоа, ако втор пат се апроксимира крајбрежјето со искршена линија составена од еднакви пократки отсечки, должината на искршената линија ќе биде поголема. Оваа постапка може да се продолжи при што се забележува дека со намалување на должината на отсечките, искршената линија станува сè поиспреплетена, а нејзината должина се зголемува, стремејќи се кон беконечност. Интересна е забелешката на Манделброт, изнесена на стр. 33 во [11], дека енциклопедиите на различни држави се разликуваат во податоците за должината на заедничките граници. Овие разлики се должат на различните аршини за мерење. На пример, го спомнува податокот дека Шпанија и Португалија даваат податоци за заедничката граница 987 km и 1214 km , соодветно. Или, пак, Холандија и Белгија даваат податоци 380 km и 449 km , соодветно. (Забелешка на авторите: Според сегашните податоци на Википедија, должината на границата помеѓу Шпанија и Португалија е 1214 km , а помеѓу Холандија и Белгија е 450 km .) За мерење на димензијата на крајбрежјата, постои уште една димензија, *димензија на*

периметар, $L(G)=MG^{1-D}$, каде што G е должина на отсечката, M е константа, а $L(G)$ е должина на брегот.

4. ДЕФИНИЦИЈА НА ПОИМОТ ФРАКТАЛ

Првпат Манделброт се обидел да го дефинира поимот фрактал во својот познат есеј [10] како подмножество од метрички простор, за кое Хаусдорфовата димензија е поголема од тополошката димензија, т.е. $D_H > D_T$.

Но, веќе во 1982 година, во [11] на стр. 362, Манделброт вели дека множеството наречено „ѓаволски скали“ секој интуитивно го смета за фрактал, иако за ова множество важи $D_H = D_T$ и дека кога ќе постојат добри причини за тоа, оваа дефиниција ќе мора да се смени. („Ѓаволските скали“ е график на функција $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$, која е константна на третините од Канторовото множество кои се отфрлаат.)

И следнава дефиниција, која исто така ја предлага Манделброт, а која се базира на тоа што Хаусдорфовата димензија, за разлика од тополошката, не мора да биде цел број, за брзо се отфрлила. Имено, според таа дефиниција, секое множество кое има нецелобројна Хаусдорфова димензија се сметало за фрактал. Но, типичниот фрактал, трагата од Брауново движење не ја задоволува оваа дефиниција, бидејќи има целобројна Хаусдорфова димензија, поточно $D_H=2$. (За овој фрактал пак, $D_T=1$, односно важи $D_H > D_T$).

И покрај наведените недостатоци и двете дефиниции на Манделброт одиграле значајна улога во развојот на поимот фрактал и сè уште се користат.

Согледувајќи ги недостатоците и размислувајќи дека каква и дефиниција да се даде, сигурно ќе има некое фрактално множество кое не ја задоволува, Фалконер навел описна дефиниција, која најверојатно е и најдобрата. Имено, тој го нарекува фрактал ([5]) секое множество кое:

- има фина структура (детална при произволен размер),
- има премногу неправилна форма за да може да се опише со јазикот на традиционалната геометрија, било глобално, било локално (не е ниту некакво геометриско место на точки, ниту пак множество решенија на некоја равенка),

- го поседува својството самосличност (вистински, приближно или статистички, целото множество е слично на своите делови).
- обично, „фракталната димензија“ на тоа множество (дефинирана на некој начин) е поголема од неговата тополошка димензија,
- во повеќето случаи, множеството е дефинирано на многу едноставен начин, најчесто рекурзивно.

5. КОНСТРУКЦИЈА НА КЛАСИЧНИТЕ ФРАКТАЛИ

Начинот на којшто погоре ја конструиравме Коховата крива, преку замена на средната третина со двете отсечки (или аналогните начини на конструкција на Канторовото множество, Пеановата или Хилбертовата крива, килимот на Серпински, сунѓерот на Серпински), е *геометриски начин* на конструкција на фрактали, преку иницијатор и генератор зададени геометриски. Со определување на пресликувањата кои иницијаторот го пресликуваат во генераторот, се доаѓа до уште два други начини за генерирање на фрактали, детерминистички и случаен. Ќе бидат изложени после неколку дефиниции и теореми.

