БРАНКО ТРПЕНОВСКИ
НАУМ ЦЕЛАКОСКИ
ЃОРЃИ ЧУПОНА

ВИША МАТЕМАТИКА

КНИГА I

— ФУНКЦИИ —

УНИВЕРЗИТЕТСКИ
УЧЕБНИК

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ, 1995

Уредник:
Кирил ***Милчев***

Рецензенти:
Д-р Пано ***Крҗовски,*** *редовен професор на Машинскиот факултет – Скопје*

Д-р Кирил ***Стојменовски,*** *редовен професор на Технолошко-металуршкиот факултет – Скопје*

Со Одлука на Наставно-научниот совет на Машинскиот факултет во Скопје под број 08-152/1 од 21.01.1992 година се одобрува употребата на оваа книга како основен универзитетски учебник

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е првата од четирите книги[1)] со заеднички наслов „Виша математика". Во нив целосно се обработуваат наставните содржини што се предвидени со наставните програми од математичките предмети на Машинскиот факултет во Скопје, освен делот за диференцијални равенки. Целокупниот материјал (во четирите книги) е поделен на десет глави, со следниве наслови:

Кн. I:	Гл. I.	Функции
Кн. II:	Гл. II.	Изводи
	Гл. III.	Интеграли
Кн. III:	Гл. IV.	Аналитична геометрија во простор
	Гл. V.	Диференцијално сметање на функциите од повеќе променливи
	Гл. VI.	Интеграли на функциите од повеќе променливи
Кн. IV:	Гл. VII.	Линеарна алгебра
	Гл. VIII.	Редови
	Гл. IX.	Комплексни функции
	Гл. X.	Метрични простори

Материјалот што ја сочинува првата книга е распореден во 5 параграфи, секој од кои е поделен на 6-12 раздели. Првиот параграф, „За јазикот на математиката“, е предвиден да му овозможи на читателот активно повторување и проширување на дел од материјалот по математика, пред сè по алгебра, од средно училиште. Читателот може веднаш да премине на вториот параграф (ако има доволно предзнаења) или набрзина да го прочита материјалот, и тоа само оној дел што не е печатен со „петит“, а подоцна, по потреба или по желба, може повремено да консултира делови од овој параграф.

И во наредните два параграфа ќе се сретнат познати факти во врска со основните поими за функциите и, специјално, за елементарните функции, па и за тие параграфи важи горната препорака

---

1) Од технички причини, првата книга излегува од печат последна; втората книга е отпечатена во 1993 година, четвртата – во јули 1994, а третата – во декември 1994.

(за „прескокнување“). Што се однесува до четвртиот и петтиот параграф, во кои се изучуваат конвергентните низи од реални броеви, границите и непрекинатите функции, препорачуваме тој материјал да биде детално изучен.

Секој раздел завршува со задачи за вежбање, кои што треба да послужат за утврдување на поминатиот теориски дел од материјалот, а на крајот од главата се поместени и 130 задачи за повторување. Речиси сите тие се снабдени со одговори, а некои од нив и со упатство (т.е. *помош*) во делот I.7. Задачите во книгава се доволни за подготвување на соодветниот дел од испитот, но секако е добро да се консултираат соодветни збирки задачи, па и други учебници.

Во дел од вежбите ќе се сретнат и нови сведенија или пошироки информации. Таквите задачи што авторите ги сметаат за потешки се означени со ѕвездичка (како, на пример, вежбата 10* од **4.9**); читателот може тие задачи да ги остави и нерешени, но и во тој случај му препорачуваме да го прочита барем текстот на соодветната вежба.

На крајот од книгава е приложен список на книгите што се користени повеќе или помалку, како и показател на поими, имиња и теореми.

Повикувањата во текстот се вообичаени. На пример,Т.2 од **4.3** означува: Втората теорема од третиот раздел во четвртиот параграф. (Ако се врши повикување на резултат што се наоѓа во некоја од другите три книги „Виша математика“, тогаш се наведува и редниот број на соодветната глава. На пример, II.2.6 значи: шестиот раздел од вториот параграф на втората глава.)

Книгава е наменета, пред сè, за студентите од Машинскиот факултет во Скопје, но веруваме дека ќе им биде од полза и на студенти од други факултети во кои се изучува математиката.

Ја користиме можноста на ова место да им изразиме благодарност на голем број субјекти што овозможија да се појави делото „Виша математика“ (во четири книги). Тоа се, во прв ред, издавачот, којшто најде начин да го вклучи и ова дело во својот издавачки план, и спонзорите (наведени во третата книга) што ја потпомогнаа графичката подготовка на третата и четвртата книга, а потоа: учесниците во компјутерската обработка на сите четири книги, уредниците и илустраторите, како и рецензентите за нивните корисни сугестии.

Скопје, јануари 1995 Авторите

СОДРЖИНА

Предговор iii

I. ФУНКЦИИ

I.1. ЗА ЈАЗИКОТ НА МАТЕМАТИКАТА 1
- 1.1. Множества 1
- 1.2. Искази 8
- 1.3. Пресликувања 15
- 1.4. Структура на природните броеви 22
- 1.5. Интегрален домен на целите броеви 29
- 1.6. Поле на рационалните броеви 35
- 1.7. Подредени полиња 40
- 1.8. Поле на реалните броеви 46
- 1.9. Десетични дропки 55
- 1.10. Корени и логаритми 60
- 1.11. Неколку примени на принципот на математичката индукција 65
- 1.12. Координатни системи 69

I.2. ОСНОВНИ ПОИМИ ЗА ФУНКЦИИТЕ 79
- 2.1. Реална функција од една реална променлива 79
- 2.2. График на функција 85
- 2.3. Операции со функции 93
- 2.4. Монотоност 99
- 2.5. Ограниченост и екстреми 103
- 2.6. Инверзни функции 112
- 2.7. Функции од повеќе реални аргументи. Имплицитни функции 118
- 2.8.* Многузначни функции 121

I.3. ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ 127
- 3.1. Полиномни функции 127
- 3.2. Рационални функции 139
- 3.3. Тригонометриски функции 144
- 3.4. Инверзни тригонометриски функции 151

3.5. Хиперболични функции 156
3.6. Елементарни функции 159

I.4. НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ 165
4.1. Дефиниција на низа. Ограниченост и монотоност 165
4.2. Конвергентни низи 169
4.3. Некои својства на конвергентните низи 172
4.4. Бројот е 175
4.5. Операции со конвергентни низи 177
4.6. Низи што неограничено растат по апсолутна вредност 181
4.7. Некои специјални низи 184
4.8. Теоремата на Болцано-Вајерштрас 188
4.9. Основен Кошиев критериум 191

I.5. ГРАНИЦИ И НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИИ 195
5.1. Граници на функции 195
5.2. $(\varepsilon - \delta)$ – карактеризација на граница 199
5.3. Непрекинатост на функции 203
5.4. Граници и непрекинатост на сложени функции 207
5.5. Обопштени граници 211
5.6. Функции непрекинати во интервал 223
5.7. Точки на прекин 227
5.8. Конструкција на графици 231
5.9. Нарасиување на функција 235

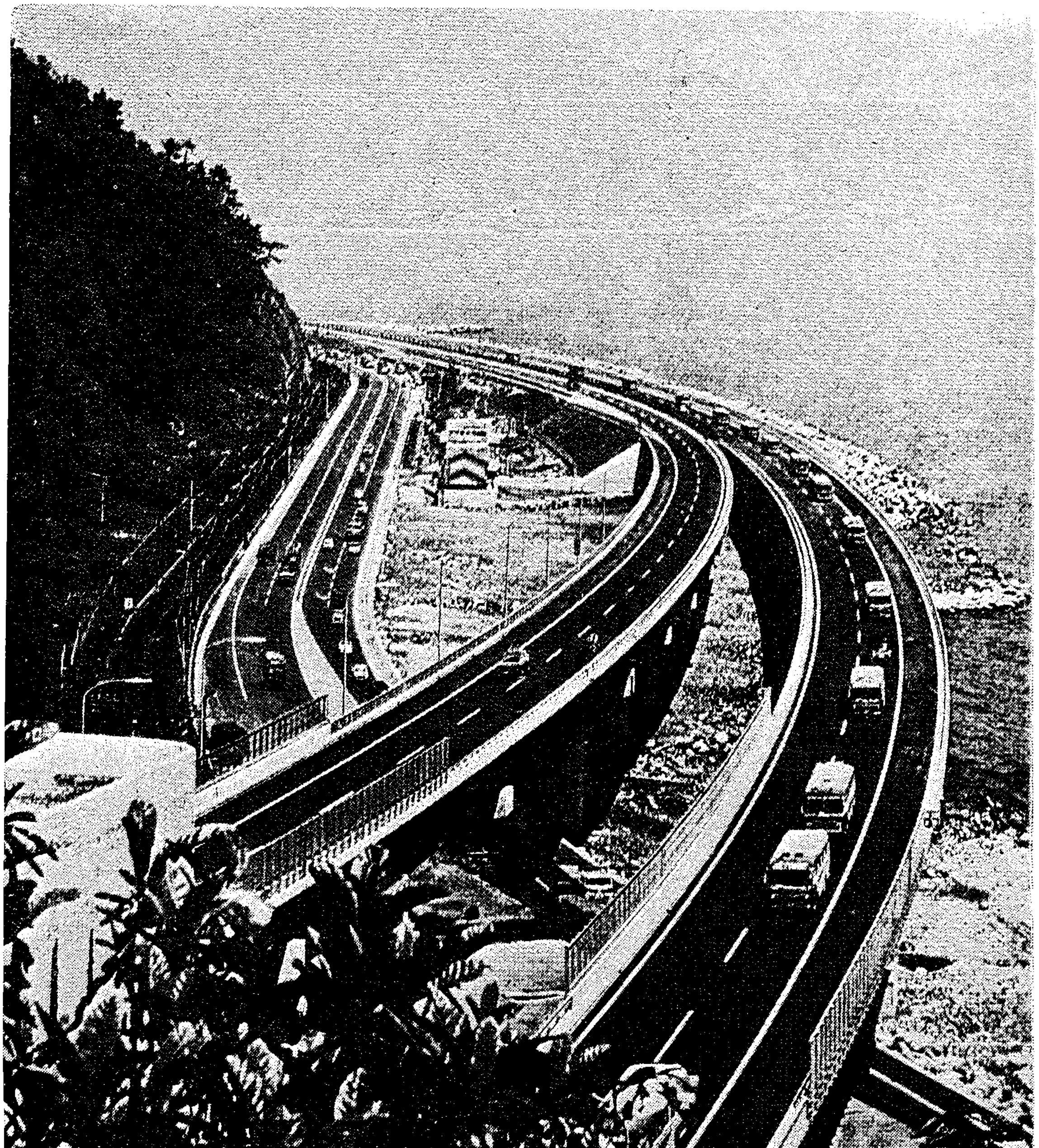
I.6. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ 237

I.7. ОДГОВОРИ И УПАТСТВА 245

ЛИТЕРАТУРА 275

ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ, ИМИЊА И ТЕОРЕМИ 276

ФУНКЦИИ



I. ФУНКЦИИ

Предмет на оваа глава се реалните функции од една реална променлива. Првите три параграфи се наменети за повторување, проширување и заокружување на (за читателот) познат материјал од порано. Последните два параграфа, во кои се изучуваат низите од реалните броеви, границите и непрекинатоста на функциите, претставуваат, меѓу другото, подготовка за изучување на поголемиот дел од материјалот во наредните глави.

I. 1. ЗА ЈАЗИКОТ НА МАТЕМАТИКАТА

1.1. Множества

Науките се одликуваат по природата на објектите што се предмет на изучување. Притоа, скоро на секој објект (од каква било природа) му се придружува реален број, како негова мера. Множествата броеви, пак, се главни објекти на изучување на математиката. Пред сé, тоа е множеството

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

од природни броеви, т.е. позитивни цели броеви. Ако на $\mathbb{N}$ му ја додадеме нулата и негативните цели броеви, го добиваме множеството

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{\ldots, -m-1, -m, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, n+1,, \ldots\} \\ &= \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}\end{aligned}$$

од цели броеви. Рационален број е количник од два цели броја, при што нулата не смее да се појави како именител. Множеството од сите рационални броеви се означува со $\mathbb{Q}$, т.е.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

(Притоа, ако $ad=bc$, тогаш $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, а и обратно; потоа $\frac{a}{1} = a$, за секој $a \in \mathbb{Z}$.)

Рационалните броеви се доволни за „обичниот живот", но ако се сака, на пример, секоја отсечка да има свој мерен број (при избрана единична отсечка), потребно е да ги вклучиме и ирационалните броеви, какви што се, на пример, $\sqrt{2}$ (=мерен број на дијагоналата на квадратот со страна 1), π (=должината на кружницата со пречник 1), а и безброј многу други. Така го добиваме множеството $\mathbb{R}$ чии елементи се реални броеви. Според тоа, еден број е реален ако е рационален или ирационален. Како што покажува и насловот на книгава, реалните броеви (односно функциите од една реална променлива) се главен предмет на нејзино изучување. Сепак, да спомeнеме дека ако сакаме секоја равенка од втор степен да има решение [1)], неопходно е ново (пошироко) множество броеви, а тоа е множеството $\mathbb{C}$ од комплексни броеви, дефинирано со:

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(Притоа, $i^2 = -1$,т.е. i е *имагинарнаша единица*.)

Секое од спомeнатите множества броеви е бесконечно, но лесно добиваме и конечни множества броеви. На пример, ако A е множеството природни броеви што не се поголеми од девет, тогаш $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Буквите од, да речеме, првата реченица на овој дел формираат друго конечно множество:

$$\begin{aligned} B = \{&н, а, у, к, и, \bar{ш}, е, с, е, о, д, л, и, к, у, в, а, а, \bar{ш}, \bar{и}, о, \bar{и}, р, и, \\ &р, о, д, а, \bar{ш}, а, н, а, о, б, ј, е, к, \bar{ш}, и, \bar{ш}, е, ш, \bar{ш}, о, с, е, \bar{и}, р, \\ &е, д, м, е, \bar{ш}, н, а, и, з, у, ч, у, в, а, њ, е\} \\ = \{&а, б, в, д, е, з, и, ј, к, л, м, н, њ, о, \bar{и}, р, с, \bar{ш}, у, ч, ш\}. \end{aligned}$$

1) Според основната теорема на алгебрата, во $\mathbb{C}$ има решение секоја равенка од степен n, при кој било $n \geq 1$ (в. Т. 9 од **3.1**).

Потребно е да дадеме неколку објасненија за ознаките што ги употребивме досега, како и за ознаките што ќе бидат користени натаму.

Пред сè, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (секаде во книгава) ќе се користат како ознаки за множествата од: *природните, целите, рационалните, реалните, комплексните броеви* – соодветно. Потоа, симболите за загради, а и запирките што се наоѓаат на десните страни, не се елементи на соодветните множества A, B. Во дефиницијата на $\mathbb{Q}$ првпат е користен симболот „$\in$" (а тоа е, имено, грчката буква „епсилон") како кратенка за изразот „*припаѓа на*", или, што е исто, „*е елемент на*". Симболот „$\in$" ќе се употребува со тоа значење во целава книга, а соодветната негација ќе се означува со $\notin$. На пример, точни се следниве тврдења:

$$0 \notin \mathbb{N}, \quad -1 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Да се вратиме на множеството B дефинирано како множество чии елементи се буквите од првата реченица. Гледаме дека првата верзија на десната страна е, всушност, споменатата реченица, со тоа што се употребени и загради и запирки, а се изоставени „празнините", исто така, големата буква „*Н*" е заменета со мала „*н*". Во втората верзија, елементите на B се по азбучен редослед, а изоставена е информацијата за бројот и редоследот на појавување на соодветната буква во реченицата. И во иднина, ќе сметаме дека се точни равенства од обликот:

$$\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,2,1\} = \{2,1,1,2,1,2\}.$$

Како ознаки за множества често ќе ги користиме големите букви од латиницата, а за нивни елементи малите букви, но ќе употребуваме и други симболи. (Треба да се има на ум дека „N" не е исто со „$\mathbb{N}$", т.е. дека $\mathbb{N}$ е секогаш ознака за множеството од природните броеви, а со N може да биде означено кое било множество.)

Две множества S и T се ***еднакви*** ако се состојат од исти елементи, т.е. ако S и T се различни ознаки за исто множество. Во тој случај пишуваме $S{=}T$. (Со ова значење е употребен симболот „=" на неколку места погоре.)

Ако секој елемент на M е елемент и на N, но постои елемент од N што не е во M, велиме дека M е ***вистинско подмножество*** од N; тоа го означуваме со $M \subset N$.

Според тоа, на пример, $\{1,2\}$ е вистинско подмножество на секое од множествата: $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Исто така: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. Но, $\{1,2\}$ не е вистинско подмножество на ниедно од множествата $\{1, 2\}$, $\{0, 2, 3\}$.

Поимот подмножество е поопшт од поимот вистинско подмножество. Имено, ако секој елемент од M е елемент и од N, пишуваме $M\subseteq N$ и велиме дека M е ***подмножество*** N. Според тоа:

$$M \subseteq N \text{ акко } (M \subset N \text{ или } M = N).$$

Притоа „***акко***“ е кратенка за „***ако и само ако***“, а зборот „или“ го има обичното значење.

Велиме дека $\subset$ и $\subseteq$ се ***релации за инклузија***.

Негациите на $\subset$, $\subseteq$, $=$, ќе ги означуваме со: $\not\subset$, $\not\subseteq$, $\neq$, соодветно.

Примерите на множествата $\{1,2\}$, $\{1\}$ (со два, односно еден елемент), укажуваат на тоа дека во едно множество не мора да има „многу“ елементи. Се покажува корисно да се допушти егзистенција и на „множество без елементи“, т.е. на ***празно множество***, $\varnothing$. Притоа, ќе сметаме дека ова множество е еднозначно определено и дека е подмножество од секое множество, а вистинско подмножество од секое непразно множество.

При дадени множества M и N се формираат нови множества: $M\cap N$, $M\cup N$, $M\setminus N$, $M\times N$, определени како што следува:

$M\cap N$ е ***пресек*** на M и N, а се состои од елементите што се заеднички за M и N (ако $M\cap N=\varnothing$, тогаш за M и N се вели дека се ***дисјунктни***);

$M\cup N$ е ***унија*** на M и N, а елементи на ова множество се објектите што припаѓат барем на едно од множествата M и N;

$M\setminus N$ е ***разлика*** на M со N и се состои од елементите на M што не му припаѓаат на N;

$M\times N$ е ***директен производ*** на M и N и се состои од сите подредени двојки (x, y), каде што $x\in M$, $y\in N$. (Притоа, $(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$ акко $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.)

Така, ако $M=\{1, 2, 3, 4\}$, $N=\{3, 4, 5\}$, тогаш:

$$M\cap N=\{3, 4\},\ M\cup N=\{1, 2, 3, 4, 5\},\ M\setminus N=\{1, 2\},\ N\setminus M=\{5\};$$

$M{\times}N=\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5),$
$(4, 3), (4, 4), (4, 5)\};$

$N{\times}M=\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}.$

Гледаме дека $M\cap N=N\cap M$, $M\cup N=N\cup M$, но $M\setminus N\neq N\setminus M$ и $M\times N\neq N\times M$. Во вежбите **4**, **5** ќе видиме дека овие равенства, и неравенства, не се случајни, т.е. дека тие имаат поопшт карактер.

Партитивно множество $\mathcal{P}(M)$ на едно множество M е множеството чии елементи се подмножествата на M. Така, ако N е определено како погоре, имаме:

$$\mathcal{P}(N)=\{\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}.$$

Од дадената дефиниција е јасно дека $\varnothing\in\mathcal{P}(M)$ и $M\in\mathcal{P}(M)$, за секое множество M. На пример, $\mathcal{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$ е едноелементно множество. Според тоа, $\varnothing\neq\{\varnothing\}$.

Ќе се задоволиме со направеното кратко повторување за множествата, а уште неколку својства ќе бидат изнесени во вежбите.

Напоменуваме дека на множествата броеви $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ ќе им бидат посветени посебни делови од овој параграф, но и пред тоа ние ќе ги користиме нив (и некои нивни својства) при илустрирањето на соодветни поими.

Ќе го дефинираме и поимот релација во дадено множество. Имено, ако M е непразно множество, тогаш секое подмножество α од $M{\times}M=M^2$ се вика ***релација во*** M. (Попрецизно е да се рече дека релација во M е секој подреден пар $(M;\, \alpha)$, каде што $\alpha\subseteq M^2$. Притоа, M се вика ***носител***, а α ***график*** на релацијата. Две релации се ***еднакви*** акко имаат еднакви носители и графици. Сепак, обично ќе биде јасно за каков носител се работи, па затоа нема да правиме разлика меѓу една релација и нејзиниот график.)

Ако α е релација во M, наместо $(a, b)\in\alpha$ се пишува $a\alpha b$, а, во таа смисла, и $a\bar{\alpha}b$ наместо $(a, b)\notin\alpha$.

Ќе спомeнеме неколку видови релации, при што ќе се смета дека M е носител на соодветната релација.

1) α е ***рефлексивна*** акко $x\alpha x$, за секој $x\in M$.

2) α е ***нерефлексивна*** акко $x\bar{\alpha}x$, за секој $x\in M$.

3) α е ***симетрична*** акко од $x\alpha y$ следува $y\alpha x$, за секои $x, y\in M$.

4) α е ***антисиметрична*** акко за секој пар $(x, y)\in M^2$ таков што $x\neq y$, важи: $x\bar{\alpha}y$ или $y\bar{\alpha}x$. (Со други зборови, ако $x\alpha y$ и $y\alpha x$, тогаш $y=x$.)

5) α е ***транзитивна*** акко од $x\alpha y$ и $y\alpha z$ следува $x\alpha z$, за секои $x, y, z\in M$.

6) α е ***еквивалентност*** во M акко е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

7) α е ***подредување*** во M акко е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна релација во M, таква што:

$$(\forall x, y\in M)\ (x\alpha y \vee y\alpha x). \qquad (*)$$

8) α е ***строго*** (или ***стриктно***) ***подредување*** во M акко е нерефлексивна и транзитивна релација во M, таква што за секои $x, y\in M$ еден и само еден од следниве услови е исполнет:

$$x\alpha y, \quad x=y, \quad y\alpha x. \qquad (**)$$

Да забележеме дека теоријата на релациите е важен дел од математиката, но содржината на книгава не дозволува детално изучување на оваа проблематика. Ќе се задоволиме само со забелешката дека во одделот за рационални броеви ќе се сретнеме со релации за еквивалентност, а кај подредени полиња – со релации за подредување.

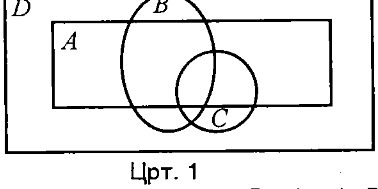
ВЕЖБИ

1. Нека A, B, C се множества. Да се покаже дека:

а) Ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, тогаш $A\subseteq C$;

б) Ако $A\subseteq B$ и $B\subset C$, тогаш $A\subset C$;

в) Ако $A\subset B$ и $B\subset C$, тогаш $A\subset C$.



Црт. 1

2. Да се најде односот меѓу множествата A, B, C, D, ако:

а) $A=\{a, b\}$, $B=\{a, b, x\}$, $C=\{a, c, x\}$, $D=\{a, b, c, x\}$;

б) A, B, C, D се како на црт. 1.

3. Нека $A=\{1, 2, x\}$, $B=\{x, y\}$. Да се одредат:
$A\cup B$; $A\cap B$; $A\backslash B$; $B\backslash A$; $A\times B$; $B\times B$; $\mathcal{P}(A)$.

4. Нека множествата A, B, C, D се определени како на црт.1. Да се покаже дека се точни равенствата:

а) $A \cap A = A \cup A = A$; б) $A \cap B = B \cap A$;

в) $A \cup B = B \cup A$; г) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

д) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$;

ѓ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

е) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5. Да се докаже дека равенствата а) – е) од вежбата 4 се точни за кои било множества. (Притоа, A, B, C овде треба да се сметаат за подмножества на некое множество M.)

6. Каков облик добиваат равенствата а) –е) од вежбата 4, ако се стави XY наместо $X \cap Y$, а $X+Y$ наместо $X \cup Y$?

7. Да се докаже дека:

$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

8. Да се докаже дека:

а) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$; б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

в) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

9. Да се покаже дека:

а) $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$; б) $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$.

10. Ако $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 3, 4, 5\}$, да се определат сите множества X, такви што:

а) $A \cup X = B$; б) $A \cup X = C$; в) $B \cap X = A$;

г) $C \cap X = A$; д) $X \setminus A = C$; ѓ) $B \setminus X = C$.

11. Какви треба да се множествата A и B за да постои множество X, такво што:

а) $A \cup X = B$; б) $A \cap X = B$; в) $A \setminus X = B$; г) $X \setminus A = B$?

12. Да се дадат примери на множества A, B, C, такви што:

а) $A \cap B = A \cap C$, $B \neq C$; б) $A \cup B = A \cup C$, $B \neq C$;

13. Да се покаже дека, ако A, B и C се множества, такви што: $A \cap C = B \cap C$, $A \cup C = B \cup C$, тогаш $A = B$. Дали овој резултат е противречен на резултатите од претходната вежба?

14. Да се испитаат својствата на релациите α, β, γ, δ и ρ во множеството $M=\{a, b, c, d\}$, определени со:

$\alpha = \{(a, b), (b, c), (b, a)\}$, $\beta = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$, $\gamma = \{(a, b), (b, a)\}$,

$\delta = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$,

$\rho = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, c), (a, d), (b, d)\}$.

15. Да се покаже дека: а) Ако α е подредување во M и α_* е дефинирана со: $x\alpha_* y$ акко ($x\alpha y$ и $x \neq y$), тогаш α_* е стриктно подредување во M.

б) Ако β е стриктно подредување во M и β^* е дефинирана со: $x\beta^*y$ акко ($x\beta y$ или $x=y$), тогаш β^* е подредување во M.

в) $(\alpha_*)^* = \alpha$, $(\beta^*)_* = \beta$, каде што се користени ознаките од а) и б).

16. Ако α е релација во M и $a \in M$, тогаш подмножеството a^α од M се дефинира со:

$$a^\alpha = \{b \mid b \in M \text{ и } a\alpha b\}.$$

(Множеството чии елементи се множествата од облик a^α (за $a \in M$) обично се означува со M/α.)

Да се покаже дека α е еквивалентност во M акко се исполнети условите а) и б):

а) $x \in x^\alpha$ за секој $x \in M$; б) $x^\alpha \cap y^\alpha = \varnothing$ секогаш кога $x^\alpha \neq y^\alpha$.

(Во овој случај M/α се вика ***фактор-множество*** на M по еквиваленцијата α; за a^α (за $a \in M$) се вели дека е ***класа*** на еквивалентноста α со ***претставник*** a.)

17.* Да се формулираат резултати аналогни на резултатот од претходната вежба за другите видови релации.

1.2. Искази

Прелистувајќи го претходниот дел, а и која било математичка книга, ќе се уочи дека се сретнуваат само декларативни реченици, т.е. реченици во кои се изнесуваат соодветни тврдења. (Ова не се однесува за деловите што немаат „чисто математичка природа".) Таквите реченици ги викаме искази.

Попрецизно, ***исказ*** е декларативна осмислена реченица којашто го има својството да е или вистинита или невистинита, но не и вистинита и невистинита истовремено. Така, секоја од следниве реченици е вистинит исказ:

1) Скопје е главен град на Република Македонија.

2) $1 \in \mathbb{N}$. 3) $0 \notin \mathbb{N}$. 4) Бројот пет е прост.

Во следниве три реченици, пак, е искажан по еден невистинит исказ:

5) Охрид е главен град на Македонија.

6) $1 \notin \mathbb{N}$. 7) $0 \in \mathbb{N}$.

И следниве три реченици имаат форма на исказ:

8) Битола е голем град.

9) Крушата е највкусното овошје.

10) Утре ќе врне дожд.

Сепак, ако се обидеме да утврдиме дали соодветните тврдења се точни, ќе дојдеме до заклучок дека ниедно од нив не би можеле да го прифатиме за исказ. (Во математиката се сретнуваме, главно, со икази од обликот 2), 3), 4), 6), 7), каде што не се појавуваат проблеми како во 8), 9) и 10).)

Исказите, обично ги означуваме со: p, q, s,..., p_1, q_1,..., за кои велиме дека се ***исказни променливи***. При дадени искази p и q ги формираме и исказите:

$\urcorner p$: ***негација*** на p (читаме: „не пе");

$p \wedge q$: ***конјункција*** на p и q (читаме: „пе и ку");

$p \vee q$: ***дисјункција*** на p и q (читаме: „пе или ку");

$p \Rightarrow q$: ***импликација*** при претпоставка p и последица q (читаме: „пе имплицира ку" или „пе повлекува ку");

$p \Leftrightarrow q$: ***еквиваленција*** на p и q (читаме: „пе е еквивалентно со ку").

Притоа:

$\urcorner p$ е вистинит акко p е невистинит;

$p \wedge q$ е вистинит акко и двата искази p и q се вистинити;

$p \vee q$ е вистинит акко барем еден од исказите p, q е вистинит;

$p \Rightarrow q$ е невистинит само ако p е вистинит, а q невистинит;

$p \Leftrightarrow q$ е вистинит кога и p и q се вистинити или и p и q се невистинити.

Според тоа, конјункцијата има исто значење како и сврзникот „*и*", а дисјункцијата како „*или*". Но, зборот „*или*" има и значење на ***исклучна дисјункција*** што се означува со $\veebar$. Имено, исказот $p \veebar q$ е вистинит ако еден од исказите p, q е вистинит, а другиот невистинит. Еквиваленцијата го има значењето на „*ако и само ако*", т.е. „*акко*". Што се однесува до импликацијата $p \Rightarrow q$, покрај „*p имплицира q*", таа може да се искаже и на еден од следниве начини: „*од p следува q*", „*ако p, тогаш q*", „*p е доволен услов за q*", „*q е потребен услов за p*".

За $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ велиме дека се ***логички операции***, т.е. знаци за логички операции. Со повеќекратна примена на логичките операции на исказните променливи се добиваат ***исказни формули***. Покрај гореспоменатите формули $\neg p$, $p\wedge q$, $p\vee q$, $p\Rightarrow q$, $p\Leftrightarrow q$, такви се, на пример, и следниве изрази: $\neg(\neg p)$, $(p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q)$, $(p\wedge(p\Rightarrow q))\Rightarrow q$.[1)]

За да истакнеме дека исказот p е ***вистинит*** ќе пишуваме и p=$\top$ (читаме:"пе е те"), а p=$\perp$ (читаме „пе е не те") кога p е ***невистинит***; за $\top$ и $\perp$ велиме дека се ***вистинитосни вредности***.

Ако во конструкцијата на исказната формула φ учествуваат исказните променливи $p, q,\ldots, r$, т.е. $\varphi=\varphi(p, q,\ldots, r)$, ставајќи p_0, $q_0,\ldots$, $r_0\in\{\top, \perp\}$ и придржувајќи се до направените договори за смислата на логичките операции, ќе ја добиеме соодветната вредност

$$\varphi_0=\varphi(p_0, q_0,\ldots, r_0)\in\{\top, \perp\} \text{ на } \varphi.$$

Од приложенава табела се гледа како се определува φ_0, во неколку конкретни случаи.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$\neg q\Rightarrow\neg p$	$p\wedge(p\Rightarrow q)$	$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$

За исказната формула $\varphi=\varphi(p, q,\ldots, r)$ велиме дека е ***логички закон*** (или:***тавтологија***) ако $\varphi(p_0, q_0,\ldots, r_0)$=$\top$ било како да ги избереме p_0, $q_0,\ldots$, $r_0\in\{\top, \perp\}$. Од горната шема се гледа дека, на пример, $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$ е логички закон; тој е познат како ***закон за контрапозиција***, што често се користи при докази на соодветни теореми.

Ќе разгледаме сега уште еден вид декларативни реченици што имаат форма на искази, но сепак не се искази туку исказни функции. Прво, еден пример.

11) Природниот број x не е поголем од пет.

Ова тврдење, да го означиме со $\varphi(x)$, е вистинито за $x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а невистинито за секој x поголем од пет. Велиме дека $\varphi(x)$ е исказна функција со универзално множество **N**. (Во иста смисла се вели и дека φ е дефинирана во **N**.)

---

1) Како и кај операциите со броеви, некои загради ќе ги подразбираме, сметајќи дека знакот $\neg$ има предност пред другите, а $\vee$ и $\wedge$ имаат предност пред $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$. Така, изнесените три исказни формули ќе ги пишуваме во обликот: $\neg\neg p$, $p\wedge q\Rightarrow p\vee q$, $p\wedge(p\Rightarrow q)\Rightarrow q$.

Поопшто, една реченица $\psi(x)$ е ***исказна функција*** во множеството M ако за секој елемент $a\in M$, $\psi(a)$ е исказ. Притоа за x велиме дека е (независна) ***променлива***, како и дека M е ***домен*** на ψ или ***универзално множество***. Подмножеството R од сите елементи на M, на кои $\psi(x)$ е вистинито, ќе го означиме со $\{x \mid \psi(x)\}$ и ќе велиме дека тоа е ***множество решенија*** на $\psi(x)$.

Така, ако $\varphi(x)$ е определено со 11), тогаш:

$$R = \{x \mid \varphi(x)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Еве уште неколку примери, при што секаде претпоставуваме дека **N** е универзалното множество.

12) Ако $\varphi(x)$ е $x\in\{1, 2, 3\}$, тогаш $\{x \mid \varphi(x)\}=\{1, 2, 3\}$.

Земајќи $\xi(x)$ да е кратенка за „x е парен", добиваме:

$$\{x \mid \xi(x)\} = \{2, 4, 6, 8,..., 2k, 2k+2,...\}.$$

Решавањето на разни равенки и неравенки (со една непозната) се сведува на определување на множеството од облик $\{x \mid \psi(x)\}$. На пример:

$$\{x \mid x^2-3x+2=0\} = \{1, 2\}.$$

Ако за една исказна функција $\psi(x)$ имаме универзално множество M и ако $N\subset M$, тогаш можеме да сметаме дека $\psi(x)$ е исказна функција и со универзално множество N. Но, за определување на множеството $\{x \mid \psi(x)\}$ битно е универзалното множество, што се гледа, на пример, кај равенката $x^2+3x+2=0$. Оваа равенка има две решенија $x_1=-2$ и $x_2=-1$ во $\mathbb{Z}$, т.е. $\{x \mid x^2+3x+2=0\}=\{-2, -1\}$, но земајќи го **N** за универзално множество добиваме $\{x \mid x^2+3x+2=0\}=\varnothing$, бидејќи споменатата равенка нема решение во **N**. Исто така $\{x \mid x^2-3=0\}=$ $=\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ во **R**, но $\{x \mid x^2-3=0\}=\varnothing$ во **Q**.

Исказните функции разгледани досега беа со една променлива. Системот равенки, на пример $(x+y=3)\wedge(x-y=1)$, е пример за исказна функција $\varphi(x, y)$ од две променливи, а равенката $x^2+y^2=z^2$ е исказна функција од три променливи.

Како и во случај на една променлива, множеството

$$\{(x, y) \mid \varphi(x, y)\}$$

од сите елементи $(a, b)\in M^2$ за кои $\varphi(x, y)$ е точно, се вика ***множество решенија*** или ***график на исказната функција*** $\varphi(x, y)$. Имајќи предвид дека множеството решенија од $\varphi(x, y)$ е подмножество од M^2, каде што M е универзалното множество, можеме $\varphi(x, y)$ да ја интерпретираме како релација φ во M.

Од една исказна функција, со помош на зборовите „за секој" ($\forall$) или „постои (барем) еден" ($\exists$), се добива исказ.

Имено, ако $\varphi(x)$ е исказна функција со универзално множество M, тогаш $(\forall x)\varphi(x)$ и $(\exists x)\varphi(x)$ се искази, чија вистинитост е дефинирана како што следува:

($\forall$): $(\forall x)\varphi(x)$ е вистинит исказ (т.е. има вредност Т), акко $\{x \mid \varphi(x)\}=M$, т.е. ако $\varphi(x)$ е вистинит за секој $x\in M$.

($\exists$): $(\exists x)\varphi(x)$ е вистинит акко $\{x \mid \varphi(x)\}\neq\varnothing$, т.е. ако постои барем еден $x\in M$, таков што $\varphi(x)$ е вистинит.

За $\forall$ велиме дека е знак за ***универзален квантификатор***, а во иста смисла $\exists$ е знак за ***егзистенцијален квантификатор***. Од горната дефиниција е јасно зошто „$\forall$" го читаме *„за секој"*, а „$\exists$" – *„за некој"*, односно *„постои некој"*.

Еве еден пример.

Ако универзалното множество е $\mathbf{N}$, тогаш $(\forall x)(x+1=2)$ е невистинит исказ, а $(\exists x)(x+1=2)$ е вистинит.

Во случај кога $\varphi(x, y)$ е исказна функција од две променливи, тогаш

$$(\forall x)\varphi(x, y) \text{ и } (\exists y)\varphi(x, y)$$

се исказни функции $\alpha(y)$, $\beta(x)$ од една променлива. Притоа, за дадено $a\in M$ (=универзалното множество),

$$\alpha(a) = \text{T акко } \{y \mid \varphi(a, y)\} = M, \quad \beta(a) = \text{T акко } \{x \mid \varphi(x, a)\} \neq \varnothing.$$

Со двојна примена на квантификатори на $\varphi(x, y)$ добиваме исказ. Така,

$$(\forall x)(\forall y)\varphi(x, y), \quad (\exists x)(\forall y)\varphi(x, y), \quad (\forall y)(\exists x)\varphi(x, y),$$

се искази. Лесно се проверува дека исказите

$$(\forall x)(\forall y)\varphi(x, y) \text{ и } (\forall y)(\forall x)\varphi(x, y)$$

имаат иста вредност на вистинитост, па затоа кој било од нив ќе го означуваме со $(\forall x, y)\varphi(x, y)$. Во иста смисла се користи и ознаката $(\exists x, y)\varphi(x, y)$. Да забележиме дека исказите

$$(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y) \text{ и } (\exists y)(\forall x)\varphi(x, y)$$

не мораат да имаат иста вистинитосна вредност (вежба **13**).

Често пати наместо $(\forall x)$ ќе пишуваме $(\forall x\in M)$ во случај кога M е универзалното множество, или M е подмножество од универзалното множество.

Да забележиме дека, ако соодветните множества A, B се подмножества од универзалното множество M, тогаш се точни следниве равенства:

$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$, $A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$,

$A\setminus B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$.

ВЕЖБИ

1. Да се утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) $2+3=5$; б) $2+3\geq 5$; в) $0\in\mathbb{N}$;

г) $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$; д) бројот 9 е прост;

ѓ) $3\mid 8$; е) $2\mid 18 \wedge 3\mid 8 \Rightarrow 6\mid 18$.

2. Нека p, q, r, s се дадени искази со вистинитосни вредности, соодветно: $\top$, $\perp$, $\perp$, $\top$. Да се најде вистинитосната вредност на следниов исказ:

а) $(p\vee q)\wedge s$; б) $p\wedge(p\Rightarrow\neg s)\Rightarrow\neg s$; в) $p\wedge(q\vee\neg r)$;

г) $(p\wedge q)\wedge(p\vee\neg r)$; д) $(p\Rightarrow s)\Leftrightarrow(q\Rightarrow(\neg p\vee\neg r))$.

3. Нека $(p\Rightarrow q)=\perp$. Што може да се каже за вистинитосната вредност на $\neg p\wedge q\Leftrightarrow p\vee q$?

4. Што може да се каже за вистинитосните вредности на исказните формули $\neg p\Leftrightarrow q$ и $p\Leftrightarrow\neg q$, ако се знае дека:

а) $(p\Leftrightarrow q)=\top$; б) $(p\Leftrightarrow q)=\perp$?

5. Да се покаже дека вистинитосната таблица на еквиваленцијата произлегува од вистинитосните таблици на импликацијата и конјункцијата.

Помош: Да се состави вистинитосната таблица на формулата

$$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p).$$

6. Да се состави вистинитосната таблица на следнава исказна формула:

а) $p\vee q\Rightarrow p$; б) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)$;

в) $p\Rightarrow p\wedge q$; г) $p\Leftrightarrow q\vee r$.

7. Да се покаже дека е тавтологија следнава исказна формула:

а) $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ – закон за одделување;

б) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ – закон за двојна негација;

в) $p \vee \neg p$ – закон за исклучување на трето;

г) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ – хипотетичен силогизам;

д) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r)$ – закон за контрадикција.

8. Да се одредат вистинитосните вредности на реченицата:

$$(x=4 \vee x=5) \Rightarrow (x>3 \wedge x<6),$$

за следниве вредности на променливата x: 3, 4, 5, 7, 8. Дали оваа реченица е точна за сите а) природни, б) цели, в) рационални броеви?

9. Да се најде множеството решенија на следнава исказна функција, ако нејзиниот домен е: 1) $\mathbb{N}$, 2) $\mathbb{Z}$.

а) $x \mid 6$ (се чита; „x е делител на 6"); б) $6 \mid x$; в) $3x+1=2$;

г) $x^2-2x-3=0$; д) $2x^3-5x^2+2x=0$; ѓ) $|x|<3$.

10. Да се формулираат со зборови следниве искази, запишани со симболи:

а) $(\forall x \in \mathbb{N})\ x>0$; б) $(\exists x \in \mathbb{N})\ x^2-9=0$;

в) $(\forall x \in \mathbb{Q})\ \neg\ (x^2=2)$; г) $\neg(\exists x \in \mathbb{Q})\ x^2=2$.

Да се означи кои од нив се вистинити, а кои се невистинити.

11. Запиши ги со симболи (на јазикот од исказни функции) следниве искази:

а) Некои реални броеви се рационални.

б) За секој реален број постои цел број што е поголем од него.

в) Постои најмал природен број.

12. Да се покаже дека за секоја исказна функција исказите:

а) $\neg(\forall x)\ \varphi(x)$ и $(\exists x)\ \neg\ \varphi(x)$,

б) $\neg(\exists x)\ \varphi(x)$ и $(\forall x)\ \neg\ \varphi(x)$,

имаат иста вредност на вистинитост.

13. Ако универзално множество е $\mathbb{Z}$, да се покаже дека исказот

а) $(\exists x)\ (\forall y)\ (x+y=0)$ е невистинит,

б) $(\forall y)\ (\exists x)\ (x+y=0)$ е вистинит.

14. Сметајќи ги релациите за специјални исказни функции од две променливи, да се формулираат дефинициите на видовите релации од 1) – 5) од **1.1** со помош на квантификатори и логички операции.

1.3. Пресликувања

Поимот функција зазема едно од централните места во математиката. Функциите од релни променливи, на чие изучување понатаму ќе посветиме најголемо внимание, се само еден специјален случај од општиот вид пресликувања што се сретнуваат во теоријата на множествата.

Нека M и N се две непразни множества и нека на секој елемент $x \in M$ му е придружен, по некаков пропис f, еднозначно определен елемент $y \in N$. Тогаш велиме дека е определено ***пресликување*** f од M во N и пишуваме $f\colon M \to N$; за y велиме дека е ***слика*** на x и пишуваме:

$$y = f(x), \quad f\colon x \mapsto y \quad \text{или} \quad x \mapsto y.$$

Множеството M го нарекуваме ***домен***, а N ***кодомен*** на f. Значи, f е пресликување со домен M и кодомен N акко:

$$(\forall x \in M)\ (\exists! y \in N)\ y = f(x)\ ^{1)}.$$

Множеството $f(M)$ на сите елементи $y \in N$ такви што $y = f(x)$ за некое $x \in M$, т.е.

$$E_f = f(M) = \{y \mid (\exists x \in M)\ y = f(x)\}$$

се вика ***опсег*** на f.

Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Нека $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и нека f и g се следниве прописи на придружување:

$$f\colon a \mapsto 1, \quad b \mapsto 2, \quad c \mapsto 3, \quad d \mapsto 3,$$

$$g\colon a \mapsto 1, \quad b \mapsto 2, \quad c \mapsto 1, \quad b \mapsto 3,$$

---

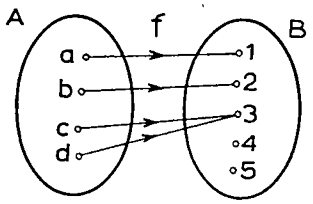
[1] $(\exists! \ldots)$ се пишува наместо „постои еден и само еден...“.

Тогаш со f е определено пресликување од A во B, а со g – не е. Зошто? (Види и црт. 2.)

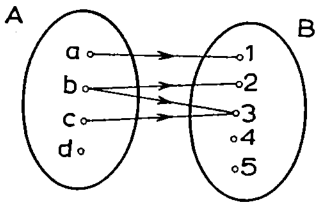
Во некои случаи е погодно дадено пресликување да се претстави таблично или со дијаграм. Така, пресликувањето f: $A \to B$ од примерот 1 можеме да го претставиме со таблица:

$$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{или,} \quad \begin{array}{c|cccc} x & a & b & c & d \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

а со дијаграм – како на црт. 1.



Црт.1



Црт.2

Нека f: $M \to N$ е пресликување. За f велиме дека е:

1) ***сурјекција*** од M во N, акко $E_f = N$, т.е.

$$(\forall y \in N)\ (\exists x \in M)\ f(x) = y;$$

2) ***инјекција*** од M во N, акко

$$x_1,\ x_2 \in M \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$$

3) ***биекција*** од M во N, акко f е и инјекција и сурјекција.

Пример 2. Пресликувањето:

а) f_1: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}^\circ$ ($\mathbb{N}^\circ = \mathbb{N} \cup \{0\}$), $f_1(x) = |x|$, е сурјекција,

б) f_2: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, е инјекција,

в) f_3: $\mathrm{P} \to \mathbb{N}$ (P е множеството од парните природни броеви) $f_3(x) = \frac{x}{2}$ е биекција.

Во врска со поимот инјекција, ако се искористи законот за контрапозиција, се добива следново:

***Тврдење* 1.** *Пресликувањето f: $M \to N$ е инјекција, акко*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \Diamond$$

За множеството M велиме дека е ***еквивалентно*** со множеството N, акко постои барем една биекција од M во N; во тој случај пишуваме: $M \sim N$.

Така, множеството P од сите парни природни броеви е еквивалентно со множеството $\mathbb{N}$ од сите природни броеви, зашто пресликувањето од примерот 2 в) е биекција од P во $\mathbb{N}$. Но, и $\mathbb{N}$ е еквивалентно со P, зашто пресликувањето f_4: $\mathbb{N} \to P, f_4(x)=2x$, е биекција од $\mathbb{N}$ во P.

Да забележиме дека $x=2y \Leftrightarrow \frac{x}{2}=y$, т.е. $x=f_4(y) \Leftrightarrow f_3(x)=y$.

Поопшто, читателот може сам да се увери лесно дека е точно следново:

***Тврдење* 2.** *Ако f: $M \to N$ е биекција и ако ставиме*

$$x = g(y) \Leftrightarrow f(x) = y, \tag{5}$$

тогаш се добива дека g е биекција од N во M. $\Diamond$

Поради ова својство, поимот еквивалентност на две множества е симетричен, т.е. наместо M е еквивалентно со N можеме да речеме дека множествата M и N се ***еквивалентни***.

За пресликувањето g дефинирано со (4) се вели дека е ***обратно*** или ***инверзно*** на пресликувањето f и обично се пишува $g=f^{-1}$.

Така, пресликувањето f_4: $\mathbb{N} \to P$, дефинирано со $f_4(x)=2x$, е инверзно на f_3: $P \to \mathbb{N}$, $f_3(x)=\frac{x}{2}$, од примерот 2.

Да забележиме дека две пресликувања f: $M \to N$ и g: $M' \to N'$, се сметаат за ***еднакви*** ако:

$$M'=M,\ N'=N, \text{ и } f(x)=g(x) \text{ за секој } x \in M.$$

Така, f_1: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}^\circ$, $f_1(x)=|x|$ (пример 2) и f_2: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_2(x)=|x|$, не се еднакви, зашто $N'=\mathbb{Z} \neq \mathbb{N}=N$ (да уочиме дека f_1 е сурјекција, а f_2 – не е).

Досега претпоставувавме дека и доменот и кодоменот на едно пресликување f се непразни. И натаму ќе се бавиме со такви пресликувања, но, главно од технички причини, ќе допуштаме за секое множество N да постои единствено пресликување $\varnothing_N$: $\varnothing \to N$ со домен $\varnothing$ и кодомен N. Велиме $\varnothing_N$ дека е ***празното пресликување*** во N. Значи, кодоменот може да биде празен само во случај кога доменот е празен; следново својство може да се смета за точно и по дефиниција, а на читателот му предлагаме да најде оправдување.

Тврдење 3. *Празното пресликување $\varnothing_N$ е инјекција за секое множество N, а биекција само ако $N=\varnothing$.* ◊

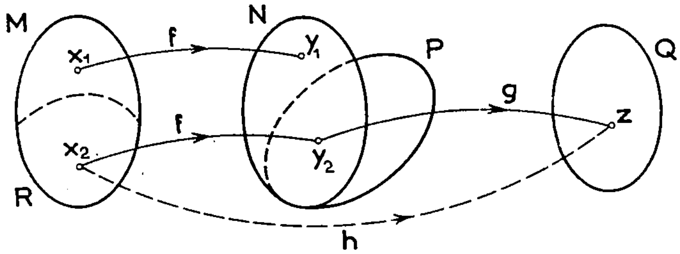
Ќе дефинираме сега поим за композиција $h=g\circ f$ на две пресликувања f: $M \to N$, g: $P \to Q$. Прво, Q е кодомен на h, а домен на h е подмножеството R на M определено со:

$$x \in R \Leftrightarrow x \in M \wedge f(x) \in P.$$

Потоа, дејството на h се дефинира со:

$$(\forall x \in R)\ h(x)=g(f(x)). \tag{6}$$

За пресликувањето h велиме дека е ***композиција*** (или ***состав***) на f и g. Овде f и g ги наведовме во обратен редослед во однос на ознаката $g\circ f$, бидејќи, според дадената дефиниција, ако $x \in M$ и ако $y=f(x) \in P$, $h(x)$ се добива кога на x се примени прво f, а на добиениот резултат се примени g. (Ако имаме ситуација како на црт. 3, тогаш $h(x_2)=z$, но $h(x_1)$ не постои.)



Црт.3

Пример 3. *Нека:*

$M=\{1,2,3,4\}$, $N=\{3,4,5,6\}$, $P=\{1,2,5,6\}$, $Q=\{1,4,6,7,8\}$ и нека се определени пресликувања f: $M \to N$, g: $P \to Q$ со:

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 3 & 3\end{pmatrix}, \quad g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 6\\ 1 & 7 & 6 & 7\end{pmatrix}.$$

Тогаш:

а) $f\circ f: M\to N$, $\quad f\circ f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

б) $g\circ g: \{1, 5\}\to Q$, $\quad g\circ g=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & 7\end{pmatrix}$;

в) $f\circ g: \{1\}\to N$, $\quad f\circ g=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$;

г) $g\circ f: \varnothing\to Q$, па $\quad g\circ f=\varnothing_Q$.

Гледаме дека $g\circ f\neq f\circ g$, па значи *композицијата на пресликувања нема својство на комутативност, додека асоцијативниот закон важи*, како што покажува следнава

***Теорема* 4 (за асоцијативност на композицијата)**

За која било тројка пресликувања f, g, h, точно е равенството

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f. \ \Diamond$$

Забелешка. Во теоријата на множествата, за да постои композицијата $g\circ f$ се бара доменот P на g да е ист со кодоменот N на f, па во тој случај $R=M$, т.е. доменот на $g\circ f$ е ист со доменот на f.

Горната, не толку вообичаена дефиниција на композиција на пресликувања ја дадовме во таква форма затоа што ќе работиме со композиции на функции од една реална променлива. Поопшто, за пресликувањето f велиме дека е ***функција*** во M акко f е пресликување од D во M, каде што D е подмножество на M. Како и во општиот случај, $D=D_f$ се вика ***домен***, а $E=E_f=f(D)$ ***опсег*** на f. Празната функција $\varnothing_M$ има празен и домен и опсег.

Операциите се друг, специјален вид пресликувања. Имено, ако G е непразно множество, тогаш ***операција*** во G е секое пресликување $f: G^2\to G$. (Притоа, да потсетиме дека $G^2=G\times G$.) Ако $f: (x, y)\mapsto z$, ќе пишуваме $z=f(x, y)$, наместо $z=f((x, y))$. Наместо буквите f, g, h,... за операции се употребуваат специјални симболи како $*$, $\circ$, $+$,... и се пишува $x*y$, $x\circ y$, $x+y$,... наместо $*(x, y)$, $\circ(x, y)$, $+(x, y)$ – соодветно.

Инаку, наместо „$*$ е операција во множеството G", обично се вели „$(G; *)$ е ***групоид***" (со носител G и операција $*$).

Да разгледаме неколку примери.

Пример 4. *Ако M е множество, тогаш унијата* ($\cup$), *пресекот* ($\cap$) *и разликата* ($\setminus$) *се примери на операции во $G=\mathcal{P}(M)$, т.е. во фамилијата од сите подмножества на M.*

Пример 5. *Ако G е множеството од сите функции во едно множество M, тогаш композицијата* ($\circ$) *е операција во G.*

Пример 6. *Собирањето* ($+$) *и множењето* ($\cdot$) *се операции во секое од множествата броеви $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; вадењето* ($-$) *е операција во $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, но не и во $\mathbb{N}$, бидејќи, на пример,* $1, 2\in\mathbb{N}$, но $1-2\notin\mathbb{N}$; *велиме дека вадењето е* ***делумна операција*** во $\mathbb{N}$. *Во иста смисла, делењето* ($:$) *е делумна операција во секое од множествата $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.*

ВЕЖБИ

1. Нека пресликувањата $f\colon M\to N$, $g\colon P\to Q$ се определени со $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\c&d&c\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}a&b&1\\2&1&3\end{pmatrix}$, каде што $M=\{1, 2, 3\}$, $N=\{a, b, c, d\}$, $P=\{a, b, 1\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4\}$.

Да се пресметаат: $f\circ f$, $g\circ f$, $f\circ g$ и $g\circ g$.

2. Ако $h\colon S\to T$ и $A\subseteq S$, $B\subseteq T$, тогаш $h(A)$ и $h^{-1}(B)$ се определуваат со:

$$h(A)=\{h(x)\mid x\in A\},\quad h^{-1}(B)=\{x\mid x\in S,\, h(x)\in B\}.$$

Да се определат:

$$f(\{1, 2\}),\ f^{-1}(\{a, c\}),\ f^{-1}(\{c\}),\ g(\{a, b\}),\ g^{-1}(\{1, 2, 4\}),$$

каде што f и g се определени како и во претходната вежба.

3. Да се покаже дека, ако $h\colon S\to T$ и $A, C\subseteq S$, $B, D\subseteq T$, тогаш:

а) $A\subseteq C\Rightarrow h(A)\subseteq h(C)$; б) $B\subseteq D\Rightarrow h^{-1}(B)\subseteq h^{-1}(D)$;

в) $h(A\cup C)=h(A)\cup h(C)$; г) $h^{-1}(B\cup D)=h^{-1}(B)\cup h^{-1}(D)$;

д) $h(A\cap C)\subseteq h(A)\cap h(C)$; ѓ) $h^{-1}(B\cap D)\subseteq h^{-1}(B)\cap h^{-1}(D)$.

Какво треба да биде h за да бидат точни тврдењата е), ж), з)?

е) $A\subset C\Rightarrow h(A)\subset h(C)$; ж) $B\subset D\Rightarrow h^{-1}(B)\subset h^{-1}(D)$;

з) $h(A\cap C)=h(A)\cap h(C)$.

4. За секое множество A, пресликувањето $e_A\colon A\to A$, дефинирано со

$$(\forall x\in A)\ e_A(x)=x,$$

се вика ***единична трансформација*** на A. Да се определат:

а) $1_M \circ f$; б) $f \circ 1_M$; в) $f \circ 1_M \circ g$; г) $1_P \circ f \circ 1_M$,

f и g се пресликувањата од првата вежба.

5. Нека $f: M \to N$, е пресликување. Да се покаже дека:

$$e_N \circ f = f, \quad f \circ e_M = f.$$

6. Да се покаже дека ако $f: M \to N$, $g: N \to P$ се: а) инјекции, б) сурјекции, в) биекции, тогаш соодветното својство го има и $g \circ f$.

7*. Да се покаже дека ако $f: M \to N$, $g: N \to M$ се такви што: $g \circ f = e_N$, тогаш f е инјекција, а g е сурјекција.

8**. Нека $f: M \to N$ е дадено пресликување. Да се покаже дека постои g: $N \to M$ такво што: а) $g \circ f = 1_M$, б) $f \circ g = 1_N$, акко:

а) f е инјекција, б) f е сурјекција.

9**. Да се покаже дека за секое множество M, N, P:

а) $M \times N \sim N \times M$; б) $(M \times N) \times P \sim (M \times N) \times P$;

в) $(M \times P) \times N \sim (P \times N) \times M$.

10**. Нека M е дадено множество, а операцијата „+", дефинирана во $G = \mathcal{P}(M)$ со: $X+Y=(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, за секои $X, Y \in G$. Да се покаже дека:

а) $X+\varnothing = \varnothing+X = X$; б) $X+X = \varnothing$; в) $X+Y = Y+X$;

г) $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$, за секои X, Y, $Z \in G$.

11*. Ако $G=\{a_1, a_2, a_3\}$ и ако $(G; *)$ е групоид, ставајќи $a_i * a_j = a_{ij}$ $(a_{ij} \in G)$ ја добиваме следнава шема:

*	a_1	a_2	a_3
a_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

која се вика ***келиева шема*** на групоидот $(G; *)$. (Јасно е дека ако $G=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, каде што n е природен број, тогаш на секоја операција $*$ во G ѝ одговара соодветна келиева шема.)

Нека во $G=\{0, 1, 2\}$ се дефинирани две операции „+" и „*" со шемите:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Да се покаже дека:

а) $x+y=y+x$; б) $x+0=x$; в) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

г) $x*y=y*x$; д) $x*0=0$; ѓ) $x*(y*z)=(x*y)*z$,

за секои x, y, $z \in G$, како и дека:

е) $(\forall x \in G)(\exists! y \in G)\, x+y=0$; ж) $(\forall x \in G)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists! y \in G)\, x*y=1)$.

12*. Да се изврши слична дискусија како во претходната вежба, ако $G=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, при што „+" и „*" се определени со:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

1.4. Структура на природните броеви

Уште во првиот раздел споменавме дека $\mathbb{N}=\{1, 2,\ldots, n, n+1\}$ е *множеството на природните броеви*. Називот на овие броеви е резултат пред сè на фактот што до сознанието за нив човекот (во развојот на секој поединец, а и во историскиот развој) доаѓа постепено, паралелно со осознавањето на поимот количество. Можеме да речеме дека: множеството $\mathbb{N}$ го формираме со „броење", појдувајќи од бројот *еден*, при што добиваме само „нови" броеви, допуштајќи броењето да може да се врши неограничено. Да го искажеме ова на попрецизен начин.

Прво, за бројот еден да го употребиме знакот 1. Потоа, ако x е природен број, тогаш бројот што се добива при броењето по x, т.е. бројот $x+1$, ќе го означиме со x^+ и ќе велиме дека е ***следбеник*** на x. (Велиме, исто така, дека x е ***претходник*** на x^+.) Сега, множеството $\mathbb{N}$ можеме да го окарактеризираме со помош на следниве две својства:

1°. *Пресликувањето $x \to x^+$ е инјекција од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{N}$, и 1 не е претходник на ниеден природен број. Со други зборови:*

1°.1) $1 \in \mathbf{N}$,

1°.2) $(\forall x \in \mathbf{N})\ (\exists! y \in \mathbf{N})\ y = x^+$;

1°.3) $(\forall x, y \in \mathbf{N})\ (x^+ = y^+ \Rightarrow x = y)$;

1°.4) $(\forall x \in \mathbf{N})\ 1 \neq x^+$.

2°. *Ако* $S \subseteq \mathbf{N}$ *и ако:* $1 \in S$, *и* $(\forall x \in \mathbf{N})\ (x \in S \Rightarrow x^+ \in S)$, *шогаш* $S = \mathbf{N}$.

Горните две (поправо пет) својства се познати како ***Пеанови аксиоми*** за природните броеви [1], при што 2° е познато како ***аксиома на индукцијата*** (АИ). Според оваа аксиома, *за да се докаже дека некое својсшво* $\mathcal{P}$ *го има секој природен број, доволно е да се покаже дека:*

(i) *својсшвоšо* $\mathcal{P}$ *го има бројоš* 1 *и*

(ii) *ако својсшвоšо* $\mathcal{P}$ *го има природниоš број* x, *шогаш* $\mathcal{P}$ *го има и* x^+, *ш.е.* $x+1$.

Методот на докажување што е искажан со (i) и (ii) го викаме ***принцип на математичката индукција*** (ПМИ). Со цел да го илустрираме тој принцип ќе ги докажеме следниве две тврдења:

3°. *Секој природен број е различен од својоš следбеник.*

Доказ. Тврдењето е точно за 1, бидејќи $1 \neq 1^+$, според **1°.4**. Потоа да претпоставиме дека $x \neq x^+$. Според ПМИ, треба да покажеме дека $x^+ \neq (x^+)^+$. И навистина, кога последното неравенство не би било точно, би имале: $x^+ = (x^+)^+$, од што, според **1°.3**), би следувало: $x = x^+$, а тоа не е точно по претпоставка. ◊

4°. *Секој природен број различен од еден има еднозначно определен претходник.*

Доказ. Да го означиме со M множеството природни броеви што имаат претходници и да ставиме $S = \{1\} \cup M$. Ја применуваме АИ. Прво, $1 \in S$, според дефиницијата на S, а за секој $x \in \mathbf{N}$ имаме: $x^+ \in M$, според дефиницијата на M. Од ова следува дека:

$$1 \in S \text{ и } (\forall x \in \mathbf{N})\ (x \in S \Rightarrow x^+ \in S),$$

па значи $S = \mathbf{N}$. Според тоа, $M = S \setminus \{1\}$ т.е. секој неединичен природен број има претходник, а според **1°.3**) тој е еднозначно определен. ◊

---

[1] Ѓузепе Пеано (*Giuseppe Peano*, 1858–1932), италијански математичар, прв ги формулирал во 1895 година; овде е извршена соодветна модификација на нивната првобитна форма.

И другите тврдења што ќе ги формулираме подолу се докажуваат со помош на ПМИ, но ние ќе ги испуштаме доказите, или само ќе даваме упатства.

Ќе ја дефинираме прво операцијата собирање (+) на природните броеви со:

$$(\forall x \in \mathbb{N})\ x+1 = x^{+}, \tag{1}$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})\ x+(y^{+}) = (x+y)^{+}. \tag{2}$$

Со индукција по однос на y се покажува дека за секои $x, y \in \mathbb{N}$ постои еднозначно определен $z \in \mathbb{N}$ таков што $x+y=z$, т.е. дека *собирањето* (+) *е добро дефинирана операција во* $\mathbb{N}$. (Имено, за $y=1$ тоа е точно според (1) и 1°; претпоставуваме дека $x+y$ е добро дефиниран број од $\mathbb{N}$ за $y=k$; за $y=k^{+}$, според (2), имаме $x+y=(x+k)^{+}$.)

Добиената операција „+" велиме дека е ***собирање*** во $\mathbb{N}$, а за групоидот ($\mathbb{N}$; +) велиме дека е ***адитивен групоид*** на $\mathbb{N}$; подолу ќе бидат формулирани неколку својства во врска со овој групоид.

Со индукција по z се покажува дека *собирањето е асоцијативно*, т.е. дека:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N}) \quad (x+y)+z = x+(y+z). \tag{3}$$

Со индукција по x се добива дека $x+1=1+x$ за секој x, а потоа, со уште една индукција (сега по y), се добива:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N}) \quad x+y = y+x, \tag{4}$$

т.е. дека *собирањето е комутативно*.

Законот за кратење, т.е. својството:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N}) \quad (y+x = z+x \Rightarrow y = z), \tag{5}$$

се докажува лесно со индукција по x.

Да спомeнеме уште две својства на собирањето. Првото од нив е:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N}) \quad x+y \neq y, \tag{6}$$

што се докажува лесно со индукција по y. Второто, пак, го искажува односот меѓу два броја.

Теорема 5 (***за споредливост на природни броеви***)

За секоја двојка природни броеви x, y точен е еден и само еден од следниве три услови:

(i) $(\exists u\in\mathbb{N})\quad y=x+u$; (ii) $x=y$; (iii) $(\exists v\in\mathbb{N})\quad x=y+v$. ◊

Со помош на собирањето се дефинира и операцијата ***множење*** $(\cdot)$, како што следува:

$$(\forall x\in\mathbb{N})\quad x\cdot 1=x, \tag{7}$$

$$(\forall x, y\in\mathbb{N})\; x\cdot(y+1)=(xy)+x. \tag{8}$$

(Овде, а и натаму, пишуваме $y+1$, наместо y^+.)

Со помош ПМИ се покажува дека „$\cdot$" *е добро дефинирана операција* во $\mathbb{N}$, т.е. дека $(\mathbb{N};\ \cdot)$ е групоид, наречен ***мултипликативен групоид*** на природните броеви.

Подолу приложуваме список на својства на операцијата множење, а распоредот е направен така што тие да може полесно да се докажат.

$$(\forall x, y, z\in\mathbb{N})\quad x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z); \tag{9}$$

$$(\forall x, y, z\in\mathbb{N})\quad (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z); \tag{3'}$$

$$(\forall x, y, z\in\mathbb{N})\quad (x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z); \tag{9'}$$

$$(\forall x, y\in\mathbb{N})\quad x\cdot y=y\cdot x; \tag{4'}$$

$$(\forall x, y, z\in\mathbb{N})\quad (y\cdot x=z\cdot x\Rightarrow y=z); \tag{5'}$$

Гледаме дека, покрај асоцијативноста, комутативноста и кратливоста, што важат и кај собирањето, овде се појавуваат врските меѓу собирањето и множењето изразени со (9) и (9′), познати како ***дистрибутивност на множењето спрема собирањето***. (Во врска со ова, да истакнеме дека ќе сметаме дека *множењето сврзува повеќе од собирањето*, како што е и обичај па затоа заградите на десните страни од (9) и (9′) нема да ги пишуваме.)

Својствата на собирањето и множењето формулирани погоре ќе ги искористиме како мотив за давање на неколку дефиниции во врска со групоидите.

За групоидот $(G;\ *)$ велиме дека е

а) ***комутативен***, акко: $(\forall x, y\in G)\quad x*y=y*x$;

б) ***асоцијативен***, акко: $(\forall x, y, z\in G)\quad (x*y)*z=x*(y*z)$;

в) ***со кратење***, акко:

$$(\forall x, y, z\in G)\quad (x*z=y*z\vee z*x=z*y\Rightarrow x=y). \tag{5''}$$

Ако групоидот $(G; *)$ е асоцијативен, тогаш тој се вика ***полугрупа***, а асоцијативен и комутативен групоид се вика ***комутативна полугрупа*** [2)].

Користејќи ги воведените поими, можеме да ја формулираме следнава

***Теорема* 6**

Адитивниот и мултипликативниот групоид од природни броеви се полугрупи со кратење. ◊

Во иднина ќе велиме дека $(\mathbb{N}; +)$ е ***адитивна полугрупа*** на $\mathbb{N}$, а, во иста смисла, $(\mathbb{N}; \cdot)$ е ***мултипликативна полугрупа*** на $\mathbb{N}$.

Да истакнеме една разлика меѓу адитивната и мултипликативната полугрупа, воведувајќи го поимот неутрален елемент. Имено, $e\in G$ се вика ***неутрален елемент*** на групоидот $(G; *)$ акко се точни равенствата: $x*e=e*x=x$, за секој $x\in G$.

Од дефиницијата е јасно дека

7°. *Во еден групоид има најмногу еден неутрален елемент.* ◊

Имајќи ги предвид својствата (6), (7) и (4′) ја добиваме и следнава

***Теорема* 8**

Во адитивната полугрупа на $\mathbb{N}$ *нема неутрален елемент; бројот* 1 *е неутрален елемент во мултипликативната полугрупа на* $\mathbb{N}$. ◊

Во секоја полугрупа е осмислен поимот за степен со природни експоненти. Имено, ако $(G; *)$ е полугрупа, тогаш се дефинира пресликување $(x, n)\mapsto x^n$ од $G\times\mathbb{N}$ во G на следниов начин:

$$(\forall x\in G)\quad x^1=x \tag{10}$$

$$(\forall x\in G,\, n\in\mathbb{N})\quad x^{n+1}=x^n*x.$$

Велиме дека x^n е ***степен*** со ***основа*** x и ***експонент*** n. Во случај операцијата во полугрупата да биде означена адитивно, т.е. со „+“, тогаш, обично, се пишува nx наместо x^n, па сега равенствата (10) ги имаат следниве форми:

$$1x=x,\quad (n+1)x=nx+x. \tag{10′}$$

---

2) Во оваа книга ќе работиме само со комутативни полугрупи, па затоа *под полугрупа ќе подразбираме комутативна полугрупа.*

(Притоа, во второто равенство знакот „+“ се употребува со две значења; на левата страна „+“ е знакот за собирање во $\mathbb{N}$, а на десната – во $(G; +)$.)

Подолу ќе формулираме неколку својства на степените, при што x и y се кои било елементи од G, а m и n од $\mathbb{N}$:

$$x^m * x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}, \quad (x*y)^n = x^n * y^n. \tag{11}$$

Во случај на адитивна ознака, равенствата во (11) ги добиваат следниве форми:

$$mx+nx = (m+n)x, \quad n(mx) = (mn)x, \quad n(x+y) = nx+ny. \tag{11'}$$

Во случај кога улогата на $(G; *)$ ја има мултипликативната полугрупа на $\mathbb{N}$, *степенувањето е операција во* $\mathbb{N}$, а таа операција е различна и од собирањето и од множењето. Но, во случај кога $(G; *)$ се замени со адитивната полугрупа на $\mathbb{N}$, добиената операција е множењето во $\mathbb{N}$ (вежба 7). Затоа, како што е и обичај, наместо $x \cdot y$ ќе пишуваме и xy, кога $x, y \in \mathbb{N}$.

ВЕЖБИ

1. Ако $2=1^+$, $3=2^+$, $4=3^+$, $5=4^+$, $6=5^+$, $7=6^+$, $8=7^+$, $9=8^+$, да се пресметаат:

   $2+2$, $3 \cdot 2$, $4+5$, $3 \cdot 3$, $6+4$, $2 \cdot 5$.

2. Да се докаже дека $2x = x+x$, за секој $x \in \mathbb{N}$.

3. За природниот број p велиме дека е **прост** ако $p \neq 1$ и:

   $$p = ab \Rightarrow (a=1 \vee b=1).$$

   Кој од броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 е прост?

4. Да се покаже дека: $1=xy \Rightarrow x=y=1$.

5.* Ако $x, y, z \in \mathbb{N}$ се такви што $z=y+x$, пишуваме $y=z-x$ и велиме дека y е **разлика од** z **со** x. Да се покаже дека:

   а) Ако $z-x \in \mathbb{N}$, тогаш $z-x$ е еднозначно определен.