Дефиниција 6. (Контрактивен) итеративен функциски систем (ИФС) се нарекува системот од конечен број контракции $w_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, n$, дефинирани на комплетниот метрички простор (X, d) , со фактори на контракција s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, соодветно. Неговиот *контрактивен фактор* е најголемиот помеѓу поединечните контрактивни фактори, а неговата ознака е: $F = \{X; w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

Теорема. ([1]) Нека $F = \{X; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ е контрактивен ИФС и нека $H(X)$ е просторот од компактни подмножества на X . Тогаш операторот $W_F : H(X) \rightarrow H(X)$ дефиниран со

$$W_F(B) = \bigcup_{i=1}^n w_i(B) \quad (4)$$

е исто така контракција во метричкиот простор $(H(X), h(d))$, каде што $h(d)$ е Хаусдорфова метрика индуцирана од метриката d .

Операторот W_F дефиниран со (4) се нарекува *Хачинсонов оператор (Hutchinson) соодветен на ИФС F* .

Може да се покаже дека $(H(X), h(d))$ е комплетен метрички простор (доказот може да се најде во [1] на стр. 37). W_F , како контракција дефинирана на комплетен метрички простор, има единствена фиксна точка, наречена *атрактор* на дадениот ИФС F ,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W_F^{\circ n}(B), \quad B \in H(X). \quad (5)$$

(Овде, $W_F^{\circ n}(B) = \underbrace{W_F \circ W_F \circ \dots \circ W_F}_{n \text{ пати}}(B)$). Од особен интерес е кога

фиксната точка на Хачинсоновиот оператор е фрактал (што најчесто се случува), иако може фиксната точка да биде и непрекината глатка крива или површина.

Директното користење на формулата (5) за конструкција на фрактал се нарекува *детерминистички начин на конструкција на фрактали (детерминистички алгоритам)*. На пример, на Сликата 3, се дадени

$B = \{\text{отсечка со должина } a\}$ (Слика 3а)), и $W_F(B) = \bigcup_{i=1}^4 w_i(B)$ (Слика 3б)),

каде што $F = \{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$, и

$$\begin{aligned} w_1([x, y]^T) &= \frac{1}{3}([x, y]^T); \\ w_2([x, y]^T) &= \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & \sin(-\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ w_3([x, y]^T) &= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/(2\sqrt{3}) \end{bmatrix}, \\ w_4([x, y]^T) &= \frac{1}{3}[x, y]^T + [2/3, 0]^T; \end{aligned}$$

Да забележиме дека: i) пресликувањето w_1 е хомотетија со коефициент $1/3$ и центар во левиот крај на отсечката; ii) w_2 е ротација за $\pi/3$ во насока спротивна од стрелката на часовникот и транслација за $1/3$ во

позитивната насока на x оската; *iii*) w_3 е ротација за $\pi/3$ во насока на стрелката на часовникот и транслација за вектор $[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}}]^T$; и *iv*) w_4 е хомотетија со коефициент $1/3$ и транслација за $2/3$ во позитивната насока на x оската.

На Сликата 4 а) и б) се дадени $W_F^{\circ 2}(B)$ и $W_F^{\circ 5}(B)$, соодветно. Граничната вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} W_F^{\circ n}(B)$ е Коховата крива.

Постои и *случаен начин за генерирање фрактали*, содржан во *алгоритмот со случајни итерации* (random iteration algorithm), исто така базиран на ИФС, а пресметковно многу поефикасен. Еве како функционира: на секое од пресликувањата w_i , $i = 1, 2, \dots, n$, од ИФС $F = \{X; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ му се придружува веројатност p_i , при што $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. (Со додадени веројатности, итеративниот функциски систем се нарекува *ИФС со веројатности*.) Потоа се одбира произволна точка од просторот X , x_0 , и се генерира низа $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$, така што настанот $x_m = w_i(x_{m-1})$ е со веројатност p_i , а настаните $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ се независни во целина. Под одредени услови (дадени со ергодичната теорема на Биркоф – Birkhoff's ergodic theorem), низата $\{x_m\}$ скоро секогаш конвергира кон атракторот на $F = \{X; w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Бројот на точки кој е доволен за да се генерира фрактален атрактор со фина структура е помеѓу 10^4 и 10^6 . Најчесто, првите 10-50 точки не се исцртуваат, бидејќи може да лежат надвор од атракторот.