   б) $z-x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (z \neq x \wedge x-z \notin \mathbb{N}.)$

   в) $z-x \in \mathbb{N} \Rightarrow [y+(z-x) = (y+z)-x \in \mathbb{N}]$.

   г) $z-(x+y) \in \mathbb{N} \Rightarrow [(z-x)-y = z-(x+y) \in \mathbb{N}]$.

   д) $x-y,\ u-v \in \mathbb{N} \Rightarrow (x-y)+(u-v) = (x+u)-(y+v) \in \mathbb{N}$,

   $$(x-y) \cdot (u-v) = (xy+yv)-(xv+yu) \in \mathbb{N}.$$

6.* Да се дефинира операција делење во $\mathbb{N}$ и да се изврши слична дискусија како и за вадењето.

7.* Нека $\mathbb{N}^\circ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, каде што $0 \notin \mathbb{N}$. Да дефинираме собирање во $\mathbb{N}^\circ$ со:

$$x+y=z \text{ во } \mathbb{N} \Rightarrow x+y=z \text{ во } \mathbb{N}^\circ, \text{ и:}$$

$$0+0=0,\ x+0=0+x=x \text{ за секој } x \in \mathbb{N}.$$

Да се покаже дека $(\mathbb{N}^\circ; +)$ е полугрупа со неутрален елемент 0.

8. Нека $(G; *)$ е асоцијативен групоид, т.е. групоид во кој важи асоцијативниот закон. Ако $x, y, u, v \in G$, да се покаже дека сите „производи" $((x*y)*u)*v$, $(x*(y*u))*v$, $(x*y)*(u*v)$, $x*((y*u)*v)$, $x*(y*(u*v))$ се еднакви. (Поради тоа, секој од тие 5 производи може да се запише без загради: $x*y*u*v$.) Да се обопшти овој резултат.

9. Да се даде пример на асоцијативен групоид што не е комутативен.

10.* Нека $(G, *)$ е полугрупа (т.е. асоцијативен и комутативен групоид). Ако $a, b, c \in G$, тогаш: $a*b=b*a$,

$$a*(b*c)=(a*b)*c=a*b*c=a*c*b=b*a*c=b*c*a=c*a*b=c*b*a.$$

(Со други зборови, производот на два, односно на три множители не зависи од распоредот на заградите, ниту од редоследот на множителите.) Со индукција по n да се докаже дека тој резултат важи и за производи од n фактори.

11.* Нека $m \mapsto \mathbb{N}_m$ е пресликување од $\mathbb{N}^\circ$ во $\mathcal{P}(\mathbb{N}^\circ)$ при што:

$$\mathbb{N}^\circ = \varnothing,\ \mathbb{N}_{m+1} = \mathbb{N}_m \cup \{m\}.$$

За множеството $\mathbb{N}_m$ велиме дека е конечно множество со m елементи. Поопшто, ако M е множество такво што $\mathbb{N}_m \sim M$, т.е. постои биекција од $\mathbb{N}_m$ во M, тогаш велиме дека M е ***конечно множество*** со m елементи и пишуваме $|M|=m$. (Според тоа, $|\mathbb{N}_m|=m$, за секој $m \in \mathbb{N}^\circ$.)

Да се покаже дека, за кои било конечни множества A и B, конечно е и секое од множествата: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $\mathcal{P}(A)$ и притоа:

а) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$;

б) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;

в) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

1.5. Интегрален домен на целите броеви

Една од причините за проширување на множеството $\mathbb{N}$ е барањето линеарната равенка $x+a=b$ да има решение по x за секој даден пар броеви a, b. За $a=2$, $b=5$ таа равенка има решение (и тоа, единствено) $x=3$, но, на пример, равенката $x+3=2$ нема решение во $\mathbb{N}$. Проширувајќи го $\mathbb{N}$ со нулата и негативните цели броеви ја добиваме структурата $\mathbb{Z}$ на целите броеви, каде што секоја таква равенка има единствено решение.

За да дадеме опис на структурата $\mathbb{Z}$, прво ќе го воведеме поимот група.

Имено, за групоидот $(G; +)$ велиме дека е ***група*** акко: i) е асоцијативен, ii) има неутрален елемент e и iii) за секој $x \in G$, постои $y \in G$, таков што

$$x*y = y*x = e;$$

y се вика ***инверзен елемент*** на x; тој е еднозначно определен и се означува со y^{-1}.

За групата $(G; *)$ велиме дека е ***комутативна*** (или ***абелова***[1]) акко групоидот $(G; *)$ е комутативен.

Операцијата во комутативна група[2] обично се означува адитивно, т.е. се пишува $x+y$ наместо $x*y$. Во тој случај неутралниот елемент се означува со 0, а инверзниот елемент на x – со $-x$.

Елементот $-x$ се вика ***спротивен*** на x и тој е еднозначно определен со x (вежба 5). За неутралниот елемент 0, ќе велиме дека е ***нула*** на групата, а според 7° од **1.4**, 0 е единствениот неутрален елемент на $(G; +)$.

Во една група $(G; +)$ се дефинира операцијата ***вадење*** $(-)$ со:

$$x-y = x+(-y). \qquad (1)$$

Лесно се проверува дека кај секоја група $(G; +)$ се точни равенствата:

---

[1] Нилс Абел (*Niels Henrik Abel*, 1802–1829), норвешки математичар.

[2] Во оваа книга ќе работиме само со групи што се комутативни. Затоа, тука, под „*група*“ ќе подразбираме „*комутативна група*“.

$$-0=0,\quad -(-x)=x,\quad -(x-y)=y-x,\quad -(x+y)=(-x)+(-y), \tag{2}$$

за секои $x, y \in G$, како и дека:

$$(\forall x, y \in G)\ \ x+y=0 \Leftrightarrow y=-x. \tag{3}$$

По обичај, за натаму некои загради изоставуваме; така, наместо, $(-x)+(-y)$, ќе пишуваме $-x-y$.

Од горните својства лесно се добива дека се точни и следниве тврдења:

1°. *Секоја група е полугрупа со кратење.* ◊

2°. *Ако* $(G; +)$ *е група, тогаш:*

$$(\forall x, y, z \in G)\ \ (x+y=z \Leftrightarrow x=z-y).\ ◊$$

Да се вратиме сега на адитивната полугрупа на $\mathbb{N}$. Оваа полугрупа не е група, бидејќи нема неутрален елемент, па не може ни да стане збор за спротивен елемент. Си поставуваме задача да определиме група $(\mathbb{Z}; +)$ со следниве својства:

1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, 2) $x+y=z$ во $\mathbb{N} \Rightarrow x+y=z$ во $\mathbb{Z}$.

Фактот што во $(\mathbb{N}; +)$ нема неутрален елемент наложува да избереме еден нов симбол 0 како нула на бараната група. Потоа, на секој $x \in \mathbb{N}$ му придружуваме нему спротивен елемент $-x$. Така го добиваме множеството:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-,$$

каде што

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N},\quad \mathbb{Z}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{N}\},\quad \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \varnothing,\quad 0 \notin \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-. \tag{5}$$

(Да воочиме дека пресликувањето $x \mapsto -x$ е биекција од $\mathbb{Z}^+$ во $\mathbb{Z}^-$).

Елементите од $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$ ги викаме, соодветно: ***цели броеви, позитивни цели броеви, негативни цели броеви***.

Горе поставената задача сугерира да се дефинира собирање (+) во $\mathbb{Z}$, како што следува:

$$x+y=z \text{ во } \mathbb{N} \Rightarrow x+y=z \text{ во } \mathbb{Z}, \tag{6}$$

$$u+0=u,\qquad 0+u=u, \tag{7}$$

$$x+(-x)=0,\qquad (-x)+x=0, \tag{8}$$

$$(-x)+(-y)=-(x+y), \tag{9}$$

$$(-x)+(y+x)=y, \qquad (y+x)+(-x)=y, \tag{10}$$

$$x+(-(y+x))=-y, \qquad (-(y+x))+x=-y, \tag{11}$$

за секои $x, y, z\in\mathbb{N}$, $u\in\mathbb{Z}$.

Да објасниме дека со (6) – (11) е дефинирана операција во $\mathbb{Z}$. Навистина, нека $x, y\in\mathbb{Z}$. Тогаш $x+y$ е определен, соодветно, со

(6): за $x, y\in\mathbb{N}$, (7): за $x=0$ или $y=0$,

(8): за $x\in\mathbb{N}$, $y=-x$, (9): за $x, y\in\mathbb{Z}^-$.

Преостануваат случаите: а) $x\in\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{Z}^-$, $y\neq -x$. б) $x\in\mathbb{Z}^-$, $y\in\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}$, $x\neq y$. Од причини на симетричност ќе се задржиме само на случајот а). Нека $y=-z$, каде што $z\in\mathbb{Z}^+=\mathbb{N}$. Тогаш според Т.5 од **1.4** имаме: а.1) $x=z+u$ за некој $u\in\mathbb{N}$ или а.2) $z=x+v$ за некој $v\in\mathbb{N}$. Во случајот а.1) имаме: $x+y=(z+y)+(-z)=y$, според (10), а во случајот а.2) според (11), $x+y=x+(-(x+v))=-v$.

Со едноставна, но пообемна дискусија се докажува следнава

***Теорема* 3.** *($\mathbb{Z}$; +) е група.* ◊

Пред да ја дефинираме операцијата множење во $\mathbb{Z}$, ќе го дефинираме поимот прстен. Имено, за структурата (P; +, ·) со две операции (собирање (+) и множење (·)) велиме дека е ***прстен*** ако се исполнети следниве услови:

(i) (P; +) е група[3];

(ii) (P; ·) е полугрупа[3] со неутрален елемент;

(iii) $(\forall x, y, z\in P)\ x(y+z)=xy+xz$.

(На десната страна од равенството во (iii) би требало да пишуваме $(xy)+(xz)$, но, и во овој случај, сметаме дека множењето повеќе сврзува од собирањето, па ги изоставаме заградите.).

(P; +) е ***адитивната група*** на прстенот, а (P; ·) е ***мултипликативната полугрупа*** на прстенот.

Како и кај секоја група, нулата на адитивната група ќе ја означуваме со 0, а за секој $x\in P$, со $-x$ ќе го означуваме спротивниот елемент на x во адитивната група. Неутралниот елемент на (P; ·) се вика ***единица*** на прстенот.

---

[3] Како што рековме во фуснотата 2), *„група“* овде значи *„комутативна група“*, а *„полугрупа“ – „комутативна полугрупа“*.

Следново својство на прстените ќе нé доведе до операцијата множење во $\mathbb{Z}$.

***Теорема* 4.** *Ако* $(P; +, \cdot)$ *е прстен, тогаш, за секои* $x, y, z \in P$ *се точни равенствата:*

$$x \cdot 0 = 0, \quad x(-y) = -(xy), \quad (-x)(-y) = xy. \ \Diamond$$

Сакаме да дефинираме сега множење во $\mathbb{Z}$, така што структурата $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ да биде прстен, како и множењето во $\mathbb{N}$ да се запази во $\mathbb{Z}$.

Имајќи ги предвид резултатите од Т.4, добиваме дека множењето треба да се дефинира како што следува:

$$x \cdot y = z \text{ во } \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y = z \text{ во } \mathbb{Z}, \tag{6'}$$

$$u \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot u = 0, \tag{7'}$$

$$x(-y) = -(xy), \quad (-x)y = -(xy), \tag{12}$$

$$(-x)(-y) = xy, \tag{13}$$

за секои $x, y, z \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{Z}$.

***Теорема* 5.** $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ *е прстен.* $\Diamond$

Прстен во кој важи условот

$$(\forall x, y \in P) \quad (x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0) \tag{14}$$

се вика ***интегрален домен***.

***Теорема* 6.** $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ *е интегрален домен.*

Доказ. Од (6'), (12) и (13) следува дека:

$$(\forall x, y \in P) \quad (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0), \tag{14'}$$

што, според законот за контрапозиција, е еквивалентно со (14). $\Diamond$

Пример 1. Ако во а) $P = \{0, 1\}$, б) $P = \{0, 1, 2\}$ дефинираме *собирање и множење со шемите*

а)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

б)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

добиваме *интегрален домен*.

Пример 2. Нека $P=\{0, 1, 2, 3\}$ *и нека собирањето и множењето се* дефинираат *во* P *со шемите*:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Добиваме дека $(P; +, \cdot)$ *е прстен, но овој прстен не е интегрален домен, бидејќи*: $2\cdot 2=0$, $2\neq 0$; *поради ова, велиме дека* 2 *е* ***вистински делител на нулата***.

Забелешка. Прстените во смисла на горедадената дефиниција се познати како „комутативни и асоцијативни прстени со единица", додека под „прстен", во најопшта смисла, се подразбира структура $(P; +, \cdot)$ со својствата:

(i′) $(P; +)$ е комутативна група;

(ii′) $(P; \cdot)$ е групоид;

(iii′) $(\forall x, y, z\in P)\ \ x(y+z)=xy+xz, \quad (x+y)z=xz+yz.$

Пример 3. *Дефинирајќи множење* $*$ *во* $\mathbb{Z}$ *со*: $(\forall x, y\in \mathbb{Z})\ x*y=0$, *добиваме „комутативен и асоцијативен прстен без единица", во смисла на горната забелешка. (Овој „прстен" е познат и како „прстен со нулто множење". Но, структурата* $(\mathbb{Z}; +, *)$ *не е прстен, бидејќи во полугрупата* $(\mathbb{Z}; *)$ *нема неутрален елемент.*

Ознаката $*$ за операцијата во даден групоид $(G; *)$ ја сметаме за мултипликативна, исто како и ознаките „$\cdot$" или „$\circ$", а таков е и случајот кога се пишува xy наместо $x*y$.

Да претпоставиме сега дека $(G; *)$ е група со единица e. Ако x е кој било елемент од G, тогаш степенот x^{0} се дефинира со:

$$x^{0}=e. \tag{15}$$

Потоа, ако n е природен број, степенот x^{-n} се дефинира со:

$$x^{-n}=(x^{n})^{-1} \tag{16}$$

Користејќи ги равенствата (11) од 1.4, добиваме (вежба 6) дека тие ќе бидат точни и за секои $m, n\in \mathbb{Z}$, $x, y\in G$.

Како и кај степените со природни експоненти, во случај на адитивна ознака, се користи ознаката nx за x^n. Според тоа, $(-n)x=-(nx)$, за секој $x\in G$, $n\in\mathbb{N}$ и $0x=0$, при што 0 во $0x$ е цел број, а на десната страна 0 е нулата во групата $(G; *)$.

Да се вратиме сега на случајот кога $(P; +, \cdot)$ е прстен. Од фактот што $(P; +)$ е група а $(P; \cdot)$ полугрупа следува дека за секој $x\in P$, $n\in\mathbb{N}=\mathbb{Z}^+$, $m\in\mathbb{Z}$, имаме mx, $x^n\in P$.

Користејќи го дистрибутивниот закон, т.е. (iii), за $n\in\mathbb{N}$, и Т.4 за $n\in\mathbb{Z}^-$ или $n=0$, се добива дека:

$$(\forall n\in\mathbb{Z}, x, y\in P) \quad n(xy)=(nx)y. \tag{17}$$

ВЕЖБИ

1*. Да се докажат тврдењата изнесени во примерите 1, 2 и 3.

2. Нека $(P; +, \cdot)$ е прстен. Да се покаже дека:

   а) $(\forall x\in P)$ $(-e)x=-x$, каде што e е единицата на прстенот;

   б) $(\forall x, y, z\in P)$ $x(y-z)=xy-xz$.

3. Да се покаже дека, ако $(P; +, \cdot)$ и $(Q; +, \cdot)$ се прстени, тогаш и $(P\times Q; +, \cdot)$ е прстен, каде што:

$$(x, y)+(u, v) = (x+u, y+v), \quad (x, y)\cdot(u, v) = (xu, yv).$$

4. Да се покаже дека ако $(P; +, \cdot)$ е интегралниот домен од примерот 1, тогаш $(P\times P; +, \cdot)$ е прстен, но не и интегрален домен.

5. Да се покаже дека ако $(G; *)$ е мултипликативно означена група, тогаш:

   а) Инверзниот елемент x^{-1} на даден елемент $x\in G$ е еднозначно определен;

   б) $(x^{-1})^{-1}=x$, $(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$ за секои $x, y\in G$;

   в) За секои a, $b\in G$, равенката $a*x=b$ има еднозначно решение $x=a^{-1}*b$

6. Да се преведат резултатите од претходната вежба за случај на адитивна ознака.

7. Во $\mathbb{Z}$ дефинираме ***релација за деливост*** со:

$$x\,|\,y \Leftrightarrow (\exists z\in\mathbb{Z})\; y=xz.$$

   Да се покаже дека:

а) $1\mid x,\ \ -1\mid x,\ \ x\mid x,\ \ x\mid -x,\ \ x\mid 0$, за секој $x\in\mathbb{Z}$;

б) $0\mid x \Leftrightarrow x=0$; в) $x\mid y \Leftrightarrow x\mid -y \Leftrightarrow -x\mid y$.

8. Да се определат сите делители на: а) -6; б) 8.

9. За целиот број p велиме дека е ***прост*** акко: p е прост природен број или $-p$ е прост природен број. Кој од целите броеви: $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$ е прост? (Да се види вежба 3 од **1.4**:)

10*. Да се решат равенките:

а) $xy = x+y$; б) $xy+3y^2 = 24$, во $\mathbb{Z}$.

1.6. Поле на рационалните броеви

Во структурата на целите броеви се изведливи операциите собирање, вадење и множење, но не и делење. Фактот што за секој x е точно равенството $0x=0$, повлекува, како последица, при делењето да не може нулата да се јави како делител. Барањето да може да се дели со секој ненулти број, нè доведува до *полето на рационалните броеви*.

Прво, ќе го дефинираме поимот поле. За еден прстен $(P; +, \cdot)$ со единица $e\neq 0$ велиме дека е ***поле***, акко

$$(\forall x\in P,\ x\neq 0)\ (\exists y\in P)\quad xy = e.$$

Елементот y е еднозначно определен со x (вежба 5, **1.5**); поради тоа, пишуваме x^{-1} наместо y и велиме дека x^{-1} е ***инверзија*** на x. Притоа, имаме:

$$e^{-1} = e,\quad (x^{-1})^{-1} = x,\quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1},$$

за секои $x, y\in P^*$, каде што $P^*=P\setminus\{0\}$ *е множеството ненулти елементи на* P. (Ознаката P^*, наместо $P\setminus\{0\}$, ќе ја користиме и натаму.)

Интегралниот домен $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ не е поле, зашто, на пример, бројот 2 нема инверзија (и, општо, за $x\neq 1, -1$ не постои x^{-1}). Меѓутоа, ако $(P; +, \cdot)$ е поле, тогаш тоа е интегрален домен.

Навистина, ако $x, y\in P$ се такви што $xy=0$ и $x\neq 0$, тогаш постои $x^{-1}\in P^*$, па добиваме:

$$y = ey = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}\cdot 0 = 0.$$

Според тоа:

1°. *Секое поле е интегрален домен.* ◊

Нека, сега, $(F; +, \cdot)$ е поле. За подмножеството P од F велиме дека е ***поддомен*** на F акко ги има следниве својства:

а) $0, e \in P$, б) $x, y \in P \Rightarrow x+y, \ x \cdot y, \ -x \in P$.

Ако, покрај тоа, важи и условот:

$$x \neq 0, \quad x \in P \Rightarrow x^{-1} \in P,$$

тогаш за P ќе велиме дека е ***потполе*** на F.

Со други зборови:

2°. *P е поддомен (потполе) на F акко P е интегрален домен (поле) во однос на операциите од F.* ◊

Следните тврдења укажуваат на пат за проширување на $\mathbb{Z}$ до поле.

***Теорема* 3.** *Ако P е поддомен од полето $(F; +, \cdot)$, тогаш*

$$Q = \{xy^{-1} \mid x, y \in P, \ y \neq 0\} \tag{1}$$

е потполе на $(F; +, \cdot)$ со следниве својства:

(i) $P \subseteq Q$; (ii) $Q \subseteq E$, *за секое потполе E на $(F; +, \cdot)$, такво што $P \subseteq E$.*

(Со други зборови, Q е најмалото потполе на $(F; +, \cdot)$ што ги содржи сите елементи од P.) ◊

За натаму, наместо xy^{-1} ќе пишуваме и $\frac{x}{y}$.

За секои $x, y, u, v \in F, \ y, v \neq 0$ имаме:

$$\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \Leftrightarrow xv = yu, \tag{2}$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}, \tag{3}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{xv + yu}{yu}. \tag{4}$$

Да ставиме:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, \ y \neq 0\}, \tag{1'}$$

при што го имаме предвид (2). (На пример, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$).

За да биде $\mathbb{Z}$ подмножество од $\mathbb{Q}$, се договараме да биде точно равенството

$$\frac{x}{1} = x, \tag{5}$$

за секој $x \in \mathbb{Z}$. (Според тоа, $\frac{xy}{y} = x$ за секои $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$.)

Елементите на $\mathbb{Q}$ ги викаме ***рационални броеви***.

Во $\mathbb{Q}$ дефинираме операции собирање (+) и множење (·) со (3) и (4).

***Теорема* 4**

Структурата $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ *е поле и притоа* $\mathbb{Z}$ *е негов потдомен.* ◊

Од овој резултат се гледа дека $\mathbb{Q}$ ги задоволува барањата, поставени во почетокот на овој раздел.

Да истакнеме дека:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}, \tag{6}$$

за секои $x, y \in \mathbb{Z}^*$.

Множествата $\mathbb{Q}^+$ од ***позитивни рационални броеви***, односно $\mathbb{Q}^-$ од ***негативни рационални броеви*** се дефинираат со:

$$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{x}{y} \mid xy \in \mathbb{Z}^+\}, \quad \mathbb{Q}^- = \{\frac{x}{y} \mid xy \in \mathbb{Z}^-\}. \tag{7}$$

Така добиваме дека:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-, \quad 0 \notin \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-, \quad \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \varnothing, \tag{8}$$
$$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Q}^+, \quad \mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Q}^-.$$

Во $\mathbb{Q}$ дефинираме релација > (читаме: „***е поголем***") со:

$$x > y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^+, \tag{9}$$

како и ≥ (читаме: „***е поголем или еднаков***") со:

$$x \geq y \Leftrightarrow (x > y \text{ или } x = y). \tag{10}$$

(Во наредниот дел ќе им биде посветено поголемо внимание на овие релации, а овде само ќе истакнеме дека > е ***релација за строго подредување***, поврзана на соодветен начин со операциите во $\mathbb{Q}$.)

Фактот што во $\mathbb{Q}$ секој ненулти елемент е делител на секој елемент, повлекува дека релацијата за деливост не е од интерес во $\mathbb{Q}$. Од друга страна деливоста во $\mathbb{Z}$ може да се сведе на деливост во $\mathbb{N}$, па затоа ќе формулираме неколку резултати во врска со деливост на природните броеви.

Теорема 5 (***за делење со остаток***)

Ако a, $b\in\mathbb{N}$, тогаш постојат еднозначно определени q, $r\in\mathbb{Z}$, такви што:

$$a = qb + r, \quad 0 \le r < b. \quad \Diamond$$

Притоа, q се вика ***количник*** при делењето на a со b, а r ***остаток*** од тоа делење.

Природниот број b е ***делител*** на природниот број a акко остатокот при делењето на a со b е нула.

Да се потсетиме дека природниот број p е ***прост*** акко $p\neq 1$, а 1 и p се единствените природни броеви што се делители на p. За $a\in\mathbb{N}$ велиме дека е ***сложен***, ако a не е прост и $a\neq 1$. (Значи, 1 не е ни прост ни сложен.)

Теорема 6 (***Основна теорема на аритметиката***)

За секој сложен природен број a постои еднозначно определена низа прости природни броеви $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и природни броеви $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ такви што:

$$a = p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \ldots p_k^{\alpha k},$$

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_k. \quad \Diamond$$

Ако a и b се природни броеви и ако d е делител и на a и на b, при што d се дели со секој заеднички делител d на a и b, тогаш велиме дека d е ***најголем заеднички делител*** на a и b и пишуваме

$$d=\text{НЗД}(a, b).$$

Теорема 7 (**За** НЗД)

Ако a, $b\in\mathbb{N}$, тогаш постојат x, $y\in\mathbb{Z}$, такви што:

$$ax + by = \text{НЗД}(a, b). \quad \Diamond$$

Ако НЗД $(a, b)=1$, тогаш велиме дека a и b се ***заемно прости***.

8°. *Ако $a=a'd$, $b=b'd$, каде што $d=$*НЗД*(a, b), тогаш a' и b' се заемно прости.* ◊

Користејќи го 8° ќе докажеме дека:

9°. *Ако $x\in\mathbb{Q}^+$, тогаш постојат еднозначно определени a, $b\in\mathbb{N}$, такви што $x=a/b$ и* НЗД $(a, b) = 1$.

(Велиме дека a/b е ***сведена форма*** на x.) ◊

Следниот „недостаток" на рационалните броеви е една од причините за нивно натамошно проширување.

***Теорема* 10 (*за непостоење на квадратен корен од два во* $\mathbb{Q}$).**

Равенката

$$x^2 = 2 \tag{11}$$

нема решение во $\mathbb{Q}$.

Доказ. Поради $(-x)^2=x^2$, можеме да претпоставиме дека евентуалното решение на (11) е позитивно. Нека $x=a/b$ е решение на (11), такво што НЗД $(a, b)=1$. Тогаш, имаме: $a^2=2b^2$, па значи 2 е делител на a, од што следува дека 2 е делител и на a^2, т.е. $a=2c$, $c\in\mathbb{N}$. Заменувајќи и кратејќи со 2 добиваме $2c^2=b^2$, а од тоа би добиле дека 2 е делител и на b, што не е можно, бидејќи претпоставивме дека НЗД$(a, b)=1$. ◊

Да забележиме дека конструкцијата на рационалните броеви овде не е изведена доволно подробно. На заинтересираниот читател му препорачуваме да ја консултира книгата [Чупона, стр.114].

ВЕЖБИ

1. Да се покаже дека ниедна од равенките: $x^2=5$, $x^3=2$, $x^2=8$ нема решение во $\mathbb{Q}$.

2. Какви треба да се рационалните броеви a, b, c за да биде точно равенството: $(a+b+c)^{-1}=a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$?

3.* Да се покаже дека:

   а) ако $b\in\mathbb{Q}^+$ и $b^2<2$, тогаш постои $c\in\mathbb{Q}^+$, таков што $b<c$ и $c^2<2$;

   б) ако $b\in\mathbb{Q}^+$ и $b^2>2$, тогаш постои $d\in\mathbb{Q}^+$, таков што $d<b$ и $d^2>2$.

4. Да се покаже дека ако k, $a\in\mathbb{N}$, тогаш секое рационално решение на равенката $x^k=a$ е цел број.

5. Да се покаже дека, ако n е природен број, тогаш

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Да се покаже дека тврдењата во **6** и **7** се точни за секои $x, y \in \mathbb{Z}$.

6. $3 \mid xy\,(x+y)\,(x-y)$.

7. $5 \mid xy\,(x^2+y^2)\,(x^2-y^2)$.

8.* Да се покаже дека ако a, $b \in \mathbf{N}$, $b \neq 1$, тогаш постои низа цели броеви a_0, $a_1, \ldots, a_n$ такви што:

$$a = b^n a_n + b^{n-1} a_{n-1} + \ldots + b a_1 + a_0,$$

и $0 \leq a_i < b$. Ако $a_n \neq 0$, тогаш низата $a_0, a_1, \ldots, a_n$ е еднозначно определена.

9. Да се определи низата $a_0, a_1, \ldots, a_n$ во претходната вежба ако $a=99$, $b=4$.

10. Што се $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ако $b=10$?

11. Нека $S=\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ и нека дефинираме операции собирање и множење во S со:

$$(x, y) + (u, v) = (xv + yu, yv), \quad (x, y) \cdot (u, v) = (xu, yv).$$

Да се покаже дека $(S; +)$ и $(S; \cdot)$ се полугрупи со неутрални елементи, но ниедна од овие полугрупи не е група.

12. Да се покаже дека интегралните домени од примерот 1 во **1.5** се полиња.

1.7. Подредени полиња

Во претходниот дел видовме дека множеството од позитивни рационални броеви ги има следниве својства:

Збирот и производот на позитивните броеви е позитивен; нулата не е позитивен број; ако бројот а не е нула, тогаш а или –а е позитивен.

Овие својства се карактеристични за секое подредено поле.

Имено, за едно поле $(P; +, \cdot)$ се вели дека е ***подредено***, ако постои подмножество P^+ од множеството P што ги задоволува следниве услови:

(i) $x, y \in P^+ \Rightarrow x+y, \ x \cdot y \in P^+$; (ii) $0 \notin P^+$;

(iii) $x \in P$ и $x \neq 0 \Rightarrow (x \in P^+ \vee -x \in P^+)$.

Во тој случај се вели дека P^+ е ***множество позитивни елементи***.

Според тоа, јасно е дека $\mathbb{Q}$ е подредено поле, при што:

$$\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} \mid a, b\in\mathbb{Z}, ab\in\mathbb{Z}^+\}.$$

За натаму ќе претпоставиме дека $(P; +, \cdot)$ е дадено подредено поле, со множество позитивни елементи P^+ и единица e. Множеството P^- од ***негативни елементи*** се дефинира со:

$$P^- = \{x \mid x\in P \text{ и } -x\in P^+\}. \tag{1}$$

Подолу ќе формулираме неколку тврдења што важат во секое подредено поле $(P; +, \cdot)$.

1°. $\quad P = P^+ \cup \{0\} \cup P^-, \quad 0\notin P^+ \cup P^-, \quad P^+ \cap P^- = \varnothing.$

Доказ. Првото равенство следува непосредно од (iii); според (ii), $0\notin P^+$, од што следува и дека $0=-0\notin P^+$, па значи $0\notin P^-$; кога би постоел елемент $a\in P^+\cap P^-$, би имале $a, -a\in P^+$, па, според (i), $0=a+(-a)\in P^+$, што противречи на (ii). ◊

2°. $\quad x\in P \wedge x\neq 0 \Rightarrow x^2\in P^+.$

Доказ. Од $x\neq 0$ следува дека $x\in P^+$ или $-x\in P^+$, па значи:

$$x^2 = x\cdot x = (-x)(-x) \in P. \quad ◊$$

Имајќи предвид дека за неутралниот елемент e важи: $e\neq 0$ и $e=e^2$, како последица добиваме:

3°. $\quad e\in P^+$ *и* $-e\in P^-$. ◊

Потоа, ако $x\neq 0$ имаме: $xx^{-1}=e$, па според тоа:

4°. $(\forall x\in P, x\neq 0)\ (x\in P^+ \Leftrightarrow x^{-1}\in P^+)$. ◊

Како последица од 3°, според (i), добиваме:

5°. $\quad$ а) $n\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow ne\in P^+$;

б) $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow (me=0 \Leftrightarrow m=0)$;

в) $m, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow (me=ne \Leftrightarrow m=n)$. ◊

Да претпоставиме дека $m, n, r, s\in\mathbb{Z}$ и $n, s\neq 0$. Тогаш, како последица од 5°, добиваме:

$$(me)(ne)^{-1} = (re)(se)^{-1} \Leftrightarrow (me)(se) = (re)(ne)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{r}{s}; \tag{2}$$

$$[(me)(ne)^{-1}][(re)(se)^{-1}] = (me)(re)(ne)^{-1}(se)^{-1}$$
$$= [(mr)e][(ns)e]^{-1}; \qquad (3)$$

$$(me)(ne)^{-1} + (re)(se)^{-1} =$$
$$= (me)(se)(ne)^{-1}(se)^{-1} + (re)(ne)(se)^{-1}(ne)^{-1} =$$
$$= [(ms)e][(ns)e]^{-1} + [(rn)e][(ns)e]^{-1} =$$
$$= [(ms + rn)e][(ns)e]^{-1}. \qquad (4)$$

Својствата (2), (3) и (4) ни дозволуваат да го прифатиме за точно равенството:

$$\frac{m}{n} = (me)(ne)^{-1}. \qquad (5)$$

за секои $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, така што ја добиваме следнава

Теорема 6 (**за сместување на $\mathbb{Q}$ во подредено поле**)

Ако $(P; +, \cdot)$ е подредено поле, тогаш $\mathbb{Q}$ може да се смета за потполе од тоа поле. $\Diamond$

За натаму ќе сметаме дека $\mathbb{Q} \subseteq P$, $\mathbb{Q}^+ \subseteq P^+$, $\mathbb{Q}^- \subseteq P^-$; според тоа, 1 е единицата и на P.

Како и досега, подолу ќе сметаме дека $(P; +, \cdot)$ е произволно, но фиксно подредено поле.

P се подредува, слично како и $\mathbb{Q}$ во претходниот дел, ставајќи:

$$x > y \Leftrightarrow x - y \in P^+ \qquad (6)$$
$$\Leftrightarrow y < x.$$

Според тоа:

$$x > 0 \Leftrightarrow x \in P^+; \quad x < 0 \Leftrightarrow x \in P^-. \qquad (7)$$

Директно од аксиомите (i) и (ii) се добива:

$$(\forall x, y, z \in P)\ [x \nless x \wedge (x < y < z \Rightarrow x < z)], \qquad (8)$$

како и дека, за секои $x, y \in P$ еден и само еден од следниве услови е исполнет:

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x. \qquad (9)$$

Со други зборови (да се види 8) од 1.1):

7°. *Релацијата* $<$ *е стриктно подредување во* P. ◊

Релацијата $\leq$ се дефинира на обичен начин, т.е. со:

$$x \leq y \Leftrightarrow (x < y \text{ или } x = y). \tag{10}$$

Се добива дека $\leq$ е: рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. (Да се види 7) од 1.1.)

Подолу приложуваме еден список на својства во врска со релацијата за подредување во P. Притоа, $x,\ y,\ z \in P,\quad m, n \in \mathbb{N}$.

а) $x \in P^+ \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0;\quad x \in P^- \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x^{-1} < 0;$

б) $x, y > 0 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow y^{-1} < x^{-1});\quad x, y < 0 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow y^{-1} > x^{-1});$

в) $1 < x \Leftrightarrow 0 < x^{-1} < 1;$

г) $x < y \Leftrightarrow x+z < y+z;$

д) $z > 0 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow xz < yz);\quad z < 0 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow yz < xz);$

ѓ) $x, y > 0 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow x^n < y^n);$

$x < y \Leftrightarrow x^{2m-1} < y^{2m-1};$

е) $1 < x \Rightarrow [m < n \Leftrightarrow x^m < x^n];$

$0 < x < 1 \Rightarrow [m < n \Leftrightarrow x^n < x^m];$

ж) $(\forall x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N})\ (1+x)n \geq 1+nx$ (**Бернулиево**[1] **неравенство**).

***Теорема* 8 (за густа подреденост)**

Ако $x,\ y \in P$ *и* $x < y$, *каде што* P *е подредено поле, тогаш постои* z, *таков што*: $x < z < y$.

Доказ. Од $x<y$ следува $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}y$, па според тоа

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y < \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = y,$$

т.е. имаме $x<z<y$, за $z = \frac{1}{2}(x+y) = \frac{x+y}{2}$. ◊

---

[1] Бернули (*Bernoulli*), фамилија од Базел - Швајцарија, дала редица видни математичари во текот на три генерации. Најзначајни биле: Јаков (*Jacob*, 1654-1705), неговиот брат Јован (Johann, 1667-1748), Никола (*Nicolaus* II, 1687-1759) и Даниел (*Daniel*, 1700-1782) - син на Јован. Тие дале голем придонес како во математиката, така и во нејзините примени

Забелешка. Ако $x \in \mathbb{Z}$, тогаш $x < x+1$, но не постои цел број z таков што $x < z < x+1$.

Тука ќе се задржиме уште на неколку важни поими, сврзани со подредувањето.

Нека $A \subseteq P$. За елементот $b \in P$ велиме дека е ***мајорант*** (или ***горна меѓа***) на A во P акко $a \leq b$, за секој $a \in A$. Ако притоа имаме и $b \in A$, велиме дека b е ***најголем*** елемент на A. Дуално се воведуваат и поимите минорант, односно најмал елемент. Имено $b \in P$ е ***минорант*** (или ***долна меѓа***) на A акко $b \leq a$ за секое $a \in A$, а ако притоа имаме и $b \in A$, тогаш b е ***најмал елемент*** на A. За A велиме дека е ***мајорирано*** (***минорирано***) во P акко има барем еден мајорант (минорант) во P. Ако A е и мајорирано и минорирано во P, велиме дека A е ***ограничено*** во P.

Пример 1. *1 е најмал елемент на $\mathbb{N}$, но во $\mathbb{N}$ нема најголем елемент, ниту пак $\mathbb{N}$ е мајорирано во $\mathbb{Q}$. Множеството $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x \leq 1\}$ е ограничено во $\mathbb{Q}$ со најголем елемент 1, но нема најмал елемент. Негативните рационални броеви и нулата се миноранти на A, па значи нулата е најголем минорант на A.*

Поради следново својство се вели дека природните броеви се ***добро подредени.***

***Теорема* 9 (за добра подреденост на $\mathbb{N}$)**

Секое нейразно йодмножесйво од $\mathbb{N}$ има најмал елеменй. ◊

Ниедно од множествата $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ не е добро подредено. Кај секое подредено поле P, ако $x \in P^+$ имаме $x < x+1$, а, според теоремата за густа подреденост, постои $y \in P^+$ таков што $y < x$. Според тоа:

10°. *Во P^+ нема ни најмал ни најголем елеменй. (P^+ не е мајорирано, а 0 е најголем миноранй на P^+.)* ◊

Поимите супремум и инфимум што ќе ги дефинираме сега имаат важна улога на повеќе места во книгава.

Нека A е мајорирано подмножество од P. Најмалиот од мајорантите на A (ако таков постои) се вика ***супремум*** (или ***најмала горна меѓа***) на A во P. Тоа се означува со $\sup_P A$ (или само со $\sup A$, ако P се подразбира).

Поимот инфимум е дуален. Имено, ако C е минорирано подмножество на P и ако постои најголем минорант d, тогаш d се вика ***инфимум*** (или ***најголема долна меѓа***) на C во P и се пишува $d = \inf_P C (= \inf C)$.

Така, ако $A=\{x\in \mathbb{Q}^+ \mid x\leq 1\}$, тогаш $0=\inf A$, $1=\sup A$.

Ќе покажеме подолу дека едно мајорирано подмножество од $\mathbb{Q}$ не мора да има супремум во $\mathbb{Q}$.

Пример 2. *Нека* $A=\{x\in \mathbb{Q}^+ \mid x^2\leq 2\}$. A *е мајорирано, бидејќи, на пример,* 3 *е мајорант на* A. *Видовме во* Т.10 *од* **1.6** *дека не пости* $\sqrt{2}$ *во* $\mathbb{Q}$, *па значи* $A=\{x\in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$. Да претпоставиме дека $b=\sup A$. Тогаш $b^2<2$ или $b^2>2$. Ако $b^2<2$, според резултатот на вежбата 3 од претходниот раздел постои c, таков што $b<c$, $c^2<2$, но тоа ќе противречи на фактот што $c\in A$ и b е мајорант на A. Кога би имале $b^2>2$, тогаш пак според резултатот од споменатата вежба, постои $d\in \mathbb{Q}^+$, таков што $d^2>2$, $d<b$. Но, и тоа не е можно, бидејќи тогаш d би бил мајорант на A помал од b.

Значи, A нема супремум во $\mathbb{Q}$ и покрај тоа што A е мајорирано.

Ако A, $B\subseteq P$, тогаш $-A$, $A+B$ се дефинирани со:

$$-A = \{-x \mid x\in A\}, \quad A + B = \{x+y \mid x\in A \wedge y\in B\}.$$

Пример 3. *Ако* $A=\{-1, 0, 2\}$, $B=\{-2, 0, 1, 3\}$, *тогаш*: $-A=\{1, 0, -2\}$, $A+B=\{-3, -1, 0, 2, -2, 0, 1, 3, 0, 2, 3, 5\}=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$.

На читателот му препуштаме да ги докаже (внимателно) следниве својства:

11°. *A е мајорирано во P акко $-A$ е минорирано во P и притоа,* $\sup A=-\inf(-A)$. ◊

12°. *Ако множествата A и B се мајорирани (минорирани) во P, тогаш такво е и $A+B$. Ако постојат* $\sup A$, $\sup B$ ($\inf A$, $\inf B$), *тогаш*:

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B), \qquad \inf A + \inf B = \inf(A + B). \quad ◊$$

Уште еден важен поим (во изучувањето на реалните броеви) е поимот ***апсолутна вредност*** $|x|$ од елемент $x\in P$, што се дефинира со:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{за} \quad x \in P^+ \\ 0 & \text{за} \quad x = 0 \\ -x & \text{за} \quad x \in P^- \end{cases} \tag{11}$$

13°. Ако $x, y\in P$, $a\in P^+$ тогаш:

а) $x \neq 0 \Rightarrow |x| \in P^+$; б) $x \leq |x|$ и $-x \leq |x|$;

в) $|x| = |-x|$; г) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;

д) $|xy| = |x|\cdot|y|$; ѓ) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

ВЕЖБИ

Во задачите 1 и 2, a и b се елементи од подредено поле.

1. Не постои a, таков што:

   а) $a^2 + a + 1 = 0$; б) $1 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a+1}$.

2. За секои a, $b \in P^+$, важи:

   а) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$; б) $(a+b)^{-1} < a^{-1} + b^{-1}$;

   в) $a^3b + ab^3 \leq a^4 + b^4$.

3.* Да се дадат докази на својствата **11°** , **12°** и **13°** .

4. Да се покаже дека за $n>1$ Бернулиевото неравенство е стриктно.

5. Да се докаже дека $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

1.8. Поле на реалните броеви

Во претходниот дел видовме дека, кај рационалните бреови, едно мајорирано множество не мора да има супремум. Желбата да се отстрани овој недостаток на $\mathbb{Q}$ ќе нè доведе до полето $\mathbb{R}$ на реалните броеви.

За таа цел, ќе воведеме прво една класа полиња. За подреденото поле P велиме дека е ***комплетно*** акко P го има следново својство:

Секое мајорирано подмножество A од P има супремум во P.

Имајќи го предвид својството 11° од претходниот дел, ја добиваме следнава карактеристика на комплетните полиња:

***Теорема* 1.** *Подреденото поле P е комплетно акко секое минорирано подмножество A од P има инфимум во P.* ◊

Пред да извршиме подетално изучување на комплетните полиња ќе се задржиме на архимедовите полиња. Притоа, *секаде подолу се претпоставува дека P е подредено поле.*

За полето P велиме дека е ***архимедово*** акко е исполнет следниов услов, познат како ***аксиома на Архимед***[1]:

[1] Архимед (*Arhimedes* ок. 287–212п.н.е.) од Сиракуза, еден од најголемите математичари на стариот век и основоположник на статиката.

$$(\forall a, b \in P^+)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ \ na > b. \qquad (1)$$

Ќе формулираме неколку тврдења во врска со архимедовите полиња.

2°. *Полето на рационалните броеви е архимедово, но не е комплетно.*

Доказ: Од примерот 2 на претходниот раздел следува дека $\mathbb{Q}$ не е комплетно. Ако $a=r/t$, $b=s/t \in \mathbb{Q}^+$ каде што $r, s, t \in \mathbb{N}$, тогаш, за $n=(s+1)/r$ имаме $na > b$. Според тоа, $\mathbb{Q}$ е архимедово. ◊

3°. *Ако P е архимедово поле и ако $b, c \in P^+$, $b>1$, тогаш постои $n \in \mathbb{N}$ таков што $b^n > c$.*

Доказ. Ако ставиме $h=b-1$, добиваме $b=1+h$, каде што $h > 0$. Нека $n \in \mathbb{N}$ е таков што $n \cdot h > c$. Според Бернулиевото неравенство (ж) од **1.7**), имаме:

$$b^n = (1+h)^n \geq 1+nh > c. \quad \Diamond$$

Како последица од 3° добиваме:

3′. *Ако P е архимедово поле и ако $a, c \in P^+$, $a<1$, тогаш постои $n \in \mathbb{N}$, таков што $a^n < c$.* ◊

4°. *Ако P е архимедово поле и ако $a, b \in P$, $a<b$, тогаш постои $r \in \mathbb{Q}$, таков што $a < r < b$.*

Доказ. Нека $c=b-a$ и нека $n \in \mathbb{N}$ е таков што $nc>1$ т.е. $(1/n)<c$. Да го избереме најмалиот природен број m таков што $m>na$. Според тоа, имаме $m-1 \leq na$, т.е. $(m-1)/n \leq a$, од што следува:

$$a < \frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{m-1}{n} < c + \frac{m-1}{n} \leq (b-a) + a = b. \quad \Diamond$$

На читателот му препорачуваме да го докаже и следново тврдење.

5°. *Нека P е архимедово поле и нека $A, B \subseteq P^+$. Ако постојат* $\sup A$, $\sup B$ ($\inf A$, $\inf B$), *тогаш постои и* $\sup(AB)$ ($\inf(AB)$) *и притоа*:

$$\sup(AB) = (\sup A)(\sup B), \quad (\inf(AB) = (\inf A)(\inf B)). \quad \Diamond$$

Притоа: $AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$.

Да се вратиме на комплетните полиња.

***Теорема* 6.** *Секое комплетно поле е архимедово.*

Доказ. Да претпоставиме дека тврдењето не е точно, т.е. дека постои комплетно поле P што не е архимедово. Тогаш, ќе постојат $a, b \in P^+$, такви што $na \leq b$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Ако со A го означиме множеството $\{na \mid n \in \mathbb{N}\}$, добиваме дека b е мајорант на A, па значи постои $c = \sup A$. Според тоа, имаме $(n+1)a = na + a \leq c$, т.е. $na \leq c - a$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Од тоа следува дека $c-a$ е мајорант на A, што не е можно, бидејќи c е супремумот на A. ◊

Од докажаната теорема следува дека:

7°. *Заклучоците на тврдењата* **3°**, **3'**, **4°** *и* **5°** *и важат за секое комплетно поле P*. ◊

Подолу ќе претпоставуваме дека P е дадено комплетно поле. Најглавниот резултат на овој дел е следново тврдење.

***Теорема* 8 (за изоморфизам на две комплетни полиња)**

Ако $(P;\ +,\ \cdot)$ *и* $(P';\ +,\ \cdot)$ *се комплетни полиња, тогаш постои биекција* $f\colon u \mapsto u'$ *од* P *во* P', *таква што*:

$$(\forall x,\, y \in P,\, z \in P^+)\quad [(x+y)' = x'+y',\ \ (xy)' = x'y',\ \ z' \in P'^+] \tag{2}$$

*Доказ.** Ќе дефинираме прво пресликување $I\colon x \mapsto I(x)$ од P^+ во фамилијата подмножества од $\mathbb{Q}^+$ со:

$$I(x) = \{y \mid y \in \mathbb{Q}^+,\, y < x\}. \tag{3}$$

Од (3) и порано докажаните својства на комплетните полиња (пред сè, својството 4°), лесно се добива дека, за секои $x,\, y \in P^+$ се точни следниве тврдења:

а) $I(x) = I(y) \Rightarrow x = y$, т.е. I е инјекција;

б) $x < y \Leftrightarrow I(x) \subset I(y)$;

в) $I(x+y) = I(x) + I(y)$, $I(xy) = I(x)I(y)$;

г) $x = \sup I(x)$.

д) Нека $S \subseteq \mathbb{Q}^+$. Постои $x \in P^+$ таков што $S = I(x)$ акко S ги има следниве својства:

д.1) $\varnothing \subset S \subset \mathbb{Q}^+$; д.2) $u \in S,\ v \in \mathbb{Q}^+,\ v < u \Rightarrow v \in S$;

д.3) Во S нема најголем ни најмал елемент;

д.4) S е мајорирано во $\mathbb{Q}^+$.

Од исти причини, ако $I'\colon x' \mapsto I'(x')$ е пресликувањето од P'^+ во фамилијата подмножества од $\mathbb{Q}^+$, дефинирано со:

$$I'(x') = \{y \mid y \in \mathbb{Q}^+ \wedge y < x'\}, \tag{3'}$$

точни се соодветните тврдења а'), б'), в'), г') и д').

Од тоа следува дека со:

$$f(x)=x' \Leftrightarrow I(x)=I\,'(x') \tag{4}$$

е дефинирана биекција од P^+ во P'^+, таква што во (2) се точни равенствата за $x, y \in P^+$. Проширувајќи го f со:

$$f(0)=0, \qquad f(-x)=-f(x), \tag{5}$$

ќе добиеме дека равенствата во (2) се точни и за произволни $x, y \in P$. ◊

За две подредени полиња велиме дека се ***изоморфни*** акко постои биекција од едното во другото со својствата (2). Според тоа, Т.8 може да се искаже во следниов облик:

Теорема 8'. *Кои било две комплетни полиња се изоморфни.* ◊

Обично, „изоморфните" структури не ги ни сметаме за различни, па затоа можеме од досегашната дискусија да го извлечеме заклучокот дека:

Постои најмногу едно комплетно поле.

Според тоа, потребно е да се докаже дека пости барем едно комплетно поле.

Ќе конструираме едно комплетно подредено поле, при што ќе го искористиме својството д) на пресликувањето I.

За подмножеството S од $\mathbb{Q}^+$ ќе велиме дека е ***почетен интервал*** во $\mathbb{Q}^+$ акко се исполнети условите д.1)–д.4). Множеството од сите такви интервали да го означиме со $\mathbb{R}^+$.

Од фактот што елементите на $\mathbb{R}^+$ се подмножества од $\mathbb{Q}^+$ се добива дека: $S, T \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow S+T,\ S\cdot T \subset \mathbb{Q}^+$, а релативно лесно се покажува и дека $S+T$, $S\cdot T \in \mathbb{R}^+$, т.е. дека:

ѓ) $(\mathbb{R}^+; +)$ и $(\mathbb{R}^+; \cdot)$ се групоиди.

Со малку поопстојна дискусија се добива дека се точни и следниве тврдења:

е) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$ е група; притоа $E=\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x<1\}$ е единицата на групата.

ж) $(\mathbb{R}^+; +)$е полугрупа со кратење без неутрален елемент.

з) Ако $S, T \in \mathbb{R}^+$, тогаш една и само една од следниве можности е исполнета:

$$(\exists U \in \mathbb{R}^+)\ T=S+U; \quad S=T; \quad (\exists V \in \mathbb{R}^+)\ S=T+V. \tag{6}$$

и) $(\forall S, T \in \mathbb{R}^+)\ [S \subset T \Leftrightarrow (\exists U \in \mathbb{R}^+)(T=S+U)]$.

ј) $(\forall S, T, U \in \mathbb{R}^+)\ [S(T+U)=ST+SU]$.

к) Секое мајорирано подмножество од $\mathbb{R}^+$ има супремум во $\mathbb{R}^+$.

Понатаму, конструкцијата на $\mathbb{R}$ се врши слично како и за $\mathbb{Z}$. Прво, ако $A\in\mathbb{R}^+$, имаме $-A\subset\mathbb{Q}^-$, каде што, според **11°** од претходниот раздел $-A=\{-x\,|\,x\in A\}$. Да ставиме:

$$\mathbb{R}^-=\{-A\,|\,A\in\mathbb{R}^+\} \quad \text{и} \quad \mathbb{R}=\mathbb{R}^+\cup\{0\}\cup\mathbb{R}^-. \tag{7}$$

Операцијата множење $(\cdot)$ се дефинира во $\mathbb{R}$ со:

$$AB=C \text{ во } \mathbb{R}^+ \Rightarrow A\cdot B=C \text{ во } \mathbb{R}; \quad X\cdot 0=0X=0; \tag{8}$$

$$A\cdot(-B)=(-A)\cdot B=-(AB), \qquad (-A)\cdot(-B)=AB$$

за секои A, B, $C\in\mathbb{R}^+$ и $X\in\mathbb{R}$.

Така се добива:

л) $(\mathbb{R};\ \cdot)$ е полугрупа со единица E, и притоа, за секој $A\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ постои единствен $A^{-1}\in\mathbb{R}^*$, таков што $A\cdot A^{-1}=E$.

(Следниов пример ја илустрира смислата на елементот M^{-1}: ако $A=\{x\in\mathbb{Q}^+\,|\,x < 1/2\}$, тогаш $A^{-1}=\{x\in\mathbb{Q}^+\,|\,x<2\}$. Да забележиме дека ознаката M^{-1} честопати се користи со друго значење. На пример, ако $B=\{2, 3, 1/5, 3/7\}$, тогаш $B^{-1}=\{1/2, 1/3, 5, 7/3\}$. Во оваа смисла, $\{x\in\mathbb{Q}^+\,|\,x < 1/2\}^{-1}=\{x\in\mathbb{Q}^+\,|\,x > 2\}$. Сепак, нема да дојде до недоразбирање, зашто натаму нема да сретнуваме такви случаи.)

Преостанува уште да се додефинира собирањето во $\mathbb{R}$. Тоа се прави на следниов начин:

$$X+0=0+X=X; \quad A+B=C \text{ во } \mathbb{R}^+ \Rightarrow A+B=C \text{ во } \mathbb{R},$$

$$(-A)+(-B)=-(A+B), \tag{9}$$

$$(A+B)+(-B)=A=(-B)+(A+B), \qquad [-(A+B)]+B=-A=B+[-(A+B)],$$

за секои $X\in\mathbb{R}$, A, B, $C\in\mathbb{R}^+$.

Од сето тоа следува

***Теорема* 9 (за егзистенција на комплетно поле)**

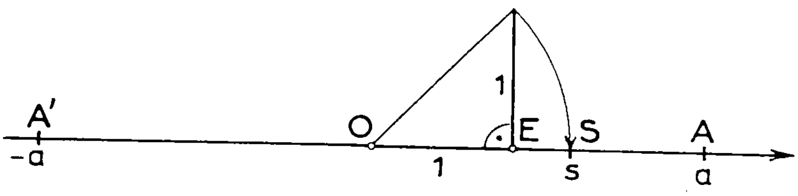
$(\mathbb{R};\ +,\ \cdot)$ *е комплетно подредено поле со множество позитивни елементи* $\mathbb{R}^+$. (За ова поле *велиме дека* е ***полето на реалните броеви***.)

Забелешка. Според конструкцијата на $\mathbb{R}$, извршена погоре, полето на реалните броеви е едно конкретно комплетно поле, а според Т.8′ секое друго комплетно поле е изоморфно со $(\mathbb{R};\ +,\ \cdot)$. Затоа, во иднина, кога ќе речеме дека „$\mathbb{R}$ е полето на реалните броеви“ ќе подразбираме дека „$\mathbb{R}$ е комплетно поле“, т.е. битни ќе ни бидат само својствата на $\mathbb{R}$ како комплетно поле, а не и начинот на конструкцијата.

Инаку, погоре конструираното поле R ја сугерира следнава геометриска интерпретација.

Нека е избрана една права и на неа две точки O и $E \neq O$.

Да земеме дека отсечката OE има должина 1. Тогаш, на познатиот начин, за секој позитивен рационален број a можеме да определиме точка A што лежи на правата десно од O, таква што отсечката OA да има должина a; со негативниот рационален број $-a$ тогаш еднозначно се определува точката A', како симетрична на A во однос на O.



Црт.1

На тој начин се определува пресликување од множеството на рационалните броеви во множеството точки од избраната права, кое очигледно е инјекција. Ова пресликување, меѓутоа, не е сурјекција, бидејќи, на пример, точката S што лежи десно од O и е избрана така што OS да е отсечка со должина еднаква со должината на хипотенузата од правоаголниот триаголник чии катети имаат должина 1, не е слика на ниеден рационален број (црт.1).

Ако секоја точка што е слика од некој рационален број при погоре определеното пресликување ја наречеме ***рационална точка***, тогаш множеството од сите рационални точки од правата, наречена ***рационална бројна оска***, не ги содржи сите точки од правата. Точките од избраната права кои не се рационални ги викаме ***ирационални***. По договор ќе земеме дека секоја ирационална точка S ни претставува еден ***ирационален број*** s, (т.е. точката S ја сметаме за *геометриски претставник* на еден ирационален број s), којшто ќе биде позитивен ако S лежи десно од O, а негативен ако S се наоѓа лево од O; притоа ќе сметаме дека s е должината на отсечката OS во случајот кога S е десно од O.

Множеството од сите рационални и ирационални броеви го означуваме со R и го викаме ***множество на реалните броеви***, а секој негов елемент – ***реален број***. Поимите „десно“ и „лево“ интуитивно се доволно јасни, но сепак да забележиме дека точката A е ***десно*** од O ако таа лежи на иста полуправа со почеток O како и единичната точка E. Пополнувајќи ја рационалната бројна оска со ирационалните точки, добиваме ***реална бројна оска***.

Некои подмножества од множеството на реалните броеви, што во овој дел ќе ги разгледаме, играат особено важна улога во изучувањето на својствата, како на самите реални броеви, исто така и на функциите од реални аргументи.

Нека се a и b два различни реални броја и нека $a<b$. Тогаш:

1) Со (a, b) ќе го означуваме[2)] множеството од сите реални броеви x такви што $a<x<b$:

$$(a, b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}.$$

Ова множество ќе го викаме ***интервал*** (или ***отворен интервал***);

2) $[a, b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$;

ова множество ќе го викаме ***сегмент*** (или ***затворен интервал***);

3) $[a, b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}$;

ова множество ќе го викаме ***лев полусегмент***;

4) $(a, b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}$;

симетрично со 3) ова множество го викаме ***десен плусегмент***.

Често пати целото множество од реалните броеви го означуваме во вид на интервал:

5) $\mathbb{R}=(-\infty, +\infty)$,

каде што $-\infty$ и $+\infty$ се само симболи (ги читаме „минус бесконечност" и „плус бесконечност"), а не реални броеви.

Во иста смисла како и за означувањето на $\mathbb{R}$ ги користиме и следниве ознаки:

6) $(-\infty, a)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$,

7) $(-\infty, a]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$,

[2)] Ознаката (a, b) се употребува со две значења: подреден пар (в. **1.1**) и отворен интервал. За да се избегнат евентуалните недоразбирања, натаму ќе запишуваме: „парот (a, b)" односно „интервалот (a, b)", ако од контекстот не е јасно што е (a, b).

8) $(a, +\infty)=\{x\in \mathbf{R} \mid a<x\}$,

9) $[a, +\infty)=\{x\in \mathbf{R} \mid a\leq x\}$.

Да забележиме дека ознаките $[-\infty, +\infty]$, $(a, +\infty]$, $[-\infty, a)$, во книгава, немаат смисла.

Нека δ е позитивен реален број и a произволен реален број. Интервалот $(a-\delta, a+\delta)$ го викаме ***околина*** или δ–***околина*** на бројот a; за δ велиме дека е ***радиус***, а за a – ***центар*** на околината $(a-\delta, a+\delta)$.

Иако $+\infty$ и $-\infty$ не се броеви, и за нив определуваме „околина"; имено, ако $a\in\mathbb{R}$ е произволен, тогаш интервалот $(a, +\infty)$ го викаме ***околина на*** $+\infty$, а интервалот $(-\infty, a)$ – ***околина на*** $-\infty$.

Имајќи ја предвид геометриската интерпретација на множеството од реалните броеви изнесена погоре, натаму, често, реалните броеви ќе ги викаме ***точки***. Секое подмножество M од множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви ќе го викаме ***множество од реални броеви***.

Нека M е множество од реални броеви (точки). Реалниот број a го викаме ***точка на згуснување*** на M ако секоја околина на a содржи барем една точка од M различна од a. Според тоа, *која било околина на една точка на згуснување на М содржи бесконечно многу точки од* M (види ја вежбата 9). Точката на згуснување a на множеството M може да му припаѓа, а може и да не му припаѓа на M. Да го илустираме изнесеното со следниов

Пример 1. а) Ако $M=\{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots , 1/n, \ldots\}$ и $M^*=\{1, 1/2, 1/3, \ldots , 1/n, \ldots\}$, тогаш бројот $a=0$ е точка на згуснување и на M и на M^*, којашто му припаѓа на M, но не му припаѓа на M^*.

б) Нека $M=(1, 2)$; сите точки од интервалот M се точки на згуснување на M, а покрај нив, уште и точките 1 и 2 кои не му припаѓаат на M, се точки на згуснување на M.

За точката $a\in M$ велиме дека е ***изолирана точка*** за множеството M ако постои околина на а која не содржи точки од M различни од a. За множеството $\mathbb{N}$ на природните броеви, на пример, секој природен број е изолирана точка за $\mathbb{N}$ (ако се земе $0<\delta<1$, тогаш за секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $(n-\delta, n+\delta)\cap\mathbb{N}=\{n\}$). И за множеството M^* од примерот 1 а) секој негов елемент е изолирана точка за M^* (навистина, за бројот $1/n$, ако се земе $0<\delta<[1/n(n+1)]$, ќе се добие дека пресекот на $((1/n)-\delta, (1/n)+\delta)$ и M^* се состои само од $1/n$).

Точката $a \in M$ ја викаме ***внатрешна точка*** за множеството M ако постои околина на a која целосно се содржи во M.

На пример, ако M е множеството од примерот 1 б), тогаш секоја негова точка е внатрешна точка за M. (Навистина, ако a е произволна точка од $M=(1, 2)$ и ако δ е помалиот од броевите $a-1$ и $2-a$, тогаш $(a-\delta, a+\delta) \subset M$). Поради ова својство, за множеството M велиме дека е отворено.

Општо, едно множество се вика ***отворено***, ако секоја негова точка е внатрешна.

Сегментот $S=[1, 2]$ не е отворено множество, зашто точките 1 и 2 не се внатрешни (иако сите други точки му се внатрешни). Но, тоа има едно друго својство: нему му припаѓа секоја негова точка на згуснување, т.е. тоа е затворено множество. Општо, едно множество S се вика ***затворено***, ако секоја точка на згуснување за S му припаѓа на S.

Така, секој затворен интервал (т.е. сегмент) е затворено множество, а секој отворен интервал е отворено множество.

ВЕЖБИ

1. Нека $A=\{x \mid x \in \mathbb{Q}^+, x^2 \leq 2\}$. Да се покаже дека постои $a=\sup A$ (во $\mathbb{R}$) и дека a е ирационален број. (Притоа, за еден реален број a велиме дека е ***ирационален*** ако не е рационален.)

   Помош. Да се искористи резултатот на вежбата 3 од **1.6**.

2. Да се покаже дека ако a е ирационален број, тогаш $x \mapsto x+a$ е инјекција од $\mathbb{Q}$ во $\mathbb{J}$, при што $\mathbb{J}$ е множеството ирационални реални броеви.

3. Да се дадат примери на ирационални броеви a, b, c, d, такви што:

   $a>1,\quad 0<b<1,\quad c<-5,\quad d>9.$

   Помош. Да се искористи резултатот од вежбата 1.

4. Да се покаже дека ако r и s се рационални броеви, такви што $r<s$, и ако a е ирационален број поголем од 1 (таков е, на пример, бројот a од вежбата 1), тогаш $b=r+(s+r)a^{-1}$ е ирационален број со својството: $r<b<s$.

5. Да се покаже дека ако c и d се реални броеви, такви што $c<d$, тогаш постои ирационален број b со својството: $c<b<d$.

   Помош. Да се искористат својството 4° и вежбите 1 и 4.

6. Да се покаже дека во секој сегмент $[a, b]$, каде што $a<b$, има безброј многу рационални и безброј многу ирационални броеви.

7. Да се покаже дека:

а) ако $a<b$, тогаш интервалот (a, b) е отворено множество;

б) унија на творени множества е отворено;

в) $\mathbb{Q}$ не е отворено множество;

г) $\mathbb{R}$ е отворено множество;

д)* $\varnothing$ е отворено множество;

ѓ)* пресек на две отворени множества е отворено.

8.* Да се покаже дека

а) подмножеството F од $\mathbb{R}$ е затворено акко $\mathbb{R}\backslash F$ е отворено;

б) $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ се затворени множества;

в) $\mathbb{Q}$ не е затворено множество;

г) пресек на затворени множества е затворено;

д) унија на две затворени множества е затворено.

9. Докажи дека: која било околина на една точка на згуснување на дадено множество M содржи бесконечно многу точки од M.

10. Да се решат равенките:

а) $|x+2| - |x| = 1$;

б) $|x-1| + |x-3| = 2$;

в) $|x-1| + |x-2| - |x+1| = 3$;

г) $||x-a| + 1| + 1| = 2$.

11. Да се решат неравенките:

а) $|x+2| + |x-2| \leq 6$;

б) $|2x-1| - |x-1| < 0$.

1.9. Десетични дропки

На секој од читателите му се познати конечните десетични дропки. На пример, бројот три и петнаесет илјадинки го пишуваме во облик: 3,015. Поопшто, ако a_0, a_1, ... , $a_n \in \mathbb{N}^\circ$, при што $0 \leq a_i \leq 9$ $(i \geq 1)$, тогаш бројот

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}, \qquad (1)$$

го пишуваме во облик

$$a = a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_n; \qquad (1')$$

притоа запирката меѓу a_0 и a_1 се вика ***десетична запирка***, а за a велиме дека е ***конечна десетична дропка*** (кдд). И ненегативните цели броеви можат да се сметаат за кдд, а имено $a_0 = a_0$,0...0, но за натаму ќе претпоставуваме дека во (1) имаме $a_n>0$, $n\geq1$, па во тој случај ќе велиме дека a е ***вистинска кдд*** (вкдд).

***Теорема* 1 (за вкдд)**

Ако a е вкдд, тогаш $a \in \mathbb{Q}^+\setminus\mathbb{N}$. Обратно ако $b/c \in\mathbb{Q}^+\setminus\mathbb{N}$, каде што b, $c\in\mathbb{N}$се такви што НЗД$(b, c)=1$, тогаш a е вкдд акко $c=2^{\alpha}5^{\beta}$, каде што $\alpha+\beta\geq1$, α, $\beta\geq0$. ◊

Како што се гледа од формулираната теорема, постојат безброј рационални броеви што не се кдд, но во практична примена доаѓаат до израз само кдд. Тврдењето што сега ќе го формулираме претставува едно образложение на тој феномен.

***Теорема* 2 (за бесконечни десетични дропки)**

Нека $a\in\mathbb{R}^+$. Постои, еднозначно определена низа ненегативни цели броеви a_0, a_1,...,a_n, a_{n+1},... таква што $0 \leq a_n \leq 9$ за $n \geq 1$, и

$$a_0,\, a_1a_2...a_n \;\leq\; a \;<\; a_0,\, a_1a_2...a_n+10^{-n}, \tag{2}$$

за секој $n\geq1$.

Доказ*. Од архимедовоста на $\mathbb{R}$ следува дека постои $m\in\mathbb{N}^{\circ}$, таков што $a < m+1$. Избирајќи го најмалиот број m со тоа својство и ставајќи $m=a_0$, добиваме $a_0 \leq a < a_0 + 1$. Потоа, постои единствен a_1: $0 \leq a_1 \leq 9$, таков што

$$a_0+\frac{a_1}{10}=a_0,a_1 \,<\, a \,<\, a_0,a_1+10^{-1}=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}.$$

Претпоставувајќи дека низата a_0,a_1,...,a_m е формирана така што (2) е точно за секој n: $1\leq n\leq m$, добиваме дека постои единствен a_{m+1}: $0 \leq a_{m+1} \leq 9$, таков што (2) е точно и за $n=m+1$.

Ако врската меѓу $a\in\mathbb{R}^+$ и низата a_0,a_1,...a_n,... е како во Т.2, тогаш пишуваме:

$$a = a_0,\, a_1a_2...a_n... \;, \tag{3}$$

и велиме дека a е претставен како ***бесконечна десетична дропка*** (бдд). Притоа, кдд a_0, a_1 a_2...a_n ја означуваме со $[a]_n$, а за $a=[a]_0=[a]$ велиме дека е ***цел дел*** на a.

Да уочиме дека ако е точно равенството (3), тогаш е исполнет и условот:

$$(\forall n\in\mathbb{N})\,(\exists k\in\mathbb{N})\quad a_{n+k}\neq 9 \tag{4}$$

(вежба 9).

Со претходната дискусија покажавме дека секој позитивен реален број a се претставува како бдд. Ќе покажеме сега дека важи и обратното.

***Тврдење* 3.** *Ако $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ е низа ненегативни цели броеви такви што $1\leq a_n\leq 9$, за $n\geq 1$, при што и условот (4) важи, тогаш постои единствен ненегативен реален број a, таков што да важи равенството (3).*

*Доказ**. a_0+1 е мајорант за множеството $\{a_0,\, a_1\ldots a_n \mid n\in\mathbb{N}\}=A$, па според тоа, постои $a=\sup A$. Потоа, се покажува дека е точно (2), од што следува заклучокот. ◊

Од горните својства следува дека постои биекција меѓу негативните реални броеви и бдд што го задоволуваат условот (4). Според тоа, постои можност да се дефинираат позитивните реални броеви како такви бдд. При таква конструкција на реалните броеви нема потреба од специјална дефиниција на $\mathbb{Q}$, т.е. може да се конструира $\mathbb{R}\cup\{0\}$ со помош на $\mathbb{N}$.

Една кдд $a=a_0,a_1\ldots a_n$ може да се претстави како бдд од облик

$$a_0,a_1\,a_2\ldots a_n00\ldots0\ldots = a_0,a_1a_2\ldots a_n(0);$$

притоа $\ldots a_n(0)$ значи дека $a_{n+k}=0$ за секој $k\geq 1$, т.е. дека кдд се ***периодични*** бдд, каде што нулата се повторува од a_n „надесно". Поопшто, точна е следнава

***Теорема* 4 (за претставување на рационалните броеви како периодични бдд)**

Реалниот број a претставен со (3) е рационален акко постојат $k,p\geq 0$ такви што

$$a_{k+i}=a_{k+p+i}, \tag{5}$$

за секој $i\in\mathbb{N}$. ◊

Во горниот случај равенството (3) се пишува во обликот:

$$a=a_0,a_1\ldots a_k(a_{k+1}\ldots a_{k+p}), \tag{3'}$$

а за десетичната дропка велиме дека е ***периодична***. Притоа, ако k и p се најмалите броеви со горното својство, делот $a_0,a_1,\ldots a_k$ го викаме ***непериодичен***, а $a_{k+1}\ldots a_{k+p}$ ***периодичен дел***; за $k=0$ велиме дека дропката е ***чисто периодична***, а за $k\geq 1$ – ***нечисто периодична***.

Пример 1. $1/3 = 0,(3)$ е чисто периодична дропка, а $1/6 = 0,1(6)$ е нечисто периодична дропка. И вистгинските кдд можат да се сметаат за нечисто периодични. Така: $1/2 = 0,5(0)$.

Како што споменавме и во почетокот на овој дел, секој реален број $a \in \mathbf{R}^+$ се заменува со соодветната кдд:

$$[a]_n = a_0,\, a_1 \dots a_n; \qquad 0 \le a - [a]_n < 10^{-n}.$$

Притоа велиме дека a е ***приближно еднаков*** со $[a]_n$ со ***апсолутна грешка*** помала од 10^{-n}.

Поопшто, ако a му припаѓа на сегментот $[c, d]$, тогаш секој број $a^* \in [c, d]$ е приближно еднаков со a; ознака $a \approx a^*$.

Притоа бројот $|a - a^*|$ се вика ***апсолутна грешка на приближувањето*** a^*. Обично, апсолутната грешка не ја знаеме, бидејќи во спротивен случај, немаме потреба од приближно сметање. Затоа, добро е да се знае максималната можна вредност на апсолутната грешка. Така, знаејќи дека $c \le a \le d$ и $c \le a^* \le d$, сигурни сме дека апсолутната грешка не е поголема од $d - c$. На пример, од $0,66 < 2/3 < 0,67$ следува дека за секој број a: $0,66 \le a \le 0,67$ ставајќи $a \approx 2/3$ правиме апсолутна грешка помала од $0,01$.

При конкретна работа со приближни вредности, оперираме со броеви кои се приближно точни. На крајот, се поставува задачата да се оцени максималната можна вредност на апсолутната грешка. Според тоа, добро е да се знае како се менува апсолутната грешка при собирање, вадење, множење и делење на приближни вредности. Одговор на ова прашање (донекаде) дава следново својство

5°. *Нека:*

$$|x - x^*| < \varepsilon, \quad |y - y^*| < \delta \quad \text{и} \quad 0 < a < |y| < b;$$

тогаш, ставајќи

$$x + y \approx x^* + y^*, \quad x - y \approx x^* - y^*, \quad xy \approx x^* y^*, \quad \frac{x}{y} \approx \frac{x^*}{y^*}$$

правиме апсолутни грешки што не се поголеми од:

$$\varepsilon + \delta, \quad \varepsilon + \delta, \quad b\varepsilon + |x^*|\delta, \quad \frac{\varepsilon}{a} + \frac{|x^*|}{a|y^*|}\delta,$$

соодветно. ◊

Да разгледаме еден пример:

Пример 2. Нека страните на еден правоаголник се измерени приближно $a \approx 50$ cm, $b \approx 100$ cm, при што се знае дека е направена апсолутна грешка што не е поголема од 1 mm. Приближната вредност на плоштината на правоаголникот е 5 000 cm^2, а, притоа, апсолутната грешка не е поголема од $(50{,}1 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}1)$ $cm^2 = 15{,}01$ cm^2.

Апсолутната грешка не е доволна за да се окарактеризира степенот на приближноста. Тоа може да се уочи и од следниов пример.

Пример 3. Нека при мерење на 1 m должина се направи апсолутна грешка од 1 mm, а при мерење на 10 km должина се направи апсолутна грешка од 1 m. И покрај тоа што во вториот случај е направена многу поголема апсолутна грешка, јасно е дека тој резултат треба да го сметаме за попрецизен.

До оваа констатација ќе дојдеме полесно ако претходно воведеме поим за релативна грешка. Имено, ако $x \approx x^*$, тогаш количникот

$$\left|\frac{x - x^*}{x^*}\right|$$

се вика ***релативна грешка***. Така, релативната грешка при првото мерење не е поголема од 10^{-3}, а при второто – од 10^{-4}.

Теоријата на приближни пресметувања има едно од најважните места во математиката, но, сепак, ќе се задоволиме само со кажаното.

ВЕЖБИ

1* Да се докажат некои резултати што во овој раздел се дадени без доказ.

2. Ако $a = a_0,a_1a_2...a_n$ е конечна десетична дропка, тогаш:

(i) $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n\underbrace{00\ldots0}_{m}$;

(ii) $10^k a$ се добива на тој начин, што десетичната запирка ќе се помести за k места надесно; притоа, ако $k \geq n$, претходно се допишуваат $k - n$ нули оддесно и се добива дека $10^k a$ е природен број.

3* Користејќи ги резултатите од претходната вежба, да се докажат познатите правила за оперирање со конечни десетични дропки.

4* Нека S е множеството ненегативни рационални броеви од облик m,a, каде што $m \geq 0$, $0 \leq a \leq 9$. Операцијата множење $*$ се определува на обичен начин, со тоа што ако се добие резултат s,ab за $b < 5$, децималата b се изоставува, (т.е. се зема бројот s,a) а за $b \geq 5$, наместо $s,\ ab$, се зема бројот $s,a+0,1$. Да се испитаат својствата на операцијата $*$.

5. Дропките $329/15$, $1/7$, $3/40$, $27/32$, $83/111$ да се претворат во периодични десетични дропки.

6. Да се образложи методот на работа во претходната вежба.

7. Да се претвори десетичната дропка $0,(12)$ во обична.

8. Да се докаже дека: $0,(a_1a_2...a_q)=\dfrac{a_1a_2\dots a_q}{\underbrace{99\dots 9}_{q}}$.

9. Да се претворат во обични дропки:

   а) $8,(24)$; б) $0,2(45)$; в) $3,310(13)$.

10. Да се докаже дека:

$$a=0,a_1\dots a_k(a_{k+1}\dots a_{k+p})=\frac{a_1\dots a_k\overbrace{9\dots 9}^{p}+a_{k+1}\dots a_{k+p}}{\underbrace{99\dots 9}_{p}\underbrace{0\dots 0}_{k}}.$$

Да се оценат апсолутните и релативните грешки во секој од следниве приближувања (11 – 14):

11. $12 \approx 10$. **12.** $1/3 \approx 1$. **13.** $1/3 \approx 0,33$. **14.** $\sqrt{2} \approx 1,41$.

15. Страните на правоаголникот се еднакви со $a = 2,5\ cm \pm 0,01\ cm$, $b = 4,6\ cm \pm 0,02\ cm$. Во кои граници се наоѓа плоштината на правоаголникот?

1.10. Корени и логаритми

Со операциите коренување и логаритмирање во $\mathbb{R}$ читателот е добро запознат, па затоа овде ќе се задоволиме само со неколку забелешки и примери за повторување на материјалот.

Прво, ќе го дефинираме поимот корен.

Ако $a,\ b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ се такви што $b^n=a$, тогаш велиме дека b е n***–ти корен*** од a и пишуваме $b=\sqrt[n]{a}$. Според тоа,

$$b=\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a. \tag{1}$$

a се вика ***поткоренова величина***, а n***–коренов показател***.

Да претпоставиме дека $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}^+$ и да го разгледаме множеството броеви $A = \{x \mid x\in\mathbb{R}^+, x^n \geq a\}$. A е минорирано, од што следува дека пости $b = \inf A$. Секоја од претпоставките $b^n < a$, $b^n > a$ би довела до контрадикција, па според тоа $b^n = a$, и притоа $b > 0$. Од друга страна, според ѓ) од **1.7**, имаме: $0 < b < c \Rightarrow b^n < c^n$, па така добиваме дека е точна следнава

***Теорема* 1 (за егзистенција на корени)**

Ако $a\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}$, тогаш постои единствен $b\in\mathbb{R}^+$, таков што: $b^n = a$, т.е. $b = \sqrt[n]{a}$. ◊

Имајќи предвид дека n–ти корен од 0 е 0, за секој $n\in\mathbb{N}$, доаѓаме до заклучок дека преостанува уште да се разгледа случајот $a < 0$. Ако n е парен, тогаш во овој случај n–ти корен од a не постои, бидејќи $b^n \geq 0$ за секој b. За n непарен имаме $(-b)^n = -b^n$, т.е. $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$, за $-a>0$. Од направената дискусија, ако се има предвид и **Т.1**, добиваме

***Теорема* 2 (за корен од негативен број)**

За $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ постои акко n е непарен и, во тој случај, овој корен е негативен и еднозначно определен. ◊

Преостанува случајот $a > 0$. За n непарен $\sqrt[n]{a}$ е, секако, позитивен, а според Т.1 е и еднозначно определен. Но, за n парен имаме $(-b)^n = b^n$, па значи ако $b = \sqrt[n]{a}$, тогаш и $-b = \sqrt[n]{a}$. Според тоа за n парен и $a > 0$, $\sqrt[n]{a}$ има две вредности што се разликуваат само по знак. Сакајќи $\sqrt[n]{a}$ да биде еднозначно определен ќе се договориме: за $a > 0$ и n парен да биде $\sqrt[n]{a} > 0$, а за овој број велиме дека е ***аритметичка вредност*** на коренот.

Како резиме на горната дискусија и направениот договор, можеме да ја формулираме следнава

***Теорема* 3.** *n–ти корен од бројот a:*

1) *за $a > 0$ е еднозначно определен позитивен број;*
2) *за $a < 0$ постои само ако n е непарен и тогаш е еднозначно определен негативен број;*
3) *за $a = 0$ е нула.* ◊

Користејќи ги својствата на степените со природни експоненти, како и дефиницијата на корените лесно се докажуваат следниве својства:

а) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a}\,/\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$.

б) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

в) $\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|$; $\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = a$.

г) $0 < a \Rightarrow (a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b})$.

д) $\sqrt[n]{1+a} \leq 1 + a/n$.

ѓ) $a > 1 \Rightarrow (m < n \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a})$.

е) $0 < a < 1 \Rightarrow (m < n \Leftrightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a})$.

ж) $a > 1,\ 0 < b < 1,\ c > 0 \Rightarrow (\exists m,\ n \in \mathbb{N})\ (\sqrt[m]{a} < 1+c,\quad \sqrt[n]{b} > 1-c)$.

Забелешка 1. Кај равенствата а)–в) се претпоставува дека левите страни од соодветните равенства постојат, од што следува дека постојат и десните и важат равенствата. Притоа, значењето на тврдењето, на пример, „n–ти корен од a постои" е објаснето во Т.3 (Да истакнеме дека „n–ти корен од a не постои" значи дека тој не постои во $\mathbb{R}$, додека ситуацијата е сосема инаква во $\mathbb{C}$). Потоа, апсолутната вредност $|x|$ што се појавува на десната страна од б) е резултат од договорот да работиме само со аритметичката вредност на корен со парен показател. И, на крајот, секаде се претпоставува дека $m,\ n \in \mathbb{N}$.

Со помош на коренување се дефинира и ***степенување со рационални експоненти***. Имено, ако $a > 0$ и $r \in \mathbb{Q}^+$, тогаш a^r се дефинира со:

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}, \tag{2}$$

каде што $r = m/n$, $m,n \in \mathbb{N}$. Од второто од равенствата б) следува дека степенот a^r не зависи од формата m/n во која е претставен r, туку само од r. Потоа, од равенствата б) следува дека степен со позитивна реална основа и природен показател е специјален случај од степен со рационален експонент. На прв поглед, се добива впечаток дека за парен m би можело да се дефинира степен и со негативна основа a, но еден пример ни укажува дека тоа не е можно секогаш. Имено:

$$(-2)^{6/8} = \sqrt[8]{(-2)^6} = \sqrt[8]{2^6} = 2^{3/4},$$

но, од $6/8 = 3/4$ би требало да следува и:

$$(2)^{6/8} = (-2)^{3/4} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8},$$

а последниот корен не постои, според Т.3, 2). Инаку, за $r > 0$, се става:

$$0^r = 0. \tag{2'}$$

Степен со негативен рационален експонент се дефинира со:

$$a^r = (a^{-1})^{-r}, \qquad (2'')$$

каде што $-r \in \mathbb{Q}^-$, $a \in \mathbb{R}^+$. Користејќи ги равенствата а), б), в), се добива дека:

з) $a^r a^s = a^{r+s}$, $(ab)^r = a^r b^r$, $(a/b)^r = a^r/b^r$, $(a^r)^s = a^{rs}$,

за секој $a \in \mathbb{R}^+$, $r,s \in \mathbb{Q}$.

Освен тоа, лесно се докажува дека важат и својствата ѓ) и е) од 1.7 и за случајот кога претпоставката $m,n \in \mathbb{N}$ се замени со $m,n \in \mathbb{Q}^+$.

Преостанува да се дефинира поимот за ***степен со*** позитивна основа и произволен ***реален експонент***, а за тоа битно придонесува фактот што $\mathbb{R}$ е комплетно поле. Имено, ако $a \in \mathbb{R}^+$, $a > 1$ и $x \in \mathbb{R}^+$, тогаш a^x се дефинира со:

$$a^x = \sup_{\mathbb{R}}\{a^r \mid r \in I(x)\}, \qquad (3)$$

при што $I(x)$ е дефинирано како при доказот на Т.8 од 1.8, т.е.

$$I(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}.$$

Десната страна од (3) постои, бидејќи $A = \{a^r \mid r \in I(x)\}$ е мајорирано. Потоа, за a: $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, a^x се дефинира со:

$$a^x = ((a^{-1})^x)^{-1} \qquad (3')$$

и, на крајот, за $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ се става:

$$a^x = ((a^{-1})^{-x})^{-1}. \qquad (3'')$$

Се разбира, a^0 за $a \neq 0$ се дефинира со:

$$a^0 = 1. \qquad (3''')$$

Со дадените дефиниции е осмислен поимот за степен со основа кој било позитивен реален број и кој било реален експонент. Првата работа што, по оваа дефиниција се прави тоа е дека, во случај кога $r \in \mathbb{Q}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a > 1$, дефинициите на a^r дадени со (2) и (3) се согласни. Потоа, се докажува дека важат равенствата з) и за $r,s \in \mathbb{Q}$, како и ѓ) и е) од 1.7, при $m,n \in \mathbb{R}^+$.

За дефинирањето на ***логаритмирање*** потребно е уште ова својство:

и) $(\forall a,b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$ $(\exists! c \in \mathbb{R})$ $a^c = b$.

Потоа, при дадени $a,b\in\mathbb{R}^+$, $a\neq 1$, $\log_a b$ се дефинира со:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b. \tag{4}$$

Велиме дека c е ***логаритам*** од b ***при основа*** a.[1]) Користејќи ги равенствата з) (се разбира при $r,s\in\mathbb{R}$) лесно се докажуваат равенствата:

ј) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$,

при што $a,x,y\in\mathbb{R}^+$, $a\neq 1$.

Исто така:

к) $a > 1 \Rightarrow (0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y)$;

$a > 1 \Rightarrow (\log_a x > 0 \Leftrightarrow x > 1)$.

Како заклучок ќе нагласиме уште еднаш дека кај коренувањето и степенувањето со реални експоненти битна улога има комплетноста на $\mathbb{R}$, а имено од тоа следува егзистенцијата на соодветните корени и степени. Потоа, треба да се има секогаш предвид дека, за парен n и позитивен a, од двете можни вредности на n–ти корен од a ја земаме позитивната, т.е. аритметичката вредност на тој корен. И, на крајот, $\log_a b$ постои само ако: $a,b > 0$, $a\neq 1$.

ВЕЖБИ

1.* Да се докажат (неколку од) својствата а)–к).

2. Да се изведе формулата за решавање на квадратната равенка: $x^2+2px+q=0$ каде што p, $q\in\mathbb{R}$. Во кој случај равенката има решение?

Во задачите 3–7 да се изврши упростување на соодветните изрази.

3. $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$. **4.** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$. **5.** $\sqrt{75-12\sqrt{21}}$.

6. $\sqrt{17+4\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$. **7.** $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

Во задачите 8 – 10 да се изврши рационализирање на именителите:

8. $\dfrac{4}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. **9.** $\dfrac{12}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}$. **10.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$.

Во задачите 11–16 да се решат дадените равенки.

[1]) Ако основата a се подразбира, пишуваме $\log b$, а $\lg b$ наместо $\log_{10} b$.

11. $\sqrt{x-1}=7-\sqrt{x-8}$.

12. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$.

13. $3^{x+1}+3^x=108$.

14. $27^{2\sqrt{x}}-4\cdot 3^{\sqrt{9x}}+3=0$.

15. $\log x(x-1)-\log 2=\log(2x+3)$.

16. $\log_2 x\cdot\log_x 2=1$.

Во задачите 17–20 да се докажат соодветните равенства и да се наведат условите што треба да ги задоволуваат соодветните променливи.

17. $(\log_y x)\cdot(\log_x y)=1$.

18. $(\log_x y)\cdot(\log_y z)=\log_x z$.

19. $(\log_b a)\cdot(\log_c a)=(\log_b a+\log_c a)(\log_{bc} a)$.

20. $(\log_a b)^{-1}+(\log_{a^2} b)^{-1}+(\log_{a^3} b)^{-1}+(\log_{a^4} b)^{-1}=10\log_b a$.

21. Каков треба да биде рационалниот број $r=m/n$ за да биде осмислена дефиницијата (2) и за $a<0$?

1.11. Неколку примени на принципот на математичката индукција

Принципот на математичката индукција (ПМИ), како една варијанта на аксиомата за индукција (АИ), што го формулиравме во 1.4, ќе го наведеме и тука, поради неговите големи примени.

(*ПМИ*) *За да се докаже дека некое својство за природните броеви го има секој природен број, доволно е да се покаже дека:*

(*i*) *својството го има бројот* 1 *и*

(*ii*) *ако својството го има природниот број n, тогаш го има и n*+1.

Овде ќе дадеме неколку примени на ПМИ.

Пример 1. Да покажеме дека за секој $n\in N$ е точно неравенството

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}. \tag{1}$$

Ќе дадеме два доказа.

I. **Директен доказ.** Од својството г) во **1.10**, следува дека $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ за $1 \leq k \leq n$; според тоа $1/\sqrt{k} \geq 1/\sqrt{n}$, па левата страна од (1) не е помала од $n \cdot 1/\sqrt{n} = \sqrt{n}$.

II. **Со помош на ПМИ.** За $n = 1$ во (1) важи равенство. Претпоставувајќи дека (1) е точно за n, додавајќи лево и десно $1/\sqrt{n+1}$, добиваме:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

па значи доволно е да покажеме дека

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}, \qquad (1')$$

а тоа лесно се докажува, бидејќи (1′) е еквивалентно со:

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{n}{\sqrt{n+1}},$$

т.е. со $\sqrt{n+1} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, а последното неравенство е точно поради $n+1>n$. ◊

Јасно е дека директниот доказ е поедноставен, но тоа се должи само на специфичноста на примерот.

Пример 2. Ќе покажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ е точно неравенството

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \qquad (2)$$

Во овој пример ќе работиме само со помош на ПМИ (зашто не гледаме директен едноставен доказ).

За $n = 1$, (2) се сведува на $1/2 < 1/\sqrt{3}$, што е точно, бидејќи $\sqrt{3} < 2$. Претпоставувајќи дека (2) е точно, множејќи со $(2n+1)/(2n+2)$, добиваме:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

па, според тоа, доволно е да покажеме дека:

$$\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}},$$

т.е.

$$\sqrt{2n+1} < \frac{2n+2}{\sqrt{2n+3}}. \qquad (2')$$

Значи, (2) е последица од (2′). Од друга страна (2′) е еквивалентно со: $(2n+1)(2n+3) < (2n+2)^2$, т.е. со $3 < 4$.

Пример 3. *Биномнаша формула шшо ќе ја докажеме йодолу е шочна во секој ӣрсшен, но, сейак, ќе ја ӣрименуваме само во* $\mathbb{R}$.

Да потсетиме прво дека, за секој $n \in \mathbb{N}^\circ$, $n!$ (читаме „ен факториели") се дефинира како што следува:

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \text{ за } n \geq 2. \tag{3}$$

Потоа, за $k,n \in \mathbb{N}^\circ$, $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ (читаме „ен над к") се определува со:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Од тоа следува:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{1} = n, \tag{5}$$

како и:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k}. \tag{6}$$

Лесно се покажува и дека е точна следнава формула:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \tag{7}$$

за секои $0 \leq k < n$.

Сега ќе ја докажеме следнава

Теорема (**Биномна формула** (БФ) или **Њутнова**[1] **формула**)

За кои било $a,b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, *шочно е следново равенсшво:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n. \tag{8}$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со помош на принципот на математичката индукција. За $n = 1$, (3) се сведува на тривијалното равенство $(a+b)^1 = a+b$.

(Секој од читателите ги знае формулите:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,

---

[1] Исак Њутн (*Isaac Newton*, 1642-1727), најголемиот англиски физичар и математичар.

па бидејќи:

$$\binom{2}{0}=1,\quad \binom{2}{1}=2,\quad \binom{2}{2}=1;\quad \binom{3}{0}=1,\quad \binom{3}{1}=3,\quad \binom{3}{2}=3,\quad \binom{3}{3}=1,$$

$$\binom{4}{0}=1,\quad \binom{4}{1}=4,\quad \binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6,\quad \binom{4}{3}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}=4,\quad \binom{4}{4}=1,$$

добиваме дека БФ важи и за $n = 2, 3, 4$.)

Претпоставуваме дека БФ е точна за n. Заменувајќи го $(a+b)^n$ во $(a+b)^n(a+b)$ со десната страна од (8), множејќи и средувајќи го добиениот збир по степените на a^ib^j и, на крајот, применувајќи го (7), ќе добиеме дека (8) е точно и за $n + 1$. ◊

ВЕЖБИ

Во задачите 1–8 да се докажат соодветните тврдења со помош на ПМИ.

1. $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$.

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.

3. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

4. $1^5+2^5+\ldots+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

5. $6 \mid n^3-n$.

6. $64 \mid 3^{2n+2}-8n-9$.

7. $2304 \mid 7^{2n}-48n-1$.

8. Ако $a_1=2$ и $a_{n+1}=\sqrt{4+a_n}$ за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш за секој $n\in\mathbb{N}$, $a_n<3$ и $a_n<a_{n+1}$.

9. Да се покаже дека последователното пресметување на биномните коефициенти може да се оствари со помош на следнава шема (***Паскалов***[2] ***триаголник***):

$n=0$:							1						
$n=1$:						1		1					
$n=2$:					1		2		1				
$n=3$:				1		3		3		1			
$n=4$:			1		4		6		4		1		
$n=5$:		1		5		10		10		5		1	
$n=6$:	1		6		15		20		15		6		1

2) Блез Паскал (*Blaise Pascal*, 1623-1662), голем француски математичар, физичар и филозоф.

Притоа, на пример, броевите од редицата при $n=5$ се коефициентите на петтиот степен од некој бином. Секој од тие броеви, освен единиците на краевите, се добива како збир на двата броја кои се наоѓаат над него, во претходната редица (на пример: $5=1+4$, $10=4+6$ итн.).

10. Да се пресмета:

а) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6$; б) $\frac{1}{\sqrt{c}}[(a+b\sqrt{c})^5-(a-b\sqrt{c})^5]$.

Во задачите 11–12 да се докажат соодветните равенства со помош на БФ.

11. $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$. **12.** $0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$.

13. Нека $a_1, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ е бесконечна низа реални броеви и нека, за секој $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n}a_i$ е дефиниран како што следува:

$$\sum_{i=1}^{1}a_i=a_1,\quad \sum_{i=1}^{n+1}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}.$$

Да се покаже дека:

а) $[(\forall n\in\mathbb{N})\ b_n=ca_n]\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}b_i=c\sum_{i=1}^{n}a_i$.

б) $(\forall n\in\mathbb{N})(c_n=a_n+b_n)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}c_i=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$.

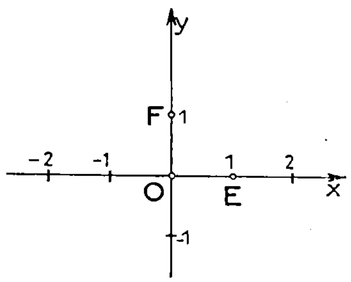
Знакот $\sum_{i=1}^{n}$ се вика ***знак за конечен збир*** и се чита: „сигма и од еден до ен“.

14. Збировите од вежбите 1–4 и 11–12 (како и некои од текстот), да се изразат со помош на знакот за конечни суми (Σ), воведен во вежбата 13.

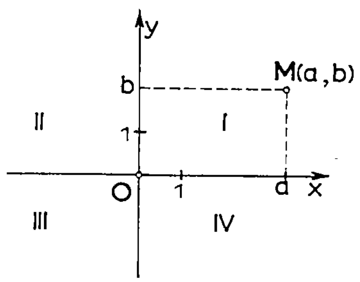
1.12. Координатни системи

Геометриското толкување на реалните броеви како точки од бројна оска овозможува дадената рамнина да се „аритметизира“, т.е. секоја точка од таа рамнина да се толкува како подреден пар реални броеви и да се вршат „аритметички дејства“ со новодобиените објекти.

Имено, нека е дадена рамнина Σ. Ако Ox и Oy се две заемно нормални прави на таа рамнина со пресечна точка O и ако на нив се избрани единични отсечки OE и OF соодветно[1], тогаш тие стануваат две заемно нормални бројни оски, наречени ***правоаголен декартов координатен систем***[2] (црт.1). Точката O се вика ***координатен почеток***, правата Ox се вика ***апсцисна*** или ***x–оска***, а Oy – ***ординатна*** или ***y–оска***. Апсцисната и ординатната оска се викаат ***координатни оски***, а рамнина во која е зададен координатен систем Oxy се вика ***координатна рамнина***. Таа е разделена на четири делови, наречени ***квадранти*** (на црт.2 се означени со I–IV).



Црт.1



Црт.2

Со тоа, *подредениот пар* (a, b) *од реалните броеви* a *и* b *ја претставува точката* M *на* црт.2 *и обратно, точката* M *го претставува подредениот пар* (a, b). Имено, лесно се согледува дека постои биекција φ: $\mathbb{R}^2 \to \Pi$, каде што $\mathbb{R}^2$ е множеството подредени двојки реални броеви, $\mathbb{R}^2=\{(x, y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$, а Π е множеството точки од координатната рамнина.

За точката M бројот a се вика ***апсциса***, бројот b ***ордината***, а со заедничко име тие се викаат ***правоаголни декартови координати на точката*** M.

Воведувањето на поимот координати на точка овозможува да се изучуваат геометриските објекти со помош на методите на алгебрата. (Како што му е добро познато на читателот, тоа е предметот на аналитичната геометрија.)

---

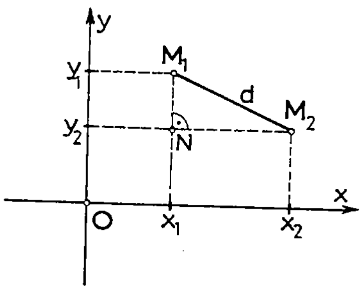
[1] Натаму, единичните отсечки на координатните оски ќе ги земаме обично за еднакви; но во конкретни проблеми, често се наложува потреба тие да се земат различни.

[2] Рене Декарт (*René Descartes*, 1596-1654), француски математичар.

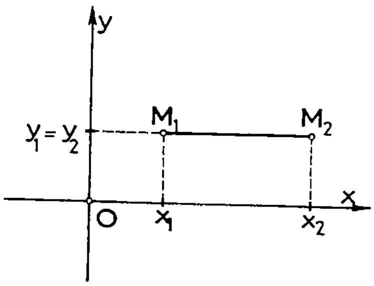
За илустрација, да го изразиме *растојанието меѓу две точки со помош на нивните координати.*

За таа цел, нека се дадени две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ во координатната рамнина Oxy. Да земеме, прво, дека $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Низ точките M_1 и M_2 да повлечеме прави, паралелни со координатните оски (црт.3). Растојанието меѓу точките M_1 и N е $|y_2 - y_1|$, растојанието меѓу N и M_2 е $|x_2 - x_1|$. Бидејќи ΔNM_1M_2 е правоаголен, можеме да ја примениме Питагоровата теорема, па за растојанието $d = \overline{M_1M_2}$ ќе добиеме:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2, \text{ т.е. } \overline{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$



Црт.3



Црт.4

Формулата (1) ја изведовме при претпоставката дека $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, но не е тешко да се увериме дека таа важи и во другите случаи: кога $y_1 = y_2$ (црт.4), кога $x_1 = x_2$, или кога $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т.е. кога точките се совпаѓаат.

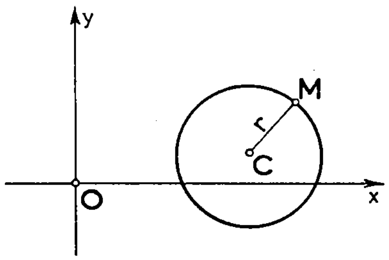
На пример, растојанието меѓу $A(2,3)$ и $B(5,-1)$ е:

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

а меѓу $C(1, 4)$ и $D(3, 4)$: $\overline{CD} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-4)^2} = 2.$

Со помош на формулата (1) може да се окарактеризираат точките од дадена кружница. Имено, нека во координатната рамнина Oxy е зададена кружница со радиус r и центар $C(p, q)$ (црт.5). Таа кружница го претставува множеството од сите точки $M(x, y)$ од рамнината, чие растојание од точката C е r. Со други зборови, потребен и доволен услов точката M да лежи на дадената кружница е

$$\overline{CM}=r. \qquad (2)$$



Црт.5

Според формулата (1) за растојание меѓу две точки, на равенството (2) можеме да му ја дадеме следнава „координатна" форма:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=r,$$

а тоа, поради $r>0$, е еквивалентно со:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2. \qquad (3)$$

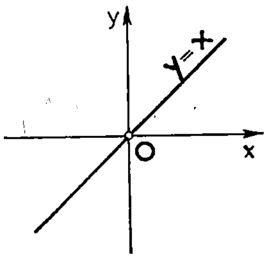
Ова равенство го задоволуваат координатите x, y на која било точка $M(x, y)$ од дадената кружница и ниедна друга точка од рамнината што не лежи на кружницата. Поради тоа, (3) се вика ***равенка на кружницата*** со центар $C(p, q)$ и радиус r.

Така, равенката на кружница со центар $C(4,-3)$ и радиус 2 е:

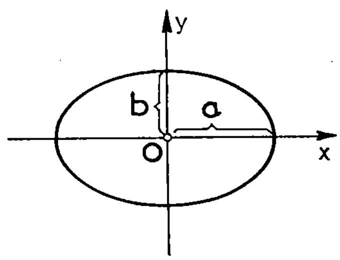
$$(x-4)^2+(y+3)^2=4, \quad \text{т.е.} \quad x^2+y^2-8x+6y-29=0.$$

Општо, една равенка во која, покрај дадени броеви, учествуваат две променливи x, y се вика ***равенка на дадена линија***, ако таа искажува потребен и доволен услов за тоа точката M (x, y) да ѝ припаѓа на дадената линија.

На пример, $y=x$ е равенка на правата што е симетрала на I и III квадрант (црт.6), а $y=-x$ е равенка на симетралата од II и IV квадрант.



Црт.6

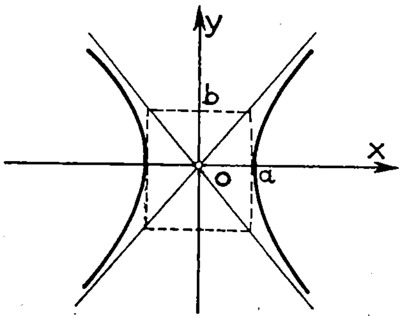


Црт.7

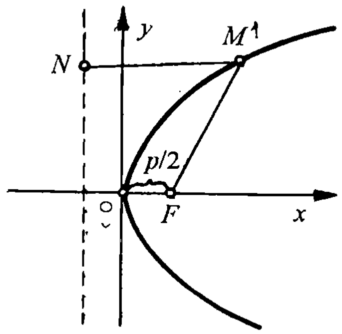
На читателот му се добро познати од аналитичната геометрија и равенките:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y^2=2px,$$

коишто претставуваат равенки на кривите соодветно: ***елипса*** (црт.7), ***хипербола*** (црт.8), ***парабола*** (црт.9).



Црт.8

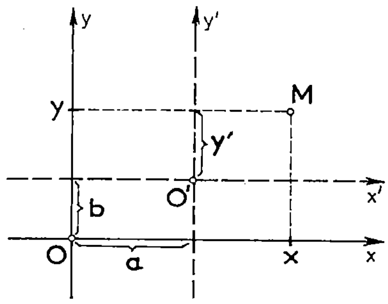


Црт.9

Да забележиме дека *равенката на дадена крива не е еднозначно определена од кривата, туку зависи од изборот на координатниот систем*. Во таа смисла, често е корисно да се изврши соодветна трансформација на координатниот систем за да се добие равенка што поедноставна и погодна за изучување на разгледуваната крива.

За таа цел, нека во рамнината е избран декартов правоаголен координатен систем Oxy, кој натаму ќе го викаме ***стар*** координатен систем и, во таа смисла, координатите на точките во однос на тој систем – ***стари координати***. Натаму, да избереме точка $O'(a, b)$, каде што a и b се нејзини координати во однос на системот Oxy, за координатен почеток на ***новиот*** декартов правоаголен координатен систем, $O'x'y'$, чии координатни оски се паралелни со координатните оски Ox, Oy. Новиот координатен систем $O'x'y'$ е добиен со ***транслација*** на стариот координатен систем (црт.10).

Да видиме каква врска постои меѓу координатите на една иста точка (произволно избрана), еднаш земени во однос на стариот, а другпат во однос на новиот координатен систем. Ако старите координати на произволно избраната точка M ги означиме со x,y, а новите со x',y', тогаш тие се сврзани со следниве равенства:



Црт.10

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \text{ т.е } \begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \tag{4}$$

На два примера ќе покажеме како се менува равенката на една крива ако се врши *транслација на координатниот систем.*

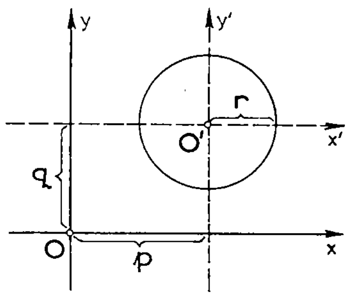
Пример 1. Во однос на избран координатен систем нека (p,q) е центар на кружницата чиј радиус е r. Во однос на тој систем равенката на кружницата гласи

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

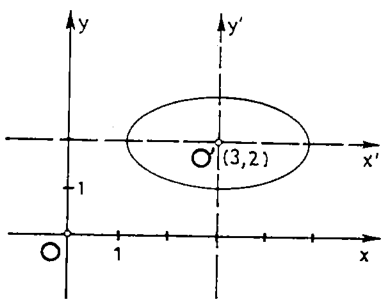
Ако, меѓутоа, се изврши транслација на координатниот систем и за нов координатен почеток се земе центарот на кружницата, тогаш нејзината равенка ќе гласи:

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

каде што $x' = x - p$, $y' = y - q$ (црт.11).



Црт.11



Црт.12

Пример 2. Нека е дадена кривата (L) со равенка:

$$x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 21 = 0.$$

Од равенката не можеме веднаш да заклучиме за која крива станува збор и каква „положба" има таа. Но, ако таа равенка ја запишеме во обликот

$$(x-3)^2 + 4(y-2)^2 - 4 = 0,$$

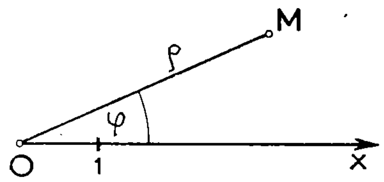
и ако извршиме транслација на координатниот систем, со тоа што новиот почеток ќе го избереме во точката $O'(3,2)$, тогаш трансформационите равенки (4) ќе гласат: $x = x' + 3$, $y = y' + 2$, па со замена во дадената равенка, ќе ја добиеме следнава равенка на кривата (L):

$$\frac{x'^2}{4}+y'^2=1,$$

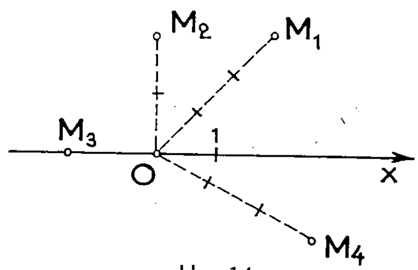
сега во однос на новиот ситем. Последната равенка покажува дека кривата (L) е елипса (црт.12).

Покрај правоаголниот декартов координатен систем, за одредување на положбата на точките во една рамнина, се користи и ***поларниот координатен систем***.

Нека во рамнината е избрана една ориентирана права Ox, која понатаму ќе ја викаме ***поларна оска***, на неа – една точка O, наречена ***пол***, а исто така – „единична точка" E. Положбата на произволната точка M од рамнината ќе ја определуваме во однос на поларната оска Ox и полот O (црт.13).



Црт.13



Црт.14

Растојанието на M од полот O, $\overline{OM} = r$, ќе го наречеме ***поларен радиус*** на точката M, а аголот меѓу позитивниот дел на поларната оска и отсечката OM – ***поларен агол*** на M. Пишуваме: $M(\varphi,\rho)$ и, притоа, поларниот радиус ρ и поларниот агол φ ги викаме, со заедничко име, ***поларни координати*** на точката M.

За да се добијат сите точки од рамнината, доволно е ρ да се менува од 0 до $+\infty$, а φ во полусегментот $[0, 2\pi)$. Притоа, постои обратноеднозначна кореспонденција меѓу сите точки од рамнината без O и паровите реални броеви, (φ,ρ), при кои $\rho \neq 0$; секој пар од облик $(\varphi,0)$, за произволен φ, ја претставува точката O.

На црт.14 се претставени (во поларен систем) неколку конкретно дадени точки:

$$M_1(\pi/4, 3),\quad M_2(\pi/2, 2),\quad M_3(\pi, 3/2),\quad M_4(11\pi/6, 3).$$

Често пати е згодно да се работи со *агли поголеми од* 2π и со *негативни агли*, т.е. да се допушти φ да се менува во $\mathbb{R}$. Притоа, како што е вообичаено, ќе сметаме дека негативните агли се добиваат со ротација околу O во насоката на движењето на стрелките кај часовникот. Со ова проширување на областа во која ќе се менува поларниот агол се нарушува обратноеднозначната кореспонденција меѓу точките од рамнината и паровите реални броеви, бидејќи паровите (φ,ρ) и $(\varphi+2k\pi,\rho)$ претставуваат една иста точка за секој цел број k.

Поимот за поларни координати ќе го прошириме уште еднаш, со тоа што ќе воведеме поим и за *негативен поларен радиус*. Имено, ако $\rho > 0$, точката M_1, што е симетрична со $M(\varphi,\rho)$ во однос на O ќе сметаме дека има координати $(\varphi,-\rho)$. Така и ρ ќе се менува во $\mathbb{R}$.

Интересно е да се види меѓусебната положба на точките (φ,ρ), $(-\varphi,\rho)$, $(\varphi,-\rho)$ и $(-\varphi,-\rho)$:

а) (φ,ρ) и $(-\varphi,\rho)$ се симетрични во однос на поларната оска;

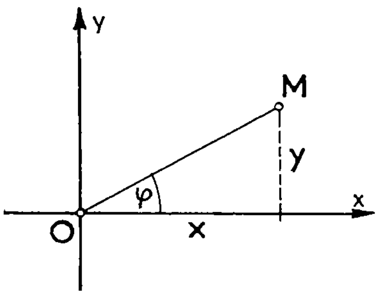
б) (φ,ρ) и $(-\varphi,-\rho)$ се симетрични во однос на правата што е нормална на поларната оска и минува низ O;

в) (φ,ρ) и $(\varphi,-\rho)$ се симетрични во однос на O.

Ако поларната оска ја сметаме за оска Ox, а правата нормална на неа што минува низ O – за оска Oy, ќе добиеме правоаголен координатен систем. *Да видиме каква врска постои меѓу поларните и правоаголните координати на една иста точка.* Ако точката M, чии поларни координати се φ и ρ, а правоаголни декартови се x и y, се наоѓа во првиот квадрант (црт.15), тогаш имаме:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{6}$$



Црт.15

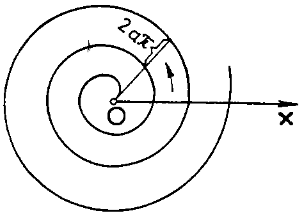
При определувањето на φ треба да се земе предвид дека е еднозначно определен до собирок од облик $k\pi$. Лесно се гледа дека горните врски се точни и при произволна положба на точката

M, со една забелешка, дека за определувањето на φ, кога се познати нејзините декартови правоаголни координати, треба да се има предвид квадрантот во кој се наоѓа M.

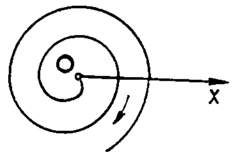
На крајот да ги нацртаме („точка по точка") кривите, определени со следниве равенки:

1) $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$ (**архимедова спирала**); црт.16 за $\varphi \geq 0$, црт.17. за $\varphi \leq 0$.

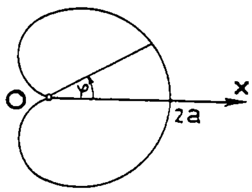
2) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (**кардиоида**); црт.18 за $a > 0$.



Црт.16



Црт.17



Црт.18

Забелешка. Тука се задржавме само на два вида координатни системи: правоаголен декартов и поларен. Но, има и други. Читателот ќе се сретне (во стручните предмети) дури и со поимот „генерализирани координати" (коишто ќе бидат објаснети таму). Инаку, кој било вид координатен систем суштински се состои во следното: *се задаваат две различни фамилии криви во рамнината, така што секоја точка е определена како пресек на пар криви од тие фамилии.* На пример, кај правоаголен декартов координатен систем тие две фамилии се прави, едните – паралелни со x–оската, а другите – паралелни со y–оската; кај поларниот систем едната е фамилија кружници со центар во полот, а другата – полуправи со почеток во полот.

ВЕЖБИ

Во задачите 1–7 се работи за избран правоаголен декартов координатен систем Oxy.

1. Да се конструира ΔABC, ако: $A(4, 3)$ $B(-2, 0)$, $C(1, -2)$.
2. Да се најдат координатите на точката A' што е симетрична на $A(3, 1)$, во однос на:

а) O; б) Ox; в) Oy; г) правата $y=x$.

3. Да се најде периметарот на ΔABC од вежбата 1.

4. Да се провери дали триаголникот со темиња (3,4), (–1,4), (1,2) е правоаголен.

5. Да се покаже дека точките, (0,2), (–1,1), (3,3) лежат на кружница со центар $C(3,-2)$. Колку е радиусот на кружницата?

6. Дадени се точките $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Да се докаже дека плоштината P на ΔABC се пресметува со формулата.

$$P = \frac{1}{2}\,|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$$

7. Да се пресмета плоштината на:

а) ΔABC: $A(5, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(2,-3)$;

б) четириаголникот $ABCD$: $A(1, 2)$, $B(0, 3)$, $C(-3,1)$, $D(-2,-2)$.

8. Со транслација на координатниот систем, да се упрости дадената равенка и да се нацрта соодветната крива.

а) $x^2+y^2+2x-6y+6 = 0$; б) $x^2+9y^2-4x+18y+4 = 0$

Помош. а) $(x+1)^2+(y-3)^2 = 4$; б) $(x-2)^2+9(y+1)^2 = 9$

9. Дадена е точката $M(4, 3)$ (во правоаголни координати). Да се најдат нејзините поларни координати.

10. Дадена е точката $M(\pi/3, 4)$ (во поларни координати). Да се најдат нејзините правоаголни координати.

11.* Да се нацрта кривата, дадена со равенката:

а) $\rho = \varphi+1$; б) $\rho = \sin\varphi$; в) $\rho = \sin2\varphi$.

12. Да се нацрта кривата, дадена со равенката $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$, $(a>0)$, откако ќе се премине во поларен координатен систем.

13. Дадена е равенката $(x^2+y^2)^2 = 4\cdot(x^2-y^2)$. Да се премине во поларен систем и да се нацрта кривата.

I.2. ОСНОВНИ ПОИМИ ЗА ФУНКЦИИТЕ

2.1. Реална функција од една реална променлива

Поимот функција го дефинираве во **1.3** за произволно множество M, а овде ќе ја повториме дефиницијата во случај кога M е множеството реални броеви, т.е. $M=\mathbb{R}$.

Имено, ако D е подмножество од $\mathbb{R}$ и ако f е пресликување од D во $\mathbb{R}$, т.е.

$$(\forall x\in D)(\exists! y\in \mathbb{R}) \quad y=f(x), \tag{1}$$

тогаш велиме дека f е ***реална функција од една реална променлива*** [1]. За $D_f=D$ велиме дека е ***дефиниционо множество***, т.е. ***домен*** на f, а множеството

$$E_f=\{y\in\mathbb{R} \mid (\exists x\in D_f) \quad y=f(x)\} \tag{2}$$

се вика ***множество вредности***, т.е. ***опсег*** на f. Според тоа, $E_f=f(D_f)$ т.е. $y\in E_f$ акко постои $x\in D_f$, таков што $y=f(x)$; притоа, за еден број $y\in E_f$, можно е да постојат повеќе такви броеви $x\in D_f$.

За две функции f и g велиме дека се ***еднакви*** и пишуваме $f=g$, ако имаат ист домен, т.е. $D_f=D_g$, и ако $f(x)=g(x)$ за секој $x\in D_f$. Всушност, $f=g$ значи дека f и g се една иста функција.

За една функција g велиме дека е ***рестрикција*** од f ако $D_g\subseteq D_f$ и $g(x)=f(x)$ за секој $x\in D_g$.

При дефиницијата на поимот функција не правиме ограничувања во врска со доменот. Дури, допуштаме да постои функција со *празен домен*, и тоа – единствена [2]; за неа ќе велиме дека е ***празна функција***; неа ќе ја сметаме за рестрикција од секоја функција. (Секако, и опсегот на празната функција е празното множество.)

---

[1] За натаму, ако не биде инаку речено, „функција“ ќе биде кратенка за „реална функција од една реална променлива“.

[2] Инаку, нас нè интересираат само функции со непразни домени и, обично, домените ќе бидат бесконечни, а уште повеќе – интервали или сегменти.

Да воочиме, исто така, дека при дадено подмножество S од D_f, постои единствена рестрикција g на f, таква што $S=D_g$. Имено, g се дефинира со: $g(x)=f(x)$, за секој $x\in S$; таа функција g ја означуваме со f_s.

Пример 1. Ако $f(x)=x^2$, за секој $x\in \mathbb{R}$, тогаш добиваме функција со домен $D_f=\mathbb{R}$ и опсег $E_f=\{x\in \mathbb{R} \mid x\geq 0\}$, т.е. опсегот на f се состои од сите ненегативни реални броеви. Притоа, ако $y\in E_f$ и ако $y\neq 0$, тогаш постојат два (различни) броја x_1 и x_2 такви што $f(x_1)=f(x_2)=y$, а имено: $x_1=\sqrt{y}$, $x_2=-\sqrt{y}$.

Пример 2. Функцијата g со домен $D_g=\{x\in \mathbb{R} \mid x\geq 0\}$ и исто дејство како f во примерот 1, т.е. $g(x)=x^2$ за секој $x\in D_g$, е рестрикција на f. (Патем да забележиме дека $E_g=E_f$.)

Функцијата g, како рестрикција од f, ја добиваме преку „скратување" на D_f. Со таа постапка можеме да добиеме и други рестрикции од f.

Така, ако ставиме $D_h=[-1, 1]$, т.е. $D_h=\{x\in \mathbb{R} \mid -1\leq x\leq 1\}$ со $h: x\mapsto x^2$ определуваме друга рестрикција од f. Може да се стави дури и $D_k=\varnothing$, па со $k: x\to x^2$ ќе биде определена празната рестрикција на f.

На тој начин, бирајќи различни домени, дефиниравме четири функции: f, g, h и k, такви што, за секоја од нив, елементот x, од соодветниот домен се пресликува во x^2.

Во пракса, ако дадена функција е определена со некој аналитичен израз без да биде назначен доменот, ќе сметаме дека доменот се состои од сите реални броеви за кои тој аналитичен израз има смисла.

Според тоа, со $x\mapsto x^2$ е определена функцијата f (од примерот 1). Еве уште неколку примери.

Пример 3. Доменот на функцијата

а) $x\mapsto\sqrt{x}$ е $[0, +\infty)$; б) $x\mapsto\sqrt{1-x}$ е $(-\infty, 1]$;

в) $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ е $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$; г) $x\mapsto 2$ е $\mathbb{R}$;

д) $x\mapsto\sqrt{-x^2}$ е $\{0\}$; ѓ) $x\mapsto\sqrt{-1-x^2}$ е $\varnothing$;

е) $x\mapsto\dfrac{1}{\lg x}$ е $(0, 1)\cup(1, +\infty)$;

ж) $x\mapsto \operatorname{tg}x$ е $\cup\{((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2) \mid k\in \mathbb{Z}\}$.

Во дефиницијата на поимот функција, а и во сите примери, ја употребивме буквата x како замена за кој било број од доменот на соодветната функција. За неа велиме дека е ***независнопроменлива*** или, покусо, ***аргумент***. Значи, за секоја вредност x на аргументот од доменот на дадена функција f, ѝ одговара определена вредност $f(x)$

на функцијата. Понатаму, наместо „функција f“ често ќе велиме „функција $f(x)$“, па дури и „функција $y=f(x)$“.

Со други зборови, „$f(x)$“ е кратенка за „$f\colon x\mapsto f(x)$“. Пишувајќи „$f(x)$“, сакаме повеќе да ја нагласиме вредноста на функцијата. Во иста смисла се користи и изразот „функција $y=f(x)$“, при што, за ***зависнопроменливата***, т.е. за функцијата е употребена буквата y.

За променливи (независни или зависни) ќе употребуваме и други букви, како на пример: t, u, v, φ, ρ и др.

Натаму често ќе ги среќаваме функциите од наредниот пример.

Пример 4. а) функцијата $\operatorname{sgn}x$, дефинирана со:

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 \text{ за } x>0 \\ 0 \text{ за } x=0 \\ -1 \text{ за } x>0 \end{cases}$$

ќе ја викаме „***сигнум од*** x“ или „***знак од*** x“.

б) Функцијата $[x]$ дефинирана со:

„$[x]$ е најголемиот цел број што не е поголем од x“

ќе ја означуваме со $[x]$ [3] и ќе ја викаме „***цел дел од*** x“. Значи:

$$x-1<[x]\le x.$$

На пример: $[\sqrt{2}\,]=1$, $[2]=2$, $[2,5]=2$, $[-2,5]=-3$,

в) Функцијата f дефинирана со:

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ за } x\in Q \\ 0 \text{ за } x\in R\setminus Q, \end{cases}$$

е наречена ***функција на Дирихле*** [4].

Да забележиме дека $\operatorname{sgn}x$ е константа на секој од интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; $[x]$ е константа на секој интервал $[n, n+1)$, каде што n е цел број; функцијата на Дирихле е константа и на Q и на R/Q. Но, ниедна од тие три функции не е константа на R.

Од дефиницијата на поимот функција е јасно дека функцијата е наполно определена ако е зададен нејзиниот домен и правилото по

---

[3] Оваа ознака има еден недостаток - може да се помеша со ознаката за „сегмент“ - кога се работи за „цел дел од децимална дропка“. На пример, за „цел дел од 2,5“ имаме $[2,5]$, а таа ознака ја употребуваме и за сегментот $[a, b]$ со краеви $a=2$ и $b=5$. Но, обично, од контекстот ќе биде јасно дали се работи за „цел дел“ или за „сегмент“.

[4] Петер Дирихле (*Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, 1805-1859), германски математичар.

кое се определуваат вредностите на функцијата, за секоја вредност на аргументот од доменот. Ако тоа правило е зададено со формула или со зборови (т.е. „описно"), тогаш за соодветната функција велиме дека е зададена ***аналитично***; во тој случај се вели и дека функцијата е зададена ***експлицитно***.

Така, на пример, функциите

$$f(x)=x^2,\quad g(x)=\sqrt{x},\quad h(x)=\frac{1}{x}$$

(и сите други функции од примерите **1–3**) се зададени „со формула", а функцијата „цел дел од икс" во примерот **4** б) е зададена со зборови (значи, сите тие се зададени експлицитно).

Да забележиме дека меѓу овие два начина на задавање функција нема суштинска разлика (на пример: $h(x)=1/x$" е исто што и „$h(x)$ е реципрочната вредност од бројот x") и дека една функција може да биде зададена со два или повеќе изрази; на пример:

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ за } x\le 0,\\ \sqrt{x} \text{ за } x>0;\end{cases}\qquad \text{б) } g(x)=\begin{cases} x \text{ за } x>0,\\ 0 \text{ за } x=0,\\ -x \text{ за } x<0.\end{cases}$$

Во случаи кога доменот е конечно множество (притоа, со „разумно конечен број" елементи), функцијата може да се зададе ***таблично***; на пример, ако $f\colon x\mapsto f(x)$ со домен $D=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ е определена со:

$$f(0)=1,\quad f(1)=3,\quad f(2)=2,\quad f(3)=1,\quad f(4)=3,$$

тогаш задавањето на f можеме да го претставиме со таблицата

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	2	1	3

*Табличното претставување на функции ќе го користиме многу често понатаму и во случај кога доменот е бесконечен, со тоа што таблицата ќе се состои пак од конечно многу вредности од доменот, но и „доволно многу" за да добиеме претстава за текот на функцијата. Во тој случај таблицата ќе карактеризира друга функција, којашто е „апроксимација" на дадената. Притоа, колку повеќе вредности ќе има таблицата, толку подобра ќе биде апроксимацијата, а и толку поголема ќе биде можноста да се уочат евентуални грешки.

Табличното претставување функции често се користи во експерименталните науки (физиката, хемијата, техничките науки и др.).

Во наредниот раздел ќе се задржиме уште на еден, многу важен начин на претставување функции: геометриско претставување со помош на нејзиниот график (во координатна рамнина).*

На крајот ќе направиме една забелешка за појавувањето на функции во физичко–техничките (и други) науки. Имено, при изучувањето на разни природни (и други) појави обично се доаѓа до некои законитости коишто претставуваат зависности меѓу одредени величини. Да наведеме еден пример.

Пример 5. а) Патот s при слободно паѓање зависи од времето t ($s=gt^2/2$, каде што g е универзална константа, $g\approx 9{,}81$).

б) Плоштината P на квадратот зависи од должината на неговата страна a ($P=a^2$).

в) Притисокот p на дадена маса идеален гас при постојана температура зависи обратно пропорционално од волуменот v во кој е сместен, т.е. $p=c/v$, каде што c е константа (Бојл–Мариотов закон).

г) Јачината J на струјата во електрично коло, при постојан напон U, зависи од отпорноста R ($J=U/R$).

При сите тие законитости, мерните броеви на вклучените величини се реални броеви. *Можеме да речеме дека реалните броеви се мерни карактеристики на разни објекти: должина, плоштина и волумен (во геометријата), пат, брзина и време (во физиката), итн. Покрај мерниот број, тука доаѓа до израз и „димензијата" на соодветната величина.*

На пример, ако сакаме да ја искажеме зависноста на плоштината на квадратот од должината на неговата страна, ја добиваме функцијата

$$f(x)=x^2,$$

при што нејзиниот домен не е $\mathbb{R}$, туку $\mathbb{R}^+$ (зашто мерниот број на страната е позитивен). Во овој случај имаме пример на една *конкретна функција*, каде што и аргументот (x) и функцијата ($f(x)$) си имаат свои димензии (cm и cm^2 соодветно). *Но, ние ги земаме само мерните броеви, а димензиите „ги подразбираме".*

Слична забелешка важи и за други конкретни функции (во физиката и во други науки).

ВЕЖБИ

1. Да се претстави само со еден аналитичен израз функцијата

а) $f(x)=\begin{cases} x \text{ за } x\geq 0, \\ -x \text{ за } x<0; \end{cases}$ б) $g(x)=\begin{cases} 2x-x^2, \text{ за } x\in(0,2), \\ x^2-2x, \quad x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty). \end{cases}$

Помош. Да се искористи дефиницијата на апсолутна вредност од реален број, $|a|$.

2. Да се претстави со повеќе аналитични изрази функцијата

а) $f(x)=x^2-2|x-1|$; б) $g(x) = (\text{sgn}x)\cdot(x^2-1)$.

Во задачите 3–12, да се најде доменот D на дадената функција.

(*Помош.* $\sqrt{A}$ има смисла само за $A\geq 0$, A/B – само за $B\neq 0$, $\log A$ – само за $A>0$.)

3. $y=\dfrac{x}{x^2-9}$. **4.** $y=\dfrac{x^2+1}{4x-9x^3}$.

5. $y=\sqrt{3-2x}$. **6.** $y=\sqrt{4-x^2}$.

7. $y=\sqrt[3]{4-x^2}$. **8.** $y=\sqrt{x^2-6x+8}$.

9. $y=\lg(x-5)$. **10.** $y=\lg(x^2-5x+6)+\sqrt{5-x}$.

11*. $y=\dfrac{1}{1-\cos x}$. **12*.** $y=\dfrac{1}{1-2\sin x}$.

13. Да се запише функционалната зависност на плоштината P од аголот α при поголемата основа на рамнокрак трапез со основи $a=6$ и $b=4$. Кој е доменот на таа функција?

14. Да се изрази плоштината P на правоаголник, впишан во круг со радиус R, како функција од неговата основа x.

15. Цилиндар е впишан во сфера со радиус R. Да се запише функционалната зависност на волуменот V на цилиндарот од неговата висина, x. Да се најде доменот на таа функција.

16. Во прав кружен конус со висина H и радиус на основата R, впишан е цилиндар, така што неговата основа лежи на основата од конусот. Да се изрази плоштината M на бочната површина на цилиндарот како функција од радиусот x на основата.

17. Дадена е функцијата $f(x)=x^2-2x$. Да се пресмета: $f(-1)$, $4f(4)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a-1)$.

18. Да се запише множеството $f(A)$, ако:

а) $f(x)=x^2$, $A=[-2,-1]$; б) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$, A=(0, 1).

19. Да се определи функцијата $f(x)$:

а) $f(x) = ax+b$, ако $f(-1) = 1$, $f(2) = -5$;

б) $f(x) = a\cdot b^x+c$, ако $f(1) = 5$, $f(2) = 7$, $f(-1) = 7/2$.

20. Дадена е функцијата

а) $f(x) = 3-2x-x^2$; б) $f(x) = x^3-4x$.

Да се најде:

– ***множеството нули*** на f: $D_0 = \{x \mid f(x) = 0\}$,

– ***доменот на позитивност*** на f: $D^+ = \{x \mid f(x) > 0\}$,

– ***доменот на негативност*** на f: $D^- = \{x \mid f(x) < 0\}$.

2.2. График на функција

За дадена функција f со домен D_f, множеството подредени парови,

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in D_f, \quad y = f(x)\} \tag{1}$$

се вика ***график*** на функцијата f.

Пример 1. а) За функцијата f, зададена со таблицата

x	-1	0	1	3	4
$f(x)$	3	2	1	-1	-2,

доменот е $D_f = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$, па нејзиниот график е

$$\Gamma_f = \{(-1, 3), (0, 2), (1, 1), (3, -1), (4, -2)\}.$$

б) Графикот на функцијата x^2 е

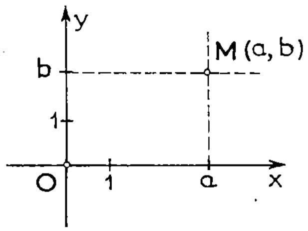
$$\Gamma = \{(x, x^2) \mid x \in \mathrm{R}\}.$$

Да забележиме дека графикот Γ_f е бесконечно множество секогаш кога е D_f бесконечно, а конечно – кога D_f е конечно; би можело да се каже дека „Γ_f има толку елементи колку што елементи има D_f".

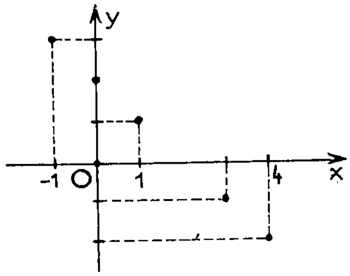
Како што споменавме во **1.12.** секој подреден пар (a,b) од реални броеви претставува точка од една координатна рамнина, т.е. од рамнина во која е избран координатен систем, на пример правоаголен декартов координатен систем (црт. 1).

Според тоа, *графикот на една функција може да се претстави геометриски, како множество точки од координатната рамнина.*

Во **1.12** го споменавме и поларниот координатен систем, а постојат и други. Но, понатаму, ако не е инаку речено *„координатен систем“* ќе ни значи *„правоаголен декартов координатен систем“*.)



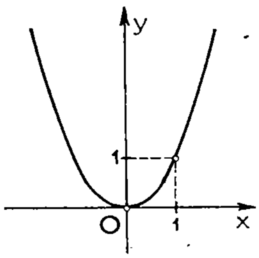
Црт.1



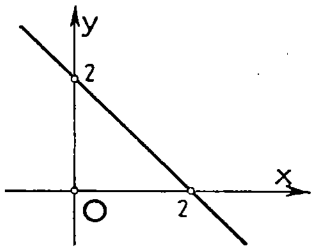
Црт.2

Пример 2. а) Графикот на функцијата $f(x)=2-x$ со домен $D_f=\{-1, 0, 1, 3, 4\}$ е претставен со петте означени (зацрнети) точки на црт.2.

б) Графикот на функцијата $g(x)=x^2$ (чиј домен е $\mathbb{R}$, а опсегот е $[0, +\infty)$) е претставен геометриски на црт.3 (како што знаеме, тој се вика ***парабола***).



Црт.3



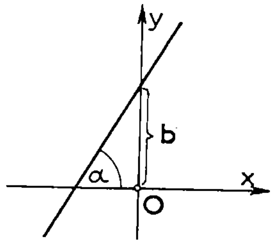
Црт.4

Натаму, кога ќе зборуваме за графикот на дадена функција, обично ќе мислиме на неговиот **геометриски претставник**, *т.е. на соодветното множество точки од координатната рамнина.*

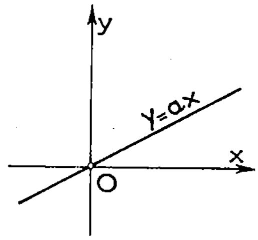
Во наредните примери (3–9) ќе ги претставиме графиците уште на некои функции.

Пример 3. Графикот на функцијата $y=2-x$ е права, претставена на црт.4. (Да уочиме дека, според договорот во претходниот раздел, доменот на дадената функција е $\mathbb{R}$, па оваа е различна од функцијата во примерот 1.)

Општо, графикот на ***линеарна функција***, $y=ax+b$, претставува права, чиј коефициент на правецот е $a=\text{tg}\alpha$, а отсечката на ординатната оска е b (црт.5). Специјално, кога $b=0$ и $a\neq0, y=ax$ се вика функција на ***права пропорционалност*** (црт.6), а кога $a=0$, функцијата $y=b$ е ***константа*** (црт.7).



Црт.5

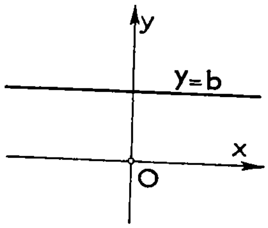


Црт.6

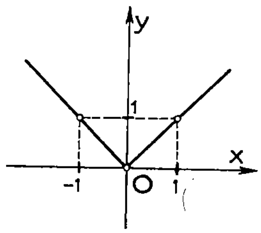
Пример 4. Графикот на функцијата

$$y=|x|=\begin{cases} x \text{ за } x\geq 0 \\ -x \text{ за } x<0 \end{cases}$$

(„***апсолутна вредност од*** x") се состои од двете полуправи, претставени на црт.8. Да уочиме дека доменот на $|x|$ е $\mathbb{R}$, а опсегот е $[0,+\infty)$.



Црт.7



Црт.8

Пример 5. Функцијата $y=1/x$ се вика ***реципрочна вредност*** од x или функција на ***обратна пропорционалност*** (чиј коефициент на пропорционалност е 1). Нејзиниот домен е $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (в. пример 3 од **1.1**), а опсегот е $E=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Неколку точки од нејзиниот график се дадени со следнава табела

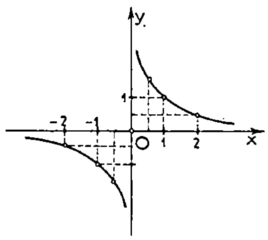
x	-2	-1	$-1/3$	$1/3$	1	2
y	$-1/2$	-1	-3	3	1	$1/2$

а графикот е претставен на црт.9.

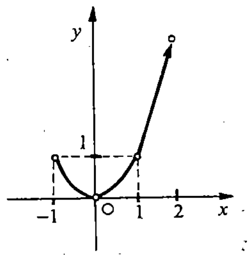
Пример 6. Графикот на функцијата

$$f(x) = x^2 \text{ со домен } D = [-1, 2)$$

е претставен на црт.10. (Спореди го со црт.3). Точката (2,4) не му припаѓа на графикот; тој факт на цртежот е означен со стрелка.



Црт.9

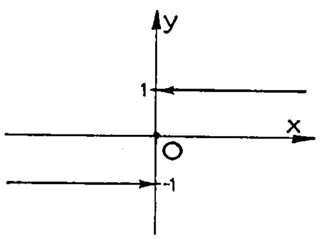


Црт.10

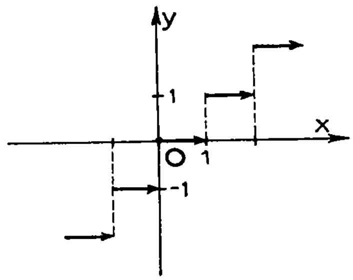
Пример 7. Графикот на функцијата

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{за } x>0 \\ 0 & \text{за } x=0 \\ -1 & \text{за } x<0 \end{cases}$$

(пример 4, во **1.1**) е претставен на црт.11.



Црт.11



Црт.12

Пример 8. Графикот на функцијата

$$y = [x]$$

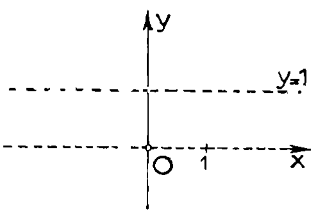
(„***цел дел од*** x", пр. 4 во **2. 1**) е претставен на црт.12. (И тука, стрелката означува дека крајната точка од отсечката не ѝ припаѓа на таа отсечка.)

Како што гледаме од наведените примери, *графикот на една функција е, обично, линија (и тоа, најчесто крива линија)*, без прекини или со прекини. Притоа, поимот „(непрекината) линија" овде ќе го прифатиме за интуитивно јасен, т.е. нема да се задржиме на неговото дефинирање.

Наместо „функција $f(x)$", односно „*график на функцијата* $f(x)$" често ќе го употребуваме терминот „*крива* $y=f(x)$". Со други зборови, *нема да правиме разлика меѓу „функција" и „крива"* што го претставува графикот на таа функција.

За цртањето (т.е. нагледното претставување) на графикот на една функција обично правиме *таблица од вредности*, т.е. земаме „неколку" точки од графикот (како што направивме во примерот 5), ги претставуваме како точки и нив ги спојуваме, добивајќи некоја *приближна претстава за графикот* на таа функција. Но, да уочиме дека оваа постапка може да биде коректна само за „непрекинатите делови" на предметниот график.

Така, на пример, геометрискиот претставник на графикот од Дирихлеовата функција $f(x)=1$ за $x\in \mathbb{Q}$, $f(x)=0$ а за $x\in \mathbb{R}\setminus \mathbb{Q}$ (пример 4 в) во **2.1**) се состои од „одделни точки" на правата $y=1$ и на $y=0$, како на црт.13, но би направиле грешка ако ги споиме тие „одделни точки" на секоја од правите. (Од друга страна, и со црт.13 не можеме да бидеме задоволни. Имено, „одделните точки" на правата $y=1$, поради тоа што подредувањето на $\mathbb{Q}$ е густо, треба да се толку „блиску" една до друга, што тие заедно треба „да изгледаат" како самата права $y=1$. Ова, уште повеќе, важи за $y=0$, зашто и точките на таа права за $x\in \mathbb{R}\setminus \mathbb{Q}$ се „блиску".



Црт.13

Видовме дека графикот на секоја функција е подмножество од $\mathbb{R}^2$. Природно се наметнува прашањето: кои подмножества од $\mathbb{R}^2$ се графици на функции. Ќе дадеме опис на тие подмножества.

***Теорема* 1.** *Едно подмножество Γ од $\mathbb{R}^2$ е график на некоја функција f акко е задоволен следниов услов:*

$$(\forall x, y_1, y_2, \in \mathbb{R})\ [(x, y_1), (x, y_2)\in \Gamma \Rightarrow y_1 = y_2]. \qquad (2)$$

Во тој случај функцијата f е еднозначно определена.

***Доказ*.** Пред сè, празното множество е график на празната функција, па затоа да претпоставиме дека Γ е непразно подмножество од $\mathbb{R}$.

Ако Γ е график на функцијата f, и ако (x, y_1), $(x, y_2)\in\Gamma$, тогаш имаме $y_1=f(x)=y_2$, т.е. исполнет е условот (2).

Обратно, да претпоставиме дека Γ е непразно подмножество од $\mathbb{R}^2$ што го задоволува условот (2). Нека D е подмножеството од $\mathbb{R}$, дефинирано со:

$$x\in D \Leftrightarrow (\exists! y\in \mathbb{R})\ (x, y)\in\Gamma.$$

Ако дефинираме функција f со домен D, така што

$$(\forall x\in D)\ (y=f(x) \Leftrightarrow (x, y)\in\Gamma),$$

тогаш добиваме дека Γ е график на f.

Ако две функции f и g имаат ист график Γ, тогаш е јасно дека

$$D_f = D_g \text{ и } (\forall x\in D_f = D_g)\, f(x) = g(x),$$

т.е. f и g се ***еднакви***. Значи, функцијата f чиј график Γ е определен со (2) е еднозначно определена. ◊

На крајот да забележиме дека некои од графиците на црт. 3–13 покажуваат „некакви симетрии". На пример, графикот на функцијата $f(x)=x^2$ (црт.3) е симетричен во однос на y–оската, а графикот на $f(x)=1/x$ (црт.9) е симетричен во однос на координатниот почеток. Функциите со такви графици имаат посебни називи: парни односно непарни функции.

Попрецизно, една функција f со домен D се вика ***парна функција***, ако:

(i) D е ***симетрично множество*** во однос на координатниот почеток (т.е. $x\in D \Rightarrow -x\in D$), и

(ii) $(\forall x\in D)\ f(-x) = f(x)$.

Така, функцијата $f(x)=x^2$ е парна, зашто доменот $D=\mathbb{R}$ е симетрично множество и, за секој $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. Парни се и функциите: $f(x)=|x|$, $f(x)=3x^4$, додека функциите: $f(x)=x^2$ со $D_f=[-1, 2)$, $f(x)=x^3$ и $f(x)=x^2+2x$ не се парни.

Функцијата f со домен D се вика ***непарна***, ако:

(i) D е симетрично множество во однос на почетокот O и

(ii′) $(\forall x\in D)\, f(-x) = -f(x)$.

На пример, функцијата $f(x)=1/x$ е непарна, зашто $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ е симетрично множество, а $f(-x)=1/(-x)=-f(x)$, за секој $x\in D$. Непарни се и функциите: $f(x)=x^3$ и $f(x)=\operatorname{sgn} x$, а не се непарни: $f(x)=2-x$, $f(x)=x^3+x^2$.

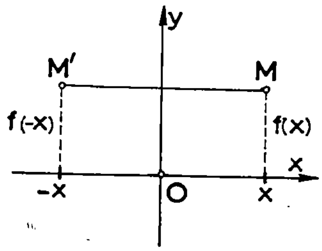
Да забележиме дека има функции што не се ни парни, ни непарни; таква е, на пример, функцијата $f(x)=x^3+x^2$.

Што се однесува, пак, до прашањето дали една функција може да биде и парна и непарна, точно е следново

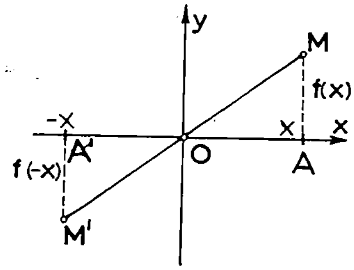
***Тврдење* 2.** *Ако доменот D на функцијата f е непразно симетрично множество, тогаш f е и парна и непарна акко $(\forall x \in D)\, f(x) = 0$.* ◊

Празното множество можеме да го сметаме за симетрично, па според тоа, празната функција е и парна и непарна.