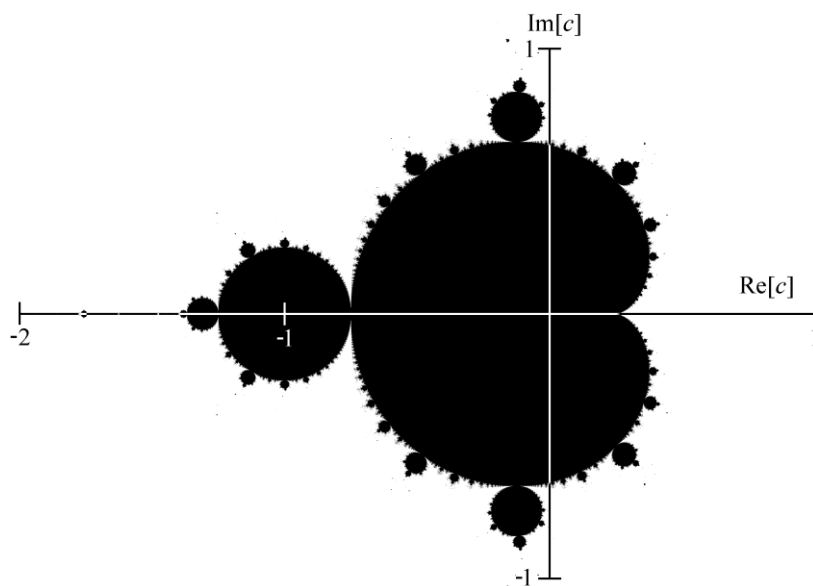
6. ДРУГИ ВИДОВИ ФРАКТАЛИ

Погоре опишаните фрактали се нарекуваат класични или ИФС фрактали. Постојат уште неколку видови видови фрактали, меѓу кои особено интересни се фракталите на Жулија и Манделброт. Жулија и Манделброт, за произволна константа c , ја разгледувале итеративната низа:

$$z_0 \text{ е произволен комплексен број, } z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Множеството на Манделброт е множество точки c во комплексната рамнина за кои итеративната низа (6), добиена за $z_0 = 0$

е ограничена. Се покажува дека ова множество е непразно. Прикажано е на Сликата 6.



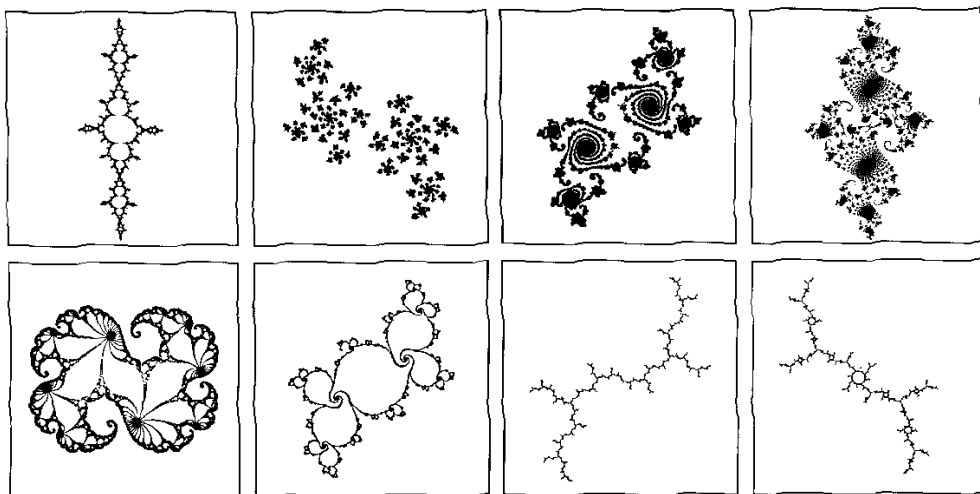
Слика 6. Множеството (фракталот) на Манделброт ([5])