Од условот (ii) за парна функција забележуваме дека: ако M е точка од графикот на f, т.е. $M(x, f(x))$ за некој $x \in D$, тогаш и точката $M'(-x, f(x)))$ му припаѓа на графикот од f, а M и M' се симетрични точки во однос на y-оската (црт.14).



Црт.14



Црт.15

Аналогно, од условот (ii') за непарна функција, потпомагајќи се со црт.15, лесно доаѓаме до заклучокот дека

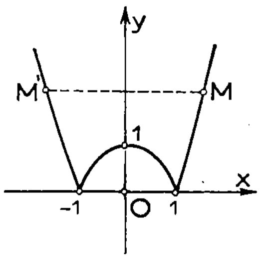
$$M(x, f(x)) \in \Gamma_f \Leftrightarrow M'(-x, f(-x)) \in \Gamma_f$$

и дека точките M и M' се симетрични во однос на координатниот почеток (имено: $\Delta MOA \cong \Delta M'OA'$). Со тоа го докажавме следново

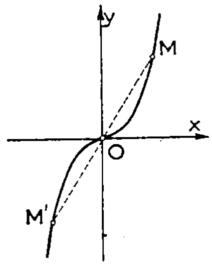
***Тврдење* 3.** *Графикот на парна функција е симетричен во однос на ординатната оска, а графикот на непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток.* ◊

На црт.16 е претставен графикот на парната функција $y=|1-x^2|$, а на црт.17 – на непарната функција $y=x^3$ (којшто може да се нацрта со помош на таблица).

x	-1	$1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$
x^3	-1	$-1/8$	0	$1/8$	1	$27/8$



Црт.16



Црт.17

ВЕЖБИ

Да се нацрта графикот на функцијата (1–16).

1. $y = 2x+1$.

2. $y = 2-x$.

3. $y = 2$.

4. $y = 2$, $D = [-1, 1)$.

5. $y = 1-x^2$.

6. $y = x^2-1$, $D = [-1, 2)$.

7. $y = x^2-2x$.

8. $y = x^2-4x+3$.

9. $y=\begin{cases} 1-x, & x<0, \\ x^2-1, & x\geq 0. \end{cases}$

10. $y=\begin{cases} -1+x^2, & |x|>1, \\ 1, & |x|\leq 1. \end{cases}$

11. $y = |x-2|$.

12. $y = |x^2-4|$.

13. $y = x^2-2|x|$.

14. $y = x^2-|2x-1|+1$.

15. $y=-\dfrac{1}{x}$.

16. $y = x\cdot \mathrm{sgn}x$.

Утврди кои од функциите, наведени во задачите 17–22 се парни, кои се непарни, а кои не се ни парни ни непарни.

17. $f(x) = 3x^2-5$.

18. $f(x) = x^2-4$, $D = [0, +\infty)$.

19. $y = x^2-2x$.

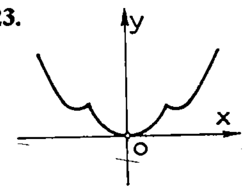
20. $y = x^3-2x$.

21. $y=\dfrac{4x}{1+x^2}$.

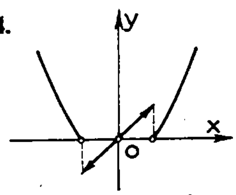
22. $y=\sqrt{x^3}$.

Во задачите 23–28 да се установи дали функцијата, чиј график е претставен на цртежот е парна, непарна или не е ни парна ни непарна.

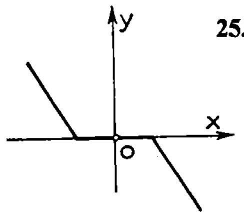
23.

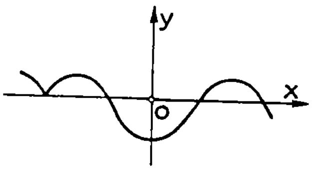


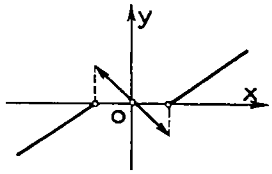
24.

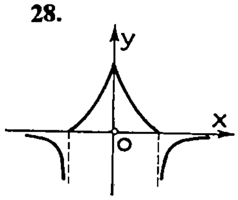


25.



26. 

27. 

28. 

Во задачите 29–32 да се провери дали даденото множество $\Gamma(\subseteq R^2)$ е график на некоја функција.

29. $\Gamma = \{(1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 1)\}$.

30. $\Gamma = \{(1, 0), (2, 1), (1, 2), (3, -1), (4, -2)\}$.

31. $\Gamma = \{(x, |x|) \mid x\in(-\infty, 0]\}$.

32. $\Gamma = \{(x, \pm\sqrt{x}) \mid x\in[0,+\infty)\}$.

2.3. Операции со функции

Нека f и g се две функции со домени D_f и D_g соодветно.

Збир $f+g$, ***разлика*** $f-g$, ***производ*** fg и ***количник*** f/g на функциите f и g се функции, дефинирани со следниве правила (соодветно):

а) $f+g$: $x\mapsto f(x)+g(x)$,

б) $f-g$: $x\mapsto f(x)-g(x)$,

в) fg: $x\mapsto f(x)\cdot g(x)$

г) f/g: $x\mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Тие функции се определени за сите вредности на x, за кои се определени f и g, т.е. за $x\in D=D_f\cap D_g$, со исклучок на функцијата f/g, за која доменот е $D_f\cap D_g \setminus \{x\in D_g \mid g(x)=0\}$.

Пример 1. Нека $f(x)=\sqrt{x-2}$ и $g(x)=x^2-9$. Тогаш функциите $f+g$, $f-g$ и fg се дефинирани за секој $x\geq 2$ (имено: $D_f\cap D_g=[2, +\infty)\cap R=[2, +\infty)$), а f/g – за $x\in[2, 3)\cup(3, +\infty)$. Така, на пример:

$$(f+g)(3) = f(3)+g(3) = \sqrt{3-2}+(3^2-9)=1,$$

$$(fg)(3)=f(3)\cdot g(3)=\sqrt{1}\cdot 0=0,$$
$$(f/g)(6)=\frac{f(6)}{g(6)}=\frac{2}{27}.$$

Општо:

$$(f+g)(x)=\sqrt{x-2}+x^2-9, \quad (f-g)(x)=\sqrt{x-2}-x^2+9,$$
$$(fg)(x)=\sqrt{x-2}\cdot(x^2-9), \quad (f/g)(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}.$$

Како специјален случај од дефиницијата в), кога функцијата f е константа, се добива *правило за множење на функција со број*. На пример, ако f: $x\mapsto 5$, тогаш $5g$: $x\mapsto 5\cdot g(x)$.

Да забележиме дека е можно збирот, разликата, производот и количникот на две функции да биде празна функција (и кога ни едната од двете функции не е празна). На пример, ако $f(x)=\sqrt{x-2}$, а $g(x)=\sqrt{1-x}$ тогаш

$$D_f=[2,+\infty),\ D_g=(-\infty,1) \text{ и } D_f\cap D_g=\varnothing,$$

па секоја од функциите $f\pm g, fg, f/g$ е празната функција.

Ако го означиме со $\mathcal{F}$ множеството од сите функции (т.е. од сите реални функции од една реална променлива) и ако го имаме предвид фактот дека допуштаме постоење на празна функција, тогаш можеме да заклучиме дека, за кои било $f, g\in\mathcal{F}$, секоја од функциите $f\pm g, fg$ и f/g му припаѓа на $\mathcal{F}$. Со други зборови, секое од правилата а) – г) е операција на $\mathcal{F}$: собирање (+), вадење (–), множење (·) и делење (/) на функции, т.е. $\mathcal{F}(*)$, за $*\in\{+,-,\cdot,/\}$ е групоид.

Од фактот дека за собирањето и множењето на реални броеви важат комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон, следува дека тие ќе важат и за собирањето и множењето функции:

1°. *За кои било функции f, g, h важат равенствата*

$$f+g=g+f, \quad (f+g)+h=f+(g+h),$$
$$fg=gf, \quad (fg)h=f(gh), \quad f(g+h)=fg+fh.\ \Diamond$$

Според тоа, секој од групоидите $\mathcal{F}(+)$ и $\mathcal{F}(\cdot)$ е комутативен и асоцијативен, а множењето е дистрибутивно спрема собирањето.

Да забележиме дека, ако $\mathcal{D}$ е множеството од сите функции дефинирани на едно исто множество D, тогаш $\mathcal{D}$ во однос на операциите собирање (+) и множење (·) на функции е прстен со делители на нулата (в. пр.2 од **1.5** и вежба 3).

Уште една, многу важна операција со функции е т.н. составување на функции. Имајќи предвид дека функциите се специјален вид пресликувања, составот $g\circ f$ на две функции g и f е функција, определена со (6) во **1.3.** Со цел на потполност, дефиницијата ќе ја повториме. Имено, ако f и g се дадени функции, тогаш ***состав*** (или ***композиција***) на f и g, означен со $g\circ f$, се вика функцијата

$$g\circ f: x\mapsto g(f(x))$$

дефинирана за оние броеви x, за кои е определена f и за кои бројот $f(x)$ му припаѓа на доменот на g.

Со симболи, можеме да запишеме дека функцијата $g\circ f$ (составот на f и g) е дефинирана со следниве барања:

i) $x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow x\in D_f\wedge f(x)\in D_g$,

ii) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, за секој $x\in D_{g\circ f}$.

Според тоа, функцијата $g\circ f$ го претставува следново правило: прво да се примени f, а потоа g. Функцијата $g\circ f$ се вика и: ***сложена функција*** или ***суперпозиција*** од функциите f и g.

Во општ случај, составот $g\circ f$ е различна функција од составот $f\circ g$ (прво да се примени g, а потоа f), т.е. за операцијата „$\circ$" не важи комутативниот закон. (Пази, исто така, $g\circ f$ не е исто што и gf!)

Пример 2. Нека $f(x)=\sqrt{x-2}$ и $g(x)=11-x^2$ (со $D_f=[2,+\infty)$ и $D_g=\mathbb{R}$). Тогаш за $g\circ f$ имаме:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-2})=11-(\sqrt{x-2})^2=13-x,$$

при што $D_{g\circ f}=[2,+\infty)$.

За функцијата, пак, $f\circ g$ имаме:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(11-x^2)=\sqrt{(11-x^2)-2}=\sqrt{9-x^2},$$

при што $D_{f\circ g}=[-3,3]$.

Да уочиме дека, во овој пример, $g\circ f\neq f\circ g$.

Пример 3. Нека функциите f, g, h се дефинирани за секој $x\in\mathbb{R}$ со:

$$f(x)=x+1,\quad g(x)=x+2,\quad h(x)=x^3.$$

Тогаш секоја од функциите $g\circ f,\ f\circ g,\ h\circ f,\ f\circ h$

е дефинирана за секој $x\in\mathbb{R}$ и $(g\circ f)(x)=g(x+1)=x+3$, $(f\circ g)(x)=f(x+2)=x+3$,

$$(h\circ f)(x) = h(x+1)=(x+1)^3, \quad (f\circ h)(x) = f(x^3) = x^3+1.$$

Според тоа, $g\circ f = f\circ g$, но $h\circ f \neq f\circ h$, а за секој $x\in\mathbb{R}$, имаме:

$$((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(f(x)) = (h\circ g)(x+1) = h(g(x+1)) = h(x+3)=(x+3)^3,$$

$$(h\circ(g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(x+1) = h(x+3) = (x+3)^3,$$

т.е. $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

И од овој пример се гледа дека композицијата на функции го нема својството на комутативност (имено, имавме $h\circ f\neq f\circ h$), но сепак, условот за асоцијативност е исполнет. Тоа не е случајно, зашто важи следново тврдење (в. Т.4 во **1.3**):

2°. *За кои било функции f, g, h е точно равенството*

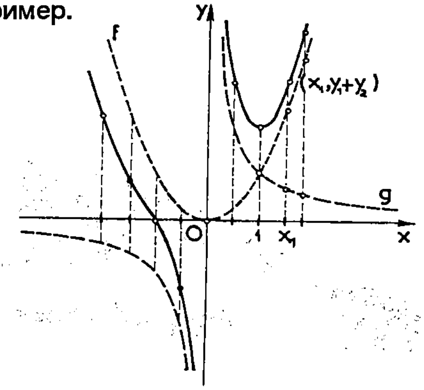
$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f). \ \Diamond$$

Поради ова својство, при состав на три или повеќе функции не се потребни загради (но, треба да се има предвид дека, во општ случај, битен е редоследот на чинителите). Така, и двата состава од 2° се означуваат со $h\circ g\circ f$.

Ако се дадени графиците на две функции f и g, тогаш графикот на

$$f+g, \quad f-g, \quad f\circ g \quad \text{или} \quad \frac{1}{f}$$

можеме да го нацртаме, релативно едноставно, преку „оперирање само со ординатите“ на точките од дадените графици, како во следниот пример.



Црт.1.

Пример 4. Да ги нацртаме графиците на функциите $f+g$, $f-g$, $1/f$ и $f\circ g$, ако f и g се определени со

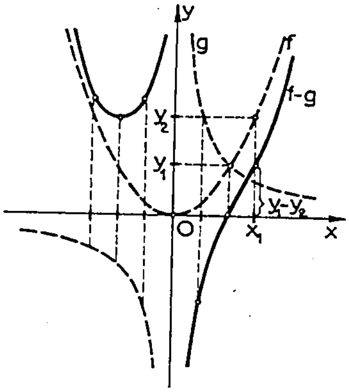
$$f(x) = x^2 \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

(чии графици се претставени на црт.3 и црт.9 во **1.2**).

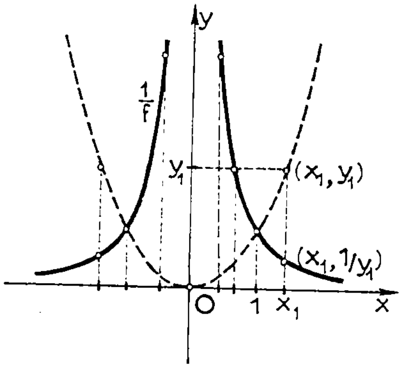
Графиците на f и g ќе ги нацртаме во ист координатен систем (со испрекинати линии, на црт.1).

Да избереме точка x_1 (од $D_f \cap D_g$) и да ставиме $f(x_1)=y_1$, $g(x_1)=y_2$. Собирајќи ги ординатите y_1 и y_2, ќе ја добиеме точката (x_1, y_1+y_2) од графикот на $f+g$. На тој начин можеме да добиеме произволен број такви точки, а можеме да замислиме дека така сме постапиле за секој $x \in D_f \cap D_g$. Сврзувајќи ги така добиените точки, ќе го добиеме графикот на функцијата $f+g$ (полната црна линија на црт.1).

Аналогно се постапува за $f-g$ (црт.2) и за $1/f$ (црт.3).

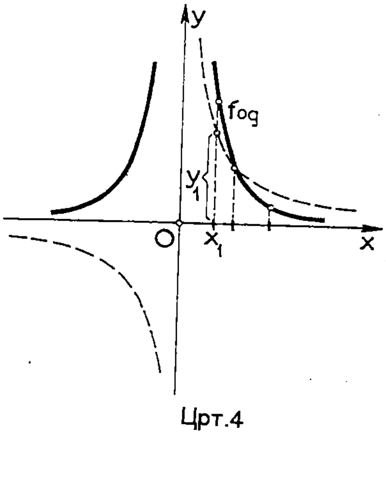


Црт.2

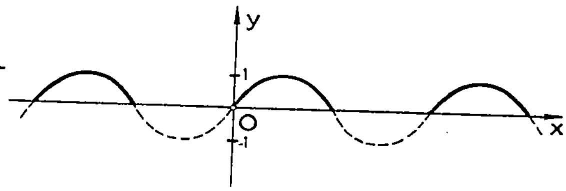


Црт.3

За да го нацртаме графикот на $f \circ g$ треба прво да го нацртаме графикот на g, а потоа од ординатата на секоја негова точка (x_1, y_1) да ја пресметаме вредноста $y_2=f(y_1)$ (се разбира, ако f е дефинирана за y_1) и да се нацрта точката (x_1, y_2). На црт.4 е претставен графикот на $f \circ g$ (полната линија) за $f(x)=x^2$ и $g(x)=1/x$, а на црт.5, за $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\sin x$.



Црт.4



Црт.5

ВЕЖБИ

1. Нека $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2+1$. Да се пресмета:

$$(f+g)(2),\ (f-g)(3),\ (fg)(2),\ (f/g)(3).$$

2. Нека $f(x)=x+2$, $g(x)=x^3-1$, $h(x)=1/x$. За секоја од приложените функции од левата колона(подолу) да се најде функција во десната колона што й е еднаква.

(1) $fg-2h$;	(а) $u\mapsto(u+2)(u^3-1)-2/u$;
(2) $f-g+h$;	(б) $u\mapsto(u^3+u+1)/u$;
(3) $(f+g)h$;	(в) $u\mapsto u-u^3+3+1/u$.

3*. Нека $\mathscr{D}$ е множеството од сите функции, дефинирани на едно исто множество D (на пример, на сегментот $D=[-1,\ 1]$) и нека $(+)$ и $(\cdot)$ се операциите собирање и множење на функции. Да се покаже дека:

а) $\mathscr{D}$ $(+)$ е комутативна група;

б) $\mathscr{D}$ $(\cdot)$ е комутативен и асоцијативен групоид со единица ε, $\varepsilon(x)=1$, за секој $x\in D$;

в) множењето $(\cdot)$ е дистрибутивно спрема собирањето $(+)$;

г) постојат елементи f, $g\in\mathscr{D}$, такви што производот fg е ***нултата функција*** θ (т.е. $\theta(x)=0$ за секој $x\in D$) иако ни едната од f и g не е нулта.

(Со други зборови, за а) –б): $\mathscr{D}(+,\ .)$ е ***прстен со делители на нулата***.)

4. Нека $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ и $g(x)=\sqrt{x^2+4}$. Да се пресмета:

$$(g\circ f)(2),\quad (f\circ g)(2),\quad (f\circ g)(3)\quad (f\circ g)(-3).$$

Колку е $(f\circ g)(0)$, а колку $(g\circ f)(0)$?

5. Нека $A(x)=(x^2-1)^{2/3}$, $B(y)=y^3+2$. Да се најде:

$$(A\circ B)(t),\quad (B\circ A)(y),\quad (A\circ(B+3))(v).$$

6. Да се најде доменот на секоја од функциите $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$ ако

$$f(x)=x^2+1,\quad g(x)=\sqrt{x^2-25}\,.$$

7. Дадена е функцијата:

а) $f(x)=1-x^2$;   б) $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$.

Да се најде: $f(-x)$, $f(x+1)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

8. Да се определи функцијата $f(x)$, којашто го задоволува следниов услов:

а) $f(x+2) = 6+x-x^2$; б) $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

9. За дадена функција f со домен D и за кој било $x \in \mathbf{N}$ да ставиме

$$f^1=f,\quad f^{k+1}=f^k \cdot f.$$

Да се најде: $5g$ и g^5, ако:

а) $g(x) = 2x+1$; б) $g(x) = \frac{1}{x}$; в) $g(x) = \sin x$.

10. За дадена функција f со домен D и за кој било $k \in \mathbf{N}$ да ставиме:

$$f^{(1)}=f,\quad f^{(k+1)}=f^{(k)} \circ f.$$

Да се најде $g^{(3)}$, ако g е дадена како во вежбата 9.

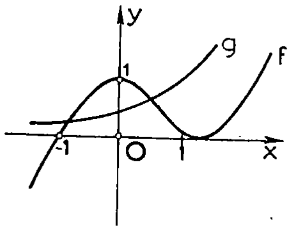
Забелешка. Ознаката $f^{(k)}$ ќе ја користиме многу ретко (всушност, само овде). Да уочиме дека f^2 и $f^{(2)}$ се сосем различни функции: f^2 е производот ff, а $f^{(2)}$ е составот $f \circ f$.

11. Нека функциите f и g имаат графици како на црт. 6. Да се нацртаат графиците на функциите:

а) $f+g$, $f-g$; б) $1/f$, $1/g$;

в) h: $h(x) = |f(x)|$;

г) h: $h(x) = f(|x|)$.



Црт. 6

12. Да се покаже дека: а) збир, б) разлика, в) производ, г) количник, д) состав на две парни функции f и g е парна функција. (Како што спомнавме во **1.2**, празната функција е и парна и непарна).

Дали важат аналогни заклучоци ако f и g се непарни функции?

2.4. Монотоност

За една функција f, дефинирана на множеството D, велиме дека на D:

(а) ***расте*** (или: е растечка), ако: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

(б) ***опаѓа*** (или: е опаднувачка), ако: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, (в) ***не опаѓа*** (е неопаднувачка), ако: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$,

(г) ***не расте*** (е нерастечка), ако: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$,

за кој било пар броеви x_1, $x_2 \in D$.

Функција што има некое од горните четири својства се вика ***монотона функција***. Функциите што го имаат својството (а) или (б) се викаат ***строго монотони*** на D. Натаму D најчесто ќе биде интервал.

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. Да испитаме дали е монотона на D_f функцијата

а) $f(x) = 2x+1$; б) $f(x) = 2-3x$.

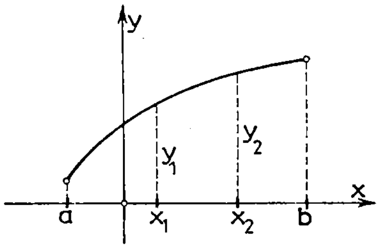
За таа цел, нека x_1, $x_2 \in D_f = (-\infty, +\infty)$ се такви што $x_1 < x_2$. Имаме:

а) $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1+1 < 2x_2+1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, што значи дека функцијата $f(x)=2x+1$ расте во интервалот $(-\infty, +\infty)$; следствено, таа е строго монотона.

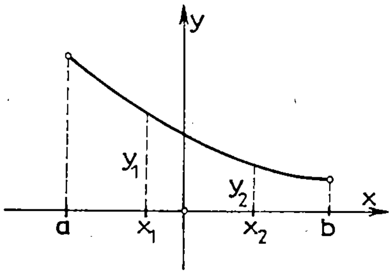
б) $x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1+2 > -3x_2+2$,

т.е. $f(x_1) > f(x_2)$. Значи, $f(x)=-3x+2$ опаѓа во интервалот $(-\infty, +\infty)$, па и таа е строго монотона.

На црт.1 е претставен графикот на функција што расте, а на црт.2 – на функција што опаѓа.



Црт.1



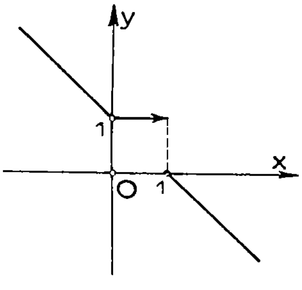
Црт.2

Други едноставни примери на функции што растат се:

$y = x^3$, $y = x^3-1$, $y = x^5$,

а на функции што опаѓаат се:

$y = -x^3$, $y = 1-x^3$ (провери!).



Црт.3

Функциите $\operatorname{sgn} x$ и $[x]$ (во **1.2**, црт.11 и црт.12) се примери на функции што не опаѓаат, а функцијата f, определена со

$$f(x)=\begin{cases}1-x \text{ за } x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty),\\ 1 \text{ за } x\in[0,1)\end{cases}$$

не расте (црт.3). Значи, тие се монотони, но не строго монотони.

Да забележиме дека една функција може да не биде монотона кога се разгледува на целиот домен, а сепак да е монотона на дел од него. Така, на пример, функцијата x^2 расте во $D_1=[0, +\infty)$, а опаѓа во $D_2=(-\infty, 0]$. (Поради тоа, за неа можеме да кажеме дека е ***монотона по делови***.)

Згодно е дури да се воведе поим за монотоност на функција во дадена точка. Имено, ако c е точка од доменот D на функцијата f, тогаш велиме дека f ***расте во точката*** c ако постои број $\delta>0$, таков што f расте во $(c-\delta, c+\delta)\cap D$. Аналогно и за другите поими. (Да напомниме дека, ако $(c-\delta, c+\delta)\subseteq D$, тогаш c е внатрешна точка на D.)

Од друга страна, една функција може да расте или да опаѓа во секоја точка од некое множество D, а сепак да не биде монотона на тоа множество. Така, на пример, функцијата $f(x)=1/x$ опаѓа во секоја точка од множеството $D=(-\infty, 0)\cup(0,+\infty)$, но, на пример, $f(-1)=-1<1=f(1)$.

Да забележиме и тоа дека постојат функции што не се монотони во ниеден интервал (вежба 10) .

За функциите $f(x)=2^x$ и $g(x)=1/3^x$ лесно се согледува дека се монотони (и тоа, првата расте, а втората опаѓа). Имено:

$$u,\ v\in\mathbb{R},\quad u<v\Rightarrow 2^u<2^v\Rightarrow f(u)<f(v),$$

$$u,\ v\in\mathbb{R},\ u<v\Rightarrow 3^u<3^v\Rightarrow \frac{1}{3^u}>\frac{1}{3^v}\Rightarrow g(u)>g(v).$$

Општо, експоненцијалните функции се забележителни примери на строго монотони функции. Поради нивната важност, овде ќе се потсетиме накусо на овие функции.

Функциите од обликот

$$f(x)=a^x,\quad a>0,\quad a\neq 1,$$

се викаат ***експоненцијални функции***. Претпоставката $a>0$ се прави со цел функцијата да биде дефинирана за секој реален број.

(Имено, кога a би бил негативен број, тогаш a^x не би била дефинирана, на пример, за броевите од облик $x=1/2k$, $k\in\mathbb{Z}$.)

Овде ќе го исклучиме и случајот $a=1$, како неинтересен, зашто тогаш $f(x)=1$ за секој $x\in\mathbb{R}$, т.е. f е конст.

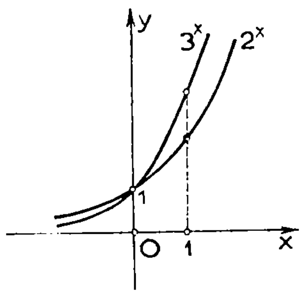
Ако $a > 1$, лесно се покажува (како погоре, за 2^x) дека a^x расте во целиот домен $(-\infty, +\infty)$. Притоа, ако аргументот x расте како аритметичка прогресија со разлика d, тогаш функцијата a^x расте како геометриска прогресија со количник a^d.

За случаите a=2 и a=3, т.е. за функциите 2^x и 3^x, можеме да ги направиме следниве таблици:

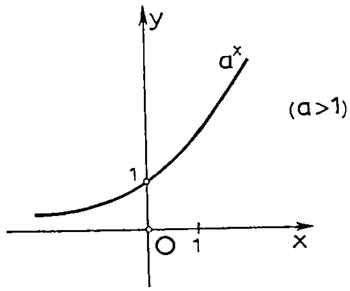
x	-2	-1	0	1	2
2^x	1/4	1/2	1	2	4

x	-2	-1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

Потоа, нанесувајќи точка по точка, можеме да си ги претставиме нивните графици, како на црт. 4.



Црт.4

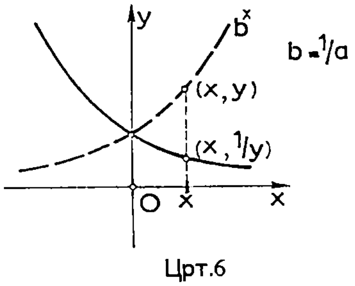


Црт.5

Обликот на графикот на функцијата a^x, за произволен број a>1, е даден на црт.5. Опсегот на функцијата е E=(0, +∞), т.е. $a^x > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$; функцијата расте во $(-\infty, +\infty)$.

Ако $0 < a < 1$, тогаш ставајќи $b=1/a$ добиваме дека $b>1$ и $a^x = 1/b^x$.

Така, графикот на функцијата $f(x)=a^x$ во овој случај се добива од графикот на истата функција од претходниот случај, ако за секој x се земе реципрочната вредност од ординатата на точката $(x, f(x))$ од графикот на првата функција за да се добие соодветна точка на графикот од втората функција (црт.6). Во овој случај функцијата опаѓа во целата дефинициона област и $f(x) > 0$ за секој $x \in (-\infty, +\infty)$.



Црт.6

ВЕЖБИ

Во задачите 1-6 да се утврди дали дадената функција е монотона. Во потврдните случаи, да се наведе типот на монотоноста.

1. $f(x)=x^3$. **2.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **3.** $f(x)=x^3+x^2$.

4. $y=x+|x|$. **5.** $y=\dfrac{|x|}{x}$ **6.** $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le -1 \\ x^2, & x\ge 0. \end{cases}$

Да се одредат интервалите на монотоност на функциите (7–8):

7. $y=2^x+2^{-x}$. **8.** $y=|2x-x^2|$.

9. Да се покаже дека функцијата $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ опаѓа во интервалот $[1, +\infty)$. Што може да се каже за нејзината монотоност во интервалот $(-\infty, -1]$?

10. Да се наведе пример на функцијата што не е монотона во ниеден интервал.

Помош. Да се искористи примерот со функцијата на Дирихле.

2.5. Ограниченост и екстреми

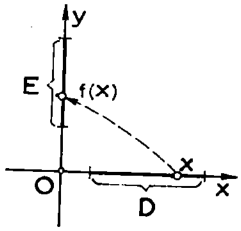
Ќе разгледаме уште неколку важни поими за функциите, што се во врска со нивниот опсег.

За дадена функција f со домен D рековме дека нејзин опсег е множеството

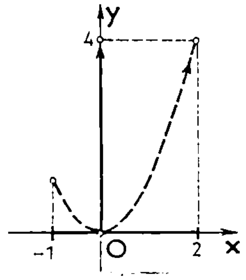
$$E=\{y\in\mathbb{R} \mid (\exists x\in D)\quad y=f(x)\}.$$

Опсегот на f може да си го претставиме геометриски како на црт.1: тоа е множеството точки од y–оската (зацрнетиот дел на y–оската) чии елементи се слики на елементите од D (зацрнетиот дел на x–оската).

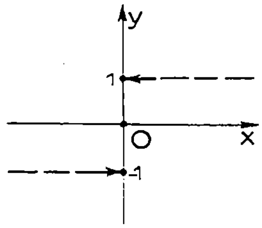
Пример 1. Опсегот на функцијата $y=x^2$ со $D=[-1, 2)$ е $E=[0, 4)$ (црт.2), а опсегот на $y=\text{sgn}x$ е $E=\{-1, 0, 1\}$ (црт.3). Опсегот, пак, на $y=x^3$ е $\mathbb{R}$.



Црт.1



Црт.2



Црт.3

Нека f е функција со домен D. За f велиме дека е: минорирана, мајорирана, ограничена – ако тоа својство го има нејзиниот опсег E. Значи:

а) f е ***минорирана*** (или: ограничена одоздола), ако постои $\alpha \in \mathbb{R}$, таков што $\alpha \leq f(x)$, за секој $x \in D$; секој таков број се вика ***минорант*** на f;

б) f е ***мајорирана*** (или: ограничена одозгора), ако постои $\beta \in \mathbb{R}$, таков што $f(x) \leq \beta$, за секој $x \in D$; притоа, β се вика ***мајорант*** на f;

в) f е ***ограничена***, ако постојат α, $\beta \in \mathbb{R}$, такви што

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta, \text{ за секој } x \in D;$$

со други зборови, f е ограничена акко таа е и мајорирана и минорирана.

Пример 2. а) функцијата $y=x^2$ е минорирана, зашто нејзиниот опсег $E=[0, +\infty)$ е минорирано множество – минорант е секој негативен број и 0, а не е мајорирана.

б) функцијата $y=1-x^2$ има опсег $E=(-\infty, 1]$. Значи, таа е мајорирана, а не е минорирана.

в) Функцијата $\operatorname{sgn} x$ е ограничена (зошто?), а функцијата $y=x^3$ не е ограничена (зошто?).

Нека функцијата f со домен D е мајорирана (т.е. опсегот E е мајорирано множество). Тогаш постои најмал мајорант на f (т.е. на E; в. Т.9 од **1.8**) и тој се вика ***супремум*** на f; се означува со $\sup f$. Значи, ако $\lambda = \sup f$, тогаш:

i) $f(x) \leq \lambda$, за секој $x \in D$,

ii) за секој мајорант β на f важи $\lambda \leq \beta$.

Ако постои $c \in D$, таков што $f(c) = \sup f$, т.е. ако $\sup f \in E$, тогаш $f(c)$ се вика ***најголема вредност*** на f (НГВf), на множеството D.

Дуално на поимите супремум и најголема вредност се воведуваат поимите инфимум и најмала вредност на функција f. Имено, ако f е минорирана, тогаш најголемиот минорант го викаме ***инфимум*** на f и го означуваме со $\inf f$. Ако постои број $d \in D$, таков што $f(d) = \inf f$, тогаш бројот $f(d)$ се вика ***најмала вредност*** на f (НМВf), на D.

Пример 3. Функцијата $f(x)=1-x^2$ (б), од примерот 2) е мајорирана; најмалиот мајорант е 1, па $\sup f=1$. Бидејќи $1 \in E$ (имено, за $x=0 \in D$ имаме $f(0)=1$), следува дека е најголемата вредност на f.

б) И функцијата $g(x)=x^2$ со домен $D=[-1, 2)$ е мајорирана (в.црт. 2); најмал мајорант е 4, па $\sup g=4$. Бидејќи $4\notin E_g=[0, 4)$, следува дека g нема најголема вредност на $D=[-1, 2)$.

в) Функцијата h, определена со $h(x)=1/x^2$ (в.црт. 3, во **2.3**) има инфимум, $\inf h=0$; тој не му припаѓа на нејзиниот опсег $E=(0, +\infty)$, па h нема најмала вредност на $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Забелешка 1. Ако f има домен D и ако $D_1\subseteq D$, тогаш ставајќи $g(x)=f(x)$ за секој $x\in D_1$, добиваме нова функција g што ја нарековме рестрикција од f на D (в. **2.1**). Јасно е дека: *ако f е мајорирана (или, пак, минорирана), тогаш таква е и нејзината рестрикција g, но обратното не важи*, како што покажува и примерот 4 подолу. (Затоа, за погоре воведените поими е битно да се знае на кое множество се разгледува соодветната функција.)

Пример 4. Ако $f(x)=1/x$ се разгледува на целото дефиниционо множество, $D=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$, тогаш таа не е ниту мајорирана, ниту минорирана на D. Ако пак $f(x)$ ја разгледуваме на интервалот $D_1=(0, +\infty)$, добиваме дека таа на D_1 е минорирана и $\inf f(x)=0$; меѓутоа, не постои најмала вредност за оваа функција на D_1.

Во интервалот $D_2=(2, 5)$ функцијата $f(x)=1/x$ е и мајорирана, и минорирана, при што $\inf f(x)=1/5$, а $\sup f(x)=1/2$; функцијата нема ниту најмала, ниту најголема вредност на D_2.

Но ако оваа функција се разгледува на $D_3=[2, 5]$, тогаш $1/5$ ќе биде најмала, а $1/2$ најголема вредност за таа функција на D_3.

Друг важен поим при изучувањето на функциите, кој е во врска со поимите за најголема и најмала вредност, е поимот за локални екстреми.

Имено, една функција f може да не биде ограничена, па според тоа да нема ниту најмала, ниту најголема вредност на дадено множество D; сепак, ако таа се разгледува л о к а л н о , на некои згодно избрани подмножества од D, тогаш таа може да има некое од овие својства. Во таа смисла, за функцијата што е зададена со графикот на црт.4 и не е ограничена на интервалот (a, b), може да се смета дека „локално“ достигнува најголема вредност за $x=c$, а најмала за $x=d$.

Попрецизно, нека f е функција со домен D и нека $c\in D$. Ако постои позитивен реален број δ, таков што $f(c)$ е најголемата вредност на f на множеството $D_1=[c-\delta, c+\delta]\cap D$, т.е.

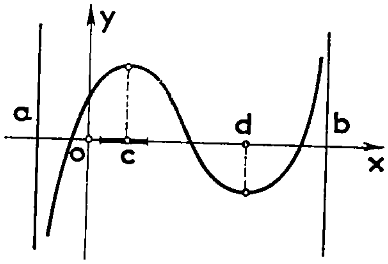
$$f(x)\le f(c) \quad \text{за секој} \quad x\in D_1,$$

тогаш $f(c)$ се вика ***локален максимум*** на функцијата f, а c се вика ***точка на локален максимум***. Ако

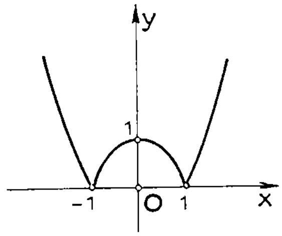
$$f(x) < f(c) \quad \text{за секој} \quad x \in D_1,$$

тогаш $f(c)$ се вика ***строг локален максимум***.

Слично се воведуваат поимите ***локален минимум*** и ***строг локален минимvм***.



Црт.4



Црт. 5

Натаму, во пракса, ќе се сретнуваме само со случаи кога, целиот интервал $[c-\delta, c+\delta]$ се наоѓа во D, т.е. кога $D_1=[c-\delta, c+\delta]$. Локалниот максимум и локалниот минимум со заедничко име се викаат ***локални екстреми*** или само ***екстреми***. *Натаму под „екстрем“ ќе подразбираме „строг локален екстрем“, ако не е поинаку речено.*

Пример 5. Функцијата $f(x)=|x^2-1|$, чиј опсег е $E=[0, +\infty)$, (црт. 5), нема најголема вредност. Но, за $x=0, f$ достигнува вредност 1, којашто е најголема меѓу вредностите на f во интервалот $[0-\delta, 0+\delta]$ за $0<\delta<1$, па $f(0)=1$ е локален максимум. Бидејќи $f(x)<f(0)=1$ во тој интервал, следува дека 0 е точка на строг локален максимум. Оваа функција има локален минимум 0 во точката $x=1$ и $x=-1$. Тој е и НМВf во $D=(-\infty, +\infty)$.

Забелешка 2. Ако некој локален максимум на дадена функција f е и најголема вредност (НГВ) на f (во D_f), тогаш таа вредност се вика и ***апсолутен максимум***. Аналогно за ***апсолутен минимум***. Така, во примерот 5, вредноста $f(1)=0=f(-1)$ е апсолутен минимум (а 1 и -1 се точки на апсолутен минимум); функцијата нема апсолутен максимум.

Функциите $y=x^2$, $y=x^2+1$, $y=1-x^2$, и сл. често ги користевме за илустрација на поимите за функција што ги разгледувавме досега. Тие се специјални случаи од „општата“ ***квадратна функција***

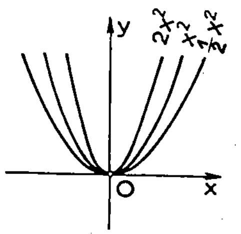
$$f(x) = ax^2+bx+c,$$

каде што a, b, c се константи и $a\neq 0$, со домен $\mathbb{R}$.

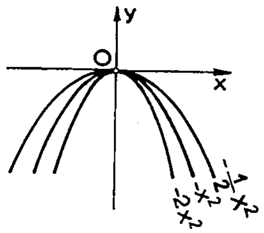
Оваа функција, на читателот му е добро позната од елементарната математика. Сепак, поради нејзините повеќестрани примени, особено за задачи во врска со екстреми, овде ќе се потсетиме на некои нејзини својства. За $b=c=0$, (1) се сведува на:

$$f(x) = ax^2,$$

чиј график е парабола; на црт. 6 се претставени параболи – графици за неколку вредности на $a>0$ ($a=1/2$, $a=1$, $a=2$), а на црт. 7 – за $a<0$ ($a=-1/2$, $a=-1$, $a=-2$).



Црт.6



Црт.7

Графикот на функцијата $y=ax^2+c$ (за $c\neq0$) може да се добие од графикот на функцијата $y=ax^2$ со транслација за c:

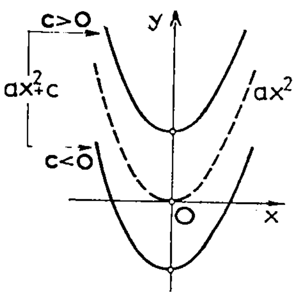
– „нагоре“ по y–оската, кога $c>0$,

– „надолу“ по y–оската, кога $c<0$ (црт.8).

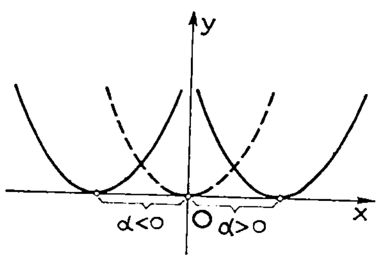
Слично, графикот на функцијата $y=a(x-\alpha)^2$ се добива од графикот на $y=ax^2$ со транслација за a:

– „надесно“ по x–оската, при $\alpha>0$,

– „налево“ по x–оската, при $\alpha<0$ (црт. 9).



Црт.8



Црт.9

Квадратната функција (1) може да се трансформира во обликот

$$f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \tag{2}$$

Нули на функцијата f се решенијата на равенката $f(x)=0$, т.е. на

$$ax^2+bx+c=0, \tag{3}$$

којашто, поради (2), е еквивалентна со:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \text{ т.е. } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}; \tag{4}$$

притоа, бројот $D=b^2-4ac$ се вика ***дискриминанта*** на равенката (3).

Во зависност од знакот на D, равенката (3) има: два, еден или ниеден (реален) корен. Имено:

1°. *Ако* $D>0$, *тогаш* (4) *има два различни (реални) корени,*

$$x_1 = \frac{1}{2a}(-b+\sqrt{D}), \qquad x_2 = \frac{1}{2a}(-b-\sqrt{D}).$$

2°. *Ако* $D=0$, *тогаш* (4) *има еден („двоен") корен,*

$$x_1 = -\frac{b}{2a} \quad (=x_2).$$

3°. *Ако* $D<0$, тогаш (4) нема (реални) корени.

За функцијата f, наместо (2), можеме да ставиме

$$y = a(x-\alpha)^2+\beta, \tag{5}$$

каде што $\alpha=-b/2a$, $\beta=c-b^2/4a$, а $y=f(x)$. Ставајќи

$$x'=x-\alpha, \qquad y'=y-\beta,$$

се врши транслација на координатниот систем Oxy во нов систем $Tx'y'$, со координатен почеток $T(\alpha, \beta)$. Со тоа, равенката (5) станува

$$y' = ax'^2. \tag{6}$$

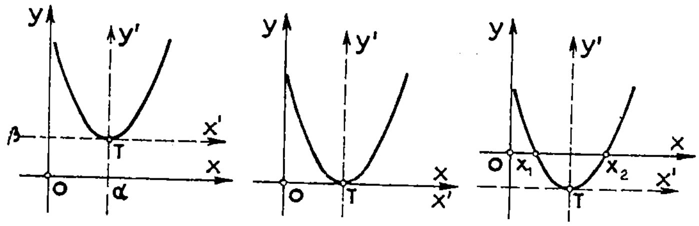
Така, графикот на функцијата f, определена во „стариот" координатен систем Oxy со (5), е парабола со теме $T(\alpha, \beta)$, чија равенка во „новиот" координатен систем $Tx'y'$ е (6).

Да ги разгледаме посебно случаите: $a>0$ и $a<0$.

I. $a>0$. Во зависност од бројот

$$\beta=c-\frac{b^2}{4a},$$

графикот на f има една од положбите а), б) и в) прикажани на црт.10 (притоа, $\alpha=-b/2a>0$).



а) $\beta>0$ б) $\beta=0$ в) $\beta<0$

Црт.10

При секоја од овие положби, $f(x)=ax^2+bx+c$ опаѓа во интервалот $(-\infty, -b/2a)$, а расте во $(-b/2a, +\infty)$ и добива најмала вредност $\beta=c-b^2/4a$ за $x=-b/2a$ $(=\alpha)$.

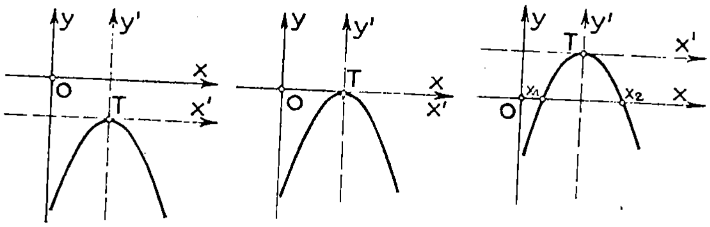
За знакот на f имаме:

а) при $\beta>0$, $f(x)>0$ за секој x;

б) при $\beta=0$, $f(x)>0$ за секој $x\neq -b/2a$, а $f(-b/2a)=0$;

в) при $\beta<0$, $f(x)>0$, за секој $x<x_1$ и $x>x_2$, каде што x_1 и x_2 се нулите на f и $x_1<x_2$, а $f(x)<0$ за секој $x\in(x_1, x_2)$.

II. $a<0$. Како и во I, имаме три случаи: а), б), в) на црт.11.



а) $\beta<0$ б) $\beta=0$ в) $\beta>0$

Црт.11

Во овој случај функцијата расте во интервалот $(-\infty, -b/2a]$, а опаѓа во интервалот $[-b/2a, +\infty)$. За $x=-b/2a$ функцијата прима најголема вредност еднаква со $\beta=c-b^2/4a$.

Како во случајот I, и овде можат да се определат интервалите во кои f е позитивна, односно негативна.

Анализирајќи ги посебните случаи, во таа смисла можат да се извлечат следниве општи заклучоци (4°–6°).

4°. *Ако f нема нули, тогаш знакот на $f(x)$ е еднаков со знакот на a за секој x.*

5°. *Ако f има само една нула x_1, тогаш $f(x)$ има ист знак со знакот на a за секој $x \neq x_1$.*

6°. *Ако f има две нули x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, тогаш знакот на $f(x)$ е еднаков со знакот на a за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, а спротивен со знакот на a за $x \in (x_1, x_2)$.*

Својството на квадратна функција да има најмала, односно најголема вредност може да се примени во многу задачи за екстреми. За илустрација, ќе разгледаме еден пример.

Пример 4. Во прав кружен конус со радиус R на основата и висина H, да се впише прав кружен цилиндар што ќе има најголема бочна плоштина (основата на цилиндарот лежи на основата од конусот; црт. 12).

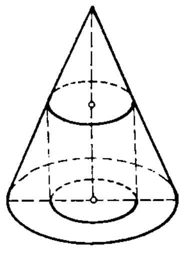
Да го означиме со x радиусот на основата од цилиндарот, а со h неговата висина. Врската меѓу R, H, x и h е дадена со пропорцијата

$$x : (H-h) = R : H$$

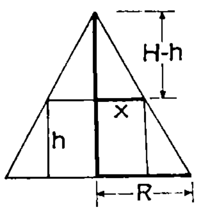
(црт. 13), од каде што $h=H-Hx/R$. Тогаш за плоштината M на бочната површина на цилиндарот ќе добиеме

$$M = 2\pi x \cdot h = -\frac{2\pi H}{R}\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \frac{\pi HR}{2},$$

од каде што заклучуваме дека $M_{\max} = \pi HR/2$, којашто се добива за $x=R/2$.



Црт.12



Црт.13

Да забележиме дека функцијата M (поради својот конкретен геометриски карактер) е дефинирана за $x \in (0, R)$.

ВЕЖБИ

Во задачите 1–8 да се установи дали дадената функција е мајорирана, минорирана, ограничена.

1. $y = 3-x^2$. **2.** $y = 2^x+1$. **3.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4. $y = x^3+1$. **5.** $y = |x|+x-1$. **6.** $y = 1-|x-1|$

7. $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \\ 1/x, & |x|>1. \end{cases}$ **8.** $f(x) = 3^x+3^{-x}$.

9. За секоја од функциите во задачите 1–8 да се најде нејзиниот опсег E и да се одреди: супремумот, инфимумот, НГВ и НМВ, кога постојат.

Во задачите 10–13, за дадената функција да се најде НМВ/НГВ и да се одредат интервалите во кои таа е позитивна/негативна.

10. x^2-x-6. **11.** $2x^2-5x-3$

12. $x-1-x^2$. **13.** $x^4+x^3+2x^2$.

Да се најдат локалните екстреми на дадените функции (14–16).

14. $|3-x^2|$. **15.** $|x^2+4x|$. **16.** $|1-|x-1||$.

17. Бројот 26 да се претстави како збир од два позитивни собироци, така што нивниот производ да биде најголем.

18. Жица со должина d треба да се свитка во правоаголник. Колкави треба да бидат димензиите на правоаголникот за неговата плоштина да биде најголема?

19. Во рамнокрак триаголник со основа a и висина h да се впише правоаголник со најголема плоштина.

Во задачите 20–25, да се испита дадената функција.

Изразот: „*да се испита дадена функција f*" (овде) значи да се установи:

1) нејзинот домен D_f,

2) дали е парна/непарна,

3) дали е монотона или монотона по делови,

4) дали има екстреми, локални и апсолутни, (т.е. НГВ, НМВ), дали е мајорирана, минорирана, ограничена.

20. $y = x^2+2x+2$. **21.** $y = 2+x-x^2$. **22.** $y = |4x-3-x^2|$.

23. $y = 1/(1+x^2)$. **24.** $y = 1/(1-x^2)$. **25.** $y = 2x/(1+x^2)$.

2.6. Инверзни функции

Покрај аритметичките операции и композицијата на функции, од интерес е и ***операцијата инверзија***. Имено, ако f е функција со домен D_f и опсег E_f, природно е да се постави прашање дали постои функција g со домен $D_g=E_f$ и опсег $E_g=D_f$, таква што g да има „обратно дејство", т.е.

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \tag{1}$$

за секои $x\in D_f$, $y\in E_f$. Ако функцијата g ги задоволува горните барања, тогаш велиме дека g е ***инверзна функција*** (или: ***инверзија***) на f.

Одговор на поставеното прашање дава следново

Тврдење 1. *За дадена функција f постои инверзија g акко f го задоволува условот*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \tag{2}$$

за секои x_1, $x_2\in D_f$. Во тој случај, инверзијата g е еднозначно определена.

Доказ. Да претпоставиме дека g е инверзија на f и дека x_1, $x_2\in D_f$ се такви што: $f(x_1)=f(x_2)=y$. Тогаш, според (1), имаме: $x_1=g(y)$ и $x_2=g(y)$, т.е. $x_1=x_2$, па, значи, важи (2).

Обратно, да претпоставиме дека важи импликацијата (2) за секои x_1, $x_2\in D_f$ и нека $y\in E_f$. Тогаш, постои $x\in D_f$ таков што $y=f(x)$, и, според (2), x е еднозначно определен. Ставајќи $g(y)=x$, добиваме функција g со домен $D_g=E_f$ и опсег $E_g=D_f$, што е инверзна на f.

Ако g_1, g_2, се две такви функции, тогаш за секој $y\in D_{g_1}=D_{g_2}=E_f$, од $g_1(y)=x_1$ и $g_2(y)=x_2$ следува дека $f(x_1)=y=f(x_2)$, од што според (2), добиваме $x_1=x_2$. Значи, $g_1=g_2$. ◊

Инверзијата на f, овде[1], ќе ја означуваме со f^{-1}.

Забелешка. Во пракса не е неопходно да се проверува дали е исполнет условот (2), туку треба да се провери дали равенката: $y=f(x)$ е еднозначно решлива по x, при $y\in E_f$. Ако x е решението на таа равенка, тогаш $f^{-1}(y)=g(y)=x$. Така и ги определуваме инверзните функции во следните примери.

---

[1] Често, со f^{-1} се означува функцијата $1/f$, како, на пример, $\lg^{-1}x=1/\lg x$, па затоа за инверзијата тогаш се употребува посебна ознака (10^x наместо $\lg^{-1}x$).

Вообичаено е со x да се означува независнопроменливата, а со y – зависнопроменливата. поради тоа, инверзната функција g се запишува во обликот $y=g(x)$.

Пример 1. Ако $D_f = \mathbb{R} = E_f$, и ако f е определена со:

а) $f(x) = x+2$, б) $f(x) = 2x$, в) $f(x) = x^3$,

тогаш соодветната инверзна функција f е определена со:

а) $f^{-1}(x) = x-2$, б) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$, в) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Пример 2. Да претпоставиме сега дека a ($\neq 1$) е позитивен реален број. Тогаш $\log_a x$ е инверзија на функцијата a^x, бидејќи:

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Притоа, $f(x) = a^x$ има домен $\mathbb{R}$ и опсег $\mathbb{R}^+$, па, значи, функцијата $f^{-1}(x) = \log_a x$ има домен $\mathbb{R}^+$ и опсег $\mathbb{R}$.

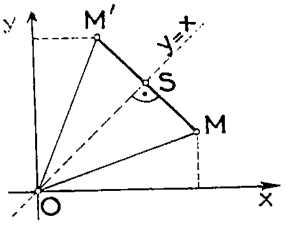
Сите функции од наведените два примера се строго монотони, а дека тоа не е случајно се гледа од следново

***Тврдење* 2.** *Секоја функција f што е строго монотона во доменот D_f има инверзија f^{-1} што е исто така строго монотона во опсегот E_f. Притоа, f и f^{-1} имаат иста природа на монотоност, т.е. и двете се растечки или опаднувачки.*

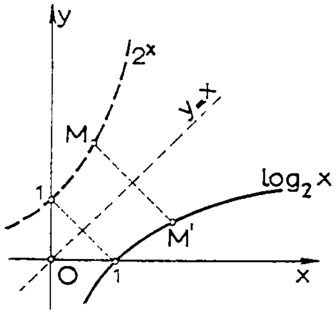
Доказ. Да претпоставиме дека f е растечка. Ако $f(x_1) = y = f(x_2)$, тогаш мора да биде $x_1=x_2$, бидејќи за $x_1 < x_2$ би имале $f(x_1) < f(x_2)$, а $f(x_2) < f(x_1)$ за $x_2 < x_1$. Според Т.1, f има инверзија f^{-1} со домен E_f и опсег D_f. Ако $y_1, y_2 \in E_f$ се такви што $y_1 < y_2$, и ако $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$, тогаш имаме $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$, што, поради монотоноста на f, е можно само ако $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$. Според тоа и f^{-1} е растечка. ◊

Природно се наметнува прашањето каква врска има меѓу графикот на една функција f и графикот на нејзината инверзија f^{-1}, при декартов координатен систем Oxy. Одговорот следува од дефиницијата на f^{-1}. Имено, ако точката $M(a, b)$ е на графикот од f, т.е. ако $b=f(a)$, имаме $a=f^{-1}(b)$, па значи точката $M'(b, a)$ е на графикот од f (црт.1). Имајќи, пак, предвид дека точките M и M' се симетрични во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант, т.е. на правата $y=x$, го добиваме следново

***Тврдење* 3.** *Графикот од f е симетричен со графикот од f^{-1}, во однос на правата $y=x$.* ◊



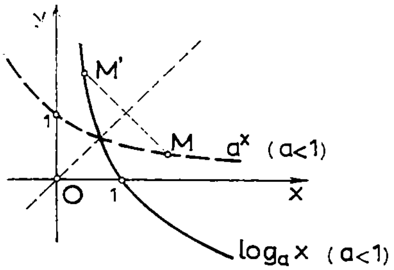
Црт.1



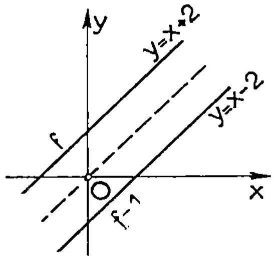
Црт.2

Пример 3. На црт.2 е претставен графикот на функцијата $f(x)=2^x$ со испрекината линија. Од него е добиен графикот на инверзната функција $f^{-1}(x)=\log_2 x$, како „огледална слика" во однос на правата $y=x$.

На црт.3 е направено истото за $f^{-1}(x) = \log_a x$, од графикот на $f(x) = a^x$ при $0<a<1$.

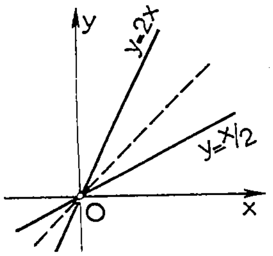


Црт.3

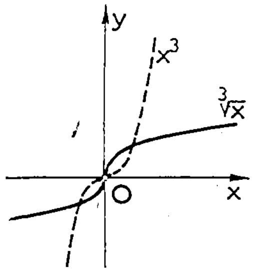


Црт.4

На црт.4–6 се претставени графиците на функциите од примерот 1 и нивните инверзии.



Црт.5



Црт.6

Имајќи предвид дека (1) може да се напише во облик:

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x,$$

можеме да го формулираме следново:

***Тврдење* 4.** *Ако f^{-1} е инверзија на f, тогаш и f е инверзија на f^{-1}, т.е. $(f^{-1})^{-1}=f$.* ◊

Следниот пример ќе нè доведе до поимот за обопштени инверзии.

Пример 4. Функцијата $f: x \mapsto x^2$, со домен $\mathbb{R}$, нема инверзија, бидејќи, на пример, $f(-2)=4=f(2)$, т.е. не е исполнет условот (2). Но, ако ставиме $S=[0, +\infty)$, тогаш рестрикцијата $f_S: x \mapsto x^2$ од f на S има инверзија f_S^{-1}: $x \mapsto \sqrt{x}$, при што доменот од f_S^{-1} е ист како и опсегот на f, т.е. $[0, +\infty)=S$. И рестрикцијата $f_T: x \mapsto x^2$ од f на $(-\infty, 0]=T$ има инверзија $f_T^{-1}: x \mapsto -\sqrt{x}$ со ист домен како и f. За f_S^{-1} и f_T^{-1} велиме дека се обопштени инверзии на f.

Поопшто, за функцијата g велиме дека е ***обопштена инверзија*** на f акко:

$$D_g = E_f, \qquad E_g = S \subseteq D_f$$

(т.е. доменот на g е ист како и опсегот на f, а опсегот S од g е подмножество на доменот од f) и $g=f_S^{-1}$ е инверзија на рестрикцијата f_S од f на S.

Да претпоставиме дека f има инверзија f^{-1} и обопштена инверзија g. Според тоа, $g=f_S^{-1}$ за некое $S \subseteq D_f$. Да покажеме дека $S=D_f$. Навистина, ако $a \in D_f \setminus S$, тогаш $f(a)=b \in E_f=D_g$, па значи постои $c \in S$, такво што $b=f_S(c)$, што, според (2), не е можно. Според тоа, точно е следново

***Тврдење* 5.** *Ако f има инверзија f^{-1}, тогаш f^{-1} е единствената обопштена инверзија на f.* ◊

Да покажеме дека е точно следново

***Тврдење* 6.** *Секоја функција f има обопштена инверзија. Ако f нема инверзија, тогаш постојат барем две различни обопштени инверзии на f.*

Доказ.* Нека $b \in E_f$ е елемент од опсегот на f. Постои барем еден $a \in D_f$, таков што $f(a)=b$. Избирајќи за секој $b \in E_f$ точно по еден $a \in D_f$ со горното својство, и означувајќи го со S подмножеството на D_f што ги содржи сите така избрани a, добиваме дека f_S има инверзија f_S^{-1} и дека $g=f_S^{-1}$ е обопштена инверзија на f.

Да претпоставиме дека f нема инверзија, т.е. дека не е исполнет условот (2). Според тоа, постојат a_1, $a_2 \in D_f$, такви што $f(a_1)=f(a_2)=b$, но $a_1 \neq a_2$. Нека, за секој $d \in D_f$, $d \neq b$, избереме точно еден $c \in D_f$ таков што $f(c)=d$, а множеството од сите така избрани c, заедно со a_1 да го означиме со S_1; S_2 нека биде подмножеството од D_f добиено како и погоре со тоа што наместо a_1 го земаме a_2. Тогаш f_{S_1} и f_{S_2} се различни функции, бидејќи $a_1 \neq a_2$, а $g_1=f_{S_1}^{-1}$ и $g_2=f_{S_2}^{-1}$ се различни обопштени инверзии на f. ◊

Пример 5. Да ги определиме сите обопштени инверзии на функцијата f определена со следнава таблица:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1/2	0	1/2	1/3	1

Според доказот на претходното тврдење, треба да ги определиме сите подмножества S на $D_f=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, такви што $f(S)=E_f$ и условот (2) да важи за секои $x_1, x_2 \in S$. Лесно се увидува дека: $S_1=\{0, 1, 4, 5\}$, $S_2=\{0, 3, 4, 5\}$, $S_3=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $S_4=\{2, 3, 4, 5\}$ се такви множества, па, значи,

$$g_1=f_{S_1}, \quad g_2=f_{S_2}^{-1}, \quad g_3=f_{S_3}^{-1}, \quad g_4=f_{S_4}^{-1}$$

се сите можни обопштени инверзии на f. Да ги претставиме таблично g_1, g_2, g_3 и g_4.

x	0	1/3	1/2	1
$g_1(x)$	0	4	1	5
$g_2(x)$	0	4	3	5
$g_3(x)$	2	4	1	5
$g_4(x)$	2	4	3	5

Да напомниме дека функцијата од примерот 4 има безброј многу обопштени инверзии (вежба 20).

Со комбинација на операциите композиција и инверзија се доаѓа до, таканаречен, параметарски облик на функциите. Имено, ако g и f се дадени функции, при што f има инверзија f^{-1}, тогаш за системот равенки:

$$x=f(t), \quad y=g(t),$$

велиме дека е ***параметарски облик*** на функцијата $g \circ f^{-1}$. Притоа, променливата t се вика ***параметар***.

Пример 6. Равенките $x=t^3$, $y=t^2$ претставуваат еден параметарски облик на функцијата h: $x \mapsto x^{2/3}$.

Во случај кога функцијата f нема инверзија, системот равенки $x=f(t), y=g(t)$ е параметарски облик на едно множество функции, а имено на секоја функција $g \circ h$, каде што h е една обопштена инверзија на f. Според тоа, за да биде добро дефинирана функцијата $y(x)$ со параметарските равенки $x=f(t)$, $y=g(t)$, треба да биде однапред јасно за која обопштена инверзна функција $t=h(x)$ станува збор.

Пример 7. Ако се постави условот $t \geq 0$, тогаш со равенките $x=t^2, y=t-t^4$ е определена функцијата $y=\sqrt{x}-x^2$. При барањето пак $t \leq 0$, со истите равенки е определена функцијата $y=-\sqrt{x}-x^2$.

Забелешка. Во равенките $x=f(t)$, $y=g(t)$, постои симетрија меѓу x и y, па затоа тие равенки можат да дефинираат и функција $x=x(y)$, а тоа е, имено, функцијата $f\circ g^{-1}$. На пример, со $x=t^2$, $y=t^3$ (без дополнителни услови) не е определена еднозначна функција $y(x)$, додека со нив е дефинирана еднозначна функција $x(y)$, а тоа е $x=\sqrt[3]{y^2}$.

ВЕЖБИ

Да се провери дали функцијата f има инверзна функција и, во потврден случај, да се определи f^{-1} (1–12).

(Притоа, ако D_f не се дефинира експлицитно, се претпоставува дека тоа е најголемото можно множество реални броеви, за кое соодветниот аналитичен израз има смисла; в.во **2.1**, пред Пр.3.)

1. $f(x)=x-1$.

2. $f(x)=2x+1$.

3. $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$

4. $f(x)=\lg(x+1)$.

5. $f(x)=x^2$.

6. $f(x)=x^2$, $D=[0,+\infty)$

7. $f(x)=1/x^2$.

8. $f(x)=1/x^2$, $D_f=(-\infty,0)$.

9. $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{за } x\in(-\infty,0]\\ 1-x^2 & \text{за } x\in(0,+\infty)\end{cases}$

10. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

11. $f(x)=\sin x$.

12. $f(x)=\sin x$, $D_f=[-\pi/2,\pi/2]$.

13. Да се даде пример на функција f што има домен $[-1,1]$ и има инверзна функција, но не е монотона.

Да се најде функцијата $h=f\circ g^{-1}$ определена параметарски со: $x=g(t)$, $y=f(t)$ (14–16).

14. $g(t)=2^t$, $f(t)=t^2$.

15. $g(t)=1-t^3$, $f(t)=t^2$.

16. $g(t)=\sin t$, $f(t)=\cos t$, $D_g=[-\pi/2,\pi/2]$, $D_f=\mathbb{R}$.

17. Да се определат барем по две обопштени инверзии кај секоја од функциите во вежбите 5, 7, 10, 11.

18*. Нека f е функција со домен D и опсег E. За едно подмножество S од D велиме дека е ***заситено*** акко и рестрикцијата f_S од f на S има опсег E, а ***независно*** ако е исполнет условот (2) за секои x_1, $x_2\in S$. Да се уочи дека на секоја обопштена инверзија на f ѝ одговара едно заситено и независно подмножество S на D, како и обратното тврдење.

19. Што е инверзија на празната функција?

20. Да се покаже дека $f(x)=x^2$ има безброј многу обопштени инверзии.

21*. Да се покаже дека ако f и g имаат инверзии, тогаш и $g\circ f$ има инверзија и дека $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$. Да се формулира соодветен резултат за обопштени инверзии.

22*. Нека f е функција со домен D и опсег E. За g велиме дека е ***лева инверзија*** на f акко:

$$D_g=E,\quad E_g=D,\ (\forall x\in D)\quad [(g\circ f)(x)=x].$$

За h, пак, велиме дека е ***десна инверзија*** на f акко:

$$D_h=E,\quad E_h=D,\quad (\forall y\in E)\quad [(f\circ h)(y)=y].$$

Да се покаже дека:

а) g е лева инверзија на f акко g е инверзија на f;

б) h е десна инверзија на f акко h е обопштена инверзија на f.

2.7. Функции од повеќе реални аргументи. Имплицитни функции

Предмет на оваа глава, секако, се функциите од еден реален аргумент. Сепак, ќе биде корисно овде да го засегнеме и поопштиот поим – поимот за функција од повеќе реални аргументи.

Да го означиме со $\mathbb{R}^n$ множеството од сите подредени n–ки реални броеви,

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\};$$

притоа:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\Leftrightarrow a_1=b_1,\quad a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n.$$

Нека D е подмножество од $\mathbb{R}^n$. Секое пресликување f од множеството D во множеството на реалните броеви:

$$f\colon D\to\mathbb{R},$$

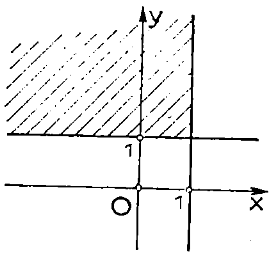
се вика ***реална функција од n реални аргументи***, со домен D. Ако, притоа, елементот $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ се пресликува во реалниот број y, тогаш пишуваме

$$y=f(x_1, x_2,\dots, x_n).$$

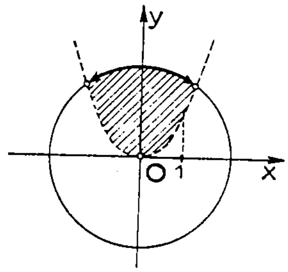
Јасно е дека поимот за функција од еден реален аргумент е специјален случај од тукушто воведениот поим.

Во случај кога имаме две независнопроменливи, наместо $y=f(x_1, x_2)$, обично пишуваме $z=f(x, y)$. Доменот D е множество двојки (x, y); него можеме да го претставиме како множество точки во координатниот систем Oxy.

Пример 1. Функцијата $z=\sqrt{1-x}+\sqrt{y-1}$ е дефинирана за $x\leq 1, y\geq 1$, а тоа е дел од рамнината на црт.1.



Црт.1



Црт.2

Еве уште еден пример.

Пример 2. Доменот на функцијата

$$z=\ln(y-x^2)+\sqrt{4-x^2-y^2}$$

е множеството $D=D_1\cap D_2$, каде што

$$D_1 = \{(x,y) \mid y-x^2 > 0\},\quad D_2 = \{(x,y) \mid 4-x^2-y^2\geq 0\}.$$

На црт.2, D_1 е множеството точки од „внатрешноста“ на параболата $y=x^2$, а D_2 е кругот $x^2+y^2\leq 4$; така доменот D е претставен со засенчениот дел на рамнината Oxy.

Да забележиме дека функциите од две реални променливи можат геометриски да се претставаат со помош на просторни координатни системи, и нивни претставници се, обично, површини.

Операциите со функции, разгледани во **1.3**, се пренесуваат и кај функциите од повеќе реални променливи, и тоа без никакви измени. Операцијата композиција се обопштува на повеќе начини; овде нема да го разгледаме тоа, а ќе се задржиме само на еден начин на определување на функција f од една променлива, при дадена функција F од две променливи.

Имено, нека $F(x, y)$ е функција од две реални независни променливи со домен D_F, а $f(x)$ функција од една независна променлива со домен D_f. Велиме дека $f(x)$ е определена имплицитно со равенката

$$F(x, y) = 0$$

ако е исполнет следниов услов:

(*) | За секој $x \in D_f$, имаме $(x, f(x)) \in D_F$ и, притоа, $F(x, f(x)) = 0$

Да разгледаме неколку примери.

Пример 3. Со равенката $x^3+y^5-x=0$ е определена имплицитно функцијата $y=\sqrt[5]{x-x^3}$. Притоа, оваа функција е единствената што има домен $\mathbb{R}$ и ја задоволува горната равенка.

Пример 4. Со равенката $y^2-x=0$ се определени безброј многу функции $y=f(x)$. Имено, тоа се, секако, функциите $\sqrt{x}$ и $-\sqrt{x}$ а и уште безброј многу други (вежба 9).

Пример 5. Со равенката $x^2+y^2+1=0$ е определена празната функција, додека со $x^2+y^2=0$ е определена функцијата $f(x)$ со домен $D_f=\{0\}$, при што $f(0)=0$.

Во следниот дел ќе направиме уште неколку забелешки за имплицитно дадените функции, а во II.2.6 ќе формулираме неколку услови при кои равенката $F(x,y)=0$ определува еднозначна функција $f(x)$, што припаѓа на дадена класа функции.

ВЕЖБИ

Во задачите 1–6, претстави го доменот на дадената функција од два аргумента: а) со неравенства, б)геометриски.

1. $z = \ln(x-y)$. **2.** $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$.

3. $z=\sqrt{x^2-y^2}$. **4.** $z=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

5. $z=\sqrt{(1-y)/(1-x)}$ **6.** $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

Во задачите 7–8, да се најде функцијата $f(x)$ што го задоволува соодветниот услов, а е определена имплицитно со равенката $F(x,y)=0$.

7. $F(x, y) = x-y^2$; а) $f(x) \geq 0$ за $x \in [0, +\infty)$; б) $f(x) \leq 0$ за $x \in [0, +\infty)$;

в) $f(x) \geq 0$ за $x \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$, $f(x) < 0$ за $x \in [0, +\infty) \setminus \mathbb{Q}$.

8. $F(x, y) = x^2+y^2-1$; а) $f(x) \geq 0$ за $x \in [-1, 1]$; б) $f(x) \leq 0$ за $x \in [-1, 1]$.

9. Да се определат бесконечно многу функции дадени имплицитно со равенката $F(x,y)=0$, во секоја од претходните две вежби (7 и 8).

10. Кои функции $f(x)$ се определени со равенката:

а) $2y-|y|-x^2 = 0$; б) $|xy|-xy-1 = 0$? в) $|xy|-xy = 0$?

11. Да се уочи дека со равенката $F(x,y)=0$ е определена и функција $g(y)$, и да се определат сите такви функции, каде што $F(x,y)$ е определена како во: а) вежбата 7; б) вежбата 10.

2.8.* Многузначни функции

Во претходните два раздела видовме дека:

а) Ако функцијата f не го задоволува условот (2) од **2.6**, т.е. ако f не е инјекција, тогаш f има повеќе обопштени инверзии.

б) При дадени функции $g(t)$ и $f(t)$, со параметарските равенки $x=g(t)$, $y=f(t)$, можат да бидат определени повеќе функции $y=y(x)$.

в) Со една равенка $F(x,y)=0$ можат да бидат дефинирани (имплицитно) повеќе функции $y=y(x)$.

Овие „аномалии" се отклонуваат со воведување на поимот многузначна функција.

Имено, за f велиме дека е ***многузначна функција*** или ***полифункција*** со домен D акко на секој елемент $x \in D_f$ му е придружено непразно подмножество $f(x)$ од $\mathbb{R}$. Со други зборови, f е пресликување од D_f во фамилијата од непразни подмножества на $\mathbb{R}$. Опсегот E_f на f се дефинира со:

$$y \in E_f \Leftrightarrow (\exists x \in D_f)\ y \in f(x). \tag{1}$$

Да забележиме дека една функција f може да се смета за полифункција ако не се прави разлика меѓу y и едноелементното множество $\{y\}$. Притоа, дефинициите за опсег дадени во **2.1** и овде се согласни.

Графикот Γ_f на една полифункција f со домен D_f се дефинира со:

$$(x, y)\in\Gamma_f \Leftrightarrow x\in D_f \text{ и } y\in f(x). \tag{2}$$

Значи, и во овој случај, Γ_f е подмножество од $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ($=\mathbb{R}^2$). Во случај кога f е функција, тогаш оваа дефиниција е согласна со дефиницијата дадена во **2.2**; во општиот случај на полифункција е точно следното својство, што не важи кај функциите.

***Тврдење* 1.** *Секое непразно подмножество Γ од $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ е график на (единствена) полифункција f.*

Доказ. Ако D е множеството од сите реални броеви x, такви што $(x, y)\in\Gamma$ за некој $y\in\mathbb{R}$ и ако, за секој $x\in D$, $f(x)$ се дефинира со:

$$y\in f(x) \Leftrightarrow (x, y)\in\Gamma, \tag{3}$$

добиваме полифункција f со домен $D_f=D$ и график $\Gamma_f=\Gamma$. ◊

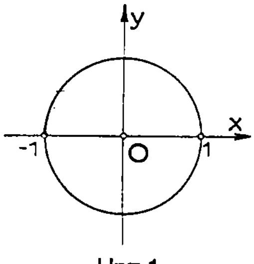
Интерпретирајќи го множеството $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ со множеството точки од една рамнина во која е избран правоаголен координатен систем [1), можеме да речеме дека: *секоја полифункција е наполно окарактеризирана со непразно множество точки од рамнината.*

Да разгледаме два примера.

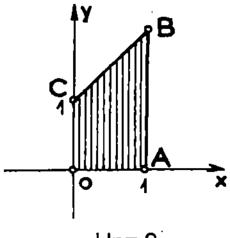
Пример 1. Нека $D_f=[-1, 1]$ и

$$(\forall x\in D_f)\, f(x)=\{-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\}.$$

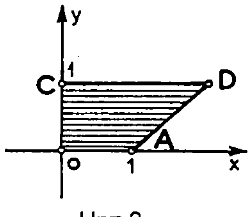
Добиваме, значи, полифункција таква што $f(x)$ е двоелементно множество за секој $x\in D_f$, $x\neq-1, 1$, а $f(1)=f(-1)=0$ ($=\{0\}$). График Γ_f на оваа полифункција се точките од кружницата $x^2+y^2=1$ (црт.1).



Црт.1



Црт.2



Црт.3

Пример 2. Ако $D_f=[0, 1]$ и $f(x)=[0, 1+x]$, за секој $x\in D_f$, добиваме (безброј многузначна) полифункција, чиј график е трапезот $OABC$ (на црт.2).

Нас, главно, нé интересираат полифункции чии графици се криви линии, каков што и е случајот во пр.1. Кривите, обично, се определуваат

[1) Ова важи и за други видови координатни системи.

со равенка од облик $F(x, y)=0$, или со параметарски равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$. (Кружницата $x^2+y^2=1$ ги има, на пример, следните параметарски равенки $x=\cos t$, $y=\sin t$.) *Ова сугерира претпоставка дека постои врска меѓу полифункции и имплицитно односно параметарско задавање на функции.*

За да дојдеме до таква врска, ќе го воведеме поимот за потфункција од една полифункција.

Имено, нека f е полифункција, а g функција со ист домен D [2]. Велиме дека g е ***потфункција*** на f акко:

$$(\forall x\in D)\ \ g(x)\in f(x).$$

Бараната врска меѓу имплицитно, односно параметарски зададена функција може да се искаже со следново:

***Тврдење* 2.** *Нека Γ е делот од рамнината определен со равенката:*

$$F(x, y) = 0, \tag{4}$$

каде што $F(x,y)$ е функција од две независнопроменливи, и нека f е полифункцијата чиј график е Γ. Тогаш, функцијата g е имплицитно определена со (4) акко g е потфункција од f.

(Заменувајќи го (4) со:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \tag{4'}$$

каде што $x(t)$, $y(t)$ се две функции од t, ја добиваме врската со параметарско задавање на функција.)

За да дојдеме до соодветна врска меѓу полифункции и обопштени инверзии на дадена функција f, треба да воведеме поим за ***инверзно множество*** Γ^{-1} на дадено множество Γ точки (x, y) од рамнината. Имено, Γ^{-1} се определува со:

$$(x, y)\in\Gamma^{-1} \Leftrightarrow (y, x)\in\Gamma \tag{5}$$

(Така, во Пр.1 имаме $\Gamma=\Gamma^{-1}$, а во Пр.2, Γ^{-1} е множеството точки од трапезот $OADC$, заедно со страните (црт.3).)

***Тврдење* 3.** *Нека Γ е график на функцијата f и нека h е полифункцијата чиј график е Γ^{-1}. Тогаш, g е обопштена инверзија на f, акко g е потфункција од h.* ◊

---

[2] Би можело да се допушти да биде и $D_g\subseteq D_f$.

Да напомниме дека, како и досега, ќе нé интересираат само функциите, т.е. *еднозначните полифункции*, а поимот за полифункции (што не се еднозначни) има само помошен карактер.

Во врска со трите проблеми што во почетокот на овој дел го сугерираа поимот полифункција, ќе го истакнеме следното.

Да претпоставиме дека при решавање на конкретна задача треба да го определиме *експлицитниот облик* на функција $g(x)$. Притоа, од соодветни причини, сме дошле до заклучок дека бараната функција $g(x)$ е една од функциите што се *определени имплицитно* со равенката $F(x,y)=0$, каде што $F(x,y)$ е позната функција. Во случај таа равенка да определува повеќе функции, а природата на задачата е таква што $g(x)$ е еднозначно определена, ќе треба да искористиме друго својство на $g(x)$ за да ја издвоиме од другите можни решенија.

Така, на пример, ако однапред е јасно дека $g(x)\geq 0$, и ако добиеме дека таа е зададена имплицитно со $x^2+y^2=1$, тогаш ќе заклучиме дека $y=\sqrt{1-x^2}$ е бараната функција.

Слична ситуација имаме и во случај кога бараната функција има познат параметарски облик.

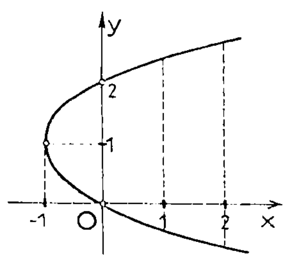
Да забележиме дека *параметарските равенки* $x=x(t)$, $y=y(t)$, *најчесто определуваат многузначна функција*. За илустрација, ќе разгледаме еден пример.

Пример 3. Да го нацртаме („точка по точка") графикот на следнава параметарски зададена функција

$$x=t^2-1,\quad y=t+1.$$

Прво ќе ја направиме следнава табела:

t	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
x	3	2	1	0	$-3/4$	-1	$-3/4$	0	1	2	3
y	-1	$1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{2}$	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$1+\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+1$	3



Црт.4

Потоа, соодветните парови (x, y): $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 0)$, $(3, 3)$ итн., ќе ги претставиме како точки во координатен систем Oxy и ќе го добиеме бараниот график (црт.4).

ВЕЖБИ

1. Нека $\Gamma = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 0)\}$. Да се определи:

   а) табелата на полифункцијата чиј график е Γ;

   б) Γ^{-1} и табелата на полифункцијата со график Γ^{-1};

   в) потфункциите на полифункциите од а) и б).

2. Нека функцијата f со домен $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ е определена со следнава табела:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	2	1	0	1	0	3	6	6	5

   Да се определат:

   а) графикот Γ на f и Γ^{-1};

   б) барем три обопштени инверзии на f; колку се сите на број?

3. Да се определи експлицитниот облик на функцијата $y=f(x)$ со домен $D=[-1, 1]$, дадена имплицитно со $x^2+y^2=1$, ако се знае дека:

   а) $f(x)$ (монотоно) расте во $[-1, 0]$ и $(0, 1]$;

   б) $f(x)$ (монотоно) опаѓа во $[-1, 0]$ и $(0, 1]$;

   в) $f(x)$ (монотоно) расте во $[-1, -1/2]$, $[-1/4, 1/2]$, а опаѓа во комплементот на унијата од тие сегменти;

   г) $f(x) \leq 0$, за секој $x \in D$.

4. Да се определи експлицитниот облик на функцијата $y=f(x)$ дадена во параметарски облик $x=2\cos t$, $y=\sin t$, ако се знае дека $f(x)$ има домен $[-2, 2]$ и притоа:

   а) $f(x) \geq 0$ за секој $x \in D$;

   б) $f(x) \leq 0$ за $x \in [-2, 0]$, а $f(x) > 0$ за $x \in (0, 2]$;

   в) $f(x)$ е растечка во $[-2, 0]$ и $(0, 2]$.

5. Да се определи функцијата $g(x)$ што е обопштена инверзија на функцијата $f(x)=x^2$, ако се знае дека:

   а) $g(x)$ е растечка во $[0, +\infty)$;

   б) $g(x)$ е опаѓачка во $[0, +\infty)$;

   в) $g(x)$ е растечка во $[0, 1)$ и опаѓачка во $[1, +\infty)$.

Во задачите 6–12 да се скицираат кривите определени со приложените равенки. Потоа, да се најдат функции $y=y(x)$ зададени имплицитно со тие равенки.

6. $(x+2)^2+(y-1)^2=4$. **7.** $x^2+y^2-6x-2y-14=0$. **8.** $4x^2+9y^2=36$.

9. $x^2-y^2=1$. **10.** $x^2-y^2=0$. **11.** $xy-1=0$. **12.** $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Во задачите 13–16 да се изврши следнава анализа: а) да се скицира кривата дадена со соодветните параметарски равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$ со помош на табела во која се нанесуваат вредности на t, x и y; б) да се елиминира параметарот t; в) да се најдат функции $y=y(x)$, определени со параметарските равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$.

13. $x=a\cos t, y=b\sin t$ $(a>0,\ b>0)$. **14.** $x=5\cos^3 t,\quad y=5\sin^3 t$.

15. $x=3t/(1+t^2),\quad y=3t^2/(1+t^2)$ **16.** $x=2^t+2^{-t},\quad y=2^t-2^{-t}$

17*. Нека f и g се полифункции и нека h е полифункцијата дефинирана со:

i) $x\in D_h \Leftrightarrow (x\in D_f$ и $(f(x)\cap D_g)\neq\varnothing)$

ii) $(\forall x\in D_h)\ [y\in h(x)\Leftrightarrow(\exists v\in f(x))\ y\in g(v)]$.

Добиената полифункција h се означува со $g*f$, и се вели дека h е *композиција* на f и g. Да се покаже дека:

а) ако f и g се функции, тогаш $g*f=g\circ f$;

б) композицијата на полифункции има својство на асоцијативност, но (во општ случај) не и на комутативност.

18*. Ако f е полифункција со график Γ, тогаш полифункцијата со график Γ^{-1} ќе ја означиме со f^{-1}. Да се покаже дека за секои f, g, се точни следните тврдења:

а) $(g*f)^{-1}=f^{-1}*g^{-1}$; б) $D_{f^{-1}*f}=D_f$ и $[(\forall x\in D_f)\ x\in f^{-1}*f(x)]$;

в) $D_{f*f^{-1}}=E_f$ и $[(\forall y\in E_f)\ y\in f*f^{-1}(y)]$.

I.3. ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

3.1. Полиномни функции

Секоја функција P од обликот:

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

каде што a_0, $a_1, \ldots, a_n$ е низа константни, т.е. дадени реални броеви, се вика ***полиномна функција*** или ***полином***. Очигледно, доменот на секој полином е множеството од сите реални броеви, т.е. $\mathbb{R}$.

Броевите a_0, $a_1, \ldots, a_n$ се викаат ***коефициенти*** на P. Ако $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, тогаш $P(x)=a_0$ е ***константен полином***. Ако, притоа, и $a_0=0$, тогаш P е ***нулти полином***. За полиномот P велиме дека има **степен** n, пишуваме $\mathrm{st}P=n$, ако $a_n \neq 0$. Така, ако P е ненулти константен полином, тогаш $\mathrm{st}P=0$. (На нултиот полином не му придружуваме степен, но често се покажува корисно да се смета дека овој полином **има степен** $-\infty$ **(види:Т.13;вежба 22).)**

Ако полиномот (1) има степен n, тогаш $a_n x^n$ се вика негов ***главен член***, а a_n ***главен коефициент***. За a_0 велиме дека е ***слободен член***, т.е. ***слободен коефициент***. P е ***каноничен*** ако главниот член е x^n, т.е. главниот коефициент е 1.

Така, на пример, $3x^4-6x+2$ е полином со степен 4, главниот член е $3x^4$, а слободниот е 2. Овој полином не е каноничен, бидејќи главниот коефициент не е 1 туку 3. (Тоа што во полиномот не се појавуваат степените x^3 и x^2 значи дека коефициентите пред нив се нули, т.е.

$$3x^4-6x+2 = 3x^4+0x^3+0x^2-6x+2.)$$

Важна улога кај полиномите има поимот корен, т.е. нула на полином. Имено, за реалниот број x_0 велиме дека е ***корен*** на полиномот P ако $P(x_0)=0$.

Според тоа, секој реален број е корен на нултиот полином, а ненултите константни полиноми немаат корени. Линеарниот полином т.е. полиномот од прв степен $ax+b$ има единствен корен $x_0=-b/a$.

Квадратниот полином пак ax^2+bx+c има корен (во $\mathbb{R}$) акко $b^2-4ac \geq 0$; во тој случај $x_{1,2}=\frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})$ се негови корени (види и 2.5) и притоа е точно равенството

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

за секој $x \in \mathbf{R}$.

Ќе покажеме дека горните резултати се точни и во општ случај.

***Теорема* 1 (за факторизација на полином)**

Ако x_0 е корен на полиномот P со степен n, тогаш постои полином Q со степен $n-1$, таков што за секој $x \in \mathbf{R}$ е точно равенството

$$P(x) = (x-x_0)\cdot Q(x).$$

Доказ. Претпоставувајќи дека P е определен со (1), имаме

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x)-P(x_0) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0-a_nx_0^n-a_{n-1}x_0^{n-1}-\ldots-a_1x_0-a_0= \\ &= a_n(x^n-x_0^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-x_0^{n-1})+\ldots+a_1(x-x_0) = \\ &= (x-x_0)[a_n(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\ldots+x_0^{n-2}x)+a_{n-1}(x^{n-2}+\ldots+x_0^{n-2})+\ldots+a_1] = \\ &= (x-x_0)Q(x), \end{aligned}$$

каде што $Q(x)$ е полиномот што се добива со средување на изразот во средните загради. Притоа, уочуваме дека a_nx^{n-1} е главниот член на Q, т.е. $\mathrm{st}Q=n-1$. ◊

Како последица се добива и следново обопштение.

***Теорема* 2 (Теорема на Безу[1])**

За секој полином P со степен $n \geq 1$ и секој реален број x_0, постои полином Q со степен $n-1$, така што:

$$P(x) = (x-x_0)Q(x)+P(x_0), \qquad (2)$$

за секој реален број x.

Доказ. Полиномот T дефиниран со $T(x)=P(x)-P(x_0)$ има степен n, а освен тоа x_0 е корен на T. Според претходното својство, постои полином Q со степен $n-1$, таков што

$$P(x)-P(x_0) = T(x) = (x-x_0)Q(x),$$

за секој $x \in \mathbf{R}$, а од тоа и следува точноста на (2). ◊

---

[1] Етјен Безу (*Étienne Bézout*, 1730–1783).

Природно се наложува прашање за бројот k на различни корени од еден полином со степен n. Погоре видовме дека за $0 \leq n \leq 1$ имаме $k=n$, како и дека за $n=2$, k може да биде кој било од броевите 0, 1, 2. Ќе покажеме подолу дека слична е ситуацијата и во општ случај.

***Теорема* 3 (за бројот на корените од еден полином)**

Ако P е полином со степен $n \geq 0$, а k бројот на неговите различни корени, тогаш $k \leq n$.

Доказ. Вршиме индукција по n. За $n=0$, 1, 2 погоре видовме дека тврдењето е точно. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за полиноми со степен n. Ако P е полином со степен $n+1$ и ако x_0 е корен на P, тогаш, според Т.1, постои полином Q со степен n, таков што $P(x)=(x-x_0)Q(x)$. Потоа, x_1 е корен на $P(x)$ акко: $(x_1-x_0)Q(x_1)=0$ т.е. ако $x_1=x_0$ или x_1 е корен на Q. Но, Q има најмногу n корени, па значи P има најмногу $n+1$ корен. ◊

За две полиномни функции P и Q велиме дека се ***еднакви*** ако се еднакви како пресликувања, т.е. ако

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x) = Q(x).$$

Тврдењата докажани погоре беа подготовка за докажување на следнава:

***Теорема* 4 (*за еднаквост на полиномни функции*)**

Две полиномни функции се еднакви акко им се еднакви соодветните коефициенти.

Доказ. Според Т.3, ако полиномот P определен со (1) е таков што $(\forall x \in \mathbb{R})\ P(x)=0$, тогаш: $a_0=a_1=\ldots=a_n=0$ т.е. P е нултиот полином. Да претпоставиме сега дека:

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad Q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$$

се ненулти полиноми што определуваат иста полиномна функција, каде што $n \geq m$. Ако е $n > m$, можеме да ставиме: $b_{m+1}=\ldots=b_n=0$, па според тоа можеме да претпоставиме дека $n=m$. Од претпоставката $(\forall x \in \mathbb{R})$ $P(x)=Q(x)$, следува:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(a_n-b_n)x^n + \ldots + (a_1-b_1)x + (a_0-b_0) = 0, \qquad (3)$$

а од тоа и се добива заклучокот дека $a_i=b_i$, за секое i. ◊

Како последица од докажаната теорема се добива и следнава:

***Теорема* 5.** *Множеството $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ полиномни функции со реални коефициенти е интегрален домен во однос на операциите собирање и множење на функции.*

Доказ. Пред сè, јасно е дека збир, разлика и производ на полиномни функции е полиномна функција. Од тоа следува дека $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ е комутативен прстен, при што нула е нултиот полином, а единица е константниот полином $E(x)=1$. Потоа, ако $P(x)$ и $Q(x)$ се ненулти полиноми, нивниот производ е исто така ненулти. ◊

Ако се искористи Т.4 или Т.5, лесно се заклучува дека, *во теоремата на Безу, при дадени P и $x_0 \in \mathbf{R}$, полиномот Q е еднозначно определен.* Претпоставувајќи дека P е определен со (1), подолу ќе ги определиме $b_{n-1},\ldots,b_1$, b_0 така што $Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$.

Имено, ако на десната страна од (2) се извршат соодветни множења и средувања по степените на x се добива:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=$$
$$=b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-x_0b_{n-1})x^{n-1}+\ldots+(b_0-x_0b_1)x+\ldots+(P(x_0)-x_0b_0)$$

од каде, според Т.4, се добива:

$$b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}-x_0b_{n-1}=a_{n-1},\ldots,\ b_0-x_0b_1=a_1,\ P(x_0)-x_0b_0=a_0,$$

т.е.

$$b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}-x_0b_{n-1}=a_{n-1},\ldots,\ b_0=x_0b_1+a_1,\ P(x_0)=x_0b_0+a_0. \tag{4}$$

Равенствата (4) ни даваат можност непосредно да ги одредиме b_0, $b_1,\ldots b_{n-1}$и $P(x_0)$, при познати x_0, $a_n,\ldots a_1$, a_0, а тоа се врши со помош на следнава т.н. ***хорнерова***[1] ***шема***

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
+ & a_n & & a_{n-1} & & \ldots & & a_1 & & a_0 \\
x_0 & x_0\cdot 0 & & x_0b_{n-1} & & \ldots & & x_0b_1 & & x_0b_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & \nearrow & b_{n-2} & \nearrow & \ldots & \nearrow & b_0 & \nearrow & P(x_0).
\end{array}$$

Да разгледаме еден конкретен пример.

Пример 1. Ако $P(x)=x^5-4x^3+6x^2-7x-9$, ќе ги определиме $P(2)$ и полиномот $Q(x)=b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$, така што да биде

$$P(x)=(x-2)Q(x)+P(2).$$

[1] Вилиам Хорнер (*William George Horner*, 1786-1837)

Користејќи ја хорнеровата шема, добиваме:

+	1	0	–4	6	–7	–9
2	2·0	2·1	4	0	12	10
	1	2	0	6	5	1

Значи: $Q(x)=x^4+2x^3+6x+5$ и $P(2)=1$. Се разбира, $P(2)$ би можеле да го пресметаме и директно, а имено:

$$P(2)=2^5-4\cdot 2^3+6\cdot 2^2-7\cdot 2-9=32-32+24-14-9=1.$$

Но, шемата ни дава повеќе информации, бидејќи го определуваме и количникот Q, а и пресметувањата се (обично) поедноставни.

Многу често се сретнуваме со задачата за определување на корените од даден полином $P(x)$. Решавањето на една таква задача често е сврзана со тешкотии, специјално ако тоа го вршиме „рачно". Една од важните етапи во решавањето е определување на сегмент $[a, b]$ во кој се наоѓаат сите корени на полиномот. Потоа, тој сегмент се дели на потсегменти во кои се наоѓа точно по еден корен, а на крајот со „стеснување" на тие сегменти се наоѓаат приближните вредности на бараните корени. Овде ќе се задржиме само на еден пример, но претходно ќе формулираме резултат што е специјален случај од теоремата на Болцано–Коши (Т.2 во 5.6).

***Теорема* 6 (*за егзистенција на корен*)**

Ако полиномот P и реалните броеви a и b се такви што $a<b$, $P(b)\cdot P(b)<0$, тогаш постои реален број $c\in(a, b)$ што е корен на P. ◊

Пример 2. Ако $P(x)=x^3+3x^2-1$, тогаш имаме: $P(-3)=-1$, $P(-2)=3$, $P(-1)=1$, $P(0)=-1$, $P(1)=3$. Од тоа следува дека $P(x)$ има три корени x_1, x_2 и x_3, такви што $x_1\in(-3, -2)$, $x_2\in(-1, 0)$, $x_3\in(0, 1)$. (Егзистенцијата на овие корени следува од Т.6, а дека $P(x)$ нема други корени следува од Т.3.)

Ќе го определиме коренот x_3 со грешка помала од $1/100$. Поради:

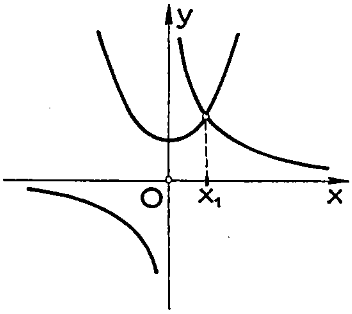
$$P(0,5) = 0{,}125+3\cdot 0{,}25-1 < 0, \quad P(0,6) = 0{,}216+1{,}08-1 > 0,$$

добиваме дека $0{,}5 < x_3 < 0{,}6$. За натамошно „стеснување" на интервалот ќе ги определиме знаците на $P(0, 55)$, $P(0, 53)$ и $P(0, 54)$, при што ќе ја користиме хорнеровата шема

	1	3	0	–1		
0,55	1	3,55	1,9525	0,07...	=	$P(0,55)$
0,53	1	3,53	1,8709	–0,...	=	$P(0,53)$
0,54	1	3,54	1,9116	0,...	=	$P(0,54)$

Според тоа: $0{,}53 < x_3 < 0{,}54$. Ставајќи $x \approx 0{,}535$, ќе бидеме сигурни дека правиме грешка што не е поголема од $1/200$.

Пример 3. Да го определиме бројот на корените на полиномот $P(x)=x^3+x-1$.



Црт.1

Прво, поради $P(0)=-1, P(1)=1$ постои корен x_1 таков што $0<x_1<1$. Ако $x<0$, тогаш $P(x)<-1$, па, значи, не постои негативен корен, а за $x>1$ имаме $P(x)>1$. Според тоа, сите корени на $P(x)$ се во $(0,1)$. За да покажеме дека постои точно еден таков корен ќе уочиме дека (за $x \neq 0$) равенките $x^3+x-1=0$ и $x^2+1=1/x$ се еквивалентни.

Според тоа, корените на $P(x)$ се апсцисите на пресечните точки од параболата и хиперболата $y=1/x$ (црт.1), од што следува дека постои точно еден корен.

Во случај кога имаме полином со цели коефициенти (такви се полиномите во сите разгледани три примери), постои едноставен метод за определување на рационалните корени, како што се гледа од следнава

Теорема 7 (***за определување на рационалните корени***)

Ако $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ се цели броеви и ако $x_0=r/s$ корен на полиномот

$$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0,$$

каде што r и s се заемно прости цели броеви, тогаш r е делител на a_0, а s е делител на a_n.

Доказ. Вежба 15. ◊

Како последица го добиваме следново

***Тврдење* 8**. Ако $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ се цели броеви, тогаш секој рационален корен на полиномот

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

е цел број, а освен тоа тој е делител на слободниот член a_0.

Доказ. Вежба 16. ◊

Забелешка 1. Желбата равенката $x^2+1=0$ да има решение (т.е. полиномот $P(x)=x^2+1$ да има корен ́не доведува до полето $\mathbb{C}$ на комплексните броеви. Но, се покажува (да се види, на пример, Курош, стр. 147–160) дека е точен и следниот резултат познат како **основна теорема на алгебрата** (ОТАЛ).

***Теорема* 9 (ОТАЛ)**

Секој неконстантен полином со комплексни коефициенти има барем еден комплексен корен. ◊

Како последица од ОТАЛ се добива и следново

***Тврдење* 10**. *Ако* $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ *е полином со комплексни коефициенти од n-ти степен, тогаш постојат различни комплексни броеви* $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_k$ $(k\geq1)$ *и природни броеви* $r_1, r_2,\ldots, r_k$, *такви што:*

$$P(x)=a_n(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\ldots(x-\alpha_k)^{r_k}, \qquad (5)$$
$$n=r_1+r_2+\ldots+r_k. \ \Diamond$$

(Ако $r_\nu=1$, велиме дека α_ν е **прост корен**, а **сложен** за $r_\nu\geq2$.) ◊

ОТАЛ може да се искористи и за формулирање на соодветен резултат за полиноми со реални коефициенти. Прво, да спомeнеме дека ако $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$, $x_0=\alpha+i\beta$, тогаш $\bar{x}_0=\alpha-i\beta$ се вика **конјугиран** на бројот x_0. Лесно се докажува следнава

***Теорема* 11 (за конјугирано комплексен корен)**

Ако x_0 *е комплексен корен на полиномот* P *со реални коефициенти, тогаш и* $\bar{x}_0$ *е корен на* P. ◊

Користејќи го тоа што $x_0+\bar{x}_0$ и $x_0\cdot\bar{x}_0$ се реални (за секој $x_0\in\mathbf{C}$), како последица од Т.9 ја добиваме и следнава

***Теорема* 12 (за разложување на полиноми со реални коефициенти)**

Нека $P(x)$ *е неконстантен полином со реални коефициенти, со степен* n *и со главен коефициент* a. *Постојат цели броеви* k, $m\geq0$, *природни броеви* r_ν, s_λ $(1\leq n\leq k,\ 1\leq\lambda\leq m)$ *и реални броеви* $a_\nu, p_\lambda, q_\lambda$ *такви што:*

$$P(x)=a(x-\alpha_1)^{r_1}\ldots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$
$$n=r_1+\ldots+r_k+2(s_1+s_2+\ldots+s_m),$$
$$p_\lambda^2-4q_\lambda<0. \ \Diamond$$

Понатаму, ако не биде поинаку речено, под „*полином*“ ќе подразбираме „*полиномна функција со реални коефициенти*“, а „*корен*“ ќе ни значи „*реален корен*“.

Ќе се задржиме уште на неколку својства во врска со деливоста на полиномите; секое од својствата што ќе ги формулираме е аналогно на соодветно својство на целите броеви. (В. на пр. Чупона: Алгебарски структури ..., 3.5 и 3.7)

***Теорема* 13 (за делење со остаток)**

За секој пар полиноми P, S, при што S е ненулти, постојат еднозначно определени полиноми q и r такви што

$$P = q \cdot S + r, \tag{6}$$

каде што r има помал степен од S.

(Притоа, *нултиот полином* сметаме дека *има степен* $-\infty$, т.е. дека тој *има најмал можен степен.*)

Доказ. Нека $n=\mathrm{st}P$, $m=\mathrm{st}S$. Ако $m=0$, тогаш ставајќи $q=P \cdot S^{-1}$ и $r=0$, го добиваме равенството (6). Затоа ќе претпоставиме дека $m>0$. Натаму доказот го спроведуваме со индукција по n. За $n<m$ можеме да ставиме $q=0$, $r=P$. Затоа, да претпоставиме дека $n \geq m \geq 1$ и дека

$$P(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0, \qquad S(x) = b_m x^m+\ldots+b_1 x+b_0.$$

Тогаш

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} S(x)$$

има степен што не е поголем од $n-1$, па (според индуктивната претпоставка) постојат полиноми q_1 и r_1 такви што $P_1=q_1 S+r_1$ и $\mathrm{st}r_1<\mathrm{st}S$. Од последното равенство, ако ставиме

$$q(x) = (a_n/b_m) \cdot x^{n-m}+q_1(x) \quad \text{и} \quad r = r_1,$$

го добиваме равенството (6).

Преостанува да се покаже дека q и r се еднозначно определени. Навистина, ако q, q^*, r, r^* се такви што

$$qS+r = q^*S+r^* \quad \text{и} \quad \mathrm{st}r<\mathrm{st}S, \quad \mathrm{st}r^*<\mathrm{st}S,$$

добиваме: $r-r^*=(q^*-q)S$. Не може да биде $q^*-q \neq 0$, бидејќи тогаш десната страна од последното равенство би имала поголем степен од левата. Според тоа, $q^*=q$, од што следува и $r^*=r$. ◊

Полиномот q во (6) се вика ***количник*** од делењето на P со S, а r – ***остаток*** од тоа делење. За $r=0$, велиме дека S е ***делител*** на P. Значи, $S(\neq 0)$ е делител на P акко постои полином q таков што $P=q \cdot S$.

Пример 4. Да го определиме количникот q и остатокот r што се добива при делење на x^5+1 со x^2+2. Работиме на добро познатиот начин.

$$
\begin{array}{l}
(x^5+1):(x^2+2) = x^3-2x \\
\underline{\_x^5 \pm 2x^3} \\
\quad -2x^3+1 \\
\quad \underline{\mp 2x^3 \mp 4x} \\
\qquad 4x+1
\end{array}
$$

Според тоа $q(x) = x^3-2x$, $r(x) = 4x+1$.

На читателот му препуштаме да се увери (Вежба 7) дека во доказот на Т.12 е дадено образложение на спроведената постапка, т.е. на тој алгоритам.

Ќе се задржиме уште на поимот „најголем заеднички делител на два полинома". Имено, ако P и S се ненулти полиноми и ако d е полином со најголем можен степен што е делител и на P и на S, тогаш велиме дека d е ***најголем заеднички делител*** на P и S. Егзистенцијата на најголем заеднички делител од два ненулти полиноми P и S следува од следните причини. Секој ненулти константен полином е делител и на P и на S, а покрај тоа степенот од секој делител на еден ненулти полином е помал од степенот на деленикот.

Ќе го формулираме сега ***Евклидовиот алгоритам*** за определување на најголем заеднички делител (НЗД) од два полиноми.

Нека P и S се ненулти полиноми и нека q_1 е количникот, а r_1 остатокот при делењето на P со S. Ако $r_1=0$, тогаш S=НЗД(P, S). Ако $r\neq 0$ ставаме $D_1=S$, $D_2=r_1$. Да претпоставиме дека така е добиена низа од ненулти полиноми: $D_1, D_2,\ldots, D_k$, при што $\mathrm{st}D_{j+1}<\mathrm{st}D_j$ за секој $j\leq k-1$. Нека при делење на D_{k-1} со D_k се добијат количник q_k и остаток r_k. Ако $r_k=0$, тогаш D_k=НЗД(P, S), а ако $r_k\neq 0$ ставаме $D_{k+1}=r_k$. Добиваме дека $\mathrm{st}D_{k+1}<\mathrm{st}D_k$. Фактот што степените на ненултите полиноми $D_1, D_2,\ldots$ чинат опаднувачка низа повлекува дека во таа низа мора да има последен член, D_l, а тоа е бараниот најголем заеднички делител од P и S, т.е. D_l=НЗД(P, S).

Пример 5. Ако $P(x) = x^3-2x^2$, $S(x) = x^3-4x$, тогаш:

$$P(x) = 1\cdot S(x)+(-2x^2+4x),$$

$$
\begin{array}{l}
(x^3-4x):(-2x^2+4x) = -\frac{1}{2}x-1 \\
\underline{x^3-2x^2} \\
\quad 2x^2-4x \\
\quad \underline{2x^2-4x} \\
\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Според тоа:

НЗД$(x^3-2x^2, x^3-4x) = -2x^2+4x = -2(x^2-2x)$.

Во овој случај секако, подобро е да ставиме

$$\text{НЗД}(x^3-2x^2,\ x^3-4x) = x^2-2x.$$

Да забележиме дека поставената задача можеме да ја решиме поедноставно со обично разложување на дадените полиноми, а потоа да го „уочиме" зададениот фактор со најголем степен. Имено:

$$x^3-2x^2 = x^2(x-2)$$

$$x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2),$$

па според тоа:

$$\text{НЗД}(x^3-2x^2,\ x^3-4x) = x(x-2).$$

Но, такво разложување не е секогаш можно да се изврши ефективно, додека Евклидовиот алгоритам, по конечно многу чекори нé доведува до бараниот резултат.

Забелешка 2. При дефиницијата на полиномните функции претпоставивме дека коефициентите се елементи од полето на реалните броеви, но *би можело да се работи и со кое било друго поле* F. Ако се проследат доказите на првите три теореми лесно ќе се уочи дека тие важат и во општ случај. При претпоставка дека полето F е бесконечно, ќе важи и теоремата за еднаквост на полиномните функции. Но, во случајот кога F е конечно поле тоа не е точно.

За да го илустрираме ова тврдење ќе се задржиме на полето $\mathbb{Z}_2=\{0, 1\}$ со два елементи. Да потсетиме дека собирањето и множењето во $\mathbb{Z}_2$ е дефинирано со шемите (в. пример 1 во **1.5**)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

,

од каде што се гледа дека $(\forall x\in\mathbb{Z}_2)\ x^2=x$, па значи по форма различните полиноми x^2+1 и $x+1$ определуваат иста полиномна функција.

Од ова следува дека постојат точно 4 различни полиномни функции $\{0, 1, x, x+1\}=\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ со коефициенти во $\mathbb{Z}_2$. Собирањето и множењето во $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ е дефинирано со следниве шеми:

+	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

·	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	x	0
$x+1$	0	$x+1$	0	$x+1$

(Притоа $x(x+1)=0$, бидејќи $x^2+x=x+x=0$).

Од втората шема се гледа дека во $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ има делители на нулата. Според тоа $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ не е интегрален домен. Да забележиме дека за секое поле F, со $F[x]$ се означува множеството полиноми со коефициенти во F, но притоа два полинома се сметаат за различни ако се различни по форма. Во оваа смисла

$$\mathbb{Z}_2[x]=\{0,\ 1,\ x,\ x+1,\ x^2,\ x^2+1,\ x^2+x,\ x^2+x+1,\ x^3,\ x^3+1,\ldots\}$$

е бесконечно множество, а исто така $F[x]$ е бесконечно за секое поле F.

Кога полето F е бесконечно, нема разлика меѓу прстените $\mathcal{P}(F)$ и $F[x]$. Но, како што спомнавме погоре, разликата е суштинска во случај на конечно поле.

Да забележиме дека, и за конечни полиња F, својствата за деливост и НЗД важат за $F[x]$. (Да се види, на пример: Чупона, Трпеновски, стр.201.)

ВЕЖБИ

1. Да се покаже дека полиномот $P(x)$ е делив со $x-a$ акко a е корен на $P(x)$ (т.е. $P(a)=0$).
2. Да се провери дали полиномот $2x^4-x^3-5x^2-4$ е делив со:

   а) $x+1$; б) $x-3$; в) $x-2$.
3. За какво a полиномот $2x^3+5x^2ax+15$ е делив со $x+3$?
4. За какви a и b полиномот $2x^3+ax^2-3x+b$ е дели со $x-1$ и со $x-2$?
5. Да се разложи: а) x^4+1; б) x^4-16, како производ на неразложливи фактори.
6. Да се пресмета коренот од полиномот разгледан во прим. 3 со грешка помала од: а) 10^{-2}; б) 10^{-3}.
7. Да се формулира ефективна постапка (т.е. алгоритам) со помош на која, за кои било полиноми P и $S(S\neq 0)$ се наоѓа количникот и остатокот при делењето на P со S.
8. Да се најде остатокот од делењето на полиномот $x^{30}-x^{20}+2x^{10}-4$ со x^2-1.
9. Со помош на хорнерова шема, да се одреди количникот q и остатокот r при делењето на полиномот $3x^4-2x^3+4x-1$ со биномот $x-2$.
10. Со помош на хорнерова шема, за полиномот

$$P(x) = 3x^5-25x^3+12x^2-14x+5$$

да се пресмета: а) $P(3)$, б) $P(1,\ 1)$, в) $P(-2,\ 5)$.

11. Да се најдат заедничките делители на полиномите $P(x) = x^4-9x^2$ и $Q(x) = x^3+6x^2+9x$. Кој од нив е НЗД (P, Q)?

Во задачите **12–13**, со помош на Евклидовиот алгоритам, да се најде НЗД на дадените полиноми.

12. x^4+x^2-4x+2, x^3+2x^2-4x+1.

13. $x^4+6x^3+17x^2+24x+12$, $x^3-2x^2-13x-10$.

14. Полиномот $x^4+x^3-7x^2-13x-6$ има двоен корен -1; да се најдат другите корени.

15. Да се докаже Т.7 (за определување рационални корени).

16. Да се покаже дека ако еден каноничен полином со цели коефициенти има рационален корен, тогаш тој е цел и е делител на слободниот член (Т.8).

Во задачите 17–21 да се провери дали дадената равенка има рационални корени и, во потврден случај, да се најдат.

17. $x^3-4x^2+3x+2=0$.

18. $x^4+2x^3-8x^2-10x+15=0$.

19. $x^4-4x^3+5x^2-4x+4=0$.

20. $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6=0$.

21. а) $3x^3-2x^2+2x+1=0$ б) $6x^4-x^3-4x^2-10x-3=0$.

22*. Нека $M=\{-\infty, 0, 1, 2,\dots, n, n+1,\dots\}$. Да ставиме:

$$(-\infty)+x = x+(-\infty) = -\infty \text{ за секој } x\in M$$

$$-\infty<y, \text{ за секој } y\in\{0, 1, 2,\dots, n, n+1,\dots\}.$$

Да се покаже дека:

а) $\mathrm{st}(P+Q)\leq\max\{\mathrm{st}P, \mathrm{st}Q\}$; б) $\mathrm{st}(P\cdot Q) = \mathrm{st}P+\mathrm{st}Q$.

23*. Да се покаже дека:

а) $(\forall M, a, b, c\in\mathbb{R})(\exists x_0\in\mathbb{R}^+)(x>x_0 \Rightarrow x^3+ax^2+bx+c>M)$

б) $(\forall M, a, b, c\in\mathbb{R})(\exists x_0\in\mathbb{R}^-)(x<x_0 \Rightarrow x^3+ax^2+bx+c<M)$.

24*. Да се покаже дека:

$(\forall M, a, b, c\in\mathbb{R})(\exists x_0\in\mathbb{R})(|x|>x_0 \Rightarrow x^4+ax^3+bx^2+cx+d>M)$.

25*. Да се обопштат резултатите од претходните две вежби за полиноми од облик:

а) ax^3+bx^2+cx+d; б) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$;

в) $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$; г) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$.

26*. Да се покаже дека состав на полиномни функции е полиномна функција.

3.2. Рационални функции

Количникот од два полинома P и Q, т.е. функцијата f дефинирана со:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (1)$$

каде што Q е ненулти полином, се вика ***рационална функција***. Ако во (1) Q е единичниот полином добиваме дека $f=P$, па значи: секоја полиномна функција е и рационална. Полиномните функции ги викаме и ***цели рационални функции***, а за една рационална функција што не е цела ќе велиме дека е ***дробна***.

Меѓу наједноставните дробни рационални функции е т.н. ***дробнолинеарна функција***, т.е. функцијата од видот

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad c \neq 0 \text{ и } ad-bc \neq 0 \qquad (2)$$

(a, b, c, d се дадени броеви). Доменот на f е $\mathbb{R}\setminus\{-d/c\}=(-\infty, -d/c)\cup(-d/c, +\infty)$. Со делење, таа може да се трансформира во обликот

$$f(x) = A + \frac{B}{x+C}, \qquad (2')$$

каде што $A=a/c$, $B=(bc-ad)/c^2$, $C=d/c$.

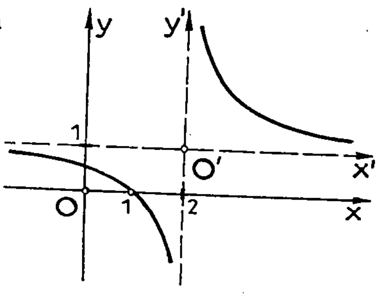
Пример 1. За $y = x/(x-2)$, ќе имаме:

$$y = \frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}, \text{ т.е. } y-1 = \frac{2}{x-2}.$$

Ставајќи $x'=x-2$ и $y'=y-1$ и избирајќи нов координатен почеток O′(2, 1), (црт.1), горната равенка станува

$$y' = \frac{2}{x'}$$

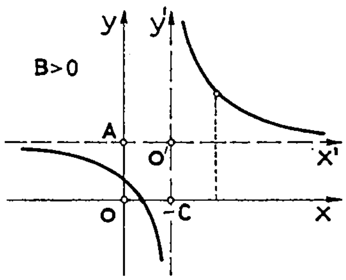
Нејзинот график е претставен на црт.1.



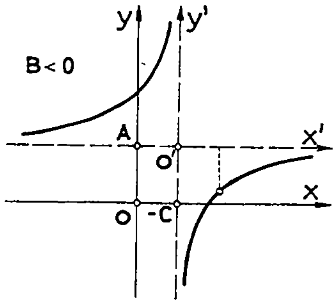
Црт. 1

Општо, во (2′) земаме $B\neq 0$, зашто за $B=0$ функцијата се сведува на константа. Со транслација на координатниот систем, избирајќи го новиот координатен почеток во точката O′($-C$, A), равенката

$y=A+B/(x+C)$ се трансформира во $y'=B/x'$. Во зависност од знакот на B, графикот на дробнолинеарната функција ќе биде како на црт.2 или, пак, како на црт.3. Значи, *графикот на дробнолинеарната функција е хипербола, чиишто асимптоти се паралелни со координатните оски.*



Црт.2



Црт.3

Да наведеме уште неколку едноставни примери на рационални функции.

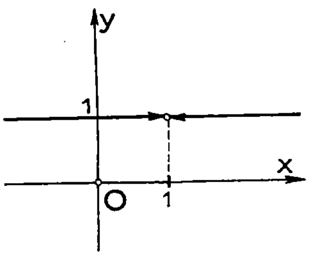
Пример 2. Доменот D на дадената функција ќе биде:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $D=\mathbb{R}$, бидејќи x^2+1 нема корен [1];

б) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$, $D=\mathbb{R}\backslash\{3\}=(-\infty, 3)\cup(3,+\infty)$;

в) $f(x)=\dfrac{2x-2}{x-1}$, $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}=(-\infty, 1)\cup(1,+\infty)$.

Примерот 2 в) има вид на дробнолинеарна функција, со тоа што не важи условот $ad-bc\neq 0$. Во овој случај, (2′) го добива обликот $f(x)=2+0/(x-1)$, т.е. овде го имаме случајот $B=0$, а таа можност ја исклучивме. Значи, за секој $x\neq 1$: $f(x)=2$, но $f(1)$ не постои. Графикот на f е правата $y=2$, без точката (1, 2) (црт.4). Но, се наметнува мислата да се дефинира f и во $x=1$ ставајќи $f(1)=2$. Со тоа функцијата f ја идентификуваме со константниот полином $P(x)=2$. Во иста смисла ставајќи:



Црт.4

г) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$, имаме $D=\mathbb{R}$;

[1] Да се има предвид дека овде мислиме на реални корени.

д) $\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1}$, имаме $D=\mathbb{R}/\{-1\}$.

Во горните конкретни случаи се раководевме од следната дефиниција за еднаквост на две рационални функции.

Ако f е дадена со (1), а g со:

$$g(x) = \frac{S(x)}{T(x)}, \tag{1'}$$

тогаш ќе сметаме дека f и g се ***еднакви функции*** акко важи равенството

$$PT = QS, \quad \text{т.е.} \quad (\forall x \in \mathbb{R})\ P(x)T(x) = Q(x)S(x). \tag{4}$$

Овој договор го сугерира следниот заклучок за доменот D на една рационална функција f од обликот (1).

Прво, ако P е нултиот полином, тогаш $D=\mathbb{R}$, а f е нултата функција, т.е. $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x)=0$. Нека P е ненулти полином (Q е ненулти по претпоставка!) и нека:

$$d = \text{НЗД}(P, Q), \quad P = dS, \quad Q = dT.$$

Тогаш $f=S/T$, па домен на f е множеството реални броеви што не се корени на T. (Дропката S/T се вика ***нескратлива форма*** на f.)

Со ова вршиме извесна корекција на договорот за домен на функција дадена со аналитичен израз (в. **2.1.**) Имено, функцијата ја дефинираме и за оние вредности на x што се корени и на броителот и на именителот чијашто кратност е иста. Со други зборови, *како аналитичен израз на една рационална функција ја сметаме нејзината нескратлива форма.*

Се наложува и следниот поим за ***правилна рационална функција***, т.е. ***правилна дропка***. Имено, P/Q е ***правилна***, ако $\mathrm{st}P<\mathrm{st}Q$; значи, и нултата функција е правилна.

Користејќи ја теоремата за делење на полиноми со остаток, ја добиваме следнава

Теорема **1.**

Секоја рационална функција може да се претстави (и тоа, на единствен начин) како збир на полином и правилна дропка. (*Вежба* 13). ◊

Поради овој резултат, доволно е да работиме со правилни дропки, а уште повеќе, се покажува дека се доволни и т.н. прости дропки. Имено, функцијата

$$\frac{A}{(x-a)^k} \tag{5}$$

се вика **проста дропка од прв вид**, при што A и a се реални константи, а k е даден природен број. **Проста дропка од втор вид**, пак, се вика секоја функција од обликот

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \tag{6}$$

каде што A, B, p, q се реални константи, а k природен број, такви што $p^2-4q<0$.

Воведените поими беа подготовка за следното важно својство што наоѓа примена, специјално, при интегрирање на рационални функции (в.III.3.1).

***Теорема* 2 (за разложување рационални функции)**

Секоја правилна рационална функција може да се претстави (и тоа, на единствен начин) како збир од прости дропки.

Доказ. Види Курош, стр.162–164. ◊

Наместо доказ на Т.2, ќе дадеме *упатство за претставување на дадена правилна рационална функција* P/Q *како збир од прости дропки*. Притоа ќе претпоставиме дека P и Q се заемно прости (т.е. P/Q е нескратлива).

Според теоремата за разложување на полиноми со реални коефициенти (Т.11 од **3.1**), Q се претставува во следниов вид:

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0(x-\alpha_1)^{r_1}\ldots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots \\ &\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m} \end{aligned} \tag{7}$$

каде што a_0 е главниот коефициент на Q, а α_ν, p_λ, q_λ се реални броеви, такви што $p_\lambda^2-4q_\lambda^2<0$. Покрај тоа, можеме да претпоставиме дека $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ се различни и дека $(p_i, q_i)\neq(p_j, q_j)$ за $i\neq j$.

Тогаш, функцијата P/Q може да се претстави како збир од прости дропки што се сврзани со множителите на Q од (7) на следниов начин:

а) *За секој множител од обликот* $(x-\alpha)^r$ *одговара збир од обликот*

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r},$$

при што $A_1,\ldots,A_r$ се константи, од кои A_r не може да е нула.

б) *За секој множител од обликот* $(x^2+px+q)^s$ *одговара збир од обликот*

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+px+q)^s},$$

каде што $B_1, C_1,\ldots,B_s, C_s$ се константи, од кои B_s, C_s не може обете да се нули.

Комплетното претставување на P/Q како збир од прости дропки можеме да го запишеме вака:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g_1(x)+\ldots+g_k(x) + h_1(x)+\ldots+h_k(x) \tag{8}$$

каде што

$$g_\nu(x) = \sum_{i=1}^{r_\nu} \frac{A_{\nu i}}{(x-\alpha_\nu)^i}, \qquad h_\lambda(x) = \sum_{j=1}^{s_\lambda} \frac{xB_{\lambda j} + C_{\lambda j}}{(x^2 - p_\lambda + q_\lambda)^j}. \tag{9}$$

Притоа, $A_{\nu i}$, $B_{\lambda j}$, $C_{\lambda j}$ се „непознати константи" што се определуваат со помош на следниот ***метод на неопределени коефициенти***.

Збирот (8) се сведува на „заеднички именител", а тоа е, имено, $Q(x)$, а броителот „се средува по степените на x", при што во коефициентите ќе фигурираат непознатите константи $A_{\nu i}$, $B_{\lambda j}$, $C_{\lambda j}$. Од друга страна, тој броител треба да биде еднаков со $P(x)$, па, изедначувајќи ги соодветните коефициенти, добиваме систем од линеарни равенки во кој, како непознати се јавуваат „непознатите константи" $A_{\nu i}$, $B_{\lambda j}$, $C_{\lambda j}$.

Оваа дискусија не е доказ на Т.2, но *во секој конкретен случај се врши ефективно пресметување на „непознатите константи", т.е. при претпоставката дека именителот Q е претставен во обликот (7), P/Q се разложува како збир од прости дропки.*

Ќе разгледаме еден конкретен случај:

Пример 3. Ако $f(x) = \dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$, тогаш

$$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

т.е.

$$\begin{aligned}2x^2+2x+13 &= A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2) = \\ &= (A+B)x^4+(-2B+C)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+ \\ &\quad +(-2B+C-2D+E)x+(A-2C-2E),\end{aligned}$$

а потоа, со изедначување на коефициентите пред соодветните степени на x, го добиваме следниов систем линеарни равенки:

$$\begin{aligned}A+B&=0.\\ -2B+C&=0,\\ 2A+B-2C+D&=2,\\ -2B+C-2D+E&=2,\\ A-2C-2E&=13.\end{aligned} \tag{10}$$

Решавајќи го системот (10), добиваме: A=1, B=–1, C=–2, D=–3, E=–4, па значи:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}$$

ВЕЖБИ

Во задачите **1–4** да се скицира графикот на дадената функција.

1. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$. **2**. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$. **4**. $y=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

5. Ако $f(x)=(x^2+1)/x$ и $g(x)=x/(x-2)$, да се најдат: $f+2g$, fg, $g\circ f$.

6. Нека $f(t)=(1-t)/(1+t)$, $g(t)=1+t^3$. Да се најдат: $f+g$, fg, f/g, $f\circ g$, $g\circ f$.

7*. Да се покаже дека множеството $\mathfrak{R}$ од сите рационални функции е поле во однос на операциите собирање и множење на функции.

8. Да се покаже дека суперпозиција на:

а) дробнолинеарни функции е дробнолинеарна функција,

б) рационални функции е рационална функција.

Во задачите 9–12 соодветните функции да се претстават како збир на прости рационални функции.

9. $\dfrac{x^2-5x-3}{x^3-4x}$. **10**. $\dfrac{3x^2-1}{(x+1)(x^2+x+1)}$.

11. $\dfrac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$. **12**. $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

13.*. Да се докаже Т.1

14*. Да се докаже Т.2 за рационални функции од обликот $P(x)/(x-\alpha)^n$.

3.3. Тригонометриски функции

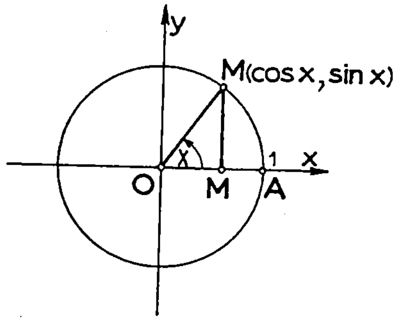
Дефинициите на тригонометриските функции и почетните сведенија за нив, на читателот му се добро познати од елементарната математика. Овде ќе се потсетиме на нив (впрочем, како и за повеќето класи функции што ги разгледавме досега, заради „автономност" на книгава).

Функциите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ (синус, косинус, тангенс и котангенс, по ред) се познати под заедничко име како ***тригонометриски функции***. Обично, прво се воведува поим за тригонометриска функција од остар агол, а потоа тој се обопштува за произволни агли. Тоа обопштување се врши на следниов начин.

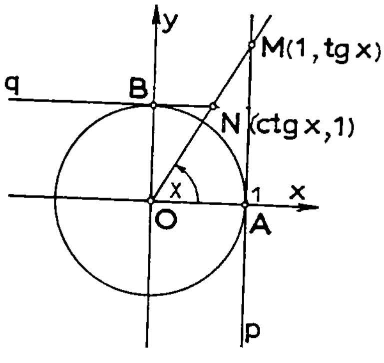
Нека M е произволна точка на ***тригонометриската кружница***, т.е. кружницата со центар во координатниот почеток и радиус $r=1$ (црт.1). Нека x е аголот MOM', каде што M' е ортогоналната проекција од точката M на оската Ox; притоа, ако точката M се движи од почетната положба A во насока обратна на движењето на стрелките кај часовникот, x ќе се менува во $[0, +\infty)$, додека при обратното движење на M, x ги прима соодветните негативни вредности. По дефиниција, ординатата на точката M ќе ја претставува функцијата ***синус од*** x, означувана со $\sin x$, а нејзината апсциса – функцијата ***косинус од*** x, означувана со $\cos x$. Со помош на овие две функции, тригонометриски функции ***тангенс*** и ***котангенс*** се дефинираат на следниов начин:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Вака дефинираните тригонометриски функции за произволен агол x се усогласени со дефинициите кога x е остар агол.



Црт.1



Црт.2

Забелешка 1. *Функциите тангенс и котангенс може да се дефинираат и независно од функциите синус и косинус.*

Имено, ако p е тангентата на тригонометриската кружница во точката $A(1,0)$, а M е произволна точка од таа тангента (црт.2), тогаш

тангенс од аголот x ($=\sphericalangle MOA$) е ординатата на точката M; според тоа, $M(1, \operatorname{tg}x)$.

Аналогно, ***котангенс*** од аголот x ($=\sphericalangle NOB$) е апсцисата на точката N што се наоѓа на тангентата q, повлечена на тригонометриската кружница во точката $B(0, 1)$ (црт.2); според тоа, $N(\operatorname{ctg}x, 1)$.

Големината на еден агол се изразува во степени, а и во должински единици, т.е. како должина на лакот AM (што му одговара на разгледуваниот агол) на тригонометриската кружница (црт.1). Аголот чиј соодветен лак на тригонометриската кружница има должина 1 се вика ***радијан***. Така на пример, аголот од $360°$ има 2π радијани.

За натаму, ако не е речено поинаку, ќе сметаме дека *аргументите на тригонометриските функции се мерни броеви на агли (при што тие агли секогаш се изразени во радијани). На тој начин и при тригонометриските функции аргументот го сметаме за реален број.*

Инаку, ако аргументот x во функцијата, да речеме, би се сметал за агол, тогаш изразот $x+\sin x$ не би имал смисла, зашто x би имал „димензија" на агол, додека $\sin x$ би бил неименуван (т.е. реален) број.

Ќе ги нацртаме овде графиците на тригонометриските функции и ќе направиме по неколку забелешки за секоја од нив.

I. $y = \sin x$

Доменот на функцијата $\sin x$ е $\mathbb{R}$. Точката M од црт.1, движејќи се по тригонометриската кружница (на пример, во „позитивна насока"), ќе дојде во иста положба по едно цело завртување (т.е. по агол од 2π радијани). Според тоа, функцијата синус ќе добие иста вредност за $x+2\pi$ како за x, за кој било $x\in\mathbb{R}$, т.е.

$$\sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Поопшто, за секој $x\in\mathbb{R}$ и за секој $k\in\mathbb{Z}$ важи:

$$\sin(x+2k\pi) = \sin x.$$

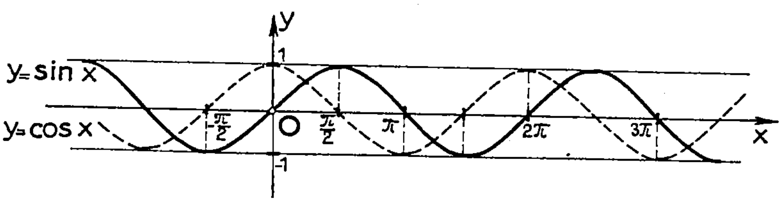
Така, вредностите на $\sin x$ се повторуваат „периодично", по секое променување на аргументот x за 2π (или за $2k\pi$), па поради тоа, за $\sin x$ велиме дека е ***периодична функција***, а за бројот 2π – дека е ***најмал период***.

Функцијата е непарна; има нули за $x=k\pi$ (k е цел број);

$$y_{\max}=1 \text{ за } x=(4k+1)\pi/2, \qquad y_{\min}=-1 \text{ за } x=(4k-1)\pi/2;$$

не е монотона на $\mathbb{R}$, но е монотона по делови: таа расте во интервалот $(-\pi/2+2k\pi,\ \pi/2+2k\pi)$, а опаѓа во $(\pi/2+2k\pi,\ 3\pi/2+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Најголемата вредност на $\sin x$ се вика ***амплитуда*** [1], па значи таа е 1.

Графикот на $\sin x$ се вика ***синусоида*** (црт.3).



Црт.3

II. $y=\cos x$

Доменот на $\cos x$ е $\mathbb{R}$; таа е парна; нули: $x=(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$;

$y_{\max}=1$ за $x=2k\pi$, $y_{\min}=-1$ за $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

опаѓа во интервалот $(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$, а расте во $((2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; таа е периодична, со најмал период 2π.

Графикот се вика ***косинусоида*** и е претставен на црт.3 со испрекината линија. Косинусоидата ќе се совпадне со синусоидата, ако таа се помести за $\pi/2$, зашто $\cos(x+\pi/2)=\sin x$.

III. $y=\operatorname{tg}x$

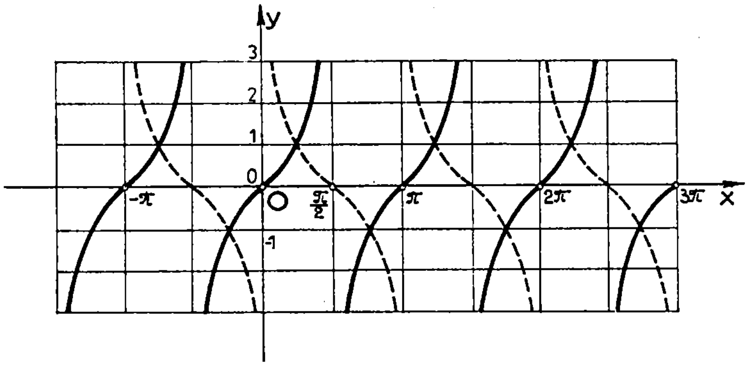
Функцијата е дефинирана за секој $x\neq(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$; таа е периодична, со најмал период π; има нули за $x=k\pi$ и е непарна; расте во секој интервал во кој е дефинирана. Графикот се вика ***тангенсоида*** (црт.4).

IV. $y=\operatorname{ctg}x$

Функцијата е дефинирана за секој $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; таа е периодична, со најмал период π; има нули за $x=(2k+1)\pi/2$; опаѓа во интервалот $(k\pi,\ (k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; таа е непарна. Графикот е претставен на црт.4 со испрекината линија и се вика ***котангенсоида***.

---

[1] Терминот се користи во физиката, каде што со функциите синус и косинус се опишуваат хармониски движења.



Црт.4

Со соодветни транслации на координатниот систем и со соодветни промени на амплитудите и периодите, според горните графици (од црт.3 и 4), можат да се конструираат и графиците на функциите

$$y=a\sin(bx+c)+d, \quad y=a\cos(bx+c)+d,$$

како и на $a\mathrm{tg}(bx+c)+d$, $a\mathrm{ctg}(bx+c)+d$.

И функциите

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

(наречени ***секанс*** и ***косеканс*** соодветно) се тригонометриски. Нивните графици може да се добијат од графиците на косинус и синус, со земање „реципрочни ординати".

Меѓу тригонометриските функции постојат разни врски, од кои најважни се:

1°. $\sin^2 x+\cos x^2 = 1$ $\quad 2^\circ$. $1+\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z})$.

3°. $1+\mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\quad (x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})$. $\quad 4^\circ$. $\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x = 1$.

5°. $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

6°. $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Овде ќе изнесеме уште две врски што натаму често ќе ги користиме, а во вежбите ќе наведеме уште неколку. Да докажеме дека:

7°. $\sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)}$. $\qquad 8^\circ$. $\cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)}$

за $x \neq (2k+1)\pi$. Навистина,

$$\sin x = \sin 2(x/2) = 2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) = \frac{2\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cdot\cos^2(x/2) =$$
$$= 2\,\mathrm{tg}(x/2)\cdot\cos^2(x/2);$$

од тоа и до равенството 2°, се добива 7°. Потоа:

$$\cos x = \cos 2(x/2) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 =$$
$$= 2\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} - 1 = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)}.$$

Погоре видовме дека *тригонометриските функции имаат својство на „периодичност"*. Такво својство имаат и други функции. Затоа ќе го воведеме тој поим поопшто и попрецизно.

Нека f е функција со домен D и нека ω е позитивен реален број, со следниве својства:

i) $x \in D \Rightarrow x+\omega,\ x-\omega \in D$,

ii) $(\forall x \in D)\ f(x+\omega) = f(x)$.

Тогаш f се вика ***периодична функција***, а ω – ***период*** на f. Најмалиот од тие броеви ω (ако постои) се вика ***најмал*** (или ***основен***) период на f.

Од дефиницијата направо се добива точност на следново

***Тврдење* 1.** *Ако f, со домен D, е периодична функција со период ω, тогаш за секој $x \in D$ и секој цел број k,*

$$f(x+k\omega) = f(x).\ \Diamond$$

Нека $f(x)$ е периодична функција со домен D и период ω и нека a е реален број $\neq 0$. Да ја дефинираме функцијата F со домен D_1 со:

$$F(x) = f(ax), \quad x \in D_1 \Leftrightarrow ax \in D. \tag{1}$$

Тогаш:

$$x \in D_1 \Rightarrow ax \in D \Rightarrow ax \pm \omega \in D \Rightarrow a\left(x \pm \frac{\omega}{a}\right) \in D \Rightarrow x \pm \frac{\omega}{a} \in D_1,$$
$$F\left(x \pm \frac{\omega}{a}\right) = f\left(a\left(x \pm \frac{\omega}{a}\right)\right) = f(ax \pm \omega) = f(ax) = F(x).$$

Со тоа го докажавме следново

***Тврдење* 2.** *Ако f е периодична функција со период ω, тогаш и функцијата F, дефинирана со (1) е периодична, со период $\frac{\omega}{|a|}$.* $\Diamond$

Пример 1. а) $f(x)=\sin x$ е периодична, со (најмал) период 2π. Според Т.2. функцијата $g(x)=\sin 2x$ е исто така периодична, со (најмал) период π.

б) $\cos x$ е периодична, со (најмал) период 2π; $h(x)=\cos(4x/3)$ е периодична, со (најмал) период $3\pi/2$.

Пример 2. Функцијата [1)]

$$f(x)=x-[x],$$

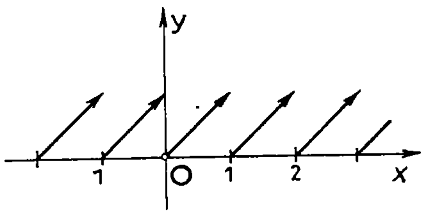
наречена ***дробен дел*** (од икс), е периодична (со најмал период 1). Навистина, поради $[x+1]=[x]+1$, добиваме $f(x+1)=x+1-[x+1]=x-[x]=f(x)$.

Периодичноста, слично како парноста и непарноста на дадена функција, при нејзиното изучување, овозможува да се ограничиме на едно подмножество на кое таа е дефинирана. Имено, *ако $f(x)$ е периодична функција со период ω, доволно е да ги изучиме нејзините својства само на еден сегмент со должина ω.*

На пример, графикот на функцијата

$$f(x)=x-[x]$$

од примерот 2 во полусегментот $[0, 1)$, поради $[x]=0$ за $x\in[0, 1)$, се поклопува со графикот на функцијата $f_1(x)=x$ од каде што, со паралелна транслација на тој дел од графикот по оската Ox, лево и десно за 1, го добиваме целиот график на оваа функција (црт.5).



Црт.5

ВЕЖБИ

Да се утврди за кои вредности на x се точни формулите (**1–8**).

1. $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ **2.** $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$.

3. $\cos\frac{x}{2}=\sqrt{(1+\cos x)/4}$ **4.** $\cos^2 x=1/(1+\mathrm{tg}^2 x)$.

[1)] Потсетуваме дека $[x]$ е најголемиот цел број што не е поголем од x.

5. $\sin x = \operatorname{tg} x / \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$ **6**. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

7. $\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$.

8. $\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$.

Да се нацрта графикот на дадената функција во 9-14, користејќи „познати графици".

9. $y = \sin(x-\pi/4)$. **10**. $y = 2\sin(\pi/4-x)$.

11. $y = \cos(2x-\pi/3)$. **12**. $y = \sin(x/2-\pi/3)+1$.

13. $y = \operatorname{tg}(x-\pi/4)$ **14**. $y = -\operatorname{tg}(\pi/2-x)$.

Да се нацрта графикот на функцијата (15–16).

15. $y = \sec x \ (=\frac{1}{\cos x})$. **16**. $y = \csc x \ (=\frac{1}{\sin x})$.

Да се најде основниот период на дадената функција (17–22).

17. $\sin\frac{4}{5}x$ **18**. $\cos 2\pi x$. **19**. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

20. $\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}$ **21***. $\sin\frac{3}{2}x + \cos\frac{2}{3}x$ **22***. $\cos 3x + \sin\frac{3x}{2}$

Во задачите 23–25 да се провери периодичноста на дадената функција и да се нацрта нејзиниот график.

23. $f(x)=2x-[2x]$. **24**. $f(x)=2x-2[x]$.

25. $f(x)=x-[2x]$.

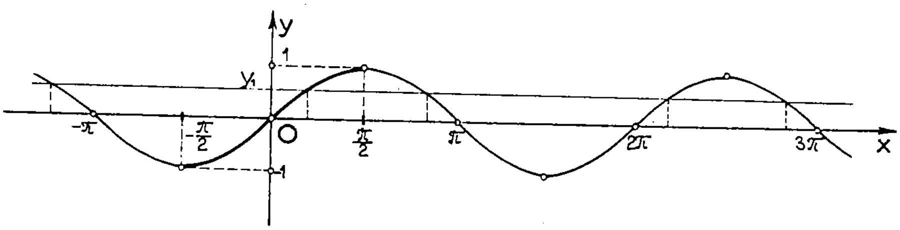
26. Да се даде пример на периодична функција што нема најмал позитивен период.

Помош. $\sin^2 x+\cos^2 x$ и, општо, секоја константна функција.

27. Да се покаже дека секој позитивен рационален број е период на Дирихлеовата функција.

3.4. Инверзни тригонометриски функции

Функцијата $\sin x$, очигледно, не е инјекција (од својот домен $(-\infty, +\infty)$ во својот опсег $E=[-1, 1]$). Навистина, за кој било $y_1 \in E$ постојат дури безброј многу вредности на x за кои $\sin x = y_1$ (црт.1). Поради тоа, за да дефинираме инверзна функција на $\sin x$, според реченото во разделот **2.5**, треба да се ограничиме на некој нејзин „соодветен дел". Слична е ситуацијата и со другите тригонометриски функции: $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.



Црт. 1

I. **Инверзен синус.** Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\sin x$ само на сегментот $D_f=[-\pi/2, \pi/2]$ [1], во кој таа е строго монотона (попрецизно: расте) и ги прима сите вредности од сегментот $E_f=[-1, 1]$. (На црт.1 соодветниот дел од синусоидата е претставен поцрно, со подебела линија.) Според Т.2 од **2.6**, за функцијата

$$f(x)=\sin x \text{ при условот } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,$$

постои еднозначно определена инверзна функција g; неа ќе ја наречеме ***инверзен синус*** [2] или ***аркус синус*** и ќе ја означиме со: $x=\arcsin y$. Разменувајќи ги улогите на x и y, ќе ја добиеме функцијата

$$y = \arcsin x, \tag{1}$$

со домен $D_g=[-1, 1]$ и опсег $E_g=[-\pi/2, \pi/2]$. Нејзиниот график е претставен на црт.2. Функцијата $y=\arcsin x$:

- е ограничена,
- има НГВ ($=\pi/2$),
- има НМВ ($=-\pi/2$),
- има нула ($x=0$),

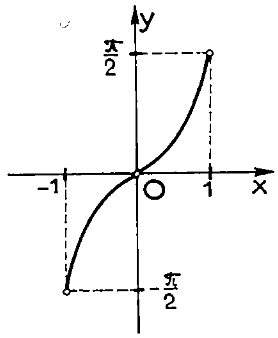
[1] т.е. рестрикција на $\sin x$, на D_f

[2] Оваа функција е, имено, една обопштена инверзија на $\sin x$; таа се вика ***главна обопштена инверзија*** или ***главна вредност*** на многузначната инверзија $\operatorname{Arcsin} x$ (в. вежба **20**)

– е строго монотона (расте),

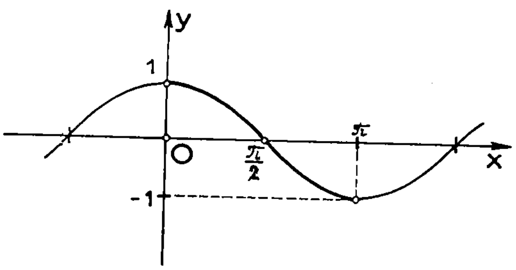
– е непарна.