За дадена функција f , неформалната дефиниција на *множеството на Жулија* е дека тоа е множество од комплексни вредности z , такви што мала промена на z ќе предизвика голема промена во итеративната низа

$$z, f(z), f(f(z)), \dots \quad (7)$$

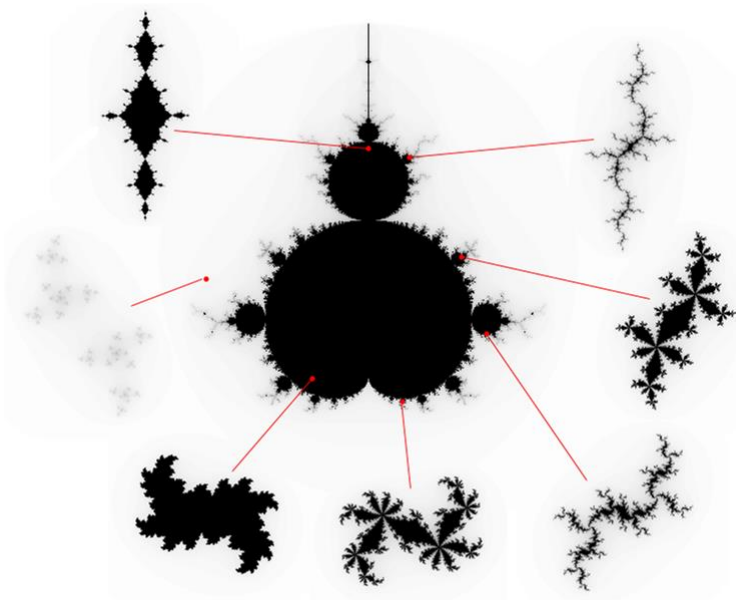
Самата дефиниција веќе потсека на хаотични карактеристики на множеството на Жулија. Најобработувана е квадратната функција $f_c(z) = z^2 + c$, за која итеративната низа (7) се сведува на низата (6) и патем, е една од најомилените функции на специјалистите за динамички системи. Се покажува дека ([5], стр. 198) множеството на Жулија е непразно и компактно.

Напоменуваме дека, за разлика од Манделброт множеството, во кое c се менува, овде c се фискира, а се менува z . За $c = 0$, множеството на Жулија е единичната кружница ([5], стр. 203). Но, за различни ненулни вредности на c , множествата на Жулија се различни фрактални слики (Слика 7).



Слика 7. Множества (фрактали) на Жулија, добиени за различни вредности на c ([17]).

Множеството на Манделброт се смета за еден вид „атлас“ на множествата на Жулија. На секоја точка од множеството на Манделброт ѝ соодветствува фрактал на Жулија. Шематскиот приказ е даден на Сликата 8.

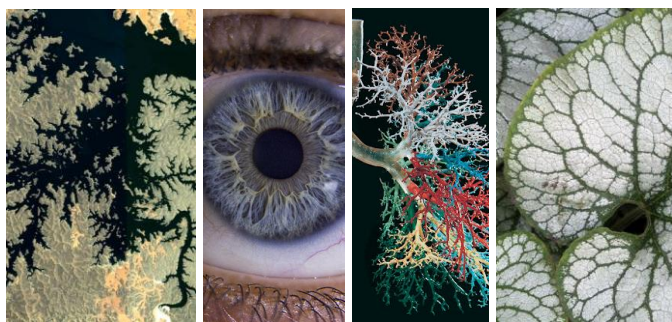


Слика 8. На секоја точка од множеството на Манделброт му одговара фрактал на Жулија ([8]).

Вреди да се спомене следниов историски факт. Гастон Жулија (1893 – 1978) имал само 25 години кога го објавил своето ремек дело на 199 страници во 1918, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* (прев. *Белешки за итерациите на рационалните функции*), што го направило познат во математичките кругови во тоа време ([13]). Иако за својата книга ја добил највисоката награда на Француската академија на науки и доживеал голема слава во дваесеттите години на XX век, неговата работа била заборавена сè додека Манделброт не ја извлекол од заборав кон крајот на седумдесеттите години. Со помош на компјутерската графика, Манделброт покажал дека книгата на Жулија е извор на некои од најубавите фрактали што се познати денес.