(Сите овие својства може „да се прочитаат“ и од графикот на црт.2.)

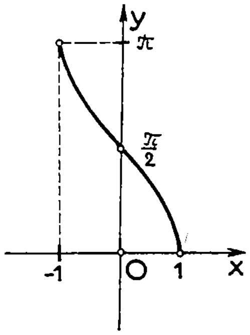


Црт.2

II. **Инверзен косинус.** И функцијата $\cos x$ не е монотона во својот домен $(-\infty, +\infty)$: во сегментите $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ опаѓа, а во $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ расте $(k=0, \pm1, \pm2,\ldots)$ (црт.3).



Црт.3



Црт.4

За да дефинираме (еднозначна) инверзна функција на $\cos x$, ќе се ограничиме на сегментот $[0, \pi]$ (на црт.3, тој дел од косинусоидата е зацрнет). Во тој сегмент е строго монотона (опаѓа), па можеме да ја примениме теоремата 2 од **2.6.** Инверзната функција на

$$y = \cos x \text{ при условот } 0 \leq x \leq \pi$$

е дефинирана, еднозначна и опаднувачка во сегментот $[-1, 1]$; ќе ја означиме со $\arccos x$. Значи:

$$x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x, \quad \text{за } x \in [0, \pi].$$

Ако ги размениме улогите на x и y, ќе ја добиеме функцијата

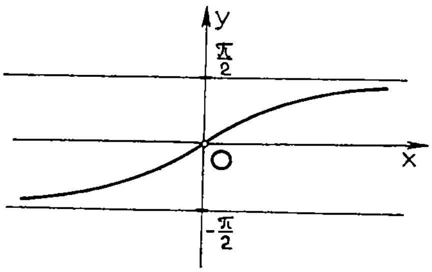
$$y = \arccos x \tag{2}$$

со домен $[-1, 1]$ и опсег $[0, \pi]$. Таа се вика ***инверзен косинус*** или ***аркус косинус***. Нејзиниот график е претставен на црт.4. Од него можеме „да прочитаме“ повеќе својства на оваа функција (исто како за инверзниот синус).

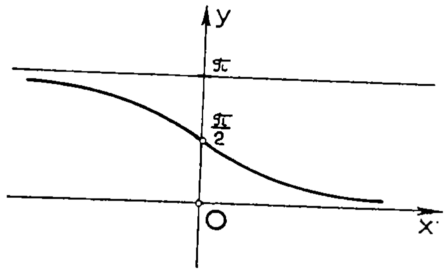
III. **Инверзен тангенс.** Функцијата $\mathrm{tg}x$ расте во секој интервал $(k\pi-\pi/2,\ k\pi+\pi/2)$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Ќе ја разгледаме само во интервалот $(-\pi/2,\ \pi/2)$. Според теоремата 2 од **2.6**, инверзната функција, наречена ***инверзен тангенс*** или ***аркус тангенс***, е означена со

$$y = \mathrm{arctg}x, \tag{3}$$

со домен $\mathbb{R}$; таа е растечка, ограничена со инфимум $-\pi/2$ и супремум $\pi/2$; нема ни НМВ ни НГВ. Нејзиниот график е претставен на црт.5. Од него може „да се прочитаат“ и други својства (покрај наведените).



Црт.5



Црт.6

IV. **Инверзен котангенс.** Функцијата $\mathrm{ctg}x$ опаѓа во секој интервал $(k\pi,\ (k+1)\pi)$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, па ќе ја разгледаме само во интервалот $(0,\ \pi)$, во кој таа (строго) опаѓа. Нејзината инверзна функција ќе ја наречеме ***инверзен котангенс*** или ***аркус котангенс*** и ќе ја означиме со

$$y = \mathrm{arcctg}x. \tag{4}$$

Таа има домен $\mathbb{R}$, е опаднувачка и има опсег $(0,\ \pi)$. Значи, таа е ограничена, со инфимум 0 и супремум π, нема ни НМВ ни НГВ, нема нули, не е парна ни непарна. Нејзиниот график е претставен на црт.6.

Функциите (1) – (4) се викаат ***инверзни тригонометриски функции*** (или ***циклометриски функции***).

ВЕЖБИ

Во задачите **1-4** одреди го доменот на дадената функција f и пресметај ги $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ (ако постојат).

1. $f(x) = \arcsin(x-1)$. **2.** $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{x-2}{x}$.

3. $f(x) = \arccos\frac{x}{x-2}$. **4.** $f(x) = \operatorname{arcctg}\frac{1-x}{2-x}$.

Во задачите 5 и 6 да се докаже точноста на даденото равенство, за секој x од соодветниот домен.

5. а) $\sin(\arcsin x) = x$, б) $\cos(\arccos x) = x$.

6. а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

Во задачите 7–14 да се утврди за кои вредности на x е точно даденото равенство.

7. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$. **8.** $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

9. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **10.** $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$.

11. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. **12.** $\arcsin\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$.

13. $\arccos\sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$. **14.** $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi$.

Да се нацрта графикот на функцијата:

15. $y = \sin(\arcsin x)$. **16.** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

Во задачите 17–20 да се најде доменот и да се нацрта графикот на дадената функција. (Да се искористат идентитетите 7–14.)

17. $y = \cos(\arcsin x)$. **18.** $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

19. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. **20.** $y = \arcsin(\sin x)$.

21. Нека Γ е графикот на функцијата $\sin x$, и нека со $\operatorname{Arcsin} x$ ја означиме многузначната функција со график Γ^{-1}. (Да се види **2.8**.) Да се покаже дека:

а) доменот на $\operatorname{Arcsin} x$ е $[-1, 1]$;

б) за секој $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ има безброј многу вредности и дека:

$$\operatorname{Arcsin} x = \{\arcsin x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\pi - \arcsin x \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

22. Да се дефинира $\operatorname{Arccos} x$ и да се покаже дека:

$$\operatorname{Arccos} x = \{\arccos x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

23. Да се дефинираат $\operatorname{Arctg} x$ и $\operatorname{Arcctg} x$ и да се изврши дискусија слична како и во задачата 21.

24. Да се скицираат графиците на многузначните функции $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$ и $\operatorname{Arcctg} x$.

25. Да се најде барем уште по една обопштена инверзија на функциите $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

3.5. Хиперболични функции

Во разделот **2.4** ги разгледувавме експоненцијалните функции, $f(x)=a^x$, при што a е даден позитивен број $\neq 1$. Се покажало многу корисно (во што ќе се увериме подоцна, во II.1) за основа a да се земе ***бројот*** e и да се разгледува експоненцијалната функција

$$f(x) = e^x. \tag{1}$$

Бројот e ќе биде прецизно воведен во **4.4**, а за овде ќе биде доволно да кажеме дека: тој е ирационален број меѓу 2 и 3:

$$e \approx 2{,}7182818$$

(слично како бројот π, за кој ставаме $\pi \approx 3{,}14$).

Бројот e се зема за основа и на т.н. ***природни логаритми***, кои што се означуваат со $\ln x$, наместо со $\log_e x$. Притоа, според дефиницијата на логаритам, имаме:

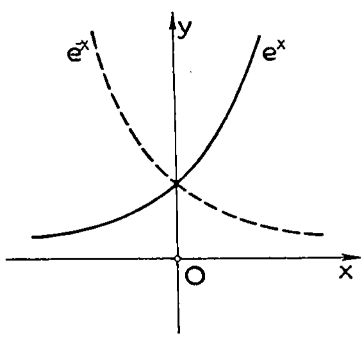
$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

Врската меѓу природните и декадните логаритми е дадена со:

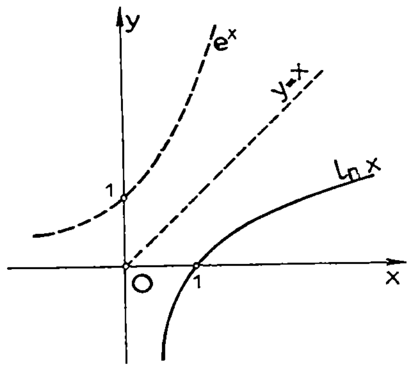
$\ln x = \dfrac{1}{M}\lg x$, при што $M = \lg e \approx 0{,}43429$, а $\dfrac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}30258$. (2)

Графикот на функцијата e^x е специјален случај од графикот на a^x за $a > 1$ (црт.5 од **2.4**), а графикот на $e^{-x} = 1/e^x = (1/e)^x$ е како графикот на a^x за $a < 1$ (црт.6 од **2.4**). Тие се претставени и овде, на црт.1.

Графикот, пак, на функцијата $\ln x$ е претставен на црт.2; тој е огледална слика од графикот на e^x во однос на правата $y=x$ (како график на инверзна функција; в. Т.3 во **2.6**).



Црт.1



Црт.2

Со помош на бројот e се дефинираат и т.н. ***хиперболични функции***.

а) ***хиперболичен синус***:

$$\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

(се чита: синус хиперболикум од икс);

б) ***хиперболичен косинус***:

$$\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

(се чита: косинус хиперболикум од икс);

в) ***хиперболичен тангенс***:

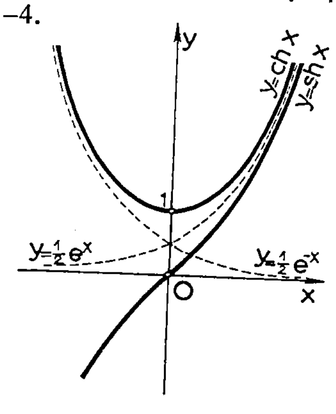
$$\mathrm{th}\,x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},$$

г) ***хиперболичен котангенс***

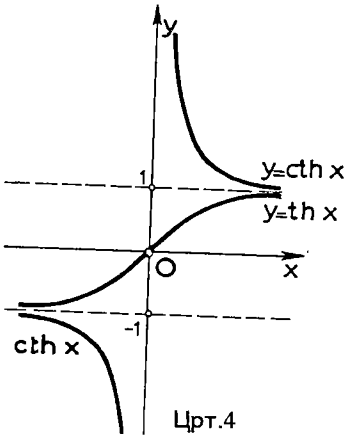
$$\mathrm{cth}\,x = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

Функциите $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$, и $\mathrm{sh}x$ се дефинирани за секој x, а $\mathrm{cth}x$ е дефинирана за секој $x \neq 0$.

Со помош на методот на „собирање, одземање или делење ординати" (како во примерот 4 од 2.3), можеме приближно да си го претставиме обликот на графиците од хиперболичните функции: црт.3–4.



Црт.3



Црт.4

За хиперболичните функции важат следниве формули:

1°. $\mathrm{sh}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{ch}\beta \pm \mathrm{ch}\alpha\,\mathrm{sh}\beta$.

2°. $\mathrm{ch}(\alpha\pm\beta) = \mathrm{ch}\alpha\mathrm{ch}\beta \pm \mathrm{sh}\alpha\mathrm{sh}\beta$.

Тие формули потсетуваат на адиционите теореми за синус и косинус во тригонометријата, само што во втората формула знаците од десната страна се поставени обратно.

Точноста на формулите 1° и 2° следува направо од дефинициите на $\mathrm{sh}x$ и $\mathrm{ch}x$. На пример, првата од тие формули, $\mathrm{sh}(\alpha+\beta)$ се сведува на идентитетот (што лесно се проверува):

$$\frac{1}{2}(e^{\alpha+\beta}-e^{-\alpha-\beta}) = \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})\cdot\frac{1}{2}(e^{\beta}+e^{-\beta})+\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})\cdot\frac{1}{2}(e^{\beta}-e^{-\beta}).$$

Од формулите 1° и 2°, при $\alpha=\beta$, добиваме:

3°. $\mathrm{sh}2\alpha = 2\mathrm{sh}\alpha\mathrm{ch}\alpha$. $\quad$ 4°. $\mathrm{ch}2\alpha = \mathrm{ch}^2\alpha+\mathrm{sh}^2\alpha$.

5°. $\mathrm{ch}0 = \mathrm{ch}^2\alpha-\mathrm{sh}^2\alpha$, $\quad$ т.е. $\quad$ $5'$. $\mathrm{ch}^2\alpha-\mathrm{sh}^2\alpha = 1$.

Можно е да се добијат и редица други формули, сосема слични на други, познати формули од тригонометрија (вежба 2).

Како што се гледа од црт.3 и 4, *функциите* $\mathrm{sh}x$ *и* $\mathrm{th}x$ *се растечки, па значи имаат* ***инверзии***, *соодветно* $\mathrm{arsh}x$ *и* $\mathrm{arth}x$. *Функцијата* $\mathrm{cth}x$ *не е монотона (во целиот домен), но е инјективна, па според* Т.1 *од* **2.6** *исто така има инверзија* $\mathrm{arcth}x$.

Со решавање на равенките

$$x = \mathrm{sh}y, \quad x = \mathrm{th}y, \quad x = \mathrm{cth}y,$$

се добива дека:

$$\mathrm{arsh}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \tag{3}$$

$$\mathrm{arth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \tag{4}$$

$$\mathrm{arcth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \tag{5}$$

(в. вежба 3).

Како што гледаме, за разлика од соодветните тригонометриски функции синус, тангенс и котангенс, каде што инверзиите беа многузначни, овде тие се еднозначни, па нема потреба од воведување „главни вредности“.

Од дефиницијата на $\mathrm{ch}x$ се гледа дека е парна, а од црт.3 – дека е монотона во секој од интервалите $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$, па значи дека нејзината инверзија $\mathrm{Arch}x$ е двозначна. Со решавање на равенката $x=\mathrm{ch}y$ се добива (вежба.3):

$$\mathrm{Arch}x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}). \tag{6}$$

Една „главна вредност“ на оваа функција би била

$$\mathrm{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}). \tag{6'}$$

ВЕЖБИ

1. Да се докаже дека:

   а) $\mathrm{sh}(\alpha-\beta) = \mathrm{sh}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta-\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{sh}\beta$;

   б) $\mathrm{ch}(\alpha+\beta) = \mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta+\mathrm{sh}\alpha\cdot\mathrm{sh}\beta$.

2. Да се покаже дека:

   а) $\mathrm{sh}^2x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x-1)$; б) $\mathrm{ch}^2x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x+1)$;

   в) $\mathrm{th}x\cdot\mathrm{cth}x = 1$, за $x\neq 0$; г) $\mathrm{th}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{th}\alpha+\mathrm{th}\beta}{1+\mathrm{th}\alpha\,\mathrm{th}\beta}$.

3. Да се докажат формулите (3), (4), (5) и (6).

4. Да се нацртаат графиците на инверзиите од хиперболичните функции (3)–(6).

3.6. Елементарни функции

Следните функции ќе ги наречеме ***основни елементарни функции***:

I. C (C е конст.);

II. x;

III. $x^{1/n}$, n = конст. природен број, поголем од 1;

IV. a^x (a = конст. > 0, $a\neq 1$) и, специјално, e^x;

V. $\log_a x$ (a = конст. > 0, $a\neq 1$) и, специјално, $\ln x$;

VI. $\sin x$, $\cos x$;

VII. $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$.

Со помош на овие функции се дефинира најпростата, но истовремено најважната класа функции што се изучува во математичката анализа – класата елементарни функции.

Елементарна е, имено, секоја функција $f(x)$ што може да се добие од основни елементарни функции, со примена на аритметичките операции (собирање, множење и делење), како и операцијата составување.

(Паѓа во очи отсуството на функциите $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ во списокот на основните елементарни функции; тие се елементарни, што може да се види од примерот 2, подолу.)

Во претходните делови разгледувавме специјални класи елементарни функции. Имено, точни се следниве својства.

1°. *Секоја рационална функција е елементарна.*

Доказ. Применувајќи ја операцијата множење n пати ($n\in\mathbb{N}$) на функцијата x, ја добиваме функцијата x^n. Според тоа, елементарна е и секоја функција ax^n, каде што a е даден реален број, а n е даден природен број. Потоа, собирајќи ги елементарните функции $a_nx^n,\ldots, a_1x$, a_0, добиваме дека е елементарна функција и полиномот $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$. Рационалните функции се елементарни како количници на полиноми. ◊

2°. *За секој реален број m, функцијата x^m е елементарна.*

(x^m се вика ***степена функција***.)

Доказ. За $m\in\mathbb{Z}$, x^m е елементарна, бидејќи е рационална. Ако $m=a/b$ е рационален број, каде што $b\in\mathbb{N}$ тогаш x^m е елементарна, бидејќи:

$$x^m = \underbrace{(x^{1/b})\ldots(x^{1/b})}_{a} \text{ за } m>0$$

Ако $m<0$, тогаш $-m > 0$, па x^{-m} е елементарна, од што следува дека е елементарна и функцијата $x^m=1/x^{-m}$.

Да претпоставиме, сега, дека m е позитивен ирационален број. Тогаш доменот на x^m е $[0, +\infty)$. Во тој случај:

$$x^m = e^{m\ln x}$$

за секој $x\in D$, па значи и x^m е елементарна. Ако m е негативен ирационален број, тогаш x^m има домен $(0, +\infty)$ [1] и е елементарна, бидејќи: $x^m = 1/x^{-m}$. ◊

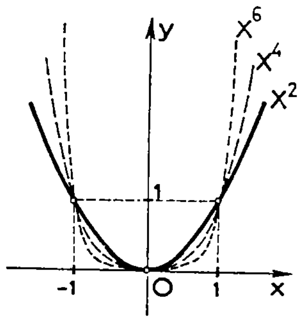
Ќе повториме *некои својства на степенената функција за рационални експоненти.*

Имено, *ако m е природен број*, тогаш доменот на x^m е $\mathbb{R}$.

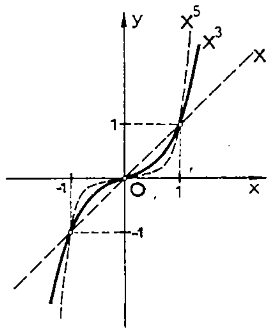
За $m=2k$, x^m *има слични својства со* x^2, т.е. таа е: а) парна, б) има најмала вредност 0 за $x=0$, в) опаѓа во $(-\infty, 0]$ а расте во $[0, +\infty)$.

За $m=2k-1$, x^m *има слични својства како* x^3, т.е. таа е: а) непарна, б) растечка, в) негативна за $x\in(-\infty, 0]$, а позитивна за $x\in(-\infty, 0]$.

На црт.1 се скицирани графиците на x^m за $m=2$, 4, 6, а на црт.2 – на x^m за $m=1$, 3, 5.

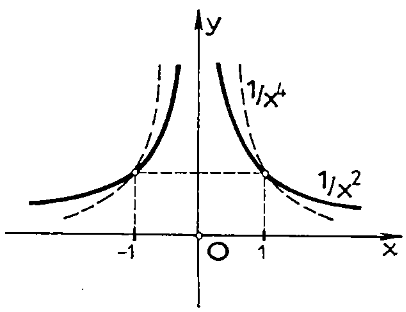


Црт.1

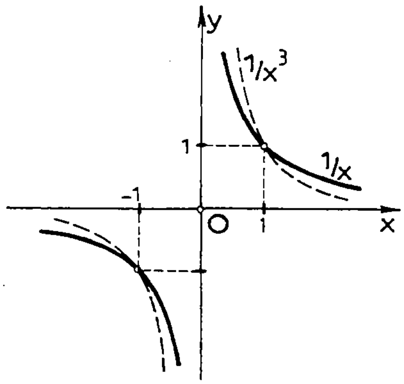


Црт.2

Кога m е *негативен цел број*, тогаш x^m е реципрочна вредност од x^{-m} па, според тоа, има домен $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. Графиците на x^m за $m=-2$, -4 се скицирани на црт.3, а за $m=-1$, -3, на црт.4.



Црт.3



Црт.4

[1] Да се види **1.10**

Ако r е *позитивна дропка*, $r=m/n$, при што m и n се заемно прости броеви, тогаш за доменот на функцијата

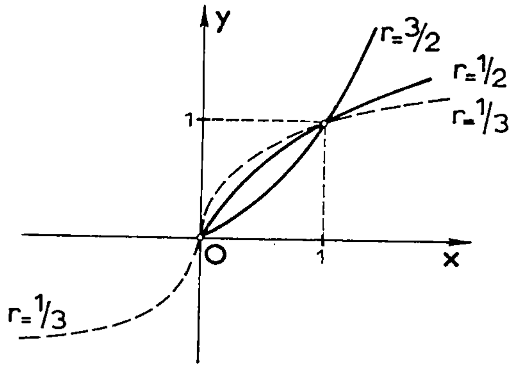
$$f(x)=x^r=x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}$$

имаме: $D_f=[0, +\infty)$ кога n е парен број, а $D_f=\mathbb{R}$ кога n е непарен.

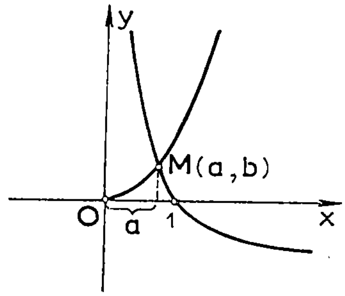
На црт.5 се претставени графиците на функциите

$$y=x^{1/2}=\sqrt{x}\,, \qquad y=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}\,, \qquad y=x^{3/2}=\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}\,,$$

(т.е. на f, за $r=1/2;\ 1/3;\ 3/2$).



Црт.5



Црт.6

Со проширување на класата рационални функции ја добиваме класата алгебарски функции. За функцијата $f(x)$ велиме, имено, дека е ***алгебарска*** ако може да се добие од основни елементарни функции од облик I, II и III со примена на споменатите аритметички операции, како и операцијата композиција. Според тоа, секоја рационална функција е алгебарска. За алгебарските функции што не се рационални ќе велиме дека се ***ирационални***.

Пример 1. а) Функцијата $|x|$ е ирационална, бидејќи: $|x|=(x^2)^{1/2}$

б) Степената функција x^r е ирационална за секој рационален број r што не е цел.

в) Празната функција е ирационална, бидејќи таа е дефинирана, на пример, со: $(-1-x^2)^{-1/2}$

г) Ирационалната функција $\sqrt{-x^2}$ има и домен и опсег $\{0\}$.

д) Функциите $\sqrt{x^2-1}$ и $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ се ирационални, но тие не се еднакви бидејќи првата има домен $(-\infty, 1]\cup[1, +\infty)$ а втората $[1, +\infty)$. Втората е, имено, рестрикција од првата.

ѓ) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3-\sqrt{x}}}{x+4}$ е алгебарска функција со домен $D=[1, +\infty)\cup\{0\}$.

Елементарните функции што не се алгебарски се викаат ***трансцендентни***.

Пример 2. Секоја од следните функции е трансцендентна

а) a^x за $a\neq 1$, $a>0$; б) $\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$;

в) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

г) $\arcsin x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$;

д) $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$; ѓ) $\sqrt{x^2+\ln x}$

Забелешка 1. Согласно со договорот што го направивме во **2.1**, доменот D на една елементарна функција $f(x)$ е множеството реални броеви за кои има смисла аналитичкиот израз со помош на кој е определена $f(x)$. Подолу наведуваме неколку примери.

Пример 3. Доменот на $\lg x + \dfrac{\sqrt{5-x}}{x-3}$ е $D=(0, 3)\cup(3, 5]$ затоа што:

$$x\in D \Rightarrow x>0 \wedge 5-x \geq 0 \wedge x-3 \neq 0$$

Пример 4. Да го определиме доменот на функцијата $\sqrt{x^2+\ln x}$. Пред сѐ, треба да биде: $x>0$. Исто така треба да биде и $x^2+\ln x\geq 0$, т.е. $x^2\geq -\ln x$, но последната неравенка можеме да ја решиме само приближно. За таа цел ги конструираме графиците на функциите x^2 и $-\ln x$ (црт.6). Така, $D = [a, +\infty)$.

Забелешка 2. Постојат доста „едноставни“ функции што не се елементарни. Така, не е елементарна ни една од следните функции: $[x]$, $\operatorname{sgn} x$, функцијата на Дирихле. Да напомниме дека доказот за неелементарнсота на една функција, обично, не е „елементарен“.

За да го илустрираме ова тврдење, ќе покажеме дека:

3°. *Функцијата* $|x|$ *не е рационална.*

Доказ. Кога $|x|$ би била рационална функција $P(x)/Q(x)$, би имале:

$x = P(x)/Q(x)$ за секој $x>0$, а

$-x = P(x)/Q(x)$ за секој $x<0$.

Од првото равенство следува дека $xQ(x)-P(x)=0$ за безброј многу вредности на x, т.е. дека $xQ(x)-P(x)$ е нултиот полином. Од второто равенство, поради истите причини, би добиле дека $xQ(x)+P(x)$ е нултиот полином. Но, од тоа би следувало дека P е нултиот, па значи и Q е нултиот полином, што не е можно. ◊

Забелешка 3. Алгебарските функции во смисла на горедадената дефиниција се познати и како ***експлицитни алгебарски функции***, за разлика од имплицитните алгебарски функции кои се дефинираат на следниов начин. За функцијата $f(x)$ велиме дека е ***имплицитна алгебарска функција*** со домен D акко постојат полиномни функции $P_n(x), P_{n-1}(x),\ldots, P_0(x)$ такви што за секој $x\in D$ имаме:

$$P_n(x)[f(x)]^n + P_{n-1}(x)[f(x)]^{n-1} + \ldots + P_1(x)f(x) + P_0(x) = 0 . \qquad (*)$$

Ние ќе се задоволиме само со констатацијата дека *постојат имплицитни алгебарски функции што не се елементарни.*

ВЕЖБИ

Во задачите 1–8, да се согледа дека дадената функција е елементарна и да се одреди нејзиниот домен.

1. $y = \ln(x+2)$.

2. $y = 1-\sqrt{x^2-9}$.

3. $y = \left(\log_4 \dfrac{5x-x^2}{4}\right)^{1/2}$.

4. $y = \arcsin(x-2)$.

5. $y = \sqrt{3-x} + \arccos\dfrac{3-2x}{5}$.

6. $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$.

7. $y = \arcsin(1-x) + \sqrt{x-2}$.

8. $y = \sqrt{-1-x^4}$.

9. Нека $f(x) = x/(1-\sqrt{x})$, $g(x) = \sqrt{1-x}/x$. Да се најде: $f+g$, fg, $f\circ g$ и $(f\circ g)(3)$. Кој е доменот на: а) fg; б) $f\circ g$?

10. Дадени се функциите $f(x) = 4/x$, $g(x) = 1/\sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$. Да се најде $(h\circ g\circ f\circ h)(225)$.

11. Дали се променува заклучокот за доменот на функцијата x^r ако се допушти рационалниот број r да биде негативен?

12. Алгебарската функција $y = x + \sqrt[3]{x+1/x}$ да се претстави имплицитно.

13. Да се најде функција $y=y(x)$ којашто е определена со равенството $xy^2-2x^2y+x^3-x^2-x=0$. Кој е нејзиниот домен?

14. Да се покаже дека множеството елементарни функции не се променува ако VI се замени со VI′: $\operatorname{tg}x$, $\cos x$,а VII со VII′: $\arccos x$, $\operatorname{arctg}x$. Дали може да се извршат и други такви измени?

I.4. НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

4.1. Дефиниција на низа. Ограниченост и монотоност

Природните броеви подредени по големина,

$$1, 2, 3,..., n,...$$

ја образуваат ***низата од природните броеви***. Ако секој природен број во горната низа го замениме со по еден реален број (меѓу нив може да има и еднакви), ќе добиеме една ***бесконечна низа од реални броеви*** (или, кусо, ***низа***):

$$a_1, a_2, a_3,..., a_n,... . \tag{1}$$

Со замената на природните броеви со реални броеви што не доведе до низата (1) ние, всушност, дефиниравме една функција $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ при која $f(n)=a_n$. Според тоа, *секоја бесконечна низа од реални броеви претставува функција од една реална независнопроменлива величина чиј домен е множеството* $\mathbb{N}$ *од природните броеви.*

Броевите $a_1, a_2,..., a_n,...$ ги викаме ***членови на низата*** (1); за a_n велиме дека е ***општ член*** на низата. Натаму, низата (1) накратко ќе ја означуваме со (a_n) или со a_n. Да изнесеме неколку примери за низи.

Пример 1.

а) $1, -1, 1, -1,..., (-1)^{n+1},...$; $a_n = (-1)^{n+1}$;

б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},..., \frac{1}{n},...$; $a_n = \frac{1}{n}$;

в) $-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{4},..., (-1)^n\frac{2n+1}{n+1},...$; $a_n = (-1)^n\frac{2n+1}{n+1}$;

г) $a, a,..., a,...$; $a_n = a$ (a е даден реален број).

При изучувањето на низите, одредена улога имаат поимите за ограниченост и монотоност што беа порано воведени за функциите (види 2.4 и 2.5); овие два поима овде ќе ги изнесеме во термини на низи.

За низата (a_n) велиме дека е ***мајорирана*** (***ограничена оддесно***) ако постои реален број M таков што $a_n \leq M$ за секој $n \in \mathbb{N}$; секој број M со изнесеното својство го викаме ***мајорант*** (или ***горна меѓа***) на (a_n). Секоја мајорирана низа (според дефиницијата на комплетно поле и Т.9 од **1.8**) има најмал мајорант кој ќе го викаме ***супремум*** на низата; супремумот на низата (a_n) ќе го означуваме со $\sup a_n$.

Дуално, низата (a_n) ја викаме ***минорирана*** (***ограничена одлево***) ако постои реален број m таков што за секој $n \in \mathbb{N}$, $m \leq a_n$; секој број m со ова својство го викаме ***минорант*** (или ***долна меѓа***) на (a_n). Секоја минорирана низа има најголем минорант кој го викаме ***инфимум*** на низата; инфимумот на низата (a_n) го означуваме со $\inf a_n$.

Една низа што е и мајорирана и минорирана ја викаме ***ограничена низа***.

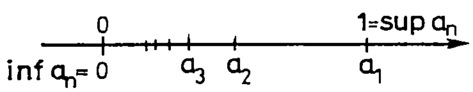
Сите низи од примерот 1 се ограничени. Притоа, во примерот а) имаме $\sup a_n=1$, $\inf a_n=-1$; во б) имаме $\sup a_n=1$, $\inf a_n=0$ (овде $\inf a_n$ не е член на низата); во в) $\sup a_n=2$, $\inf a_n=-2$ (ниеден од овие два броја не е член на низата; во г) $\sup a_n=\inf a_n=a$.

Постојат низи што не се ограничени, што се гледа од следниве примери.

Пример 2. а) Низата $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$; $a_n=2n-1$ е минорирана при што $\inf a_n=1$, но не е мајорирана;

б) Низата $2, -4, 6, -8, \ldots, (-1)^{n+1}2n, \ldots$; $a_n=(-1)^{n+1}2n$ не е ниту мајорирана, ниту минорирана.

Користејќи го геометриското претставување на реалните броеви, и членовите на една низа можат нагледно да се претставаат со точки на бројната оска (притоа, и точката што му одговара на членот a_i ќе ја означуваме со a_i). При ова претставување, една низа (a_n) што е мајорирана ќе биде претставена со точки што не се наоѓаат десно од $\sup(a_n)$, а членовите на една минорирана низа ќе бидат претставени со точки што не се лево од нејзиниот инфимум; на црт.1 е претставена низата б) од примерот 1. Овде, супремумот 1 е член на низата и тоа ***најголем***. Но, инфимумот 0 не е член на низата.



Црт.1

Да го воведеме, сега, поимот „монотоност на низа".

За низата (a_n) велиме дека е: ***растечка***, ако $a_n < a_{n+1}$; ***опаѓачка***, ако $a_n > a_{n+1}$; ***неопаѓачка***, (т.е. ***нестрого растечка***), ако $a_n \leq a_{n+1}$; ***нерастечка*** (т.е. ***нестрого опаѓачка***), ако $a_n \geq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Една низа (a_n) што има некое од изнесените четири својства се вика ***монотона***, при што во случаите кога е растечка или опаѓачка за неа се вели дека е ***строго (т.е. стриктно) монотона***

Низата б) во примерот 1 опаѓа, додека низата г) во истиот пример не опаѓа (и не расте); низите, пак, а) и в) не се монотони. Во примерот 2 низата а) расте, додека низата б) не е монотона.

Ќе разгледаме уште еден пример на низа што не е дефинирана „доволно експлицитно", туку, преку соодветна „рекурзија".

Пример 3. Ќе ја испитаме низата дефинирана со:

$$a_1 = \sqrt{6}, \quad a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}.$$

Прво, да го определиме општиот член a_n на оваа низа. Имаме:

$$a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6+\sqrt{6}}, \qquad a_3 = \sqrt{6+a_2} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \dots$$

$$a_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}, \dots .$$

Гледаме дека првобитниот „рекурзивен" облик на претставување е поприкладен, од добиениот „експлицитен" облик.

Со индукција по n ќе покажеме дека низата е растечка и мајорорана. Прво, имаме: $a_1 = \sqrt{6} < 3$ и $a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{6} = a_1$. Да претпоставиме дека $a_k < 3$. Тогаш,

$$a_{k+1} = \sqrt{6+a_k} < \sqrt{6+3} = 3,$$

па значи $a_n < 3$, за секој $n \in \mathbb{N}$, т.е. 3 е мајорант на низата.

Потоа, ако претпоставиме дека $a_{n+1} > a_n$ т.е $a_{n+1} - a_n > 0$, добиваме:

$$a_{n+2} = \sqrt{6+a_{n+1}} > \sqrt{6+a_n} = a_{n+1} > 0,$$

т.е. $a_{n+2} > a_{n+1}$, од што следува дека низата е растечка.

Во врска со поимите ограниченост и монотоност на низи, ќе го забележиме уште следново очигледно својство:

1°. *Ако низата (a_n) не опаѓа (одн. не расте) и е мајорирана (одн. минорирана), тогаш таа е ограничена; притоа a_1 е најмалиот (одн. најголемиот) член на таа низа.*

ВЕЖБИ

Во секоја од задачите 1–4, а) да се провери дали соодветната низа е монотона. Ако постои, да се најде б) супремумот, в) инфимумот. г) Првите неколку членови на низата, да се претстават геометриски.

1. $a_n = \dfrac{n-2}{n}$. **2.** $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$. **3.** $a_n = (-1)^n n + n$.

4. $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, \ldots$

5. Да се скицираат графиците на низите 1–4, сметајќи ги нив за функции од една реална независна променлива. Во иста смисла да се состават и табели на секоја од горните функции.

6. Каква врска постои помеѓу „графикот на една низа" и нејзиното претставување на бројната оска?

7. Да се покаже дека поимите за: минорираност (минорант, инфимум), мајорираност (мајорант, супремум), монотоност, се специјални случаи од соодветните поими кај функциите од една реална независно-променлива.

8. За една низа велиме дека е во: а) $\mathbb{N}$, б) $\mathbb{Z}$, в) $\mathbb{Q}$ акко а) $a_n \in \mathbb{N}$, б) $a_n \in \mathbb{Z}$, в) $a_n \in \mathbb{Q}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Да се покаже дека:

1) Секоја низа во $\mathbb{N}$ има инфимум (што е нејзин најмал член), а една низа во $\mathbb{N}$ има супремум (што е и најголем член) акко е мајорирана.

2) Една низа во $\mathbb{Z}$ има супремум (инфимум) акко е мајорирана (минорирана), како и дека, тогаш, супремумот (инфимумот) е нејзиниот најголем (најмал) член.

9. Да се даде пример на мајорирана низа во $\mathbb{Q}$ што нема супремум во $\mathbb{Q}$. Дали секоја мајорирана низа во $\mathbb{Q}$ има супремум во $\mathbb{R}$?

10. Нека низата (a_n) е дефинирана со:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}\,.$$

Да се покаже дека низата е мајорирана и растечка.

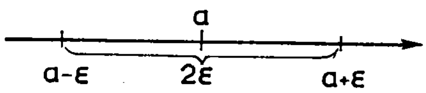
11*. Нека $B(\mathbb{R})$ е множеството од сите ограничени низи реални броеви. Да се покаже дека:

$$(a_n),\ (b_n) \in B(\mathbb{R}) \Rightarrow (a_n+b_n),\ (-a_n),\ (a_n \cdot b_n) \in B(\mathbb{R}).$$

12*. Користејќи ја претходната вежба, да се покаже дека $B(\mathbb{R})$ е комутативен и асоцијативен прстен со единица и со вистински делители на нулата.

4.2. Конвергентни низи

За реалниот број a велиме дека е ***точка на натрупување*** на низата (a_n) ако за кој било $\varepsilon > 0$, бесконечно многу членови од низата му припаѓаат на интервалот $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Геометриски тоа значи дека бесконечно многу точки од низата (т.е. точки што се претставници на членови на низата) лежат во отсечката со должина 2ε и центар (средина) a, без оглед на тоа како е избран реалниот број $\varepsilon > 0$ (црт.1).



Црт.1

Непосредно од дефиницијата е јасно дека: низата а) од примерот 1 во **4.1** има две точки на натрупување: -1 и 1; бројот a е точка на натрупување на низата г) од истиот пример, додека низите а) и б) од примерот 2 немаат точки на натрупување.

Пример 1. Да покажеме дека 0 е точка на натрупување на низата б) од примерот 1 во **4.1.**

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран; според аксиомата на Архимед постои природен број n_0 таков што $n_0>1/\varepsilon$, а оттука, за секој $n>n_0$ имаме дека $n>1/\varepsilon$, т.е. $a_n=1/n<\varepsilon$. Бидејќи за секој $n\in\mathbb{N}$, $a_n>0>-\varepsilon$, имаме дека $-\varepsilon<a_n<\varepsilon$, за секој $n>n_0$, т.е. бесконечно многу членови од низата лежат во интервалот $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$.

На сличен начин може да се покаже дека низата в) од примерот 1 во **4.1.** има две точки на натрупување: -2 и 2.

За една низа велиме дека е ***конвергентна*** ако постои реален број a таков што, за секој реален број $\varepsilon>0$, бесконечен број членови на низата му припаѓаат на интервалот $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, а надвор од него може да има само конечен број нејзини членови. Бројот a со изнесеното својство го викаме ***граница*** или ***лимес*** на низата; ако a е граница на низата (a_n) пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ или, } a_n \to a\ (n\to\infty)$$

За една низа што не е конвергентна велиме дека е ***дивергентна***.

***Теорема* 1 (за еднозначност на границата)**

Ако (a_n) е конвергентна низа, тогаш нејзината граница е еднозначно определена.

Доказ. Нека $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и нека $b\neq a$ е даден реален број. Ако ставиме $\varepsilon=|a-b|/3$ ќе добиеме дека интервалите $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$ немаат заеднички точки: $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)\cap(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)=\varnothing$. Од тоа што a е граница на (a_n) следува дека надвор од $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ може да има само конечен број членови на низата, па според тоа и во $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$ може да има само конечен број членови на (a_n), т.е. b не е граница (ниту пак точка на натрупување) на (a_n). ◊

Од изнесениов доказ следува дека: *границаша на една конверґеншна низа е и единсшвена нејзина шочка на нашрупување.*

Пример 2. Од горнава забелешка, пак, следува дека низите $a_n=(-1)^{n+1}$ и $a_n=(-1)^n(2n+1)/(n+1)$ (а) и в) од примерот 1 во **4.1**) се дивергентни зашто имаат по две точки на натрупување.

Исто така, бидејќи границата на една конвергентна низа мора да е нејзина точка на натрупување, добиваме дека и низите $a_n=2n-1$ и $a_n=(-1)^{n+1}\cdot 2n$ се дивергентни. За низата $a_n=a$ е очигледно дека a е нејзината граница, додека напред изнесената анализа за тоа дека за низата $a_n=1/n$, 0 е точка на натрупување, всушност претставува доказ на тоа дека 0 е граница на таа низа, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. (Овие низи се разгледувани во пр. 1 и 2 од разделот **4.1**.)

Поимот конвергентна низа може да се воведе и на друг начин, со помош на т.н. $(\varepsilon-n_0)$-**својство**, што се гледа од следнава теорема:

***Теорема* 2 (карактеризација со $(\varepsilon-n_0)$ – својството)**

Низаша (a_n) е конверґеншна акко

$$(\exists a\in\mathbb{R})(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})(n>n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon). \tag{1}$$

(Исказот (1) се вика $(\varepsilon-n_0)$-***својство***.)

Доказ. Нека (a_n) е конвергентна низа, при што a е нејзината граница. Тоа значи дека, за кој било позитивен реален број ε, надвор од интервалот $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ има само конечно многу членови од низата. Ако сите членови на низата (a_n) се во интервалот $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, тогаш за n_0 може да се земе кој било природен број (на пример, $n_0=1$), а во спротивниот случај, за n_0 може да се избере најголемиот природен број таков што $a_{n_0}\notin(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Тогаш $|a_n-a|<\varepsilon$.

Обратно, нека е точно $(\varepsilon-n_0)$ – својството, т.е. постои $a\in\mathbb{R}$ таков што за секој реален број $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbb{N}$ со својството $n>n_0\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon$. Тоа значи дека за $n>n_0$, $a_n\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, т.е. дека во интервалот $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ има бесконечно многу членови на (a_n), а надвор од него само конечен број што значи дека $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ◊

Пример 1. Со помош на (ε–n_0)–својството ќе покажеме дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2.$$

Проверката дека 2 е граница на низата со општ член $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ ќе ја спроведеме на следниов начин:

$$|a_n-2|=\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|=\left|\frac{-3}{n+1}\right|=\frac{3}{n+1}.$$

Ако го земеме $\varepsilon>0$ произволен, тогаш од $\frac{3}{n+1}<\varepsilon$ добиваме дека $n>\frac{3}{\varepsilon}-1$ т.е. избирајќи го сега $n_0\ge\frac{3}{\varepsilon}-1$ добиваме дека за $n>n_0$, $\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$ што и требаше да покажеме. (На пример, за $\varepsilon=0{,}01$, ако го избереме $n_0=299$ имаме $\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\frac{1}{100}$, за секој $n>n_0$.)

ВЕЖБИ

Во задачите 1–5, да се покаже дека $a_n\to a$ (кога $n\to+\infty$); за задачата i да се определи најмалиот природен број n_0 таков што $n>n_0\Rightarrow|a-a_n|<10^{-i}$.

1. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\to 0$. **2.** $\frac{n-1}{n}\to 1$.

3. $\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\to\frac{1}{2}$. **4.** $0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n}\to\frac{1}{3}$. **5.** $\sqrt{\frac{2}{n}}\to 0$.

Во задачите 6–8 да се покаже дека дадените низи се дивергентни.

6. $\frac{[1+(-1)^n]^n}{2^n}$. **7.** $n[1+(-1)^n]$. **8.** $\frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$.

9. Да се покаже дека ако низата (a_n) има граница a, тогаш низата $(|a_n|)$ има граница $|a|$.

10. За низата (a_n) велиме дека е ***константна***, акко $(\exists k\in\mathbb{N})(\forall m\in\mathbb{N})\ a_{k+m}=a_k$.

Да се покаже дека секоја константна низа е конвергентна со граница $a=a_k$.

11*. Нека низата (a_n) е таква што $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n\in\mathbb{Z}$. Да се покаже дека низата е конвергентна акко е константна.

12*. Да се покаже дека Т.2 останува во сила ако во (1) релацијата „$n>n_0$“ се замени со „$n\ge n_0$“.

4.3. Некои својства на конвергентните низи

Да се запознаеме со некои својства на конвергентните низи.

***Теорема* 1 (за ограниченост на конвергентна низа)**

Секоја конвергентна низа е ограничена.

Доказ. Нека (a_n) е конвергентна низа со граница a. Нека $\varepsilon>0$ е даден реален број, на пример $\varepsilon=1$ и нека $n_0\in\mathbb{N}$ е таков што $n>n_0 \Rightarrow a_n\in(a-1,\ a+1)$. Ако M е најголемиот елемент во множеството броеви $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a+\varepsilon\}$, а m е најмалиот во $\{a_1, \ldots, a_{n_0}, a-\varepsilon\}$, тогаш ќе имаме $m \le a_n \le M$, за секој $n\in\mathbb{N}$. ◊

Обратното тврдење од својството изнесено во оваа теорема не е точно, т.е. *не секоја ограничена низа е конвергентна*, што се гледа од примерот $a_n=(-1)^n$; оваа низа е ограничена, но не е конвергентна.

Овде ќе покажеме дека, ако покрај ограниченоста се претпостави уште и монотоност за дадена низа, тогаш таа ќе биде конвергентна. Имено, имаме:

***Теорема* 2 (за конвергентност на монотона и ограничена низа)**

Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Доказ. Ќе го разгледаме само случајот кога дадена низа (a_n) *не опаѓа и е мајорирана* (според 1° од 4.1, (a_n) е ограничена). Поради мајорираноста, низата (a_n) има супремум, $a=\sup a_n$. Ако $\varepsilon>0$ е кој било реален број, $a-\varepsilon$ не може да биде мајорант на низата, така што постои $n_0\in\mathbb{N}$ таков што $a-\varepsilon<a_{n_0}$. Ако $n>n_0$, тогаш $a_n\ge a_{n_0}$, поради претпоставената монотоност, па за секој $n>n_0$ имаме дека $a-\varepsilon<a_n$. Од друга страна, за секој $n\in\mathbb{N}$ имаме, $a_n\le a<a+\varepsilon$ така што конечно добиваме дека $n>n_0 \Rightarrow a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, т.е. $|a_n-a|<\varepsilon$. Тоа, пак, според Т.2 од 4.2, значи дека (a_n) е конвергентна со граница a. ◊

Да го примениме докажаниот резултат на еден конкретен **пример**. Во примерот 3, од претходниот раздел, покажавме дека низата (a_n) определена со: $a_1=\sqrt{6}$ и $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ е ограничена и растечка, па според тоа, таа е и конвергентна. (Во пр.3 од **4.5** ќе покажеме дека границата на оваа низа е 3.)

Ќе разгледаме уште еден пример.

Пример 1. Низата $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ е, очигледно, растечка. Од друга страна, имаме:

$$a_n = \frac{(1/2)^{n+1}-1}{(1/2)-1} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1/2} = 2-(1/2)^n < 2,$$

т.е. низата е ограничена. Според тоа, низата е конвергентна. Да покажеме дека нејзината граница е 2. Навистина, имаме $0<2-a_n=(1/2)^n$. Ако ε е даден позитивен реален број тогаш постои природен број n така што $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, па ако n_0 е најмалиот таков природен број добиваме дека: $n>n_0 \Rightarrow |2-a_n| = 2-a_n = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

***Теорема* 3 (за „сендвич-низа")**

Нека (a_n) и (b_n) се две конвергентни низи со иста граница a и нека за секој $n\in\mathbf{N}$ е $a_n \le c_n \le b_n$. Тогаш и (c_n) е конвергентна низа, при што $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказ. За кој било реален број $\varepsilon>0$, надвор од интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ може да има само конечен број членови на низата (a_n) и, исто така, само конечен број членови на (b_n). Тоа значи дека постојат $n_1, n_2\in\mathbf{N}$ такви што за $n>n_1$, $a_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а за $n>n_2$, $b_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Ако ставиме $n_0=\max\{n_1, n_2\}$, тогаш за $n>n_0$ имаме дека a_n, $b_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и бидејќи $a_n \le c_n \le b_n$, за $n>n_0$ добиваме дека $c_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ што покажува дека a е граница и на низата (c_n). ◊

Пред да разгледаме еден пример за илустрација на последнава теорема ќе изнесеме една, скоро очевидна, забелешка (вежба 8.)

Забелешка. Природата [1] на една низа не се менува ако ѝ се додадат или одземат конечен број членови; притоа, ако низата била конвергентна, тогаш со додавање или одземање на конечен број членови нејзе не ѝ се менува границата.

Пример 2. Да покажеме дека низата со општ член $a_n = \frac{2n}{n+1}$ е конвергентна и има граница 2.

Во пр. 1 од **4.2** покажавме дека низата (a_n), каде што $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ е конвергентна и има граница 2. Од друга страна, низата (b_n) каде што $b_n=2$ е, исто така, конвергентна со граница 2. Бидејќи,

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1} < \frac{2n}{n+1} = c_n < \frac{2n+2}{n+1} = 2 = b_n$$

добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 2$.

---

[1] Под ***природа*** на една низа го подразбираме својството таа низа да е или конвергентна или дивергентна

(Последниот резултат се докажува лесно и директно.)

Ќе разгледаме уште една примена на докажаната теорема.

Пример 3. Да ставиме $a_n = \sqrt[n]{n}$. Јасно е дека $a_n \geq 1$, па ако ставиме $a_n = 1+b_n$, добиваме дека $b_n \geq 0$. Потоа, имаме:

$$n = (1+b_n)^n = 1+\binom{n}{1}b_n + \binom{n}{2}b_n^2 + \ldots > 1+\binom{n}{2}b_n^2, \quad \text{т.е.} \quad b_n^2 < (n-1)\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n}$$

односно $0 \leq b_n < \sqrt{2/n}$.

Според вежбата 5 од претходниот дел имаме $\sqrt{2/n} \to 0$ (кога $n \to +\infty$), па значи, и $b_n \to 0$. Сега лесно докажуваме дека $a_n \to 0$. Навистина $|1-a_n| = |-b_n| = b_n$, па ако $\varepsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што: $n \geq n_0 \Rightarrow |1-a_n| = b_n < \varepsilon$.

Во 1.9 видовме дека секој позитивен реален број a има претставување во облик на бесконечна десетична дропка, т.е.

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots,$$

каде што $a_0 = [a]$ е целиот дел на a и, за секој природен број i, a_i е цел број таков што $0 \leq a_i \leq 9$. Притоа a е супремум на низата (b_n), каде што:

$$b_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}, \tag{1}$$

за секој $n \geq 1$. Според доказот на Т.2, имаме:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a. \tag{2}$$

За $a=0$, ставајќи $b_n = 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, добиваме дека (2) важи.

Ако c е негативен реален број, тогаш $a = -c$ е позитивен, па ако е точно (2), добиваме дека:

$$c = \lim_{n\to\infty}(-b_n). \tag{3}$$

Од сето тоа се добива следнава важна:

Теорема 4. *Секој реален број е граница на конвергентна монотона низа рационални броеви.* ◊

ВЕЖБИ

Користејќи ја Т.1, да се покаже дека низите од задачите 1–4 се дивергентни. Да се провери и дали некои од тие низи имаат точки на натрупување.

1. $n-\sqrt{n}$ **2.** $n\sin\frac{n\pi}{2}$ **3.** $\frac{3^n+1}{2^n}$ **4.** $1+2+\ldots+2^n$

5. Да се покаже дека ако a е граница на (a_n), тогаш a е граница и на секоја од низите (c_n), (b_n) каде што $b_n=a_{2n-1}$, $c_n=a_{2n}$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

6. Нека (a_n) е конвергентна низа со граница a и нека $m_1, m_2,\ldots, m_n,\ldots$ е растечка низа во $\mathbf{N}$. Да се покаже дека ако $(\forall n\in\mathbf{N})$ $b_n=a_{m_n}$, тогаш и (b_n) е конвергентна низа со истата граница a.

7. Нека (a_n) и (b_n) се две низи и нека низата (c_n) е дефинирана со:

$c_{2n-1}=a_n$, $c_{2n}=b_n$. Во кој случај (c_n) е конвергентна?

8. Нека (a_n) и (b_n) се две низи такви што неравенката $a_n\neq b_n$ има само конечно многу решенија. Да се покаже дека (a_n) и (b_n) имаат иста природа.

Во задачите 9–10 да се покаже дека дадените низи се конвергентни, со помош на Т.2. По можност, да се определат и границите.

9. $1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}$. **10.** $a_1=\sqrt{30}$, $a_{n+1}=\sqrt{30+a_n}$.

Во задачите 11–14 да се определат по една растечка и опаѓачка низа од рационални броеви, чии граници се дадените броеви.

11. $\sqrt{2}$ **12.** $\sqrt{10}$ **13.** 5.

14. Да се покаже дека $\sqrt[n]{n+1}\to 1$ $(n\to\infty)$.

15. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

а) Да се покаже дека: ако $a_n \leq b_n$ за секој $n\in\mathbf{N}$, тогаш $a\leq b$.

б) Да се наведат примери при кои: $a_n < b_n$ за секој $n\in\mathbf{N}$, а $a=b$.

4.4. Бројот e

Да ја разгледаме низата со општ член

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

Ќе докажеме дека оваа низа (i) расте и (ii) дека е мајорирана, од што, според, Т.2 од **4.3** ќе следува дека е конвергентна.

(i) *Низата* (a_n) *монотоно расте.* Според биномната формула имаме:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Имајќи предвид дека,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

натаму добиваме:

$$a_n = 2+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n^{n-1}} =$$

$$= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

И за a_{n+1}, од изнесеново, следува дека

$$a_{n+1} = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Споредувајќи ги a_n и a_{n+1} лесно се уверуваме дека $a_n < a_{n+1}$ па, значи, (a_n) навистина расте.

(ii) *Низата е мајорирана.* Поради тоа што

$$\left(1-\frac{i}{n}\right) < 1, \quad i = 1,2,\ldots,n-1,$$

од изразот за a_n што го најдовме во (i) добиваме дека

$$a_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Натаму, со оглед на тоа што

$$k! > \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{k-1} = 2^{k-1}, \quad k > 2,$$

имаме дека

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

а оттука, имајќи ја предвид формулата за збир на првите n членови на геометриска прогресија, добиваме:

$$a_n < 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3,$$

т.е. (a_n) е мајорирана низа. ◊

Границата на низата $a_n=(1+1/n)^n$, за која докажавме дека е конвергентна, ќе ја означиме со e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Според изнесеното можеме, засега, да кажеме само дека $2<e<3$ (зашто $2<a_n<3$). Инаку, бројот e е ирационален, чии што неколку први десетични цифри се: $e=2,7182818\ldots$ (види и 3.6).

ВЕЖБИ

Во вежбите 1–4 да се покаже дека секоја од дадените низи е конвергентна и да се определат соодветните граници.

1. $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$. **2.** $\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}$. **3.** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$. **4.** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$.

4.5. Операции со конвергентни низи

Со помош на низите (a_n) и (b_n) и аритметичките операции (дефинирани во $\mathbb{R}$) можеме да ги формираме следниве низи:

(i) (a_n+b_n); (ii) (a_n-b_n); (iii) (a_nb_n);

(iv) $(1/b_n)$, $b_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$; (v) a_n/b_n, $b_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Овде ќе побараме одговор на следново прашање: ако (a_n) и (b_n)

се конвергентни низи, дали ќе бидат конвергентни и низите (i) – (v) и во потврден случај како можат да се определат нивните граници? Одговорот на ова прашање го дава следнава

***Теорема* 1 (за операции со низи)**

Нека (a_n) и (b_n) *се конвергентни низи и* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогаш низите* (i)–(iii) *ќе бидат, исто така, конвергентни, а ако* $b\neq 0$ *конвергентни ќе бидат и низите* (iv) *и* (v). *Притоа:*

$$1°.\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$2°.\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$3°.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},$$

$$4°.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Доказ. Во доказите ќе го користиме $(\varepsilon - n_0)$ – својството, т.е. Т.2 од 4.2.

1°. Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран и да ставиме $\varepsilon_1=\varepsilon/2$. Поради тоа што (a_n) е конвергентна и има граница a, постои $n_1\in\mathbb{N}$ таков што $n>n_1 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon_1$. Слично за (b_n): постои $n_2\in\mathbb{N}$ таков што $n>n_2 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon_1$. Ако ставиме $n_0=max\{n_1, n_2\}$ тогаш, за $n>n_0$ имаме дека $n>n_1$ и $n>n_2$, па и $|a_n-a|<\varepsilon_1$ и $|b_n-b|<\varepsilon_1$. Оттука, за $n>n_0$ добиваме:

$$|(a_n \pm b_n)-(a \pm b)| = |(a_n-a)\pm(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \varepsilon_1+\varepsilon_1 = \varepsilon,$$

што ги докажува равенствата 1°.

2°. Од конвергентноста на низата (a_n) следува дека таа е и ограничена (Т.3 од 4.3), т.е. постојат $m, M\in\mathbb{R}$ такви што за секој $n\in\mathbb{N}$, $m\leq a_n \leq M$; ако ставиме $A=max\{|m|, |M|\}$, имаме дека за секој $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leq A$.

За кој било $\varepsilon>0$ ставајќи

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{A+|b|},$$

добиваме дека: постојат n_1, $n_2\in\mathbb{N}$ такви што, $n>n_1 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon_1$ и $n>n_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow |b_n-b|<\varepsilon_1$. Ставајќи $n_0=max\{n_1, n_2\}$, за $n>n_0$ (тогаш $n>n_1$ и $n>n_2$) добиваме:

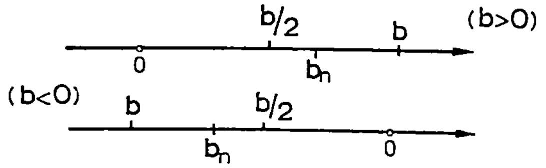
$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| =$$

$$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \le |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| <$$

$$< A\varepsilon_1 + |b|\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Со тоа е докажано $2°$ при претпоставка дека барем еден од A, b е различен од 0. Својството важи и за $A=b=0$ зашто во тој случај е јасно дека $a_nb_n=0$, па $a_nb_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

$3°$. Покрај $b_n \neq 0$, овде претпоставуваме дека и $b \neq 0$. Од $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ следува дека постои $n_1 \in \mathbb{N}$ таков што за $n > n_1$, $|b_n| > |b|/2$ (црт.1). За



Црт.1

произволен $\varepsilon > 0$ ќе ставиме $\varepsilon_1 = (b^2\varepsilon)/2$. Тогаш постои $n_2 \in \mathbb{N}$ таков што, кога $n > n_2$ тогаш $|b_n - b| < \varepsilon_1$. Да ставиме $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. За $n > n_0$ имаме $|b_n| > |b|/2$ и $|b_n - b| < \varepsilon_1$, а тогаш:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{|b_n - b|}{|b|^2/2} = \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} < \frac{2\varepsilon_1}{|b|^2} = \varepsilon,$$

што ја докажува точноста на $3°$.

$4°$. Како последица од $2°$ и $3°$ добиваме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{a}{b}.\Diamond$$

Пример 1. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Да покажеме дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k,\ \ k \in \mathbb{N} \text{ и, за } a_n \neq 0,\ a \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k,\ \ k \in \mathbb{Z}^-.$$

Првиот дел од задачата (за $k \in \mathbb{N}$) се докажува со помош на математичката индукција земајќи го предвид својството $2°$ од претходната теорема, додека вториот дел следува (врз основа на $3°$ од теоремата 1) од првиот дел на примерот.

Да забележиме дека својството во примеров е тривијално точно и за $k=0$.

Пример 2. Да ги најдеме границите на следниве низи:

а) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}$, б) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{kn}$, каде што $k\in\mathbb{Z}$.

Користејќи го примерот 1 и границата $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ имаме:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k=e^k$;

б) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1}=e^{-1}.$$

Од ова следува:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{kn}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^k=e^{-k}.$$

Да забележиме дека во вежбите 3 и 4 од претходниот дел ги пресметавме границите на а) за $k=2$ и $k=3$, без примена на резултатот од пример 1.

Пример 3. Во **4.3** покажавме дека низата (a_n) определена со

$$a_1=\sqrt{6},\quad a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$$

е конвергентна, но не ја пресметавме границата. За да го направиме и тоа, второто равенство ќе го напишеме во облик $a_{n+1}^2=6+a_n$, од што следува дека $a^2=6+a$, каде $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$. Равенката $a^2=a+6$ има две решенија $a_1=-2$ и $a_2=3$. Првото решение отпаѓа, бидејќи имаме: $\sqrt{6}=a_1<a$. Според тоа: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

ВЕЖБИ

Во задачите 1–4 да се покаже дека дадените низи се конвергентни и да се определат нивните граници:

1. $\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+n^2)$.   **2.** $\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

3. $\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.   **4.** $\frac{n+1}{n^2}$.

5. Да се најде границата на низата од вежбата а) 10 во **4.1**; б) 10 во **4.3**.

Во задачите 6–9 се претпоставува дека низата a_n е конвергентна, со граница a. Притоа, во зад.6 се претпоставува дека, за секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, а $a_n > 0$ и $a > 0$ во 8 и 10. Да се докажат наведените конвергенции.

6. а) $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.   б)* $\sqrt[2k]{a_n} \to \sqrt[2k]{a}$, $(k \in \mathbb{N})$.

7. а) $\sqrt[3]{a_n} \to \sqrt[3]{a}$.   б)* $\sqrt[2k+1]{a_n} \to \sqrt[2k+1]{a}$, $(k \in \mathbb{N})$.

8. $a_n^r \to a^r$, $r \in \mathbb{Q}$.   **9.** $e^{a_n} \to e^a$.   **10.** $\log a_n \to \log a$.

11. Да се даде пример на две низи (a_n), (b_n), такви што (a_n+b_n) е конвергентна, а (a_n) и (b_n) дивергентни. Дали може да бидат конвергентни (a_n+b_n) и (b_n), а (a_n) да биде дивергентна?

12. Да се изврши слична дискусија како и во претходната вежба, со тоа што операцијата собирање на низи ќе се замени со множење.

13. Да се покаже дека множеството $con(\mathbb{R})$ конвергентни низи со реални членови е прстен во однос на операциите собирање и множење на низи, но не е поле.

4.6. Низи што неограничено растат по апсолутна вредност

Многу често во математиката го среќаваме изразот ***бескрајно голема величина***. Со него на сликовит начин го искажуваме фактот дека во даден процес една променлива величина неограничено расте, т.е. станува поголема од кој било однапред даден број. Во случај на низи овој поим прво ќе го илустрираме на еден пример, а потоа и формално ќе го дефинираме.

Пример 1. Да ја разгледаме низата со општ член $a_n=5n$.

а) Ако $H=1000$, тогаш за $n>n_0=200$ добиваме дека $a_n=5n>1000$;

б) Ако земеме $H=10^{10}$, тогаш за $n>n_0=2\cdot10^9$ имаме $a_n>H$.

Да ја изнесеме формалната дефиниција за низите што неограничено растат; за еден од случаите што подолу ќе ги разгледаме, изнесениов пример ја сугерира дефиницијата.

За низата (a_n) велиме ***дека се стреми кон*** $+\infty$ ако за секој реален број $H>0$ постои природен број n_0 таков што, кога $n>n_0$, тогаш $a_n>H$; симболично ова го запишуваме со $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Така, по дефиниција, имаме:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall H>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad (n>n_0 \Rightarrow a_n > H).$$

Дуално, за низата (a_n) велиме ***дека се стреми кон*** $-\infty$ и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ако за секој реален број $T<0$ постои природен број n_0 таков што од $n>n_0$ да следува $a_n< T$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall T<0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad (n>n_0 \Rightarrow a_n < T).$$

Пример 2. Нека е дадена низата

$$-1, -4, -9, \ldots, -n^2, \ldots, \text{ т.е. } a_n = -n^2.$$

Ако земеме $T=-2000$, тогаш за $n_0 = 45$ имаме:

$$n > n_0 = 45 \Rightarrow a_n = -n^2 < -2000 = T.$$

На крајот, за низата a_n велиме дека ***неограничено расте по апсолутна вредност***, пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ако за секој реален број $H>0$ постои природен n_0 број таков што од $n>n_0$ да следува $|a_n|>H$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall H>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad (n>n_0 \Rightarrow |a_n| > H).$$

Секоја од низите во примерите 1 и 2 неограничено расте по апсолутна вредност. Еве уште еден пример.

Пример 3. Ако $a_n=(-2)^n$, тогаш за кој било реален број $H>0$, постои природен број $n_0>\frac{\log H}{\log 2}$ (според Архимедовата аксиома), а тогаш, за $n>n_0$, имаме $n>\frac{\log H}{\log 2}$; оттука следува, по ред: $n\log 2>\log H$, $\log 2^n>\log H$, $2^n>H$; така, за $n>n_0$ добиваме $|(-2)^n|=2^n>H$.

Во претходниот раздел, за да биде точно својството 3° од теоремата 1 претпоставивме дека $b\neq 0$, (покрај $b_n\neq 0$, за секој n). Сега сме во состојба да дадеме одговор на прашањето за природата на низата од 3° во случај кога $b=0$.

***Теорема* 1.** *Нека (a_n) е низа шаква шшо за секој $n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$.*

1°. *Ако* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, *шогаш* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$;

2°. *Ако* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, *шогаш* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$.

Доказ. 1°. Нека H е произволен позитивен реален број. За $\varepsilon=\frac{1}{H}>0$, поради $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, според $(\varepsilon-n_0)$– својството, постои $n_0\in\mathbb{N}$ таков што $|a_n|<\varepsilon$ за $n>n_0$; тогаш за $n>n_0$ имаме $\left|\frac{1}{a_n}\right|>\frac{1}{\varepsilon}=H$, што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$.

2°. Нека $\varepsilon>0$. Ако ставиме $H=\frac{1}{\varepsilon}>0$, од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ следува дека постои $n_0\in\mathbb{N}$ таков што $n>n_0\Rightarrow|a_n|>H$, а тогаш од $n>n_0$ следува $\left|\frac{1}{a_n}\right|<\frac{1}{H}=\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$. ◊

Аналогно на поимот за бескрајно голема величина, може да се воведе и поим за бескрајно мала величина: за низата (a_n) велиме дека ***станува бескрајно мала по апсолутна вредност***, или дека е ***нула–низа*** ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Пример 4. Имајќи ја предвид теоремата 1 и примерите 1,2 и 3 имаме дека низите со општи членови $b_n=\frac{1}{5n}$, $c_n=\frac{1}{n^2}$ и $d_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(-1)^n}{2^n}$ се нула–низи.

ВЕЖБИ

1. По една дивергентна низа е наведена во вежбите

а) 6, 7 и 8 од **4.2**; б) 1, 2, 3 и 4 од **4.3**.

Да се провери дали $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, за некоја од тие низи.

2. Да се покаже дека, ако $a_k \neq 0$, тогаш

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0) = a_k \cdot (+\infty)$, каде што:

$a_k \cdot (+\infty) = +\infty$ за $a_k > 0$, $a_k \cdot (-\infty) = -\infty$ за $a_k < 0$.

3. Нека $f(x) = (a_r x^r + \ldots + a_1 x + a_0) / (b_s x^s + \ldots + b_1 x + b_0)$, каде што $b_s > 0$, $a_r \neq 0$). Да се покаже дека:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \begin{cases} a_r / b_r & \text{за } s = r \\ a_r \cdot (+\infty) & \text{за } r > s \\ 0 & \text{за } r < s. \end{cases}$$

4. Да се покаже дека ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, тогаш:

$\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} e^{b_n} = 0$.

Ако, освен тоа, $a_n > 0$, за секој $n \in \mathbf{N}$, тогаш:

$\lim\limits_{n\to\infty} \log a_n = +\infty$

4.7. Некои специјални низи

Задачата за утврдување на природата на една низа (т.е. дали низата е конвергентна или е дивергентна), често е доста тешка. Овде ќе разгледаме неколку примери кои можат корисно да послужат, во некои случаи, при решавањето на горната задача.

I. $a_n = q^n$, $q \in \mathbf{R}$.

Ќе ги разгледаме следниве случаи: $|q| > 1$, $|q| < 1$, $|q| = 1$.

1°. $|q| > 1$

а) Акоземеме, прво, $q > 1$, и ако ставиме $q = 1 + h$, $h > 0$, тогаш според Бернулиевото неравенство добиваме дека за $n > 1$, $q^n = (1+h)^n > 1 + nh$.

Нека H е произволен позитивен реален број; постои природен број n_0 таков што $n_0 > \frac{H-1}{h}$ (според аксиомата на Архимед). Сега, за $n>n_0$ добиваме дека $a_n > 1+nh > 1+n_0h>1+\frac{H-1}{h}h=H$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

б) Ако $q<-1$, тогаш $|a_n|=|q|^n > 1+nh$, $h>0$, така што, за кој било $H>0$, бирајќи го n_0 како и во а) за $n>n_0$ добиваме дека $|a_n|>H$ што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2°. Нека $|q|<1$. Ако ставиме $r=1/q$, добиваме $|r|>1$, па според 1°, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$. Бидејќи $a_n=q^n=1/r^n$, од $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$, според 2° од Т.1 во **4.6**, добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3°. За $|q|=1$ ги имаме следниве два случаја:

а) $q=1 \Rightarrow a_n=1$, па $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$;

б) $q=-1 \Rightarrow a_n=(-1)^n$ така што низата има две точки на натрупување, 1 и -1, па според тоа е дивергентна.

II. Нека

$$a_n=1+q+q_2+\ldots+q^{n-1},$$

т.е. a_n е збир на првите n членови од една геометриска прогресија со прв член 1 и количник q.

1°. За $|q|=1$ ги имаме следниве два случаја:

а) $q=1$, $a_n=n$, па $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

б) $q=-1$ ја дава низата 0, 1, 0, 1,... која е дивергентна.

2°. Нека $|q|<1$. Општиот член на низата можеме да го претставиме со:

$$a_n = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{q^n}{q-1} + \frac{1}{1-q}.$$

Користејќи ја Т.1 од 4.5 и претходниот пример (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$), добиваме:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0}{q-1} + \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

па низата е конвергентна.

3°. За $|q|>1$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Навистина, за кој било реален број $H>0$, да ставиме $H_1=1+|q-1|H>0$. Според примерот I имаме $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, од што следува дека постои $n_0\in\mathbb{N}$ таков што $|q^n|>H_1$ за $n>n_0$. Тогаш за $n>n_0$ добиваме

$$|a_n| = \left|\frac{q^n}{q-1} - \frac{1}{q-1}\right| \geq \left|\frac{q^n}{q-1}\right| - \frac{1}{|q-1|} > \frac{H_1-1}{|q-1|} = H,$$

што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

III. Ќе докажеме дека

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a\in\mathbb{R}.$$

1°. Прво ќе земеме дека $a>0$. Постои $k\in\mathbb{N}^\circ$, таков што $k\leq a<k+1$. За $n>k$ можеме да ставиме

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!}\cdot\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!}\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k}$$

Ако ставиме $q=\dfrac{a}{k+1}$, тогаш $0<q<1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (според примерот I). Натаму,

$$0<\frac{a^n}{n!}<\frac{a^k}{k!}q^{n-k} = b_n,$$

од каде што, поради

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^k}{k!}\cdot\left(\frac{k+1}{a}\right)^k\cdot\left(\frac{a}{k+1}\right)^n = \frac{a^k}{k!}\frac{1}{q^k}\lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

според Т.3 од **4.3**, добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$.

2°. Нека, сега, $a<0$. Работејќи како и во 1°, сега со $|a|$ наместо со a, ќе добиеме дека

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| < b_n, \text{ каде што } b_n = \frac{|a|^k}{k!}\cdot q^{n-k}, \quad q = \left|\frac{a}{k+1}\right| < 1.$$

Притоа, пак имаме $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, а горното неравенство е еквивалентно со следново двојно неравенство:

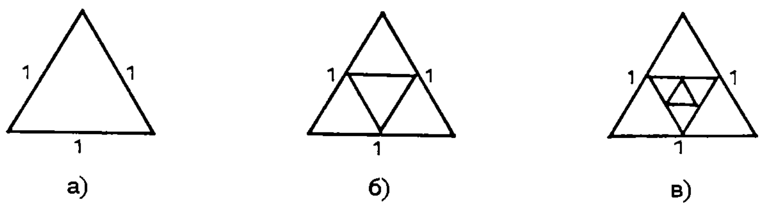
$$-b_n < \frac{a^n}{n!} < b_n.$$

Од последново (двојно) неравенство, според Т.3 од **4.3**, добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, со што е комплетиран доказот, зашто за $a=0$ тврдењето е јасно.

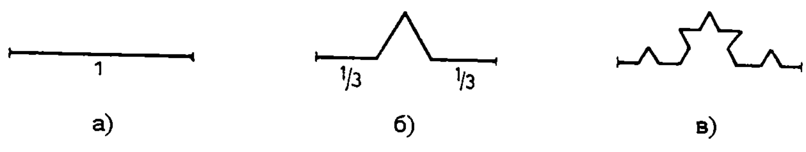
Забелешката (што ја направивме на почетокот од овој раздел) дека примерите што овде ги разгледавме можат да помогнат во решавањето на некои други задачи, ќе ја илустрираме во следниов

Пример 1. а) Низата (L_n) е образувана на следниов начин: L_1 е периметарот на рамностраниот триаголник со страна 1 (црт.1 а)); L_2 се добива како збир од периметрите на рамностраниот триаголник со страна 1 и рамностраниот триаголник чии темиња се средини на страните на првиот рамностран триаголник (црт.1 б)); L_3 е збир на периметрите на три рамнострани триаголници дадени на црт.1 в), итн. Да се најде $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$.

б) Членовите на низата (S_n) се должините на искршените линии дадени на цртежите 2 (а, б, в). Да се најде $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.



Црт.1



Црт.2

Решение. а) Имаме:

$$L_1 = 3,\ L_2 = 3+3\cdot\frac{1}{2},\ L_3 = 3+3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2},\ldots,\ L_n = 3+3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+3\cdot\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поради $L_n = 3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 3a_n$, каде што (a_n) е низата од примерот II со q=1/2, од тој пример добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 6 .$$

б) За членовите на (S_n) добиваме, по ред,

$$S_1 = 1, \quad S_2 = \frac{4}{3}, \quad S_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2, \ldots, S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Според примерот I, поради $\frac{4}{3} > 1$, добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

ВЕЖБИ

Да се испитаат низите во 1–3.

1. $\sqrt[n]{2}$. **2.** $\sqrt[n]{a}$, $a\in\mathbb{R}^+$ е даден. **3.** $a_n = \frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\ldots+\frac{1}{3^n+1}$.

4.8. Теоремата на Болцано–Вајерштрас

Во разделот **4.3** видовме дека од ограниченоста на една низа не следува дека таа е конвергентна (т.е. дека има граница). Ситуацијата е поинаква ако прашањето се постави за постоење на точка на натрупување, наместо за граница. Тоа се гледа од следново својство:

***Теорема* 1 (на Болцано [1]–Вајерштрас [2]).**

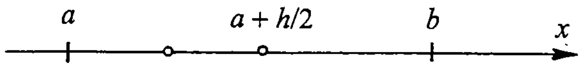
Секоја бесконечна ограничена низа има барем една точка на натрупување.

---

[1] Бернард Болцано (*Bernhard Bolzano*, 1781–1848), чешки филозоф и математичар.

[2] Карл Теодор Вилхем Вајерштрас (*Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*, 1815–1897), германски математичар; настојувал целата математика да ја сведе на броеви и барал потполна строгост.

Доказ. Нека низата (c_n) е ограничена: постојат реални броеви a, b $(a<b)$ такви што за секој $n\in\mathbb{N}$, $a\le c_n\le b$ (црт.1).



Црт.1

Да ставиме $b-a=h$ и да го поделиме сегментот $[a, b]$ на два потсегмента: $[a, a+h/2]$, $[a+h/2, b]$ (црт.1). Барем во еден од овие два потсегмента има бесконечно многу членови на низата (c_n). Ако, на пример, во првиот потсегмент има бесконечно многу членови од (c_n) ќе ставиме $a_1=a$, $b_1=a+h/2$. Во спротивен случај, ставаме $a_1=a+h/2$, $b=b_1$.

Така го добиваме сегментот $[a_1, b_1]$ каде што $h_1=b_1-a_1=h/2$. Сега $[a_1, b_1]$ го делиме на два потсегмента, $[a_1, a_1+h_1/2]$, $[a_1+h_1/2, b_1]$; тогаш барем во едниот од нив има бесконечно многу членови од (c_n). Оној од овие два потсегмента во кој се содржат бесконечно многу членови од (c_n) ќе го означиме со $[a_2, b_2]$ и горната постапка ја повторуваме во однос на $[a_2, b_2]$. Ако се случи и во двата потсегмента $[a_1, a_1+h_1/2]$ и $[a_1+h_1/2, b_1]$ да има бесконечно многу членови од (c_n), тогаш произволно избираме еден од нив и го означуваме со $[a_2, b_2]$.

Со изнесената постапка можеме да формираме две низи (a_n) и (b_n) такви што:

а) $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le\ldots\le b_n\le\ldots\le b_2\le b_1$;

б) во секој од сегментите $[a_n, b_n]$ има бесконечно многу членови од низата (c_n).

Од ограниченоста на (c_n) следува дека и низите (a_n) и (b_n) се ограничени, а од а) гледаме дека тие се и монотони; според Т.2 од **4.3** следува дека низите (a_n) и (b_n) се конвергентни. Натаму, бидејќи $b_n-a_n=h/2^n$, имаме:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Ако ја означиме со c заедничката граница на низите (a_n) и (b_n) имаме: за секој позитивен реален број ε постојат $n_1, n_2\in\mathbb{N}$ такви што:

$$n>n_1\Rightarrow a_n\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon); \quad n>n_2\Rightarrow b_n\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon).$$

Ако $n_0=max\{n_1, n_2\}$, тогаш за $n>n_0$ имаме дека $a_n, b_n\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, т.е. $[a_n, b_n]\subset(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, што според б) значи дека во $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ има бесконечно многу членови од низата (c_n). ◊

На теоремата на Болцано–Вајерштрас може да ѝ се даде и друг вид. Ние тоа ќе го направиме подолу, во Т.2, која, всушност, е друга варијанта на Т.1. Најнапред ќе воведеме еден нов поим.

За низата (c_{n_k}) велиме дека е ***подниза*** од низата (c_n) ако секој член од (c_{n_k}) е член на (c_n), а (n_k) е бесконечна низа од природни броеви што монотоно расте. Јасно е дека, *ако (c_n) е ковергентна низа, тогаш и секоја нејзина подниза (c_{n_k}) ќе биде конвергентна, при што*

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_k} = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Една низа може да не биде конвергентна, но сепак да содржи конвергентна подниза што се гледа од следнава

***Теорема* 2.** *Секоја ограничена бесконечна низа има конвергентна подниза.*

Доказ. Ако (c_n) е ограничена низа, тогаш според теоремата на Болцано–Вајерштрас таа има точка на натрупување c. Тогаш за секој $k\in\mathbb{N}$ постои член c_{n_k} од (c_n) таков што $|c_{n_k}-c|<1/k$. На овој начин формираме низа $c_{n_1}, c_{n_2}, \ldots, c_{n_k}, \ldots$ (формираме, значи, подниза (c_{n_k}) од(c_n)), што го има својството: за кој било позитивен реален број ε можеме да најдеме природен број $k_0 > 1/\varepsilon$ таков што, ако $k > k_0$, тогаш $|c_{n_k}-c|<\varepsilon$, т.е. c е граница на (c_{n_k}). ◊

Во горниот доказ ја користевме Т.1. Обратно, дека од Т.2 следува теоремата на Болцано–Вајерштрас е очигледно: границата на конвергентната подниза од (c_n) е точка на натрупување на низата (c_n).

Пример 1. Низата со општ член $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ е ограничена ($|a_n|<1$), но не е конвергентна (има две точки на натрупување: -1 и 1). Секоја од поднизите: $a_{2k-1}=(-2k-1)/2k$ и $a_{2k}=2k/(2k+1)$ е конвергентна, при што $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$, $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$.

Ќе изнесеме уште едно својство во чиј доказ ќе ја користеме теоремата на Болцано–Вајерштрас:

***Теорема* 3.** *Една низа е конвергентна ако и само ако е ограничена и има само една точка на натрупување.*

Доказ. Ако (a_n) е конвергентна низа, таа според Т.1 од **4.3** е ограничена, а според Т.1 од **4.2**, нејзината граница е нејзина единствена точка на натрупување.

Обратно, нека (a_n) е ограничена низа и нека a е нејзина единствена точка на натрпување. Тогаш за секој позитивен реален број ε, во интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ има бесконечно многу членови на низата (a_n). Доказот ќе го завршиме ако покажеме дека надвор од горниот интервал може да има само конечен број членови на (a_n)– тоа ќе значи дека a е граница на низата (a_n).

Да претпоставиме дека надвор од $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ има бресконечно многу членови на (a_n); тие тогаш образуваат една нова бесконечна низа (a'_n) која е ограничена, поради ограниченоста на (a_n). Според теоремата на Болцано–Вајерштрас, (a'_n) има точка на натрупување a' различна од a зашто сите членови на (a'_n) се надвор од $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Точката a' ќе биде точка на натрупување и на (a_n), спротивно на претпоставката дека a е единствена точка на натрупување на (a_n). ◊

Пример 2. а) Низата $a_n=(-1)^n$ е ограничена, но не е конвергентна (таа има две точки на натрупување: -1, и 1).

б) Низата $a_n=2^{(-1)^n \cdot n}$ има само една точка на натрупување – 0, но и оваа низа не е конвергентна (низата не е ограничена).

ВЕЖБИ

1.* Да се покаже дека ако (a_n) е ограничена низа при што $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n\in\mathbb{Z}$, тогаш низата има конечно многу точки на натрупување и притоа сите се членови на низата.

2.* Дали важи истиот заклучок од претходната вежба во случај кога сите членови на низата (a_n) се рационални?

3.* Да се даде пример на низа со рационални членови што има точно две точки на натрупување, при што и двете се ирационални броеви.

4.* За низата точки $(x_n, y_n)\in\mathbb{R}^2$ велиме дека е: а) ***ограничена***, б) ***конвергентна***, ако и двете низи (x_n), (y_n) го имаат соодветното својство. Да се докаже Т.1 и нејзините последици за низи во $\mathbb{R}^2$.

4.9. Основен Кошиев критериум [1)]

Делов за низи ќе го завршиме со основниот Кошиев критериум што содржи еден нужен и доволен услов за конвергенција на една

[1)] Огистен Луи Коши (*Augustin Louis Cauchy*, 1789–1857), еден од најплодните француски математичари, со широк математички интерес; големо внимание му посветил на логичкото засновање на математичката анализа.

низа во кој, за разлика од (ε–n_0)– својството (Т.2 од **4.2**), не ја содржи експлицитно границата на низата.

За низата (a_n) велиме дека е ***кошиева*** или ***фундаментална*** ако го задоволува следниов услов:

$$(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+)(\exists n_0\in\mathbb{N})\ (m, n > n_0 \Rightarrow |a_m-a_n| < \varepsilon). \tag{1}$$

Теорема 1 (***Основен Кошиев критериум*** [1]).

Една низа (a_n) е конвергентна ако и само ако таа е кошиева.

Доказ. Да претпоставиме дека (a_n) е конвергентна и дека a е нејзината граница. За кој било реален број $\varepsilon>0$ постои $n_0\in\mathbb{N}$ таков што $n>n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon/2$. Тогаш за m, $n>n_0$ имаме:

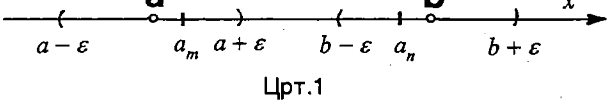
$$|a_m-a_n| = |(a_m-a)-(a_n-a)| \le |a_m-a|+|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

така што (a_n) е кошиева низа.

Обратно, нека (a_n) е кошиева низа. Дека (a_n) е конвергентна ќе докажеме применувајќи ја Т.2 од **4.8**.

а) На ист начин како при доказот на Т.1 од **4.3** се покажува дека низата (a_n) е ограничена.

б) *Низата (a_n) има само една точка на натрупување*. Според Т.1 од **4.8** и штотуку докажаната ограниченост се добива дека (a_n) има точка на натрупување a. Да претпоставиме дека a не е единствена точка на натрупување на (a_n); нека и $b\neq a$ е точка на натрупување на (a_n) и нека $\varepsilon=|a-b|/3$ (црт.1). Постојат бесконечно многу чле-



Црт.1

нови a_m од (a_n) такви што $a_m\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и бесконечно многу членови a_n такви што $a_n\in(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. За секој $a_m\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и секој $a_n\in(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ имаме

$$|a_m-a_n| > |(a+\varepsilon)-(b-\varepsilon)| = |a-b+2\varepsilon| \ge |a-b|-2\varepsilon = 3\varepsilon-2\varepsilon = \varepsilon.$$

Така, за кој било природен број n_0, при погоре избраниот $\varepsilon>0$ постојат m, $n>n_0$ такви што $|a_m-a_n|>\varepsilon$. Последново противречи на својството (1). ◊

Забелешка. Сите поими во врска со бескрајни низи од реални броеви се осмислени и за произволно подредено поле. Еден дел од резултатите се точни и во општ случај, а другите се карактеристични за полето на реалните броеви, т.е. за комплетни подредени полиња. Што се однесува до Основниот кошиев критериум за конвергенција (ОКК), да забележиме дека, ако на аксиомите за подредено поле им се додаде тој критериум, се добива систем аксиоми на комплетно подредено поле, т.е. на полето од реални броеви. Уште повеќе, кошиевите низи од рационални броеви можат да се искористат и за конструкција на реалните броеви.

Имено, со $C(\mathbb{Q})$ да го означиме множеството кошиеви низи со рационални членови, и да дефинираме релација $\approx$ во $C(\mathbb{Q})$ со:

$$(a_n) \approx (b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0. \qquad (2)$$

Тогаш, $\approx$ е релација за еквивалентност во $C(\mathbb{Q})$ (в. 6) во **1.1**) и притоа се точни следниве тврдења:

1°. $(a_n), (b_n)\in C(\mathbb{Q}) \Rightarrow (a_n+b_n), (a_nb_n)\in C(\mathbb{Q})$;

2°. $(a_n)\approx(c_n),\ (b_n)\approx(d_n) \Rightarrow (a_n+b_n)\approx(c_n+d_n),\ (a_nb_n)\approx(c_nd_n)$.

Сега, под ***реален број*** може да се смета секоја кошиева низа $(a_n)\in C(\mathbb{Q})$, со тоа што ако $(a_n)\approx(b_n)$, тогаш (a_n) и (b_n) определуваат ист реален број. Со други зборови, $\mathbb{R}$ се дефинира со: $\mathbb{R}=C(\mathbb{Q})/\approx$. (За ознаката M/α, в. вежба 16 во **1.1**).

Собирање и множење на реални броеви се дефинира како обично собирање и множење на низи. Потоа, реалниот број определен со низата (a_n) го сметаме за позитивен акко постои $n_0\in\mathbb{N}$ и $h\in\mathbb{Q}^+$ такви што:

$$n \ge n_0 \Rightarrow a_n \ge h.$$

Значи, реалниот број определен со (a_n) е поголем од бројот определен со (b_n) акко постои $n_0\in\mathbb{N}$ и $h\in\mathbb{Q}^+$, такви што:

$$n \ge n_0 \Rightarrow a_n - b_n \ge h.$$

Така добиената структура $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ е ***комплетно подредено поле***. Ние ќе се задоволиме само со направените забелешки и неколку вежби во врска со оваа тема.

ВЕЖБИ

Во 1–3 да се определи $n_0\in\mathbb{N}$: $m>n_0,\ k>0 \Rightarrow |a_{m+k}-a_m| < 1/10$.

1. $1/n$. **2.** $(n+1)/n$. **3.** $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

4. Во кој случај една низа од цели броеви е кошиева?

5. Дали важи ОКК кај: а) целите броеви; б) рационалните броеви?

Помош. За а) види вежба 4, а за б) вежба 8.

Во задачите 6–15 се бара да се докажат соодветните својства. Притоа, $O(\mathbb{Q})$ е множество што се состои од сите конвергентни низи со рационални членови и со граница 0.

6. Ако (a_n) е конвергентна низа рационални броеви, тогаш $(a_n)\in C(\mathbb{Q})$.

7. Ако $(a_n)\in C(\mathbb{Q})$, тогаш (a_n) е ограничена.

8. Постои $(a_n)\in C(\mathbb{Q})$ што не е конвергентна во $\mathbb{Q}$.

9.* Ако $(a_n)\in C(\mathbb{Q})\setminus O(\mathbb{Q})$, тогаш е исполнет точно еден од условите:

i) $(\exists h\in\mathbb{Q},\, n_0\in\mathbb{N})\ (n\geq n_0 \Rightarrow a_n\geq h)$;

ii) $(\exists h\in\mathbb{Q},\, n_0\in\mathbb{N})\ (n\geq n_0 \Rightarrow a_n\leq -h)$.

10.* $C(\mathbb{Q})$ е прстен во однос на операциите собирање и множење на низи, но не е интегрален домен.

11.* Релацијата $\approx$, дефинирана со (2) е конгруенција во $C(\mathbb{Q})$, т.е. е: (а) еквивалентност во $C(\mathbb{Q})$ и (б) „согласна“ со операциите во $C(\mathbb{Q})$ (т.е. важи 2°); притоа $C(\mathbb{Q})/\approx$ е поле.

12.* Нека со $C^+(\mathbb{Q})$ (и $C^-(\mathbb{Q})$) го означиме подмножеството од $C(\mathbb{Q})$ што се состои од сите $(a_n)\in C(\mathbb{Q})$ што го задоволуваат условот *i)* и *ii)* од вежбата 9. Точно е равенството $C(\mathbb{Q})=C^-(\mathbb{Q})\cup O(\mathbb{Q})\cup C^+(\mathbb{Q})$, при што унијата е дисјунктна.

13.* *i)* $(a_n)\in O(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow (-a_n)\in O(\mathbb{Q})$; $\quad (a_n)\in C^-(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow (-a_n)\in C^+(\mathbb{Q})$.

ii) $(a_n),\,(b_n)\in C^+(\mathbb{Q}) \Rightarrow (a_n+b_n),\,(a_n\cdot b_n)\in C^+(\mathbb{Q})$.

iii) $(a_n),\,(b_n)\in C^-(\mathbb{Q}) \Rightarrow (a_n+b_n)\in C^-(\mathbb{Q}),\,(a_n\cdot b_n)\in C^+(\mathbb{Q})$.

iv) $[(a_n)\in C^+(\mathbb{Q})$ и $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n\neq 0] \Rightarrow (1/a_n)\in C^+(\mathbb{Q})$.

14.* Ако $(a_n)\approx(b_n)$, тогаш:

i) $(a_n)\in O(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow (b_n)\in O(\mathbb{Q})$;

ii) $(a_n)\in C^+(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow (b_n)\in C^+(\mathbb{Q})$;

iii) $(a_n)\in C^-(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow (b_n)\in C^-(\mathbb{Q})$.

15.* $C(\mathbb{Q})/\approx$ е комплетно подредено поле.

I.5. ГРАНИЦИ И НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИИ

5.1. Граници на функции

Предмет на интересирање во овој раздел ќе бидат само точки на згуснување на доменот D од соодветна функција, па затоа ќе повториме (види **1.8**) дека: реалниот број a се вика ***точка на згуснување*** на D ако во секоја околина на a постои точка $b \in D$ различна од a. Притоа, a може да му припаѓа на D, но не мора (пример 1 во **1.8**). Натаму многукратно ќе го користиме и следново

***Тврдење* 1.** *Ако a е точка на згуснување на D, тогаш постои низа од реални броеви (x_n) со граница a, при што $x_n \in D$ и $x_n \neq a$, за секој $n \in \mathbb{N}$.*

Доказ. За секој природен број n, интервалот $(a-1/n,\ a+1/n)$ е околина на a, од што следува дека постои број од таа околина различен од a. Избирајќи по еден елемент $x_n \in (a-1/n,\ a+1/n)$ добиваме низа (x_n) со бараните својства. ◊

Изнесеното е подготовка за дефинирање на поимот граница на функција. Имено, велиме дека функцијата $f(x)$ ***се стреми*** кон бројот L кога x се стреми кон бројот a, т.е. L е ***граница*** или ***лимес на функцијата*** f во точката a, ако се исполнети следниве услови:

i) a е точка на згуснување на доменот D од f,

ii) за секоја низа (x_n) што ги задоволува условите од Т.1, т.е.

$$x_n \in D,\ x_n \in a, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} \text{ и } \lim_{n\to\infty} x_n = a, \tag{1}$$

соодветната низа од вредности на функцијата f, т.е.

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots, \tag{2}$$

има граница L.

Скратен запис на дефиницијата за граница е:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad (\text{или: } f(x) \to L \text{ кога } x \to a). \tag{3}$$

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. Да провериме дали постои границата (3), каде што $a=2$ и $f(x)=x/(x+1)$.

Бидејќи доменот на f е $D=(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty)$, следува дека 2 е точка на згуснување за D. Според дефиницијата за граница на функција, избираме произволна низа (x_n) таква што $x_n \in D$, $x_n \neq 2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Општиот член на соодветната низа од вредност на f е $f(x_n) = x_n/(x_n+1)$. Според Т.1 од **4.5** имаме:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) / (\lim_{n\to\infty} x_n + 1) = 2/(2+1) = 2/3.$$

Така добиваме дека, за секоја низа (x_n) со својствата (1) (при $a=2$), $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2/3$, па значи постои границата на f при $a=2$ и $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2/3$.

Пример 2. Да ја разгледаме истата задача за функцијата

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

во точката $a=1$. И овде 1 е точка на згуснување на доменот D од f, но, $1 \notin D$.

Ако (x_n) е произволна низа таква што $x_n \neq \pm 1$ $(x_n \in D)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, тогаш:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{(x_n - 1)(x_n + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{2},$$

што значи дека $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

(Да забележиме дека кратењето со $x_n - 1$ беше можно поради $x_n \neq 1$.)

Пример 3. Да покажеме дека функцијата

$$f(x) = \cos(1/x)$$

нема граница во точката 0, којашто е точка на згуснување на доменот $D_f = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

Навистина, ако јаземеме низата (x_n), $x_n = \dfrac{1}{n\pi} \neq 0$ која конвергира кон 0, тогаш соодветната низа $f(x_n) = \cos(1/x_n)$ ќе биде низата: $-1, 1, -1, 1, \ldots$ којашто е дивергентна.

Забелешка 1. Дефиницијата за граница на функција може малку да се „олесни": наместо да се „бара" сите соодветни низи (2) на низите (x_n) со својствата (1) да имаат иста граница L, доволно е да се претпостави само дека тие се конвергентни, зашто лесно се докажува дека тогаш сите тие имаат иста граница.

Навистина, нека (x_n') и (x_n'') се две низи со својствата (1). По претпоставка, низите $(f(x_n'))$ и $(f(x_n''))$ се конвергентни; да ставиме

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = L_1, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = L_2.$$

Да ја формираме низата

$$x_1', x_1'', x_2', x_2'', \dots, x_n', x_n'', \dots$$

Последнава низа е исто така со својствата (1) и има граница a, па според претпоставката, соодветната низа

$$f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \dots, f(x_n'), f(x_n''), \dots$$

е конвергентна, при што L_1 и L_2 се нејзини точки на натрупување; последново е можно само ако $L_1=L_2$.

Со помош на својствата на конвергентните низи можат да се докажат и соодветни својства за граници на функции. Прво да забележиме дека директно од дефиницијата за граница на функција се добива:

а) $\lim\limits_{x\to a} k = k, \quad k = const.$; б) $\lim\limits_{x\to a} x = a.$

Ќе ја докажеме следнава

***Теорема* 2 (за граница од збир, производ и количник)**

Ако постојат границите $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *тогаш:*

$1°.\ \lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x), \quad k = const.;$

$2°.\ \lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x);$

$3°.\ \lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x);$

$4°.\ \lim\limits_{x\to a} [f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) / \lim\limits_{x\to a} g(x).$

Притоа во $2°$ и $3°$ треба да се додаде претпоставката дека a е точка на згуснување на пресекот од домените на f, g, а во $4°$ – дека $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, како и дека a е точка на згуснување за доменот на f/g.

Доказ. Како што спомнавме на почетокот, горните својства се докажуваат со помош на соодветните својства кај низите. Ова тврдење ќе го илустрираме со доказот на $3°$.

Нека L_1 и L_2 се границите на f и g (соодветно), и нека (x_n) е низа што конвергира кон a, при што $x_n \in D = D_f \cap D_g$, $x_n \neq a$. Тогаш: $f(x_n) \to L_1$ и $g(x_n) \to L_2$ кога $n\to\infty$, па според Т.1 од 4.5 добиваме

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)\cdot g(x_n)] = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot \lim_{n\to\infty} g(x) = L_1\cdot L_2. \ \Diamond$$

Да ја искористиме Т.1 за пресметување граница на полиномите и дробнорационалните функции.

Полиномна функција. Нека

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

и нека x_0 е произволен реален број (секој реален број е точка на згуснување за доменот $D=\mathbb{R}$ на полиномната функција $P(x)$). Имајќи ги предвид а), б) и Т.2, добиваме:

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0=P(x_0). \tag{4}$$

Дробнорационална функција. Нека

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

е рационална функција. Ако x_0 припаѓа на доменот на f, тогаш $Q(x_0)\neq 0$. Според (4) и 4° од Т.2 имаме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0). \tag{5}$$

За пресметување на граници на функции, често се применува следната последица од теоремата за сендвич–низа (Т.3 од **4.3**).

Теорема 3. *Нека a е точка на згуснување на домените од функциите f, g и h и нека $f(x)\le h(x)\le g(x)$ за секој x од пресекот на некоја околина на a и домените на f, g и h. Ако*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=L,$$

тогаш и $\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$. $\Diamond$

Забелешка 2. Со еден едноставн пример ќе покажеме дека условите наведени по формулацијата на равенствата 1°–4° (во Т.2) се битни.

Пример 4. Нека $D_f=[0,1]$, $D_g=[1,2]$ и $f(x)=x$ за секој $x\in D_f$, $g(x)=x$ за секој $x\in D_g$. Тогаш $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ се дефинирани само за $x=1$. За $a=1$, постојат десните страни на сите равенства 1°–4°, но не постои левата страна во ниедно од равенствата 2°–4° (зашто $a=1$ не е точка на згуснување на доменот од $f+g$, односно $f-g$, $f\cdot g$).

Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, тогаш за егзистенција на десната страна од 4° мора да се уважи и условот $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$. Инаку, левата страна може да постои и во случај кога $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. На пример, ако $f(x)=x^2$, $g(x)=x$ и $D_f = D_g = \mathbb{R}$, тогаш $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)/g(x)] = 0$.

ВЕЖБИ

За секоја од функциите 1–4 да се провери дали има граница во дадената точка a; во случај граница да постои, таа да се најде.

1. $f(x) = 3x^2 - x - 2/(x-1)$, $a = 0$.

2. $f(x) = (x^3-8)/(x^2-4)$, $a = 2$.

3. $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$, $a=0$.

4. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $a = 0$

Со помош (4), (5) и теоремата 2, да се најдат следните граници 5–8 (образложувајќи го секој чекор при решавањето).

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x+1-\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to 3}(x+2)(x^2-9)/(x-3)$.

7. $\lim\limits_{x\to 1} 5(x^2-2x+1)/(x^2-3x+2)$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x+2}\right)$.

9. Да се дадат детални докази за Т.2 и Т.3.

5.2. (ε–δ) – карактеризација на граница

Дефиницијата за граница на функција што ја изнесовме во 5.1 е позната како ***дефиниција на Хајне*** [1]. Поимот граница на функција често се воведува и на друг начин, познат како ***дефиниција на Коши***; таа се искажува со следново својство, коешто натаму ќе го викаме (ε–δ) – ***својство***:

(*) $(\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0)(\exists\delta\in\mathbb{R},\ \delta>0)[x\in D_f,\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon]$.

---

[1] Едуард Хајне (*Eduard Heine;* 1821–1881) – германски математичар.

Дека и двете споменати дефиниции се еквивалентни, ќе докажеме во следнава

***Теорема* 1 ((ε–δ) – карактеристика на граница на функција)**

Ако a е точка на згуснување на доменот D_f од f, тогаш (ε–δ) – својството е еквивалентно со равенството $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

Доказ**. (*Неопходност*). Прво ќе докажеме дека, ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ тогаш е точно (ε–δ) – својството. Да претпоставиме дека $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, но дека не е точно ($\varepsilon$–$\delta$) – својството. Тоа значи дека постои позитивен реален број ε таков што, за кој било реален број $\delta>0$ постои $x\neq a$ во $(a-\delta, a+\delta)$ таков што $|f(x)-L|\geq\varepsilon$. Ако земеме $\delta_n=1/n$, $n=1, 2, 3,\ldots$, тогаш според горната претпоставка постојат $x_n\in(a-1/n, a+1/n)\setminus\{a\}$, такви што $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$. На тој начин добиваме низа (x_n), $x_n\neq a$, која поради $|x_n-a|<1/n$ е конвергентна и има граница a, но, поради $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$ $n=1, 2, 3,\ldots$, добиваме дека содветната низа $(f(x_n))$ нема граница L, што противречи на претпоставката дека $f(x)\to L$ кога $x\to a$. Значи, точно е (ε–δ) – својството.

Да ја докажеме, сега, *доволноста* на (ε–δ) – својството за L да биде граница на f во точката a. Нека (x_n) е низа со својствата (1) од **5.1.** Треба да докажеме дека

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L.$$

Навистина, нека $\varepsilon>0$ е даден реален број и нека $\delta>0$ е таков што од $0<|x-a|<\delta$ следува $|f(x)-L|<\varepsilon$. Поради $x_n\to a$ $(n\to\infty)$, постои $n_0\in N$ таков што

$$n>n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\delta,$$

а тогаш и $|f(x_n)-L|<\varepsilon$ што и значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. $\Diamond$

Со користење на (ε–δ) – својството ќе ги пресметаме границите уште на некои елементарни функции.

Тригонометриски функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

а) Најнапред ќе ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \sin x$$

во произволна точка $x_0\in R$. За кој било $\varepsilon>0$, да ставиме $\delta=\varepsilon$. Имајќи предвид дека $|\sin x|\leq|x|$ (в. црт.1) и дека $|\cos x|\leq 1$, од $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$ следува:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le$$

$$\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0| < \varepsilon,$$

што, според (ε–δ) – својството значи дека

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0. \qquad (1)$$

б) За $f(x)=\cos x$ границата во произволна точка $x_0\in\mathbb{R}$ се определува слично како и во а). Во овој случај се користи идентитетот

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}$$

и својството $|\sin(x+x_0)/2| \le 1$. Така ќе се добие дека,

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0. \qquad (2)$$

в) $f(x)=\operatorname{tg}x$. Овде ќе ја користиме теоремата 2 од **5.1.** Нека $x_0 \ne (2k+1)\pi/2$, $k=0, \pm1, \pm2,\ldots$. Имаме

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg}x = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg}x_0. \qquad (3)$$

г) $f(x)=\operatorname{ctg}x$. Работиме како во в): нека $x_0\ne k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2,\ldots$. Тогаш

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{ctg}x = \lim_{x\to x_0}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x_0}{\sin x_0} = \operatorname{ctg}x_0. \qquad (4)$$

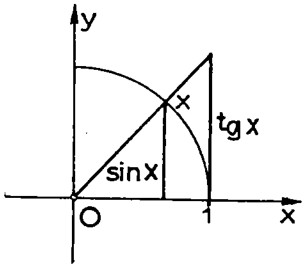
Забелешка 1. Бројот $\delta>0$ во (ε–δ) – својството зависи од ε, поради што често се пишува $\delta=\delta(\varepsilon)$, или δ_ε (наместо δ).

На крајот од овој дел ќе го докажеме следново важно равенство:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (5)$$

Ако $0<x<\pi/2$ тогаш имаме $\sin x < x$, т.е. $\frac{\sin x}{x}<1$. Од друга страна, $x<\operatorname{tg}x$ (црт.1), така што $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. Така добиваме дека

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{за} \quad 0<x<\pi/2.$$



Црт.1

Последното двојно неравенство останува точно и ако x се замени со $-x$, па според тоа, ова неравенство е точно за секој $x\in(-\pi/2,\ \pi/2)\setminus\{0\}$. Поради $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (што се добива од (2), за $x_0=0$), од ова двојно неравенство и од Т.3 во **5.1** следува точноста на границата (5).

Како последица од (2),(5) и својствата 1°, 3° од Т.2 во 5.1, ја добиваме и следнава формула:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2. \tag{6'}$$

Да забележиме дека (6′) е специјален случај од следново обопштување на формулата (5):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a, \tag{6}$$

каде што a е даден реален број различен од нула.

За да го докажеме равенството (6), доволно е да го воочиме следното. Ако (x_n) е низа броеви со граница 0, при што (за секој n) $x_n\neq 0$, тогаш истото својство го има и низата (ax_n), па според (5) имаме: $(\sin ax_n)/(ax_n)\to 1$ кога $n\to\infty$. Од тоа следува:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=a\lim_{n\to\infty}\frac{\sin ax_n}{ax_n}=a\ ,$$

т.е. точноста на (6).

ВЕЖБИ

Во задачите 1–9 да се пресметаат границите на дадените функции во дадените точки кога x се стреми кон нула.

1. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. **2.** $\dfrac{\operatorname{tg} ax}{x}$. **3.** $\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

4. $\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x}$. **5.** $\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$. **6.** $\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$.

7. $\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cos 2x}$. **8.** $\sqrt{x}$. **9.** $\sqrt{x+1}-1$.

10. Да се докаже дека е точно неравенството $|\sin x|\leq|x|$, за секој $x\in R$. (Ова неравенство беше користено при докажувањето на (1) и (5).)

5.3. Непрекинатост на функции

За функцијата f велиме дека е ***непрекината во точката*** a ако f е дефинирана во a, има граница во a и ако е точно равенството

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{1}$$

(Да нагласиме дека точката a во која е непрекината функицијата f, не само што е точка на згуснување на доменот D_f, туку таа и му припаѓа на D_f.)

Имајќи ги предвид дефинициите на поимите граница и непрекинатост, како и соодветните резултати од 5.1 и 5.2, лесно се докажуваат следните две тврдења.

Теорема 1. *Ако а му припаѓа на доменот D од функцијата f и е точка на згуснување на D, тогаш следните услови се еквивалентни.*

i) *f е непрекината во точката а.*

ii) $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$ $[x\in D \wedge |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon]$

iii). *Ако (x_n) е низа точки од D, таква што $x_n\to a$ за $n\to\infty$, тогаш $f(x_n)\to f(a)$ за $n\to\infty$.* ◊

Теорема 2 (**за непрекинатост на збир, производ и количник**)

Ако а е точка на згуснување за пресекот на домените од функциите f и g, коишто се и непрекинати во а, тогаш во а се непрекинати и функциите:

а) $f\pm g$; б) $f\cdot g$; в) f/g.

Притоа, во в) се претпоставува дека $g(a)\neq 0$. ◊

Равенствата (4)–(5) од 5.1 и (1)–(4) од 5.2 ги имплицираат следните две својства.

1° (**за непрекинатост на полиномни и рационални функции**)

Секоја полиномна функција $P(x)$ е непрекината во секоја точка $x_0 \in \mathbb{R}$, а рационална функција $P(x)/Q(x)$ – во секоја точка од нејзиниот домен. ◊

2° (**за непрекинатост на тригонометриски функции**)

Функциите $\sin x$ и $\cos x$ се непрекинати во секоја точка $x_0 \in \mathbb{R}$, а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ – во секоја точка од нивниот домен. ◊

Ќе го докажеме и следново тврдење:

3° (**за непрекинатост на експоненцијалната функција**)

Експоненцијалната функција a^x ($a>0$) е непрекината во секоја точка $x_0 \in \mathbb{R}$.

Доказ. Треба да покажеме дека

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \tag{2}$$

за секој $x_0 \in \mathbb{R}$ (т.е. за секој x_0 од доменот на a^x). Притоа ќе ја користиме Т.2 од 5.2, односно условот ii) од Т.1.

Равенството (2) е јасно за $a=1$, па затоа ќе претпоставиме дека $a \neq 1$.

Ќе го разгледаме прво случајот $x_0=0$, $a>1$.

Нека $\varepsilon>0$ и нека $\delta=\log_a(1+\delta)$. Ако $|x|<\delta$, т.е. $-\delta<x<\delta$, тогаш $a^{-\delta}<a^x<a^\delta$, од што следува $1/(\varepsilon+1)<a^x<1+\varepsilon$; поради $1-\varepsilon<1/(1+\varepsilon)$, добиваме $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$, т.е. $|a^x-1|<\varepsilon$, со што го докажавме (2) за $x_0=0$. (Погоре го користевме фактот дека a^x е монотоно растечка функција, што е точно поради $a>1$.)

За $0<a<1$ и $x_0=0$ имаме $a^{-1}>1$, па $\lim\limits_{x\to 0} a^x = \lim\limits_{x\to 0}[(a^{-1})^x]^{-1} = 1^{-1} = 1$.

Да претпоставиме сега дека x_0 е кој било реален број и дека (x_n) е низа со граница x_0. Тогаш, ставајќи $u_n=x_n-x_0$, добивме низа (u_n) со граница 0. Од тоа следува дека:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{u_n} = a^{x_0} \ ,$$

што, според iii) од Т.1, повлекува дека a^x е непрекината во точката x_0. ◊

На читателот му оставаме (вежба 6), на сличен начин како за експоненцијалната функција, да го докаже следново својство:

4° (**за непрекинатост на логаритамската фунцкија**)

Ако $a>0$, $a\neq 1$, *тогаш функцијата* $\log_a x$ *е непрекината за секој позитивен реален број* x_0. ◊

Својството 4° може да се добие и како последица од својството 3°, врз основа на следнава теорема:

Теорема 3 (**за непрекинатост на инверзна функција**)

Нека f *е строго монотона функција во сегментот* $[a, b]$ *и нека* $f(a)=c$, $f(b)=d$. *Ако* f *е непрекината во секоја точка од интервалот* (a, b), *тогаш инверзната функција* $g=f^{-1}$ *ќе биде непрекината во секоја точка од интервалот* (c, d) (*кога* f *расте*), *односно од интервалот* (d, c) (*кога* f *опаѓа*).

*Доказ**. Поради симетрија, ќе го дадеме само доказот за случајот кога f расте. Според Т.2 од 2.6 тогаш g ќе биде строго растечка функција во сегментот $[c, d]$. Нека $x_0\in(c, d)$; треба да докажеме дека g е непрекината во x_0. Нека (x_n) е низа таква што за секој $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in(c, d)$, $x_n\neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Треба да покажеме дека низата (y_n), каде што $y_n=g(x_n)$ е конвергентна и има граница $y_0=g(x_0)$. (Да забележиме дека за секој $n\in\mathbb{N}$, $y_n\in(a, b)$ и поради строгата монотоност на g, од $x_n\neq x_0$ следува дека $y_n\neq y_0$).

Да претпоставиме дека y_0 не е граница на (y_n); тоа значи дека постои реален број $\varepsilon>0$, таков што надвор од интервалот $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ има бесконечно многу членови од низата. Според тоа, за бесконечно многу вредности на n ќе биде точно барем едно од неравенствата

$$y_n = g(x_n) < y_0 -\varepsilon, \qquad y_n = g(x_n)> y_0+\varepsilon. \tag{3}$$

Ако, на пример, е точно првото од овие неравенства, тогаш поради тоа што f монотоно расте, од

$$y_n < y_0 -\varepsilon < y_0$$

ќе следи дека

$$x_n = f(y_n) < f(y_0-\varepsilon) < f(y_0) = x_0,$$

а оттука, ако ставиме $\varepsilon'=x_0-f(y_0-\varepsilon)$, ќе добиеме дека за бесконечно многу вредности на n ќе биде $x_n<x_0-(x_0-f(y_0-\varepsilon))=x_0-\varepsilon'$, т.е. дека надвор од интервалот $(x_0-\varepsilon', x_0+\varepsilon')$ има бесконечно многу членови од низата (x_n); последново противречи на претпоставката дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

На сличен начин се добива противречност и ако се претпостави дека за бесконечно многу вредности на n е точно второто од неравенствата (3). ◊

Како последица од оваа теорема и својството 2°, ако ги земеме предвид и дефинициите на инверзните тригонометриски функции (в. 3.4), добиваме:

5° (**за непрекинатост на инверзните тригонометриски функции**)

Функциите $\arcsin x$ *и* $\arccos x$ *се непрекинати во секоја точка од интервалот* $(-1,1)$, *за кој било* $x_0 \in (-1, 1)$,

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \qquad \lim_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0. \tag{4}$$

Функциите $\operatorname{arctg} x$ *и* $\operatorname{arcctg} x$ *се непрекинати за секој* $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \qquad \lim_{x \to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0. \ \diamond \tag{5}$$

Пример 1. Да ја пресметаме границата

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}. \tag{6}$$

Нека (x_n) е низа таква што, за секој $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (-1, 1)$, $x_n \neq 0$ и $x_n \to 0$ за $n \to \infty$. Поради строгата монотоност на $\arcsin x$ во сегментот $[-1, 1]$, од $x_n \neq 0$ следува и $y_n = \arcsin x_n \neq 0$. Со оглед на 5° имаме

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{x \to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0,$$

а потоа, имајќи го предвид (5) од 5.2 добиваме:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{\sin y_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{y_n}{\sin y_n}} = \frac{1}{1} = 1,$$

од каде што, според дефиницијата за граница на функција од 5.1, следува равенството (6).

ВЕЖБИ

1. Без да се користи својството 1°, да се покаже дека f е непрекината за секој реален број:

   а) $f(x) = 2x$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = x^3 + x^2$.

2. Без да се користи својството 2°, да се покаже дека f е непрекината за секој реален број $x \neq a$:

   а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$; б) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $a = 1$; в) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $a \in \{2, -2\}$.

3. Да се покаже дека функцијата $f(x)$ е непрекината за секој реален број:

а) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ за $x \neq 0$, $f(0) = 1$;

б) $f(x) = x^2 - 1$ за $|x| \geq 1$, $f(x) = 1 - x^2$ за $|x| < 1$.

4. Да се покаже дека се непрекинати, за секој реален број, функциите:

а) $\operatorname{sh}x$; б) $\operatorname{ch}x$; в) $\operatorname{cth}x$

5. Ако $f(x) = 1/x$ за $x=0$ и $f(0) = a$, да се покаже дека, за кој било реален број a, $f(x)$ има прекин во 0 (т.е. f не е непрекината во 0)

6*. Да се даде директен доказ на својството **4°**.

Во задачите 7–10 да се пресметаат соодветните граници.

7. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\arcsin(x-a)}{x-a}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

9. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

10. $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{arctg} x$.

5.4. Граници и непрекинатост на сложени функции

Во овој раздел ќе разгледаме неколку својства во врска со сложени функции.

***Теорема* 1 (прва теорема за граница на сложена функција)**

Нека f и g се функции и a, b се реални броеви шӣо ӷи задоволуваат следниӣе услови:

(i) *a е ӣочка на зӷуснување на доменоӣ D на функцијаӣа $g(f(x))$;*

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$; (iii) *$g(x)$ е неӣрекинаӣа во b.*

Тоӷаш, $g(b)$ е ӷраница на функцијаӣа $g(f(x))$ во ӣочкаӣа a, ӣ.е.

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(b) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = \lim_{x \to b} g(x). \tag{1}$$

***Доказ*.** Нека (a_n) е низа од D таква што $a_n \neq a$ за секој n и $a_n \to a$ за $n \to \infty$. Тогаш, според (ii), $f(a_n) \to b$, за $n \to \infty$, а од тоа, според (iii), следува $g(f(a_n)) \to g(b)$ за $n \to \infty$, т.е. точноста на (1). ◊

Како непосредна последица од Т.1 ја добиваме следнава (уште поважна):

Теорема 2 (**за непрекинатост на сложена функција**)

Ако a е точка на згуснување за доменот D на сложената функција $g(f(x))$ и ако f е непрекината во a, а $g(x)$ е непрекината во $f(a)$, тогаш $g(f(x))$ е непрекината во a. ◊

Од примерот што ќе го разгледаме подолу следува дека заклучокот од Т.1, во општ случај, не е точен ако f и g ги заменат улогите.

Пример 1. Ако $f(x)=x$ за секој $x \in R$, а $g(x)=1$ за секој $x \neq 0$ и $g(0)=0$, тогаш f е непрекината во секоја точка, па значи и во $0=f(0)$, а покрај тоа $g(x) \to 1$ за $x \to 0$, но

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1 \neq 0 = g\left(\lim_{x\to 0} f(x)\right).$$

Меѓутоа, точно е следново својство (аналогно на Т.1):

Теорема 3 (**втора теорема за граница на сложена функција**)

Нека f, g и a го задоволуваат условот (i) *од* Т.1, *а нека се исполнети и следниве услови:*

(ii′) *f е непрекината во точката a.*

(iii′) $\lim\limits_{x\to f(a)} g(x) = b$, $f(a) \notin D_g$.

Тогаш $g(f(x))$ се стреми кон b кога $x \to a$, т.е.

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{x\to f(a)} g(x). \tag{2}$$

Доказ. Нека $a_n \in D$, $a_n \neq a$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и a е граница на низата (a_n). Според (ii′), $f(a)$ е граница на низата $(f(a_n))$. Притоа, поради $f(a_n) \in D_g$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $f(a) \notin D_g$, имаме: $f(a_n) \neq f(a)$, за секој $n \in \mathbb{N}$, од што според (iii′) следува (2). ◊

Тукушто докажаниот резултат може да се искористи за пресметување на соодветни граници на функции, како што покажува следниов:

Пример 2. Нека $f(x)=kx$, $g(x)=(\sin x)/x$, каде што $k \neq 0$ е даден реален број. За $x=0$ се исполнети условите од Т.3, при што $f(0)=0$, па добиваме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx} = k\lim_{x\to 0} g(f(x)) =$$
$$= k\lim_{x\to 0} g(x) = k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = k,$$

а тоа е равенството (6) од **5.2**.

Имајќи ги предвид 3° и 4° од 5.3, како последици од Т.1 ги добиваме и следниве две својства.

1°. *Ако* $a>0$ *и* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, *тогаш:*
$\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^L$. ◊

2°. *Ако* $a>0$, $a\neq 1$ *и* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0$, *тогаш:*
$\lim_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a L$. ◊

Потоа, како последици од 1° и 2°, добиваме:

3°. *Ако s е даден реален број, тогаш функцијата x^s е непрекината за секој $x_0>0$.*

Доказ. За секој $x_0>0$ имаме

$$x^s = e^{s\ln x},$$

па (според 1° и 2°) имаме:

$$\lim_{x\to x_0} x^s = e^{s\lim\limits_{x\to x_0}\ln x} = e^{s\ln x_0} = x_0^s. \ \Diamond$$

За $s=1/n$ добиваме дека:

4°. *Ако $n\in\mathbb{N}$, функцијата $\sqrt[n]{x}$ е непрекината за секој позитивен $x_0\in\mathbb{R}$.* ◊

На крајот, имајќи ги предвид Т.1, Т.2 и својставата 1°–6° од **5.3**, како и Т.2 и својството 3° од овој дел, ја добиваме и следнава:

***Теорема* 3 (за непрекинатост на елементарните функции)**

Ако f е елементарна функција, тогаш f е непрекината во секоја внатрешна точка од доменот D_f. ◊

Забелешка. Дефиницијата на поимот граница на функција дадена во **5.1** не е сосема согласна со соодветната дефиниција во учебникот "Предавања по виша математика" (кн. I, §11, стр. 165). Имено, според дефиницијата од тој учебник, којашто ќе ја викаме ***стара дефиниција за***

граница и ќе ја означуваме со СДГ [1]), равенството $\lim_{x\to a} f(x) = L$ е еквивалентно со барањето да "постои низа (x_n) со граница a, таква што сите членови на низата се во доменот D на f и, за секоја таква низа, низата $f(x_n)$ има граница L". (Како што гледаме, за разлика од дефиницијата во разделот **5.1**, во СДГ се допушта да биде $x_n=a$, во случај кога $a\in D$). Се покажува дека една точка a го има својството: "постои низа (x_n) со граница a, таква што $x_n\in D$, за секој $n\in \mathbb{N}$", секогаш кога a е ***допирна точка*** [2]) на множеството D (т.е. a е или точка на згуснување или изолирана точка на D.) Разликата меѓу овие дефиниции ќе ја илустрираме со следниот пример.

Пример 5. а) Функцијата f, дефинирана со: $f(x)=1$ за $x\neq 0$ и $f(0)=0$, има граница ($=1$) во точката $a=0$ според дефиницијата од **5.3** во овој учебник. Според СДГ, f нема граница во точката $a=0$, зашто низите $x_n'=0$, $x_n''=1/n$ ($n\in \mathbb{N}$) конвергираат кон 0, а соодветните низи на функцијата немаат иста граница: $f(x_n')\to 0$, $f(x_n'')\to 1$ за $n\to\infty$.

б) функцијата g, дефинирана со: $g(x)=x+1$ за $|x|\geq 1$ и $g(0)=2$, според СДГ има граница ($=2$) во точката $a=0$; според дефиницијата во **5.3**, g нема граница во $a=0$, зашто 0 не е точка на згуснување на доменот од g.

Дефиницијата за непрекинатост на функција во **5.3** од овој учебник формално е иста со СДГ, т.е. "f е непрекината во a" е еквивалентно со "$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$", но постои суштинска разлика, поради разликата во значењето на поимот граница. Основната разлика меѓу двете дефиниции е во следното: според СДГ, една функција е непрекината во секоја изолирана точка од доменот, а тоа не е точно според дефиницијата овде, во **5.3** (бидејќи, ако a е изолирана точка од D, тогаш таа не е точка на згуснување на D). Инаку, ако a е точка на згуснување на D, тогаш f е непрекината во a според едната од дефинициите за граница акко е непрекината во a и според другата.

Една од предностите на СДГ е таа што важи теоремата за граница на сложена функција $g\circ f$ без претпоставка за непрекинатост на некоја од функциите g, f. Имено (в. "Предавања..." кн. I, стр. 169, 8°):

Т.1′. *Нека a е допирна точка на доменот од $g\circ f$. Ако постојат границите $\lim_{x\to a} f(x) = b$, и $\lim_{x\to b} g(x) = c$, тогаш е точно и равенството $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.* ◊

---

[1]) Изразот "стара дефиниција.." значи само дека се работи за дефиниција дадена во стариот учебник од истите автори. Инаку, таа "стара дефиниција..." е историски понова од дефиницијата во овој учебник.

[2]) Во (поширока) употреба е и терминот ***атхерентна точка*** на D.

Поради споменатата предност, авторите нерадо ја напуштија СДГ, но сепак се одлучија на тој чекор, зашто во повеќето од консултираните учебници, поимот граница се дефинира само за точки на згуснување од доменот на разгледуваната функција.

ВЕЖБИ

Во задачите 1–7 да се најдат назначените граници.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x}}{a}$.

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{a-3}}{x^2-a^2}$, $a>3$.

5. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$.

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\pi/2)-\arccos x}{x}$.

8. Да се покаже дека ако $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, $f(x)>0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ $(A\neq 0)$, тогаш $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=A^B$.

Помош: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)}=e^{B\ln A}=A^B$.

5.5. Обопштени граници

Овде ќе разгледаме неколку обопштенија на поимот граница на функција.

I. Бескрајна граница. Нека f е дадена функција со домен D_f и нека a е точка на згуснување на D_f. Ако за секоја низа (x_n) со својствата:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots;\ x_n\in D_f,\ x_n\neq a,\ \lim_{n\to\infty} x_n=a, \tag{1}$$

соодветната низа од вредности на функцијата f

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \tag{2}$$

неограничено расте по апсолутна вредност, т.е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, велиме дека $f(x)$ ***се стреми кон*** ∞ кога x се стреми кон a (т.е. f има ***бесконечна грацница*** во a) и пишуваме

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Пример 1. Ако $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, тогаш според Т.1 од **4.6** имаме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty.$$

Според погоре изнесената дефиниција тоа значи дека

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

II. Граница во бескрајна точка. Нека доменот D_f на функцијата f е неограничено множество и (x_n) е низа, таква што

$$x_n \in D_f, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty. \tag{1'}$$

Ако за секоја низа (x_n) со својствата (1'), соодветната низа (2) е конвергентна и има граница L, т.е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$, велиме дека $f(x)$ ***се стреми кон*** L кога x се стреми кон ∞ (т.е. f има ***грацница во бескрајност***) и пишуваме

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Пример 2. Да покажеме дека

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$

Соодветната низа од вредности на функцијата $f(x) = (x^2-1)/(x^2+1)$ на низата (1'), има општ член $f(x_n) = (x_n^2-1)/(x_n^2+1)$, така што

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/x_n^2}{1+1/x_n^2} = 1.$$

III. Бескрајна граница во бескрајна точка. Ако за секоја низа (x_n) со својствата (1'), низата (2) неограничено расте по апсолутна вредност, велиме дека $f(x)$ ***се стреми кон*** ∞ кога x се стреми кон ∞ (т.е. f има ***бескрајна грацница во бескрајност***) и пишуваме

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$

Пример 3. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}.$$

Поради тоа што, од $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ следува дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^3}=0,$$

имаме

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1/x_n^3}{(1/x_n)+(1/x_n^2)+(1/x_n^3)}=\infty,$$

што значи дека $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2+x+1}=\infty$.

Според погоре изнесените дефиниции, јасна е смислата, на пример, на следниве граници:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \text{итн.}$$

Погоре изнесените дефиниции за обопштените граници можат да се формулираат и на (ε–δ) – јазикот, т.е. да се дадат во смисла на Кошиевата дефиниција за граница на функција. Така, на пример, за границите за кои погоре ги изнесовме дефинициите имаме:

***Теорема* 1 (*за бескрајните граници*)**

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow$ [*a е точка на згуснување за D_f и за секој реален број $H>0$, постои реален број $\delta>0$ таков што од $0<|x-a|<\delta$ следува $|f(x)|>H$*];

б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$ [*за секој реален број $E>0$ постои $x\in D_f$ таков што $|x|>E$ и за секој реален број $\varepsilon>0$ постои реален број $K>0$ со својството: $|x|>K$, $x\in D_f \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$*].

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow$ [*за секој реален број $E>0$ постои $x\in D_f$ таков што $|x|>E$ и за секој реален број $H>0$ постои реален број $K>0$ со својството: $|x|>K$, $x\in D_f \Rightarrow |f(x)|>H$*]. ◊

IV. Еднострани граници. Поимот граница на функција може да се обопшти уште на еден начин. Нека a е точка на згуснување на доменот D_f, на функцијата f и нека (x_n) е низа, таква што

$$x_n \in D_f,\ x_n < a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{1''}$$

Ако за секоја низа од обликот (1"), низата (2) е конвергентна и има граница L, пишуваме

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-) = L,$$

тогаш за L велиме дека е ***лева граница на*** $f(x)$ во точката a.

На сличен начин се воведува и поимот за ***десна граница***:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+) = K.$$

На читателот му препорачуваме врз основа на досега изнесеното сам да ги формулира дефинициите за следниве граници:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

Во смисла на кошиевата дефиниција за граница на функција, за првите два случаја на еднострани граници (лева, однсоно десна граница), ќе ја изнесеме следнава теорема:

Теорема 2 (за еднострани граници)

а) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow$ [*a е точка на згуснување на D_f и за секој реален број $\varepsilon>0$ постои реален број $\delta>0$ таков што, ако $x\in D_f$ и $|x-a|<\delta$, $x<a$, тогаш $|f(x)-L|<\varepsilon$*];

б) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = K \Leftrightarrow$ [*a е точка на згуснување на D_f и за секој реален број $\varepsilon>0$ постои реален број $\delta>0$ таков што, ако $x\in D_f$, $|x-a|<\delta$, $x>a$, тогаш $|f(x)-K|<\varepsilon$*]. ◊

На читателот му оставаме сам да ги формулира дефинициите за останатите случаи (при двата вида обопштени граници) во смисла на кошиевата дефиниција за граница.

Пример 4. Да ги најдеме левата и десната граница на функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x}$ во точката $x=0$ (кога x се стреми кон 0). Точката 0 е точка на згуснување на доменот D_f=(–∞, 0)∪(0, +∞) на оваа функција. Ако x_n<0 и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ имаме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=-\infty$, а ако x_n>0 и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=+\infty$. Така имаме дека $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

Ќе направиме неколку забелешки за односот меѓу поимите ***граница, лева граница и десна граница*** на функција.

1°. *Ако постои* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *при што a, како што беше претпоставено во дефиницијата за граница на функција, е точка на згуснување на доменот* D_f *на функцијата, но не е крајна точка на* D_f, *тогаш постојат и* $f(a^-)$ *и* $f(a^+)$ *и*

$$f(a^-)=\lim_{x\to a} f(x)=f(a^+). \tag{3}$$

2°. *Ако a е крајна точка на* D_f *и ако постои* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *тогаш постои една од границите* $f(a^-)$, $f(a^+)$ *и таа е еднаква со* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3°. *Ако постојат* $f(a^-)$ *и* $f(a^+)$ *и ако* $f(a^-)\neq f(a^+)$, *тогаш не постои* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. *Еден таков случај имавме во примерот 4.*

4°. *Ако постојат* $f(a^-)$ *и* $f(a^+)$ *и ако* $f(a^-)=f(a^+)$, *тогаш постои и* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *и точно е* (3).

5°. *Ако постои* $\delta>0$, *таков што* $f(x)\le 0$, *за секој* $x\in(a-\delta, a)$, *тогаш* $f(a^-)\le 0$. *Аналогно:*

5'. *Ако постои* $\delta>0$, *таков што* $f(x)\ge 0$, *за секој* $x\in(a, a+\delta)$, *тогаш* $f(a^+)\ge 0$.

V. БМВ, БГВ и неопределени изрази. Во случајот кога

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

велиме дека функцијата f станува ***бескрајно голема величина*** (БГВ) во точката a. Аналогно, ако

$$\lim_{x\to a} f(x)=0$$

велиме дека f е ***бескрајно мала величина*** (БМВ) во точката a. Истите термини ги користиме ако во горните граници наместо $x\to a$ стои $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ и велиме, на пример, f е БГВ (БМВ) во ∞ (во бескрајност) односно во $-\infty,+\infty$ (во минус бескрајност, во плус бескрајност).

Ќе изнесеме неколку својства во врска со бескрајно малите и бескрајно големите величини во дадена точка a (т.е. кога дадена функција е бескрајно голема, односно бескрајно мала во a) при што наместо a може да стои ∞, $-\infty$ и $+\infty$.

***Теорема* 3 (за БМВ и БГВ)**

а) *Ако една од функциите f, $-f$, $|f|$ е* БГВ (БМВ) *во a, тогаш такви ќе бидат и другите две функции во a.*

б) *Ако f е* БМВ *во a, а g е ограничена во некоја околина на a, тогаш и $f{\cdot}g$ ќе биде* БМВ *во a.*

в) *Ако f е* БГВ *во a, а $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, тогаш и $f{\cdot}g$ е* БГВ *во a.*

г) *Ако f е* БМВ *во a, тогаш $1/f$ е* БГВ *во a (при што $f(x)\neq 0$ во некоја околина на a).*

д) Ако f *е* БГВ *во a, тогаш $1/f$ е* БМВ *во a (и овде $f(x)\neq 0$ во некоја околина на a).*

Доказ. Доказите на тврдењата а)–д) се лесни. Ние за илустрација ќе го докажеме б), земајќи a да биде реален број.

Нека $|g(x)|<H$ во некоја околина на a и нека $\varepsilon>0$ е произволен реален број. Да ставиме $\varepsilon'=\varepsilon/H$. Поради $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ постои реален број $\delta>0$, таков што од $0<|x-a|<\delta$ следува $|f(x)|<\varepsilon'=\varepsilon/H$, а тогаш од $0<|x-a|<\delta$ имаме

$$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|<\frac{\varepsilon}{H}\cdot H=\varepsilon,$$

што значи дека $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$, т.е. $f{\cdot}g$ е БМВ во точката a. ◊

Тврдењата в)–г) од теоремата 3 можат "нагледно" да се претставаат со "равенствата":

$$A\cdot\infty=\infty \quad (A\neq 0); \qquad \frac{1}{0}=\infty; \qquad \frac{1}{\infty}=0.$$

Во истата смисла точни се и „равенствата":

$$\infty\cdot\infty=\infty; \quad (+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty;$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty; \quad (+\infty)+(+\infty)=+\infty; \quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

Ќе дадеме, сега, неколку примери од кои се гледа дека не може да им се пресмета "вредноста" на изразите

$$(+\infty)+(-\infty); \quad (+\infty)-(+\infty); \quad \frac{\infty}{\infty}; \ \frac{0}{0}.$$

Пример 5. Ако

$$f_1(x)=\frac{1}{x^2},\quad f_2(x)=\frac{1}{x^4},\quad g_1(x)=-\frac{1}{x^4}\quad \text{и}\quad g_2(x)=-\frac{1}{x^2},$$

тогаш:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=\lim_{x\to 0} f_2(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0} g_1(x)=\lim_{x\to 0} g_2(x)=-\infty.$$

Поради $\lim\limits_{x\to 0}[f_1(x)+g_1(x)]=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}[f_2(x)+g_2(x)]=+\infty$, не сме во состојба да ја пресметаме вредноста на изразот $(+\infty)+(-\infty)$.

Слично, поради $\lim\limits_{x\to 0}[f_1(x)-f_2(x)]=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}[f_2(x)-f_1(x)]=+\infty$ не можеме да ја пресметаме и "вредноста" на изразот $(+\infty)-(+\infty)$. Бидејќи, пак,

$$\lim_{x\to 0}[f_1(x)/f_2(x)]=0,\qquad \lim_{x\to 0}[f_2(x)/f_1(x)]=\infty$$

и за изразот ∞/∞ не можеме да ја пресметаме "вредноста".

Исто така, од

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)=\lim_{x\to\infty} f_2(x)=0 \quad \text{и}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=0,$$

не може да се пресмета „вредноста“ и на изразот 0/0.

Изнесените примери, а и редица други што читателот, веруваме, сам може да ги наведе, наложуваат изразите

$$(+\infty)+(-\infty),\quad (+\infty)-(-\infty),\quad \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0}$$

да се наречат ***неопределени изрази***. Во иста смисла неопределени се и изразите:

$$0\cdot\infty,\quad \infty^0,\quad 0^0,\quad 1^\infty.$$

Да напомниме уште еднаш дека, овде, *симболите* $0, 1, \infty, -\infty, +\infty$ *не ги сметаме за броеви, туку дека со нивна помош сакаме симболично да искажеме соодветни гранични процеси.* На пример, пишувајќи ∞^0 (во точката a) за функцијата $h=f^g$ сакаме да истакнеме дека

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{и}\quad \lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Фактот, пак, што ∞^0 е неопределен израз значи дека, во зависност од функциите f и g, границата $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ може да постои, а може и да не постои; освен тоа, може да се случи да постојат f_1, f_2, g_1 и g_2 такви што

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)]^{g_1(x)} = L_1, \quad \lim_{x\to a}[f_2(x)]^{g_2(x)} = L_2,$$

но да биде $L_1 \neq L_2$. Спротивно на ова, „равенството" $2\cdot\infty=\infty$ кажува дека, ако

$$\lim_{x\to a} f(x)=2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty, \quad \text{тогаш} \quad \lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty,$$

независно од изборот на функциите f и g со наведените граници.

VI. Две важни граници. При пресметувањето на граници на функции, посебно се интересни случаите во кои се јавува некоја од набројаните неопределености. Во таа смисла овде ќе се задржиме на две важни граници што овозможуваат соодветните неопределености да се "отстранат", да се "поништат".

Првата важна граница е:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{4}$$

од која ставајќи $1/x$ *наместо* x, *се добива:*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{4'}$$

(*Тие се користат за елиминирање на неопределености од видот* 1^∞.)

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots$ е низа што се стреми кон $+\infty$ ($\lim_{s\to\infty} x_s = +\infty$). Постои природен број n_s таков што

$$n_s \le x_s < n_s + 1, \tag{5}$$

од каде што добиваме

$$\frac{1}{n_s+1} < \frac{1}{x_s} \le \frac{1}{n_s},$$

а потоа и

$$1+1/(n_s+1) < 1+1/x_s \le 1+1/n_s.$$

Одовде, имајќи ги предвид и неравенствата (5), добиваме

$$\left(1+\frac{1}{n_s+1}\right)^{n_s} < \left(1+\frac{1}{x_s}\right)^{x_s} < \left(1+\frac{1}{n_s}\right)^{n_s+1} \tag{6}$$

Низата со општ член

$$\left(1+\frac{1}{n_s}\right)^{n_s}$$

е подниза од низата $(1+1/n)^n$. Поради тоа,

$$\lim_{n_s\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_s+1}\right)^{n_s}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e,$$

$$\lim_{n_s\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_s}\right)^{n_s+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e,$$

па од (6), според теоремата за сендвич–низа, добиваме

$$\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_s}\right)^{x_s}=e.$$

Со тоа докажавме дека

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{7}$$

Сега, со помош на (7), имаме:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}=\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e};$$

значи,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\frac{1}{e}. \tag{8}$$

Натаму,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\ (\text{за } u=-x)=\lim_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{u}}=\frac{1}{\frac{1}{e}}=e,$$

со што го докажавме равенството (4).

Другата важна граница, што ја наведовме погоре, е:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{9}$$

Овде ќе ја корисшиме Т.1 *од* 5.4.

Ако ставиме $a^x-1=h$, тогаш

$$x=\frac{\ln(1+h)}{\ln a},$$

па, имајќи предвид дека $\lim\limits_{x\to 0} h=0$, добиваме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{\ln(1+h)}\cdot\ln a=$$

$$=\ln a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\ln(1+h)^{1/h}}=\ln a\cdot\frac{1}{\ln e}=\ln a.$$

Од горната граница, за $a=e$, добиваме и

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{9'}$$

VII. Еквивалентни БМВ. На крајот од оваа точка, враќајќи се на бескрајно малите величини, ќе воведеме неколку поими што ќе ни користат подоцна.

Нека f и g се бескрајно мали величини во точката a, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Ако: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ (или, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$),

тогаш за f велиме дека е БМВ ***од повисок ред*** во однос на g (во точката a). Ако:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0,\ k\in\mathbb{R},$$

тогаш велиме дека во a, f и g се БМВ ***од ист ред***.

Од посебен интерес е случајот $k=1$; тогаш за f и g велиме дека се ***еквивалентни*** БМВ во точката a.

За бескрајно малите величини ќе ја докажеме следнава

Теорема 4 (***за споредување на БМВ***)

Ако f и g се еквивалентни БМВ во точката a, тогаш $f-g$ е БМВ, во истата точка, од повисок ред во однос на f и g.

Обратно, ако $f-g$ е БМВ од повисок ред во однос на f или g (во точката a), тогаш во a, f и g ќе бидат еквивалентни БМВ.

Доказ. Нека $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Тогаш

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0.$$

Слично, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}=0$.

Обратно, од $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}=0$ се добива , $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0$ т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

па f и g се еквивалентни во a. ◊

Поимот за еквивалентни бескрајно мали величини во дадена точка е важен заради тоа што често пати едната од нив е полесна за пресметување во околината на дадената точка, па нејзините вредности можат да се земат за приближни вредности на другата величина во разгледуваната околина. На пример, во околината на точката 0 можат да се користат приближните равенства:

$$\sin x \approx x, \quad \operatorname{tg} x \approx x. \tag{10}$$

Да земеме уште еден пример:

Пример 6. Тргнувајќи од

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$, при што и $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}x=0$,

во околина на нулата може да се користи приближната формула

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}. \tag{11}$$

(На пример, за x=0,21, формулата (11) дава $\sqrt{1{,}21}\approx$ 1, 105, додека точната вредност на $\sqrt{1{,}21}$ е 1,1).

ВЕЖБИ

Во задачите 1–4 да се пресметаат назначените граници.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+9}-\sqrt{x})$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-x)$.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x$.

5. Да се пресмета

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},\quad a_0\neq0,\ b_0\neq0,$$

за секој од случаите: а) $n<m$, б) $n=m$, в) $n>m$.

Да се најдат границите во задачите 6–11.

6. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th}x$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}x$.

10. $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x}{3-x}$.

11. $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x}{3-x}$.

Во задачите 12–17 да се пресметаат соодветните граници.

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

15. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin5x)^{1/x}$.

16. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3x}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)^n$.

18. Да се определат константите m и n така што $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-mx-n\right)=0$.

Да се споредат бескрајно малите величини во задачите 19–22.

19. $\operatorname{arctg}x$ и x во точката $x=0$.

20. $e^{2x}-1$ и $3x$ во точката $x=0$.

21. $1-x$ и $1-\sqrt[3]{x^2}$ во точката $x=1$.

22. $1-\cos x$ и x во точката $x=0$.

5.6. Функции непрекинати во интервал

Во овој раздел ќе докажеме неколку важни својства на непрекинатите функции.

***Теорема* 1 (за запазување на знакот)**

Нека f е непрекината функција во точката a, при што $f(a)\neq 0$. Тогаш постои δ–околина на a таква што, во множеството $B_\delta = D_f \cap (a-\delta, a+\delta)$, функцијата f има ист знак со $f(a)$.

Доказ. Како и порано, D_f е доменот на f. Поради $f(a)\neq 0$ може да се избере реалниот број $\varepsilon>0$ со $\varepsilon=|f(a)|/2$. Поради непрекинатоста на f во a, за вака избраниот ε постои реален број $\delta>0$ таков што од $0<|x-a|<\delta$, $x\in D_f$ да следи дека

$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon.$$

Според изборот на ε имаме: за $f(a)>0$, $f(a)-\varepsilon=f(a)/2>0$, а за $f(a)<0$, $f(a)+\varepsilon=f(a)/2<0$. Така, за секој $x\in B_\delta$: кога $f(a)>0$, тогаш и $f(x)>0$, а кога $f(a)<0$, тогаш и $f(x)<0$. ◊

Забелешка 1. Ако a е внатрешна точка на D_f, тогаш во заклучокот на Т.1 ќе се добие дека: постои δ' – околина на a таква што за секој $x\in(a-\delta', a+\delta')$, $f(x)$ има ист знак со $f(a)$.

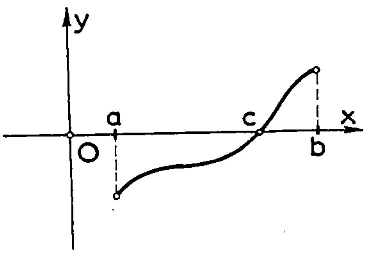
Нека f е ***непрекината во интервалот*** (a, b),т.е. непрекината во секоја точка $x\in(a, b)$. Ако

$$f(a^+) = f(a) \quad \text{и} \quad f(b^-) = f(b),$$

тогаш за f велиме дека е ***непрекината во сегментот*** $[a, b]$.

***Теорема* 2 (на Болцано–Коши)**

Ако f е непрекината функција во сегментот $[a, b]$ и ако $f(a)f(b)<0$, тогаш постои $c\in(a, b)$, таков што $f(c)=0$.