7. ПРИМЕНА НА ФРАКТАЛИТЕ ВО ДРУГИТЕ НАУКИ

Како карактеристични примери на природни фрактали во литературата се споменуваат: молња, ураган, галаксија, облаци, разгранетите бронхи, капиларните мрежи, фиксационото движење на очите ([18]), речните мрежи, коренските системи на одредени дрвја, различни растенија, карпестите предели, разиграните крајбрежја, и многу други природни феномени кои се разгрануваат до сè помали и помали гранки, се самослични, претпочитаат едноставност и ефикасност. На Сликата 9 може да се видат неколку фрактални форми од природата.



Слика 9. Фрактални облици од природата.

Инспирирани од стремежот на природата да формира облици на итеративен начин, инженерите користат идеи од фракталната геометрија во различни апликации кои имитираат природни неправилности. Примери може да се најдат во повеќе инженерски области: електроника, компјутерска графика, хемија, архитектура, моделирање на живот-

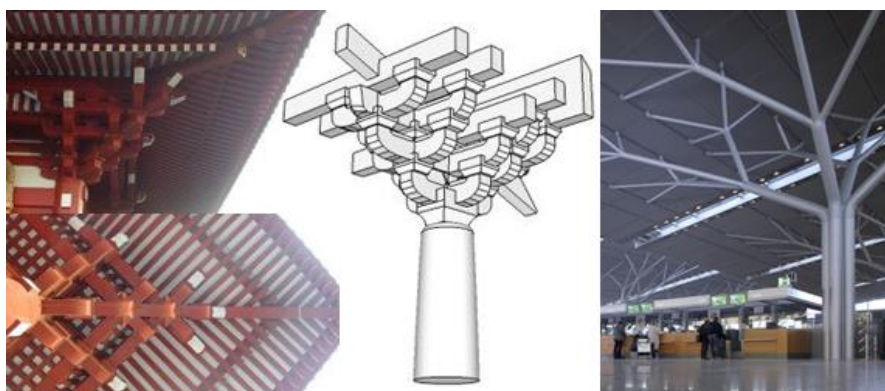
ната средина, како и во уметноста, медицината, музиката, урбанистичкото планирање и јавната политика.

Многу вештачки создадени ентитети при развојот на современата цивилизација, како што се транспортните мрежи и градови кои вертикално се прошируваат од долу нагоре, се чини дека се хиерархиски и високо само-слични ([2]). Пример за рана употреба на фрактални структурни елементи за да се минимизира товарот, е Ајфеловата кула, изградена со користење на еден вид метална прачка која се реплицира во различни големини низ кулата (Слика 10).



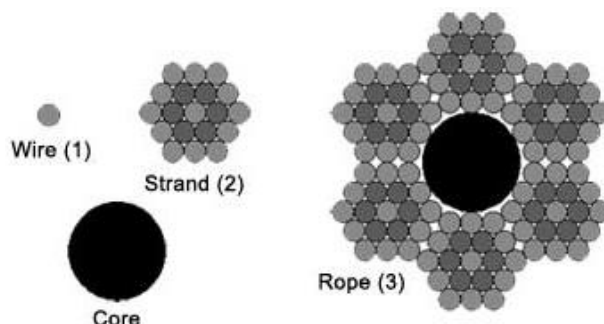
Слика 10. Фрактални форми во Ајфеловата кула ([9])

Разгранувачки структури во конструкција на столбови се појавиле во Кина уште пред околу 2000 години (Слика 11 лево и средина), а и некои фини дизајни на столбови сеуште можат да се видат на аеродромот во Штутгарт (Слика 11 десно).



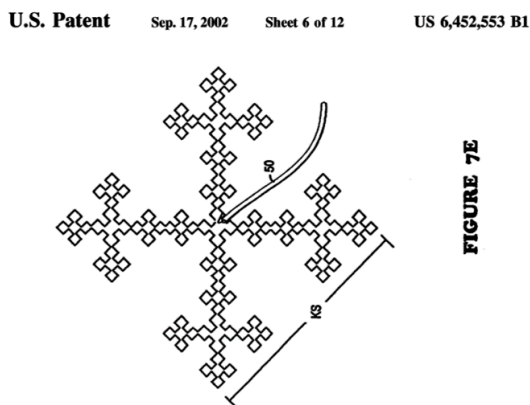
Слика 11. Фрактали во конструкција на столбови ([7]).

Технологијата за изработка на кабли е од суштинско значење во изградбата на висечки мостови. Повторлив процес може да се примени за да се создадат цврсти кабли кои користат фрактални шеми во пресекот (Слика 12).



Слика 12. Можна конфигурација на челичен кабел ([7]).

Најуспешната хардверска имплементација на фрактална геометрија се самослични дизајни на фрактални антени кои ја зголемуваат компактната при примање или пренесување на електромагнетно зрачење низ различни фреквенции (multi-band). Освен тоа, самата фрактална природа ја намалува нивната големина 2-4 пати (без користење индуктори или кондензатори), ги подобрува перформансите и им овозможува апликативност во мобилните телефони, микробранови комуникации во најсложени воени услови и тактички операции. Производители се компании како Fractenna во САД и Fractus во Европа. Пример за фрактална антена е просторно-пополнувачката крива наречена остров на Минковски (Minkowski island, Слика 13).



Слика 13. Фрактална антена наречена „Остров на Минковски“ ([6]).

Покрај тоа, фрактални форми може да се видат во имплементацијата на кондензатори, фрактални филтри, резонатори, отпорници, нанотехнолошки кола, системи за препознавање говор, системи за диференцијација меѓу природни и вештачки објекти ([19]), расејување топлина од електронски уреди итн.

Современата опрема за снимање (компјутерска томографија и магнетна резонанца) овозможува собирање огромно количество дигитални податоци за пациентот. Фракталната анализа може да помогне да се откријат болести во раните фази, да се опишат, квантифицираат и дијагностицираат ([15]). Најважна алатка на фракталната анализа е фракталната димензија, со која може да се разликуваат нормалните и абнормалните ткива. Како мерка за комплексност на објектите, фракталната димензија на абнормалните ткива, кои обично се згужвани и закоравени, е поголема, а кај мазните, нормални ткива, е помала. Се разбира, фракталната димензија е само еден од факторите кој помага во дијагностицирањето болести (најчесто рак). Но треба внимателно да се употребува, бидејќи постојат многу начини да се загрози математичката прецизност при оваа анализа ([8]).

Исто така, фрактална анализа во комбинација со други индикатори, во тековните трговски платформи овозможува анализи на акции кои претходно не биле возможни. Ова им помага на економистите да добијат подобар увид на берзите, кои се сè посложени, постојано се менуваат и приспособуваат и не се врзани со истите физички и геолошки ограничувања како природните катастрофи ([16]).

Поради нивниот природен изглед, фракталите стануваат екстремно популарни во областа на компјутерската графика, главно за текстурирани пејзажи, планински масиви, крајбрежја и други сложени терени за компјутерски игри или филмски сцени со детали на сите размери на набљудување ([3]).

На крај, да спомнеме дека фракталите имаат примена и во компресија на дигитални слики, врз основа на тезата дека фрагменти од сликата често личат на други делови од истата слика. Сликите се компресирани многу повеќе во споредба со најчесто користените алгоритми (JPEG или GIF формати) и тие во голема мера се имуни на проблемите со пикселирање кога се применува зум операција врз нив.

8. РЕЗИМЕ

По разбирањето на фракталите, погледот на светот е поинаков – на секој чекор се бараат и се препознаваат. Освен тоа, се вкоренува мислата дека во природата „неправилните“ форми се правило, а „правилните“ исклучок.

Различноста на фракталите од дотогаш анализираните геометрички форми, отворила пат за проширување на поимот димензија. Покрај Евклидската и тополошката, се дефинирале нови или добиле ново значење претходно дефинирани димензии, како што се Хаусдорф-Бесикович димензијата, фракталната, димензијата на броење коцки, димензијата на сличност. Нецелобројната фрактална или Хаусдорфова димензија, преку фракталите добила своја визуелизација. Покрај нецелобројна димензија, фракталите имаат и други карактеристични својства: доволно комплексен облик кој не може да се опише преку Евклидската геометрија, самосличност, комплексност при било кој размер и најчесто се дефинирани преку некој вид рекурзија.

Има повеќе видови фрактали, но најшироко распространети се класичните (или уште се нарекуваат ИФС фрактали) и фракталите на Жулија и Манделброт.

И природните, но и лабораториски добиените фрактали воодушевуваат со својата убавина и инспирираат примена во разни области: електроника, хемија, медицина, моделирање на животната средина, компјутерска графика, уметност, музика, економија, архитектура.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1993.
- [2] M. Batty, P. Longley, *Fractal Cities: A Geometry of Form and Function*, First Edition, Academic Press, 1994.
- [3] C. A. Boiangiu, A. G. Morosan, M. Stan, *A Fractal World: Building Visually-Rich and Fully-Realistic Natural Environments*, International Journal of Mathematics and Computers in Simulation, Volume 10, North Atlantic University Union, 2016, 100 – 111.

- [4] D. M. Boje, Ph. D. (лична интернет-страница),
http://davidboje.com/images/fractal_scalability.png
- [5] K. J. Falconer, *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 2002.
- [6] Fractal antennas and fractal resonators US 6452553 B1,
<https://www.google.com/patents/US6452553>
- [7] Fractal Foundation, <http://fractalfoundation.org>
- [8] E. Hadzieva, D. C. Bogatinoska, M. Shuminoska, R. Petroski, *On the reliability of the Fractal Dimension as a Scalar Characteristic of the Medical Images' Contours*, WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine, Volume 14, 2017, 19 – 28.
- [9] J. S. Howard Photography, *Europe Black & White*,
<https://archive.jshowardphotography.com/index>
- [10] B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W. H. Freeman & Co., 1977.
- [11] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, 1982.
- [12] P. Maragos, *Fractal signal analysis using mathematical morphology*, Advances in Electronics and Electron Physics, Academic Press, vol. 88, 1994, 199 – 246.
- [13] H.-O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer-Verlag New York, 2004.
- [14] H.-O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe, *Fractals for the Classroom: Part One Introduction to Fractals and Chaos*, Springer-Verlag New York, 1992.
- [15] C. Schmidt, *The Gompertzian View: Norton Honored for Role in Establishing Cancer Treatment Approach*, JNCI: Journal of the National Cancer Institute, Volume 96, Issue 20, Oxford University Press, 2004, 1492 – 1493.
- [16] ScienceDaily, American Institute Of Physics, *Earth Scientists Use Fractals To Measure And Predict Natural Disasters*,
<https://www.sciencedaily.com/releases/2002/01/020131073853.htm>

- [17] Simon Fraser University, *Some Julia Sets*,
<http://www.sfu.ca/~rpyke/335/juliasets.html>
- [18] US National Library of Medicine, H. Namazi, V. V. Kulish, A. Akrami, *The analysis of the influence of fractal structure of stimuli on fractal dynamics in fixational eye movements and EEG signal*, Scientific Reports 6 (2016):26639. doi:10.1038/srep26639,
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4877595>
- [19] Y. I. Khan, *Applications of Dynamical Systems in Engineering*,
<http://vixra.org/pdf/1304.0093v1.pdf>

¹ Универзитет „Св. Апостол Павле“,
Факултет за информациски системи, визуелизација,
мултимедија и анимација,
Партизанска бб, Охрид, Македонија
e-mail: elena.hadzieva@uist.edu.mk

² Универзитет „Св. Апостол Павле“,
Факултет за компјутерски науки и инженерство,
Партизанска бб, Охрид, Македонија
e-mail: jovan.petkoski@cse.uist.edu.mk

Примен: 03. 02. 2018

Поправен: 09. 03. 2018

Одобрен: 12. 03. 2018

Објавен на интернет: 28.08.2018