Црт.1

Доказ. Да земеме да е $f(a)<0$, $f(b)>0$. (Со оваа претпоставка не се нарушува општоста, зашто во спротивниот случај се работи на сосема ист начин или се применува добиениот резултат на функцијата $g=-f$.)

Нека $h=b-a$ и нека

$$a_0=a,\ b_0=b,\ c_0=a+h/2.$$

Ако $f(c_0)\leq 0$, ќе ставиме $a_1=c_0$, $b_1=b_0$, а ако $f(c_0)>0$, тогаш ќе земеме $a_1=a_0$, $b_1=c_0$.

Натаму, со сегментот $[a_1, b_1]$ постапуваме како и со $[a, b]$: го определуваме $c_1=a_1+(b_1-a_1)/2=a_1+h/4$ и, ако $f(c_1)\leq 0$, ставаме $a_2=c_1$, $b_2=b_1$, а ако $f(c_1)>0$, земаме $a_2=a_1$ и $b_2=c_1$. Ако ја продолжиме оваа постапка, ја добиваме низата вложени еден во друг сегменти

$$[a_0, b_0],\ [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

такви што, за секој $n\in\mathbf{N}$, $f(a_n)\leq 0$, $f(b_n)>0$. Со оваа постапка определуваме и две низи:

$$a=a_0\leq a_1\leq\ldots\leq a_n\leq\ldots, \qquad b=b_0\geq b_1\geq\ldots\geq b_n\geq\ldots$$

коишто се монотони и ограничени, па според тоа и конвергентни.

Поради

$$b_n-a_n=\frac{h}{2^n},$$

добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} b_n-\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2^n}=0,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Да ја означиме со c заедничката граница на низите (a_n) и (b_n). Поради непрекинатоста на f имаме:

$$f(c)=\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{n\to\infty}(a_n)\leq 0, \text{ зашто } f(a_n)\leq 0,$$

$$f(c)=\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{n\to\infty}(b_n)\geq 0, \text{ зашто } f(b_n)>0.$$

а оттука, конечно, добиваме дека $f(c)=0$. ◊

***Теорема* 3 (за меѓувредност)**

Нека f е непрекината функција во сегментот $[a, b]$. Тогаш за секој реален број t што се наоѓа меѓу $f(a)$ и $f(b)$ постои $c\in(a, b)$ таков што $f(c)=t$.

Доказ. Нека е, на пример,

$$f(a)<f(b) \quad \text{и} \quad f(a)<t<f(b).$$

Ја формираме функцијата $g(x)=f(x)-t$. Тогаш имаме $g(a)<0$, $g(b)>0$, а поради непрекинатоста на $f(x)$ добиваме дека и $g(x)$ е непрекината. Потоа, користејќи ја теоремата 2, добиваме дека $g(c)=0$, т.е. $f(c)=t$ за некој $c\in(a, b)$. ◊

***Теорема* 4 (на Вајерштрас)**

Ако $f(x)$ е непрекинатата функција во сегментот $[a, b]$, тогаш:

а) *$f(x)$ е ограничена во тој сегмент;*

б) *постојат c, d $\in[a, b]$ такви што $f(c)$ е најголемата, а $f(d)$ најмалата вредност на $f(x)$ во $[a, b]$.*

Доказ. Нека $f(x)$ е непрекинатата во сегментот $[a, b]$; тогаш:

а) кога $f(x)$ не би била ограничена, би бил исполнет еден од следниве два услова:

(i) за секој $n\in\mathbb{N}$, постои $x_n\in[a, b]$, таков што $f(x_n)>n$;

(ii) за секој $n\in\mathbb{N}$, постои $x_n\in[a, b]$, таков што $f(x_n)<-n$;.

За поодредено, ќе претпоставиме дека е исполнет условот (i). Низата $x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots$ е ограничена, па според Т.2 од **4.8**, постои подниза $x_{i_1}, x_{i_2},\ldots, x_{i_k},\ldots$ што конвергира, на пример, кон x_0. Тогаш ќе имаме $f(x_{i_k}) \to f(x_0)$ за $k\to\infty$, а од друга страна, според (i), би имале $f(x_{i_k})\to+\infty$ за $k\to\infty$.

Слично се доаѓа до противречност и во случајот (ii). Со тоа докажавме дека $f(x)$ е ограничена.

б) Да го означиме сега со E множеството вредности што ги прима функцијата f кога $x\in[a, b]$. Од ограниченоста на f следува дека и множеството E е ограничено; нека λ е супремум на E.

Според тоа, $f(x)\leq\lambda$ за секој $x\in[a, b]$, а за секој природен број n, постои $x_n\in[a, b]$, таков што

$$\lambda-\frac{1}{n}<f(x_n)\leq\lambda.$$

Поради $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda-1/n)=\lambda$, следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$. Низата x_1, $x_2,\ldots, x_n,\ldots$ е ограничена, па нека c е нејзина точка на натрупување. Како и погоре, се покажува дека постои подниза x_{i_k}, таква што $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{i_k})=c$. Од $a\leq x_{i_k}\leq b$, следува дека $a\leq c\leq b$, т.е. $c\in[a, b]$. Низата $f(x_{i_k})$ е подниза од $f(x_n)$, па од $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$, следува и $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{i_k})=\lambda$.

Од непрекинатоста на $f(x)$ добиваме

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{i_k}) = f(c),$$

т.е. $f(c)=\lambda$. Значи, $f(c)$ е најголемата вредност на функцијата во $[a, b]$. Јасно е како понатаму би се комплетирал доказот на теоремата. ◊

Во последните две теореми претпоставката за непрекинатост на $f(x)$ во сегмент не може да се замени со непрекинатост на $f(x)$ во отворен интервал.

На пример, функцијата $1/x$ е непрекината во интервалот $(0,1)$, но таа не е ограничена во тој интервал, додека пак функцијата x^2 е и непрекината и ограничена во интервалот $(0,1)$, меѓутоа во тој интервал таа нема најмала, ниту најголема вредност.

Непрекинатите функции на сегмент го имаат и следново својство:

***Теорема* 5 (за рамномерна непрекинатост)**

Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a, b]$, тогаш

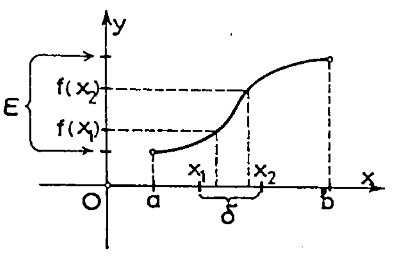
$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)(\forall\, x_1, x_2\in[a, b])(|\, x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon). \qquad (1)$$

***Доказ* *.** Да претпоставиме дека f е непрекината на $[a, b]$, но (1) не е точно, т.е.:

$$(\exists\varepsilon>0)\ (\forall\delta>0)\ (\exists\, u, v\in[a, b])\ (|\, u-v|<\delta \text{ и } |f(u)-f(v)|\geq\varepsilon). \qquad (2)$$

Нека $\varepsilon>0$ е број за којшто важи (2). Тогаш добиваме дека за секој $n\geq 1$, постојат u_n, v_n, такви што:

$$u_n,\ v_n\in[a, b], \qquad |\, u_n-v_n|<1/n, \qquad |f(u_n)-f(v_n)| \geq \varepsilon. \qquad (3)$$



Црт.2

Имено, (3) се добива ако се стави $\delta=1, 1/2,\ldots, 1/n,\ldots$. Низата u_n е ограничена, од што следува дека постои конвергентна подниза (u_{n_k}) од (u_n).

Ќе покажеме дека и низата (v_{n_k}) е исто така конвергентна и дека има иста граница како и (u_{n_k}). Навистина, поради $|v_{n_k} - u_{n_k}|<\dfrac{1}{n_k}$, $v_{n_k} - u_{n_k}$ е конвергентна со граница 0, а од тоа следува дека и (v_{n_k})

е конвергентна, бидејќи $v_{n_k}=(v_{n_k}-u_{n_k})+u_{n_k}$. Уште повеќе, и двете низи (u_{n_k}), (v_{n_k}) имаат иста граница; да ја означиме со c. Потоа, постои k_0, таков што:

$$k>k_0 \Rightarrow |f(u_{n_k})-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(v_{n_k})-f(c)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

од тоа следува дека:

$$k>k_0 \Rightarrow |f(u_{n_k})-f(v_{n_k})|\le|f(u_{n_k})-f(c)|+|f(c)-f(v_{n_k})|<\varepsilon,$$

што противречи на: $|f(u_{n_k})-f(v_{n_k})|\ge\varepsilon$. Според тоа, (2) не е точно, т.е. точно е (1). ◊

ВЕЖБИ

1*. Да се докаже: Ако f е непрекината функција во сегментот $[a, b]$, тогаш за секој број t што му припаѓа на опсегот E_f од f постои $c\in[a, b]$ таков што $f(c)=t$.

2*. Нека $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ е полином со непарен степен ($n=2k+1$, $a_{2k+1}\neq0$). Да се покаже дека $P(x)$ има барем еден реален корен.

3*. Нека f е непрекината функција на доменот $D_f=\mathbb{R}$ и нека $\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_n,\ldots$ е низа од периоди на f, таква што $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=\omega$. Да се покаже дека и ω е период на f.

4*. Нека f е непрекината функција на $\mathbb{R}$. Да се покаже дека, ако f е периодична функција без најмал позитивен период, тогаш таа е константна на $\mathbb{R}$.

Помош. Да се покаже, прво, дека инфимумот од позитивните периоди на функцијата е 0; потоа да се искористи резултатот од претходната вежба.

5.7. Точки на прекин

Ако во дадена точка a, функцијата f не го поседува својството на непрекинатост, тогаш за a велиме дека е ***точка на прекин на*** f. Да се потсетиме дека f ја нарековме непрекината во точката a ако се задоволени следниве три услови (види 5.3): (i) $a\in D_f$, т.е. $f(a)$ постои; (ii) постои $\lim\limits_{x\to a}f(x)$; (iii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. Според тоа, a е точка на прекин за f, ако е нарушен барем еден од условите (i)–(iii), а во зависност од тоа кои од горните услови се нарушени, ќе разликуваме неколку видови точки на прекин што подолу ќе ги класифицираме.

Пред да ја изнесеме најавената класификација, да се потсетиме, на забелешката од 5.5 во врска со односот меѓу поимите граница на функција и еднострани граници, Имено, таму забележавме дека: постои $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ акко постојат

$$f(a^-)=\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ и } f(a^+)=\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ и } f(a^-)=f(a^+). \tag{1}$$

Точката a ја викаме ***точка на отстранлив прекин*** на f ако се исполнети равенствата (1), но, или не постои $f(a)$, или ако постои $f(a)$, тогаш тој е различен од $f(a^-)=f(a^+)$.

Пример 1. За функцијата

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

којашто не е дефинирана за $x=0$, имаме $f(a^-)=1=f(a^+)$, така што $x=0$ е отстранлив прекин за оваа функција. Прекинот во $x=0$ можеме да го „отстраниме" ако оваа функција ја додефинираме ставајќи:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Да забележиме дека, при дефиницијата за еднаквост на рационални функции, всушност, ние и се раководевме од идејата: соодветната функција да биде дефинирана во точките на отстранлив прекин. Така, на пример, сметајќи дека функцијата $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$ е еднаква со $g(x)=x+1$, го „отстрануваме" прекинот $x=1$.

Пример 2. Да ја разгледаме функцијата f, определена со:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, \quad \text{за} \quad x\neq 1, \qquad f(1)=1.$$

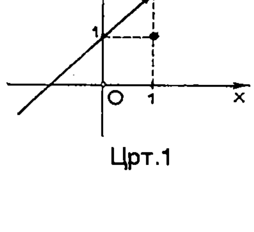
Функцијата f е дефинирана во точката 1, постојат и левата и десната граница и тие се еднакви:

$$f(1^-)=2=f(1^+).$$

Бидејќи

$$f(1)=1\neq f(1^-)=f(1^+)$$

и овде добиваме дека точката $x=1$ е точка на отстранлив прекин (црт.1). За да го „отстраниме" прекинот треба само да го замениме $f(1)=1$ со $f(1)=2$.



Црт.1

Да забележиме дека, според договорот за еднаковст на рационални функции (види **3.2**), имаме:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,$$

па доменот и на левата страна е $\mathbb{R}$.

Поопшто, ако

$$f(x)=\frac{(x-a)^k p(x)}{(x-a)^k q(x)},$$

каде што $q(a)\neq 0$, тогаш сметаме дека функцијата $f(x)$ е еднаква со

$$g(x)=\frac{p(x)}{q(x)}.$$

Кога не би го направиле овој договор, единствената разлика меѓу $f(x)$ и $g(x)$ би била таа што $f(x)$ не би била дефинирана за $x=a$, додека $g(a)=\frac{p(a)}{q(a)}$.

Но, поради $\lim_{x\to a} f(x)=g(a)$, добиваме дека a би била точка на отстранлив прекин за $f(x)$. Уште повеќе, секогаш кога a е точка на отстранлив прекин на една функција $f(x)$ (незадолжително рационална), би можеле доменот на f да го прошириме со a, земајќи $f(a)$ да е, по дефиниција, еднакво со

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

Точката a ја викаме ***точка на прекин од прв вид*** за функцијата f, ако постојат $f(a^-)$ и $f(a^+)$, но $f(a^-)\neq f(a^+)$. Нагледно овој вид прекин може да се искаже како „прекин со конечен скок". Имено, разликата

$$|f(a^-)-f(a^+)|$$

ќе ја викаме ***скок на функцијата*** f во точката a. При овој вид точки на прекин можат да настапат следниве случаи:

1) $f(a)$ не постои;

2) $f(a)$ постои но тој е различен и од $f(a^-)$ и од $f(a^+)$;

3) $f(a)$ постои и $f(a)=f(a^-)$; во овој случај f е непрекината одлево во точката a. Општо, независно од тоа дали $f(a^+)$ постои (како конечна граница) или не, ако $f(a^-)=f(a)$, велиме дека ***функцијата*** f ***е непрекината одлево во точката*** a;

4) Аналогно на 3), ако $f(a)=f(a^+)$, независно од тоа дали постои (конечна) граница $f(a^-)$ или не, велиме дека f ***е непрекината оддесно во*** a.

Пример 3. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\mathrm{sgn}x$, т.е.

$$f(x)=1 \text{ за } x>0, \quad f(0)=0, \quad f(x)=-1 \text{ за } x<0.$$

Бидејќи постојат $f(0^-)=-1$ и $f(0^+)=1$, но $f(0^-)\neq f(0^+)$, во точката $x=0$ имаме прекин од прв вид.

Точката a ја викаме ***точка на прекин од втор вид*** за функцијата f, ако барем една од границите $f(0^-)$ и $f(0^+)$ не постои или е бесконечна. Нагледно, случајот кога една од границите $f(0^-)$, $f(0^+)$ постои а другата е бесконечна, може да се искаже како „прекин со бесконечен скок".

Пример 4. Функцијата f, определена со:

$$f(x)=x\cos(1/x) \text{ за } x<0, \quad f(0)=0, \quad f(x)=\cos(1/x) \text{ за } x>0,$$

има прекин од втор вид во точката $x=0$. Навистина:

а) За која било низа, (x_n), $x_n<0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, имаме:

$$0\le|f(x_n)|=|x_n|\left|\cos\frac{1}{x_n}\right|\le|x_n|,$$

и поради $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$, добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$. Така, $f(0^-)=0=f(0)$ па $f(x)$ е непрекината одлево во 0.

б) Да ги земеме, сега, следниве две низи со позитивни членови: $x_n=2/(\pi+2n\pi)$ и $x_n'=1/2n\pi$. За соодветните низи од вредности на функцијата добиваме $f(x_n)=0$, $f(x_n')=1$, па значи $f(x_n)\to0$, кога кога $n\to\infty$, $f(x_n')\to1$, кога $n\to\infty$, што покажува дека не постои $f(0^+)$.

Пример 5. Функцијата $f(x)=\mathrm{tg}x$ има прекини од втор вид во секоја точка $x_k=\frac{2k+1}{2}\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ зашто во секоја од тие точки имаме $f(x_k^-)=+\infty$, $f(x_k^+)=-\infty$. Сликовито искажано, овде $f(x)$ во секоја точка x_k има бесконечен скок.

Забелешка. Во дискусијата што погоре ја спроведовме *по однос на точките на прекин, имплицитно е претпоставено дека станува збор за внатрешни точки на доменот на функцијата.* Што се однесува до крајните точки, поимот за непрекинатост (на сегмент) го воведовме во 5.6, па, ако во дадена крајна точка не се задоволени условите за непрекинатост, тогаш неа ја сметаме за точка на прекин. На пример, ако функцијата f не е дефинирана лево од точката a, тогаш a ќе ја сметаме за точка на прекин ако, f не е непрекината во потсегментот $[a, a+k)$, $k>0$; тоа значи, или не постои $f(a^+)$, или ако оваа граница постои, тогаш $f(a)\neq f(a^+)$. Слично ако a е десна крајна точка.

ВЕЖБИ

Да се испита непрекинатоста на функциите 1–4 и во случај на прекин во некоја точка, да се определи видот на прекинот.

1. $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1)\\ 3-x, & x\in[1,2].\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[0,1)\\ 1+x, & x\in[1,2].\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x<0\\ 0\ , & x=0\\ x\sin\frac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$ **4.** $f(x)=\mathrm{ctg}x$.

Во задачите 5 и 6 да се определи a така што соодветната функција да биде непрекината за секој $x\in\mathbf{R}$.

5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0.\end{cases}$ **6.** $f(x)=\begin{cases}3x-\sqrt{x^2-4}, & |x|\geq 2\\ ax, & |x|<2.\end{cases}$

5.8. Конструкција на графици

Како што забележавме порано, секогаш при изучувањето на функциите ќе се трудиме да ги конструираме и нивните графици. Преку два примера ќе покажеме како можат во таа смисла да се искористат границите и некои од својствата на непрекинатите функции.

Пример 1. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$.

1) ***Доменот е:*** $D=(-\infty, -1)\cup(-1, 2)\cup(2, +\infty)$.

2) ***Гранични вредности:*** [1]

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1^-,\quad \lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1^+.$$

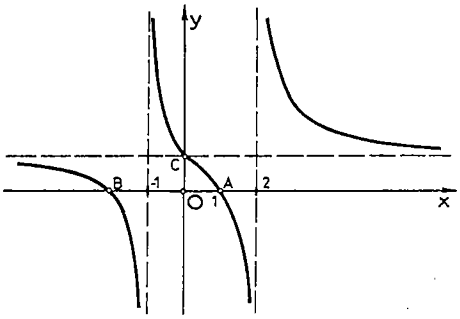
[1] $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b^+$ значи: кога x се стреми кон a, тогаш $f(x)$ се стреми кон b преку вредности поголеми од b; слично за $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c^-$.

3) ***Карактеристични точки***. Пред сè, тоа ќе бидат пресечните точки на графикот со координатните оски. Решенија на равенката $f(x)=0$ се $x=1$ и $x=-2$, па според тоа, пресечни точки со оската Ox се $A(1,0)$ и $B(-2,0)$; пресечна точка на графикот со оската Oy е $C(0,1)$.

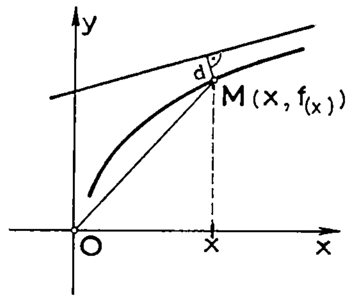
4. ***Таблица:***

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y	1^-	0	$-\infty \mid +\infty$	1	0	$-\infty \mid +\infty$	1^+

5) ***Графикот*** на функцијата сега можеме приближно да го конструираме (црт.1).



Црт. 1



Црт. 2

Правите $x=-1$, $x=2$ и $y=1$ при графикот на црт.1 се одликувааат со тоа што нивните точки стануваат поблиски до соодветната гранка на графикот во колку се „оддалечуваат" од координатниот почеток. Ваквите прави се викаат ***асимптоти***.

Општо, нека кривата L, зададена со равенката $y=f(x)$, има гранка која се оддалечува во бескрајност (црт.2). Ако растојанието d од променливата точка $M(x,f(x))$ на кривата L до определена права p се стреми кон нула кога M бескрајно се оддалечува од координатниот почеток, т.е.

$$\lim_{\overline{OM}\to+\infty} d(x)=0, \tag{1}$$

тогаш правата p се вика ***асимптота*** на кривата. За неа велиме дека е ***вертикална асимптота*** ако е паралелна со оската Oy, ***хоризонтална*** – ако е паралелна со оската Ox, а ***коса асимптота*** ако не е паралелна со ниедна од координатните оски. Ако

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

тогаш $x=a$ е вертикална асимптота, а ако

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b,$$

тогаш $y=b$ е хоризонтална асимптота. (Притоа, $x\to\pm\infty$ значи дека треба да се разгледаат посебно двете граници на $f(x)$: едната за $x\to+\infty$, а другата за $x\to-\infty$.)

Во границите со кои ги определуваме асимптотите, паралелни со координатните оски, не се содржи граница од облик

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty.$$

Ако за дадена функција $f(x)$ постои ваква граница, тогаш возможно е (но не мора) да постои асимптота од облик $y=ax+b$, т.е. може да постои права $y=ax+b$ таква, што растојанието $d(x)$ од точката $M(x, f(x))$ до правата да се стреми кон нула кога x се стреми кон бескрајност. Ако таква асимптота постои, да видиме како се определуваат a и b.

Според познатата формула за растојание од точка до права, имаме

$$d(x)=\frac{|ax-f(x)+b|}{\sqrt{a^2+1}}, \text{ т.е. } \sqrt{a^2+1}\cdot\frac{d(x)}{|x|}=\left|a-\frac{f(x)}{x}+\frac{b}{x}\right|,$$

па поради $\lim\limits_{x\to\pm\infty} d(x)=0$, добиваме

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{2}$$

Потоа, од $0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\sqrt{a^2+1}\cdot d(x)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[ax-f(x)+b]$

добиваме дека

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]. \tag{3}$$

Ако постојат границите (2) и (3) кога $x\to+\infty$, зборуваме за ***десна коса*** асимптота, а ако (2) и (3) постојат кога $x\to-\infty$, зборуваме за ***лева коса*** асимптота. Слично се дефинираат ***десна*** и ***лева*** хоризонтална односно ***горна*** и ***долна*** вертикална асимптота.

Да разгледаме еден пример во кој ќе се сретнеме со определување на коса асимптота.

Пример 2. Ќе го нацртаме графикот на функцијата

$$y=\frac{x^4}{x^3-1}.$$

1) Домен: $D=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$;

2) Гранични вредности и асимптоти:

$$\lim_{x\to-\infty} y=-\infty, \qquad \lim_{x\to1^-} y=-\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} y=+\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y=+\infty.$$

Од горните граници гледаме дека правата $x=1$ е вертикална асимптота и дека е можна и асимптота од облик $y=ax+b$. Од

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3-1}=0,$$

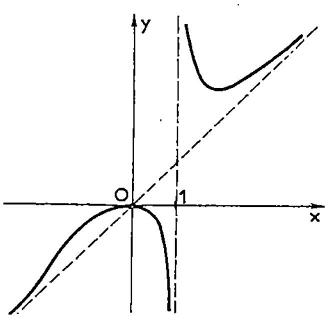
добиваме дека правата $y=x$ е асимптота.

3) Покрај единствената пресечна точка $O(0,0)$ на графикот на функцијата со двете координатни оски, ќе определиме уште неколку точки (за да можеме полесно да ја извршиме конструкцијата на графикот): $A(-2,-16/9)$, $B(-1,-1/2)$, $C(2,16/7)$.

4) Таблица:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y	$-\infty$	$-16/9$	$-1/2$	0	$-\infty \mid +\infty$	$16/7$	$+\infty$

5) График: црт. 3.



Црт. 3

Од обликот на функцијата е јасно дека за $x=0$ имаме максимум. Поради

$$\lim_{x\to1^+} y=\lim_{x\to+\infty} y=+\infty,$$

ако се има предвид и непрекинатоста на функцијата, за $x>1$, следува дека постои некој локален минимум.

ВЕЖБИ

Да се најдат асимптотите за секоја од кривите 1–4.

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$. **2.** $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-9}}$.

3. $y=(x^2+2)/\sqrt{x^2-4}$ **4.** $y=1/(1-e^x)$.

Да се конструираат графиците на секоја од функциите 1–4 и 5–9.

5. $y=\dfrac{x+1}{x^3+1}$. **6.** $y=\dfrac{(1/x)-1/(x+1)}{((1/(x-1))-1/x}$.

7. а) $y=e^{x+1/x}$; б) $y=e^{(x+1)/x}$.

8. $y=\ln\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$. **9.** $y=x^3/2(x+1)^2$.

5.9. Нараснување на функција

Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана во интервалот (a, b) и нека x_0 и x_1 се точки од тој интервал. Тогаш за

$$f(x_1)-f(x_0)$$

велиме дека е ***нараснување на функцијата*** $f(x)$, кога x нараснува од x_0 до x_1 (црт.1); во таа смисла x_1-x_0 се вика ***нараснување на*** x. Обично се пишува $x_1-x_0=\Delta x$, а исто така и

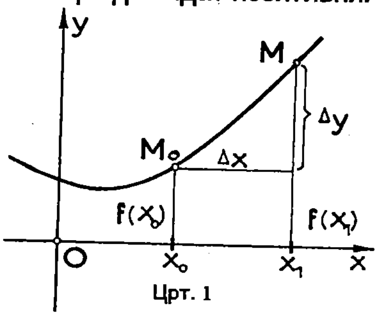
$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Напомнуваме дека нараснувањата не мора да бидат позитивни. Тоа се гледа од следниов

Пример 1. Нека $y=x^2$. Ако $x_0=-2$ и $\Delta x=1$, тогаш

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x^2=1^2-2^2=-3.$$

Потоа, за $x_0=-2$ и $\Delta x=-1$ добиваме $\Delta y=9-4=5$, а за $x_0=1$ и $\Delta x=1$ имаме $\Delta y=3$; најпосле, за $x_0=1$ и $\Delta x=-1$ добиваме $\Delta y=-1$.



Црт. 1

Да видиме сега, како се карактеризираат поимите за екстреми, монотоност, а и непрекинатост со помош на поимот за нараснување.

***Теорема* 1 (за екстреми)**

Функцијата $f(x)$ има (строг локален) максимум во точката x_1 ако и само ако постои позитивен број h, таков што

$$|\Delta x| < h \Rightarrow \Delta y = f(x_1+\Delta x)-f(x_1) < 0.$$

Аналогно, $f(x)$ има минимум во x_2, акко постои $h>0$, таков што

$$|\Delta x|<h \Rightarrow \Delta y>0. \ \Diamond$$

***Теорема* 2 (за монотоност)**

Нека $f(x)$ е дефинирана во D и нека x_0 е внатрешна точка на D.

а) Функцијата $f(x)$ расте во x_0 акко постои позитивен број $h>0$ таков што

$$|\Delta x| < h \Rightarrow \Delta y\Delta x > 0.$$

б) Функцијата $f(x)$ опаѓа во x_0 акко постои позитивен број $h>0$ таков што

$$|\Delta x|<h \Rightarrow \Delta y\Delta x <0. \ \Diamond$$

***Теорема* 3 (за непрекинатост)**

Функцијата $f(x)$ е непрекината во точката $x=x_0$ акко постои $f(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0.$

Ќе ја докажеме само Т.3, а другите ќе ги оставиме да бидат докажани преку вежби.

Ако $f(x)$ е непрекината во $x=x_0$, тогаш имаме

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \text{ т.е. } \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0.$$

Ако ставиме $x-x_0=\Delta x$, добиваме

$$0=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y.$$

Обратно, ако $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$, тогаш

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0), \text{ т.е. } \lim_{\Delta x\to 0} f(x)=f(x_0),$$

од што следува дека $f(x)$ е непрекината во x_0. ◊

ВЕЖБИ

Во задачите 1–4 да се најде Δy, при дадени $y(x)$, x_0 и Δx.

1. $y=\frac{1}{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}1$.

2. $y=\sqrt{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=3$.

3. $y=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $\Delta x=\frac{\pi}{6}$.

4. $y=x^3$, $x_0=2$, $\Delta x=-1$.

Да се докажат наведените равенства (5–8), при што во вежбата 7 се претпоставува дека x и $x+\Delta x$ се во доменот на дадената функција.

5. $y=x$, $\Delta y=\Delta x$.

6. $y=2^x$, $\Delta y=2^x(2^{\Delta x}-1)$.

7. $y=\ln x$, $\Delta y=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$.

8. $y=\sin x$, $\Delta y=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

9. Да се покаже дека функциите од задачите 5–8 се непрекинати во секоја точка од доменот, користејќи ја Т.3.

10. Да се докажат Т.1 и Т.2.

11. Да се одредат интервалите на монотоност и екстремите на функцијата $y=x^2-2x+2$.

I.6. ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Нека $M=\{1, 2, 3\}$ и f, g, h се ***трансформации*** на M (т.е. пресликувања од M во M), определени со:

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Да се најде составот: $f\circ f;\ f\circ g;\ g\circ h;\ f\circ g\circ h.$

2. Нека $M=\{1,2\}$. Да се најде множеството $\mathcal{T}$ од сите трансформации на M и да се состави шемата на групоидот $(\mathcal{T}, \circ)$ каде што „$\circ$" е операцијата состав на трансформации. Дали групоидот $(\mathcal{T}, \circ)$ е комутативен?

3. Да се покаже дека множеството од парни цели броеви е група во однос на операцијата (+) собирање на цели броеви.

Во задачите 4–6 да се испита дали зададеното множество е група во однос на назначената операција.

4. $G=\{3k|k\in\mathbb{Z}\}$; собирање (+) на цели броеви.

5. $G=\{4^k|k\in\mathbb{Z}\}$; множење на рационални броеви.

6. $G=\{a+b\sqrt{2}\,|a, b\in\mathbb{Z}\}$; собирање на реални броеви.

Во задачите 7–8 да се провери дали даденото множество е а) прстен, б) поле, во однос на назначените операции (+ и ·).

7. $G=\{5k|k\in\mathbb{Z}\}$; собирање и множење на цели броеви.

8. $G=\{a+b\sqrt{2}\,|a, b\in\mathbb{Q}\}$; собирање и множење на реални броеви.

Во задачите 9–15 да се докажат дадените тврдења со помош на математичката индукција.

9. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}.$

10. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$

11. Низата: $a_1=\sqrt{c}$, $\quad a_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$, $\quad a_3=\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}},\ldots$, каде што c е позитивен број,
а) расте, б) е ограничена.

12. $-1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}-3\cdot\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n n\cdot\binom{n}{n}=0,\quad n>1.$

13. $6\,|\,n^3+5n.$ **14.** $11\,|\,6^{2n}+3^{n+2}+3^n.$

15. $(1+x)^n\geq 1+nx;\ n\in\mathbb{N},\ x\geq -1$ (**Бернулиево неравенство**).

16. Да се покаже Бернулиевото неравенство при претпоставка $x\geq 0$, со помош на биномната формула.

17.* Нека A е множество со n различни елементи и нека со $\mathcal{P}_k(A)$ е означена фамилијата подмножества B од A, такви што $|B|=k$. Да се покаже дека: а) $|\mathcal{P}_k(A)|=\binom{n}{k}$, за секој $k\leq n$; б) $|\mathcal{P}(A)|=2^n$.

18.* Да се покаже дека за секои $a, b, c, d, a_1, a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+$ се точни неравенствата:

1) $a+b\geq 2\sqrt{ab}$; 2) $a+b+c+d\geq 4\sqrt[4]{abcd}$;

3) $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$; 4)* $a_1+a_2+\ldots+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$.

19.* Какви треба да бидат позитивните рационални броеви r и s за да биде рационален и бројот r^s?

20. Да се докаже дека:

$$(\log_{a_1}a_2)(\log_{a_2}a_3)\ldots(\log_{a_{n-1}}a_n)(\log_{a_n}a_1)=1.$$

Во задачите 21–28 да се решат дадените равенки и неравенки, односно системи равенки.

21. $x^2=3+\sqrt{4x^2-4x+1}.$

22. $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x^2-6}=7.$

23. $(x-1)^{\sqrt{x+1}}=(x-1)^{\frac{x+1}{2}}.$

24. $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1).$

25. $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2.$

26. $(y-x^2=3)\wedge(x+y=5).$

27. $\begin{cases}|x+1|-|y+2|=-2\\ |x-2|+2y=5.\end{cases}$

28. $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=\frac{5}{2}\\ \log_6(x^2+y^2)=1.\end{cases}$

29. Да се изрази волуменот V на конус, впишан во топка со радиус R, како функција од: а) висината H, б) радиусот r на основата, в) аголот 2α на врвот од осниот пресек. Да се определи и доменот на соодветната функција.

30. Да се изрази вкупната плоштина P на конус, опишан околу топка со радиус R, како функција од неговата висина H и да се определи нејзиниот домен.

31. Во триаголникот ABC е дадено: $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{BC}=8$ cm, $\overline{AC}=10$ cm. Нека е означена со $P=P(x)$ плоштината на делот од триаголникот (што ја содржи точката A), отсечен од него со права, нормална на страната AC и на растојание x од темето A. Да се запише аналитичен израз за функцијата и да се одреди доменот.

32. Меѓу сите правоаголници со дадена плоштина P да се најде оној што има најмал периметар.

33. Да се определи доменот на функцијата $f(\sin x)$ ако: а) $[-1, 1]\subseteq D_f$; б) $[0, 1]=D_f$; в) $[1, +\infty)=D_f$, каде што D_f е доменот на f.

Во задачите 34–36, да се определат f^n и $f^{(n)}$ (во смисла на вежбата 10 од **2.3**), за секој $n\geq 1$.

34. $f(x)=\frac{1}{x}$. **35.** $f(x)=|x|$. **36.** $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

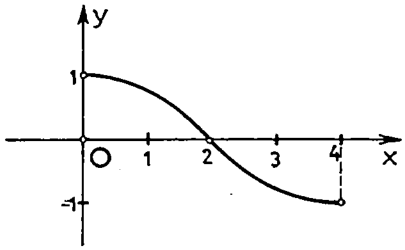
Во задачите 37–43 да се нацрта графикот на соодветната функција ако графикот на $f(x)$ е како на црт.1.

37. $y=f(x+1)$. **38.** $y=f(2x)$.

39. $y=|f(x)|$. **40.** $y=\frac{|f(x)|}{f(x)}$.

41. $y=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$.

42. $y=[f(x)]$. **43.** $y=f([x])$



Црт. 1

44. Да се докаже дека производот на

а) две непарни функции е парна функција.

б) една парна и една непарна функција е непарна функција.

45. Да се покаже дека функцијата $\varphi(x)=\frac{1}{2}(3^x+3^{-x})$ е парна, а $\frac{1}{2}(3^x-3^{-x})$ е непарна, како и дека е точен идентитетот: $\varphi(u+v)+\varphi(u-v)=2\varphi(u)\cdot\varphi(v)$.

46. Да се докаже дека секоја функција $f(x)$ определена на симетричен интервал $(-a, a)$ е збир од една парна и една непарна функција.

Помош. $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ е парна, а $\psi(x)=f(x)-f(-x)$ е непарна функција.

47. Да се претстави дадената функција како збир од една парна и една непарна функција: а) 2^x; б) $\sqrt[3]{x}$; в) $2/(x-1)$.

Во задачите 48–51, да се најде функција f што го задоволува условот $f\circ g=h$, при дадени g и h.

48. $g(x)=x+1$, $h(x)=2x+x^2$.

49. $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$, $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

50. $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $h(x)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

51. $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $h(x)=x^2-1$.

52. Ако $f_1(x)=x/\sqrt{1+x^2}$ и $f_{n+1}=f_1\circ f_n$, да се покаже дека $f_n(x)=x/\sqrt{1+nx^2}$.

Во задачите 53–56 да се испита дадената функција (домен, парност, монотоност, ограниченост, екстреми) и да се нацрта графикот.

53. $\sqrt{4-x^2}$.

54. $\sqrt{x^2-1}$.

55. $\dfrac{2}{1+x^2}$.

56. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{за} \quad x\le -1 \\ 2, & \text{за} \quad -1<x\le 0 \\ x^2+1, & \text{за} \quad x>0. \end{cases}$

Во задачите 57–62 да се најде инверзијата на дадената функција, да се наведе нејзиниот домен и да се нацрта графикот.

57. $3-2x$.

58. $\sqrt[3]{x-1}$.

59. 3^x-2

60. $\dfrac{1+x}{1-x}$.

61. $\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$.

62. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{за} \quad x<-1 \\ (x+1)^2, & \text{за} \quad x\ge -1 \end{cases}$

63. Нека φ и ψ се функции, такви што φ има еднозначна инверзија. Да се претстави функцијата $y(x)$, таква што $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Во кој случај $y(x)$ има инверзија?

Во задачите 64–68, а) да се нацртаат кривите зададени со соодветните параметарски равенки, б) да се елиминира параметарот t, и в) да се определат функциите $y(x)$ определени со тие равенки.

64. $x=3-t$, $y=t^2+1$.

65. $x=t^3$, $y=t^2$.

66. $x=3\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$.

67. $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

68. $x=t-t^2$, $y=t^2-t^3$.

69. Во секоја од задачите 64–68, каде што функцијата $y(x)$ не е еднозначно определена, да се определат по три такви функции.

70. Нека a е даден реален, а n природен број. Со помош на теоремата на Безу, докажи дека:

а) $x-a$ е делител на x^n-a^n;

б) $x+a$ е делител на $x^{2n}-a^{2n}$;

в) $x+a$ е делител на $x^{2n+1}-a^{2n+1}$.

71. Да се реши претходната задача директно, т.е. без Т. на Безу.

72. Нека $a(\neq 0)$ е даден реален, а n природен број. Докажи дека:

а) x^n+a^n не е делив со $x-a$;

б) $x^{2n+1}-a^{2n+1}$ не е делив со $x+a$;

в) $x^{2n}+a^{2n}$ не е делив ни со $x-a$ ни со $x+a$.

73. Да се покаже дека полиномот $P(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}+2x+1$ е делив со $2x+1$.

74. Да се разложат на множители (од прв и втор степен во смисла на Т.12 од **3.1**) следниве полиноми:

а) x^3+1; б) x^6-1; в) x^4+x^2+1; г) x^4+1;

д) x^8-1; ѓ) $x^{16}-4x^{12}+6x^8-4x^4+1$.

75. При кој услов равенката $x^3+px+q=0$ ќе има двоен корен α?

76. За кои вредности на a и b, бројот 1 ќе биде двоен корен на полиномот $3x^5-4x^2+ax+b$?

77. Да се најде полиномот од степен 4 којшто: има двоен корен 1, прости корени -2 и 0 и никакви други корени. Дали е битна претпоставката за степенот на полиномот?

Во задачите 78–83 да се определат сите рационални корени и да се извршат соодветни разложувања.

78. $x^3-10x^2+23x-14$. **79.** $x^4-2x^3-5x^2+4x+6$.

80. $x^5-7x^3+2x^2+12x-8$. **81.** $2x^3-3x^2-3x+2$.

82. $3x^3-2x^2+2x+1$. **83.** $3x^4-5x^3-11x^2+15x+6$.

84. Да се најде НЗД на полиномите:

$P(x)=x^5-2x^4+2x^3-3x^2+1$, $Q(x)=x^4-x^3+2x^2-x+1$.

85. Да се најде остатокот при делењето на $x^5+3x^4-2x^2-1$ со $(x-1)(x+2)(x+3)$.

Во задачите 86–91 да се реши равенката $f(x)=g(x)$.

86. $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=x$. **87.** $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\cdot\lg x$.

88. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, $g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$.

89. $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

90. $f(x)=\cos x$, $g(x)=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$.

91. $f(x)=\sqrt{x^3}$, $g(x)=-x\sqrt{x}$.

Во задачите 92–94, да се утврди за кои вредности на x е точно даденото равенство.

92. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$. **93.** $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg} x$.

94. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} 1=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

95. Да се покаже дека:

а) $\operatorname{arctg} 3-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$; б) $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

96. Да се претстави графички функцијата:

а) $\arccos\frac{1}{x}$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; в) $x-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Во задачите 97–100, да се најде доменот на дадената функција.

97. $\sqrt{9-x^2}+\ln\frac{x+1}{x-1}$. **98.** $\arcsin(4x-3)$.

99. $\arcsin(1-x)+\ln(\ln x)$. **100.** $\arccos(3+2^{-x})$.

101. Да се докаже дека низата од задачата 11 е конвергентна и да се најде нејзината граница.

Да се испитаат низите дадени во 102–107.

102. $n+\frac{1}{n}$. **103.** $n^{(-1)^n}$. **104.** $\frac{(-1)^n n}{1+n}$.

105. $\frac{(-1)^n}{3n-1}$. **106.** $0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$. **107.** $2,12\underbrace{2121\ldots21}_{n}$.

108.* Да се докаже резултатот од вежбата 10 од **1.9** со помош на поимот за конвергентна низа.

109.* Да се докаже дека едно подредено поле е комплетно акко секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Во задачите 110–115 да се пресмета границата.

110. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}$. **111.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5-x}}+\frac{3}{x}-2\right)$.

112. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}\right)$.

113. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

114. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{ctg}x}}$.

115. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Во задачите 116–128 да се испита дадената функција (домен, нули, граници, асимптоти, монотоност, ограниченост, график).

116. $2^{|x|}$.

117. $\log(x+1)$.

118. $\log x^2$.

119. $\ln(1+x^2)$.

120. $\dfrac{1}{x^2(1-x^2)}$.

121. $\sqrt{2x^2+x+6}$.

122. $\dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

123. $\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

124. $\dfrac{1}{\sqrt{x+|x|}}$.

125. $[\sin x]$.

126. $\mathrm{sgn}(\cos x)$.

127. $(x^3-8)/(x^2-3x+2)$.

128. $(2x-1)/\sqrt{x^2-1}$.

129. Да се покаже дека функцијата на Дирихле има прекин од втор ред во секоја точка.

130.* Да се определи функцијата $f(x)$ што е непрекината во $\mathbb{R}$ и за секој пар $x, y\in\mathbb{R}$, го задоволува равенството:

а) $f(x+y) = f(x)+f(y)$;

б) $f(x+y) = f(x)f(y)$.

I.7. ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

I.1. Јазикот на математиката

1.1. (Стр. 6)

2. а) $A \subset B, A \subset D, B \subset D, C \subset D$. б) Ниедно од A, B, C не е подмножество од кое било друго. **3.** $A \cup B = \{1, 2, x, y\}$; $A \cap B = \{x\}$; $A \setminus B = \{1, 2\}$; $B \setminus A = \{y\}$; $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (x, x), (x, y)\}$; $B \times B = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$; $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{x\}, \{1, 2\}, \{1, x\}, \{2, x\}, A\}$. **6.** а) $AA = A{+}A = A$. б) $AB = BA$. в) $A{+}B = B{+}A$. г) $A{+}(B{+}C) = (A{+}B){+}C$. д) $A(A{+}B) = A{+}AB = A$. ѓ) $A(B{+}C) = AB{+}AC$. е) $A{+}BC = (A{+}B)(A{+}C)$. **10.** а) $X = \{4, 5\} \cup Y$, каде што $Y \in \mathcal{P}(A)$. б) Нема решение. в) $X = A \cup Y$, за кое било множество Y, такво што $Y \cap \{4, 5\} = \varnothing$. г)–д). Нема решение. ѓ) $X = \{1\} \cup Y$, каде што Y е кое било множество дисјунктно со C. **11.** а) $A \subseteq B$. б)–в) $B \subseteq A$. г) $A \cap B = \varnothing$. **13.** Не. *Помош.* Да се искористи вежбата 5: д) и ѓ) или д) и е). **14.** α е нерефлексивна; β е нерефлексивна, антисиметрична, транзитивна; γ е нерефлексивна, симетрична; δ е еквиваленtност; ρ е стриктно подредување.

1.2. (Стр. 13)

1. а), б), г), е). **2.** а)–в) ⊤. г) ⊥. д) ⊤. **3.** ⊥. **4.** а) Обете се вистинити. б) Обете се невистинити. **6.** б) Таб. 1.

Таб. 1

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤

8. Во сите случаи е ⊤. **9.** а) $\{1, 2, 3, 6\}$ во $\mathbb{N}$; $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$ во $\mathbb{Z}$. б) $\{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ во $\mathbb{N}$; $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ во $\mathbb{Z}$. в) $\varnothing$ и во $\mathbb{N}$ и во $\mathbb{Z}$. г) $\{3\}$ во $\mathbb{N}$; $\{-1, 3\}$ во $\mathbb{Z}$. д) $\{2\}$ во $\mathbb{N}$; $\{0,2\}$ во $\mathbb{Z}$. ѓ) $\{1, 2\}$ во $\mathbb{N}$; $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ во $\mathbb{Z}$. **10.** а) Секој природен број е позитивен. б) Постои природен број чијшто квадрат е еднаков на 9. в) и г) (се еквивалентни): Не постои рационален број чијшто квадрат е еднаков со 2. **11.** а) $\neg(\exists x \in \mathbb{R})\ x \in \mathbb{Q}$. б) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{Z})\ k > x$. в) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ m < n$. **13.** Не. *Помош.* Да се искористи вежбата 5: д) и ѓ) (или д) и е)). **14.** 1) α е рефлексивна $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in M)\ x\alpha x$. 2) α е нерефлексивна $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in M)\ x\bar{\alpha}x$. α е симетрична $\Leftrightarrow$ $(x\alpha y \Rightarrow y\alpha x)$. 4) α е антисиметрична $\Leftrightarrow$ $(\forall (x, y) \in M^2)(x \neq y \Rightarrow (x\bar{\alpha}y \vee y\bar{\alpha}x))$; поинаку запишано: $((\forall (x, y) \in M^2)\ ((x\alpha y \wedge y\alpha x) \Rightarrow x = y)$. 5) α е транзитивна $\Leftrightarrow$ $((x\alpha y) \wedge (y\alpha z) \Rightarrow x\alpha z)$.

1.3. (Стр. 20)

1. $f\circ g = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ d & c & c \end{pmatrix} : P \to N$; $g\circ g = \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix} : \{b\} \to Q$; $f\circ f = \varnothing_N$; $g\circ f = \varnothing_Q$.

2. $f(\{1, 2\}) = \{c, d\}, f^{-1}(\{a, c\}) = f^{-1}(\{c\}) = \{1, 3\}; g(\{a, b\}) = \{1, 2\}, g^{-1}(\{1, 2, 4\}) = \{a, b\}$. **3.** Ако h е инјекција, тогаш се точни и тврдењата е), ж), з). **4.** а) $\varnothing_M$. б) f. в) $f\circ g$. г) $\varnothing_P$.

1.4. (Стр. 27)

1. На пример, $2+2 = 2+(1+1) = (2+1)+1 = 3+1 = 4$. **2.** $2x = (1+1)x = x+x$. **3.** 2, 3, 5, 7. **9.** Ако M е множество со барем два различни елементи a, b, тогаш множеството G од сите пресликувања $f: M \to M$ е асоцијативен групоид во однос на операцијата состав на пресликувања. Овој групоид не е комутативен, бидејќи (на пример) $f\circ g = f \neq g = g\circ f$, каде што $(\forall x \in M)\, f(x) = a$, $g(x) = b$.

1.5. (Стр. 34)

2. а) $0 = 0\cdot x = (e+(-e))x = ex+(-e)x = x+(-e)x \Rightarrow (-e)x = -x$. б) Од а) и второто равенство од Т.4 следува дека $x(y-z) = x(y+(-e)z) = xy+x(-e)z = xy+x(-z) = xy-xz$. **4.** Нулата во $(P\times P; +; \cdot)$ е $(0, 0)$; ако $x, y \in P$ и $x\neq 0, y\neq 0$, тогаш $(x, 0)$ и $(0, y)$ се различни од $(0,0)$ но $(x, 0)\cdot(0, y) = (0, 0)$. **8.** а) 1, −1, 2, −2, 3, −3, 6, −6. **9.** −2, −3, −5, −7. **10.** а) (x, y): (0, 0) и (2, 2). б) (x, y): (21, 1), (−21, −1), (6, 2), (−6, −2), (−1, 3), (1, −3), (−6, 4), (6, −4), (−14, 6), (14, −6), (−21, 8), (21, −8), (−34, 12), (34, −12), (−71, 24), (71, −24).

1.6. (Стр. 39)

1. *Решение* (за $x^2 = 5$). Ако $r\in \mathbf{Q}^+$, $r = a/b$ е таков што $r^2 = 5$, $(a, b) = 1$, тогаш $a^2 = 5b^2$, т.е. дека a се дели со 5. Заменувајќи $a = 5c$ добиваме дека и b се дели со 5, а сето тоа противречи на претпоставката дека a и b се заемно прости. **2.** *Решение*. Лесно се проверува дека, за $abc \neq 0$ даденото равенство е еквивалентно со: $(a+b)(a+c)(b+c) = 0$, од што следува дека тоа равенство е точно акко: ниеден од броевите a, b, c не е нула, а барем еден од броевите $a+b$, $a+c$, $b+c$ е нула. **3.** *Решение*. а) Нека $h = 2-b^2$. Тогаш, за секој $n\in \mathbf{N}$, имаме:

$$\left(b+\frac{1}{n}\right)^2 = b^2+\frac{2b}{n}+\frac{1}{n^2} = 2-h+\frac{2b}{n}+\frac{1}{n^2} \leq 2-h+\frac{2b+1}{n}.$$

Избирајќи го $n\in\mathbf{N}$, така што да биде $-h+(2b+1)/n<0$, т.е. $n>h/(2b+1)$, добиваме дека $c^2<2$, каде што $c = b+1/n > b$. б) За $n>2b/(b^2-2)$, $d = b-1/n$ имаме: $0<d<b$, $d^2>2$. **4.** *Решение*. Ако $x_0 = c/d$ е решение, каде што c, $d\in\mathbf{N}$, $(c, d) = 1$, имаме $c^k = ad^k$ што е можно само за $d = 1$, т.е. $x_0 = c\in\mathbf{N}$. **5.** $1/(n+1)+\ldots+ +1/(2n) \geq n[1/(2n)] = 1/2$. **6.** *Решение*. Нека, $x = 3a+b$, $y = 3c+d$, каде што a, $c\in\mathbb{Z}$, b, $d\in\{0, 1, 2\}$. Ако $b=0 \vee d=0 \vee b+d=3 \vee b=d$, тогаш точноста е јасна, а друга можност не постои. **8.** Со помош на Т.5 и индукција. **9.** 1, 2, 0, 3. **10.** Цифрите на a, при десетичен систем.

1.7. (Стр. 46)

1. *Помош.* а) $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$. б) $1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{a^2+a+1}{a(a+1)}$.

2. *Помош.* а) $[(a+b)/2]^2-ab = [(a-b)^2]/4$. б) $a^{-1}+b^{-1}-(a+b)^{-1} = (a^2+b^2+ab)/ab(a+b)$. в) $(a^4+b^4)-(a^3b+ab^3) = (a-b)^2(a^2+ab+b^2)$. 4. Со индукцијата по n. 5. Со помош на Бернулиевото неравенство.

1.8. (Стр. 54)

1. *Решение.* $a = \sup A$ постои поради комплетноста на $\mathbf{R}$. На потполно ист начин како во вежбата 3 од 1.6 се покажува дека не е можно ни едно од неравенствата: $a^2 < 2$, $a^2 > 2$. Според тоа, $a^2 = 2$ од што следува дека a е ирационален. (Искористена е и Т.10, од 1.6.) 2. За секој $r\in\mathbf{Q}$, $r+a\in\mathbf{J}$. 3. Ако a е ирационалниот број од вежбата 1, тогаш: $1 < a < 2$, па: $0 < a-1 < 1$, $a-7 < -5$, $a+8 > 9$. 5. *Помош.* Според својството 4°, постојат r, $s\in\mathbf{Q}$, такви што $c < r < s < d$. Потоа се користи резултатот од претходната вежба. 6. *Помош.* Ова е последица од 4° и претходната вежба. 7. *Помош.* а) За $c\in(a, b)$, $\varepsilon = \min\{c-a, b-c\}$, имаме $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) < (a, b)$. в) Да се искористи резултатот од вежбата 4. д) Дефиницијата за отворено множество може да се формулира и на следниов начин. Ако $U\subseteq\mathbf{R}$, тогаш: U е отворено акко $(\forall x)[x\in U\Rightarrow((\exists\varepsilon>0)\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset U]$. За $U=\varnothing$, претпоставката е лажна за секој $x\in\mathbf{R}$. ѓ) Ако $x\in U\cap V$, каде што U и V се отворени, тогаш $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1)\subset U$, $(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)\subset V$, за некои ε_1, $\varepsilon_2\in\mathbf{R}^+$. Тогаш за $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, имаме: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset U\cap V$. 9. *Решение.* Нека a е точка на згуснување на M и нека $\varepsilon\in\mathbf{R}^+$. Тогаш, постои $a_1\in M$, $a_1\neq a$, $a_1\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Ако $0 < \varepsilon_1 < |a-a_1|$, тогаш постои $a_2\in M$, $a_2\neq a$, $a_2\in(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$. Од изборот на ε_1, следува: $a_2\neq a_1$. Потоа, се избира $\varepsilon_2\in\mathbf{R}^+$, таков што $\varepsilon_2 < |a-a_2|$, итн. 10. а) $-1/2$. б) $[1, 2]$. в) $-1/3$, 7. г) а. 11. а) $[-3, 3]$. б) $(0, 2/3)$.

1.9. (Стр. 59)

3. *Помош.* Ако $a = a_0, a_1 \dots a_m$, $b = b_0, b_1 \dots b_n$, тогаш, според (i), можеме да сметаме дека $m = n$, а потоа, користејќи го и (ii), ги добиваме правилата за оперирање со конечни десетични дропки како последици од соодветните правила за собирање и множење на природни броеви, претставени во десетичен систем. 4. Комутативен групоид со единица, но не и полугрупа, бидејќи (на пример): $(0,8*0,7)*0,6 = 0,6*0,6 = 0,4$, а $0,8*(0,7*0,6) = 0,8*0,4 = 0,3$; $0,4 \neq 0,3$. 5. 21,9(3); 0,(142857); 0,075; 0,84375; 0,(747). 6. *Решение.* Горните резултати се добиени според правилото за делење на броеви запишани во десетичен систем, при што делењето се врши сè додека не се добие остаток нула, или додека не се дојде до ситуација кога децималите се повторуваат периодично. Подолу даваме подетално образложение на постапката. Да

претпоставиме дека c, $d \in \mathbf{N}$, $c < d$, и да ставиме $c_0 = c$, $10\,c_{m-1} = a_m d + c_m$ каде што $0 \le c_m < d$. Тогаш добиваме, $0 \le a_m \le 9$ и:

$$\frac{c}{d} = \frac{a_1}{10} + \frac{c_1}{10d} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_m}{10^m} + \frac{c_m}{10^m d}$$

за секој $m \ge 0$. Според тоа: $x_m \le \frac{c}{d} < x_m + \frac{1}{10^m}$, каде што

$x_m = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_m}{10^m}$. Значи: $\frac{c}{d} = 0, a_1 a_2 \ldots a_m \ldots$

Притоа, поради $0 \le c_m < d$, меѓу броевите $c_1, c_2, \ldots, c_d$, барем два се еднакви, па ако k, $p \in \mathbf{N}$ се најмалите природни броеви, такви што $c_k = c_{k+p}$, ќе имаме:

$a_{k+1} = a_{k+p+1}, \ldots, a_{k+p} = a_{k+2p}$, т.е. $\frac{c}{d} = 0, a_1 \ldots a_k (a_{k+1} \ldots a_{k+p})$.

7. 4/33. *Решение*. Нека $c/d = 0,(12)$. Според претходната задача имаме: $10c = d + c_1$, $10c_1 = 2d + c$, т.е. $100c = 10d + 10c_1 = 12d + c$, и конечно: $c/d = 12/99 = 4/33$.

8. *Доказ*. Ако ставиме $c/d = 0,(a_1 a_2 \ldots a_q)$, тогаш, според вежбата 6, точни се равенствата $10c = a_1 d + c_1$, $10c_1 = a_2 d + c_2$, ..., $10c_{q-2} = a_{q-1} d + c_{q-1}$, $10c_{q-1} = a_q d + c$, од што следува: $10^q c = 10^{q-1} a_1 d + 10^{q-1} c_1 = 10^{q-1} a_1 d + 10^{q-2} a_2 d + 10^{q-3} c_2 = \ldots = (10^{q-1} a_1 + 10^{q-2} a_2 + \ldots + 10 a_{q-1} + a_q) d + c$, т.е.:

$$\frac{c}{d} = \frac{10^{q-1} a_1 + 10^{q-2} a_2 + \ldots + 10 a_{q-1} + a_q}{10^q - 1} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_q}{\underbrace{99\ldots9}_{q}}$$

9. *Решение*. а) $8,(24) = 8 + 0,(24) = 8 + 24/99 = 272/33$. б) $0,2(45) = 0,2 + 0,0(45) = 0,2 + (1/10) \cdot (45/99) = 27/110$. в) $3,110(13) = 3,11 + 0,000(13) = 3,11 + (1/10^3) \cdot 0,(13) = 3,11 + (13/10^3 \cdot 99) = (3110 \cdot 99 + 13)/99000$. **10**. *Помош*. Ова е последица од задачата 8, ако се има предвид дека:

$$a = \frac{a_1 \ldots a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1} \ldots a_{k+p}}{10^k (10^p - 1)}.$$

11. 2; 0,2. **12**. 2/3; 2/3. **13**. 1/300; 1/99. **14**. $\delta < 0,01$; $\varepsilon < 1/141$. **15**. $11,40 \le P \le 11,60$

1.10 (Стр. 64)

2. Равенката е еквивалентна со: $(x+p)^2 = p^2 - q$, па според тоа: постои решение $x \in \mathbb{R}$ акко $p^2 - q \ge 0$, и притоа имаме $x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$.

3. $\sqrt{2} - 1$. **4**. $\sqrt{3} - 1$. *Помош*. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b})/2} \pm \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b})/2}$.

5. $3\sqrt{7}-2\sqrt{3}$. **6.** $\sqrt{5}+2$. **7.** 1. **8.** $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+3)(3\sqrt{2}-4)$. **9.** $6-2\sqrt[4]{27}$. **10.** $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{9}+4)$. **11.** 17. **12.** Левата страна е дефинирана за $-1\le x\le 1$. Но, $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}>1$, за секој $x\in[-1,\ 1]$, па равенката нема решение. **13.** 3. **14.** 0, 1/9. **15.** 6, -1. **16.** $(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$. **17–20.** Равенствата се точни за сите реални вредности на променливите, такви што во секој израз од облик $\log_u v$ имаме $v>0$, $u>0$, $u\ne 1$. **21.** Нека $r=m/n$, $(m,n)=1$. Ако n е непарен, тогаш a^r е еднозначно определен и за $a<0$. (За a=0, не смее $r<0$).

1.11. (Стр. 68)

1–7. *Помош.* Стандардно: се проверува за n=1, се претпоставува точност за n и се докажува за n+1. Така, во **6** имаме $3^{2\cdot1+2}-8\cdot1-9=64$. Претпоставувајќи дека постои $a\in\mathbb{Z}$, таков што $3^{2n+2}-8n-9=64a$, добиваме: $3^{2(n+1)+2}-8(n+1)-9=9(64a+8n+9)-8n-17=64(9a+n+1)$. **8.** *Помош.* Поради $a_1=2$, $a_2=\sqrt{6}$ имаме: $a_1<3$ и $a_1<a_2$. Да претпоставиме дека $a_n<3$ и $a_n<a_{n+1}$. Тогаш $a_{n+1}=\sqrt{4+a_n}<\sqrt{4+3}<3$ и: $a_{n+2}=\sqrt{4+a_{n+1}}>\sqrt{4+a_n}=a_{n+1}$.
9. *Помош.* Да претпоставиме дека k–та редица во Паскаловиот триаголник може да се запише:

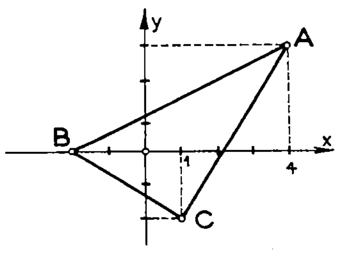
$$\binom{k}{0}\ \binom{k}{1}\cdots\binom{k}{i}\ \binom{k}{i+1}\cdots\binom{k}{k}$$

За бројот B од редицата k+1, што треба да се добие како збир од $\binom{k}{i}$ и $\binom{k}{i+1}$, според формулата (7), ќе имаме: $B=\binom{k}{i}+\binom{k}{i+1}=\binom{k+1}{i+1}$, за секој $i=0,1,\ldots,k$. **10.** а) $485-198\sqrt{6}$. б) $10a^4b+20a^2b^3c+2b^5c^2$.
11–12. Помош. Во БФ да се стави $a=b=1$ и $a=1$, $b=-1$, соодветно.

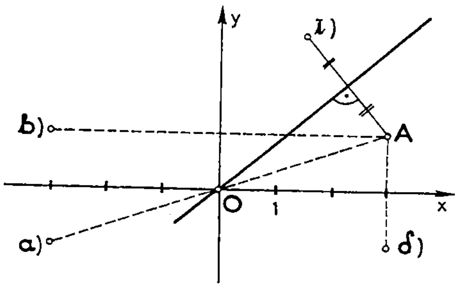
14. 3) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\sum_{i=1}^{n}i^3$. 12) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$.

1.12. (Стр. 77)

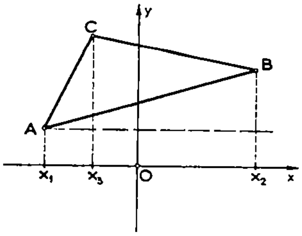
1. Црт.1 **2.** Црт.2.



Црт.1



Црт.2



Црт. 3

3. $3\sqrt{5}+\sqrt{34}+\sqrt{13}$. **4**. Да. **5**. $r = 5$; $(x-3)^2+(y+2)^2 = 25$. **6**. *Решение*. Ако имаме ситуација како на црт.3, тогаш $P=P_1+P_2-P_3$, каде што: $2P_1=(x_3-x_1)\cdot(y_1+y_3)$, $2P_2=(x_2-x_3)(y_2+y_3)$, $2P_3=(x_2-x_1)(y_1+y_2)$. По средувањето: $2P=x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$. Кога би ставиле, на пример: $B(x_3, y_3)$, $C(x_2, y_2)$, би добиле: $2P=-[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$.

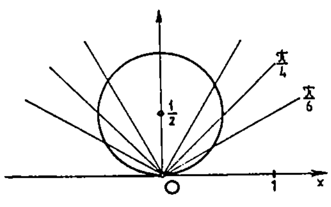
7. а) 33/2. б) 9. **9**. $M(\varphi, 5)$, $\mathrm{tg}\varphi = 3/4$. **10**. $M(2, 2\sqrt{3})$.
11. а) Архимедова спирала (црт.16 од **1.12**, при a=1, „поместена" за 1 од O надесно). б) Црт.4. *Помош*. За $\varphi = 0$ имаме ρ=0, за $\varphi = \pi/6$ добиваме $\rho = 1/2$ итн. Така ја формулираме табелата

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

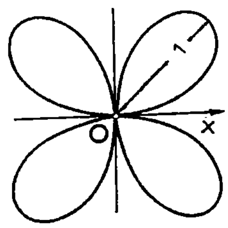
в) Црт. 5.

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	...
ρ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	...

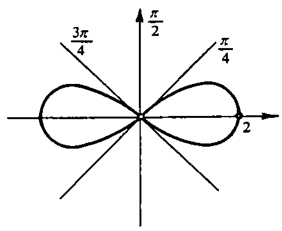
(Може да се искористат и својствата а) – в) од текстот.)



Црт.4



Црт.5



Црт.6

12. Црт.18 во **1.12**. *Помош*. Ставајќи $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, равенството станува $\rho = a(1+\cos\varphi)$. **13**. Црт.6. *Помош*: $\rho^4 = 4\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$; $\rho^2 = 4\cos2\varphi$. Табела:

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	...
ρ	2	$\sqrt[4]{12}$	$\sqrt[4]{8}$	$\sqrt{2}$	0	...

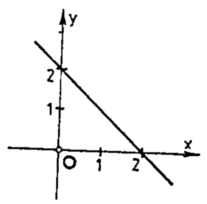
I.2. Основни поими за функциите

2.1. (Стр. 84)

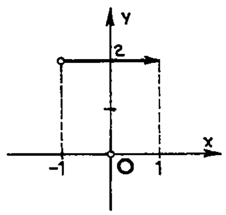
1. а) $|x|$. б) $|2x-x^2|$. **2.** а) $f(x) = x^2-2x+2$ за $x \geq 1$, $f(x) = x^2+2x-2$ за $x < 1$. б) $g(x) = x^2-1$ за $x > 0$, $g(x) = 0$ за $x = 0$, $g(x) = 1-x^2$ за $x < 0$. **3.** $\mathbb{R}\setminus\{3, -3\}$. **4.** $\mathbb{R}\setminus\{0, 2/3, -2/3\}$. **5.** $(-\infty, 3/2)$. **6.** $[-2, 2]$. **7.** $(-\infty, +\infty)$. **8.** $(-\infty, 2]\cup[4, +\infty)$. **9.** $(5, +\infty)$. **10.** $(-\infty, 2)\cup(3, 5]$. **11.** $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **12.** $\mathbb{R}\setminus(A\cup B)$, $A=\{2k\pi+\pi/6 \mid k\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{2k\pi+5\pi/6 \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **13.** $P = 5\text{tg}\alpha$; $0 < \alpha < \pi/2$. **14.** $P = x\sqrt{4R^2-x^2}$, $x\in(0, 2R)$. **15.** $V=\pi x(R^2-x^2/4)$, $x\in(0, 2R)$. **16.** $M = 2\pi Hx(R-x)/R$, $x\in(0, R)$. **17.** 3; 32; a^2-2a; a^2-1; a^2-4a+3. **18.** а) $[1, 4]$. б) $(0, 1/2)$. **19.** а) $f(x) = -2x-1$. б) $f(x) = 2^x+3$. **20.** а) $D_0=\{-3, 1\}$, $D^+ = (-3, 1)$, $D^- = (-\infty, -3)\cup(1, +\infty)$. б) $D_0 = \{-2, 0, 2\}$, $D^+ = (-2, 0)\cup(2, +\infty)$, $D^- = (-\infty, -2)\cup(0, 2)$.

2.2. (Стр. 92)

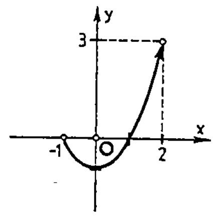
2. Црт. 1. **4.** Црт. 2. **6.** Црт. 3. **8.** Црт. 4. **10.** Црт. 5. **12.** Црт. 6. **14.** Црт. 7. **16.** Црт. 8. **17.** Парна. **18, 19.** Ни парна ни непарна.



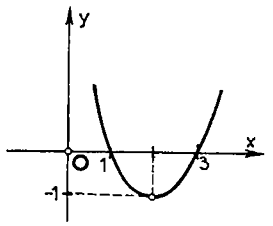
Црт. 1



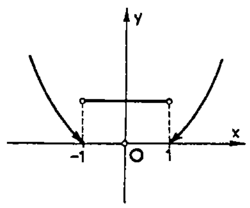
Црт. 2



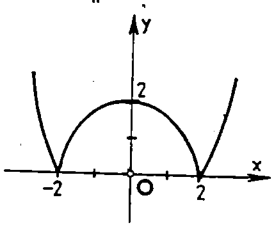
Црт. 3



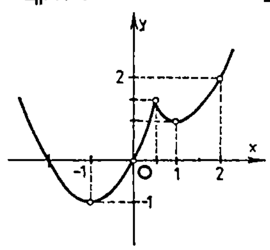
Црт. 4



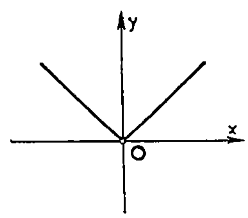
Црт. 5



Црт. 6



Црт. 7

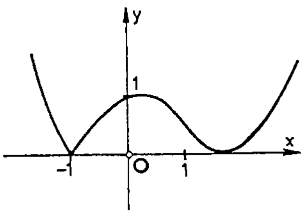


Црт. 8

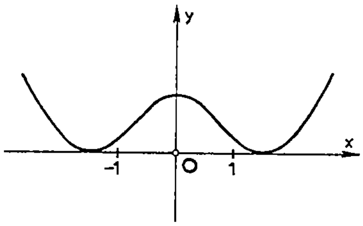
20, **21**. Непарна. **22**. Ни парна ни непарна. **23**. Парна. **24**, **26**. Ни парна ни непарна. **25**, **27**. Непарна. **28**. Парна. **29**. Да; домен: $\{1, 2, 3, 4\}$, опсег: $\{0, 1, 2\}$. **30**. Не, зашто (2) во Т.1 не е исполнет: $(1, 0), (1, 2) \in \Gamma$, но $0 \neq 2$. **31**. Да; домен: $(-\infty, 0]$, опсег: $[0, +\infty)$. **32**. Не, зашто, на пример, $(1, -1), (1, 1) \in \Gamma$.

2.3. (Стр. 98)

1. 9, -3, 20, 7/10. **2**. (1) и (а), (2) и (в), (3) и (б). **4**. 2, 4, 3, 3; $(f \circ g)(0) = 0$, а $(g \circ f)(0)$ не постои. **5**. $(t^6+4t^3+3)^{2/3}$; u^4-2u^2+3; $(v^6+10v^3+24)^{2/3}$. **6**. $D_{f\circ g} = D_g = (-\infty, -5]\cup[5, +\infty)$; $D_{g\circ f} = (-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$, $D_{g\circ g} = (-\infty, -\sqrt{50}]\cup[\sqrt{50}, +\infty)$. **7**. а) $1-x^2$, $-x^2-2x$, $(x^2-1)/x^2$; б) $2/(1+x^2)$, $2/(x^2+2x+2)$, $2x^2/(x^2+1)$. **8**. а) $f(x) = 5x-x^2$. б) $f(x) = x^2+2$. **9**. а) $10x+5$; $(2x+1)^5$. б) $5/x$; $1/x^5$. в) $5\sin x$; $\sin^5 x$. **10**. а) $8x+7$. б) $1/x$. в) $\sin(\sin(\sin x))$.



Црт. 1



Црт. 2

11. в) Црт. 1. г) Црт. 2 **12**. *Доказ на* а). Ако f и g се парни, тогаш D_f и D_g се симетрични множества, па и $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ е симетрично; покрај тоа, $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, за секој x од доменот на $f+g$. Ако f и g се непарни функции, тогаш $f+g$, $f-g$ и $f \circ g$ се непарни, а fg и f/g се парни.

2.4. (Стр. 103)

1. Монотона; расте. **2**. Опаѓа. **3**. Не е. **4**. Монотона; не опаѓа. **5**. Не опаѓа. **6**. Не опаѓа. (За $x_1 = -1 < 0 = x_2$ имаме $f(-1) = 0 = f(0)$, а за секој друг пар x_1, x_2: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.) **7**. Во $(-\infty, 0)$ опаѓа, а во $(0, +\infty)$ расте. **8**. Опаѓа во $(-\infty, 0)$ и во $(1, 2)$, а расте во $(0, 1)$ и во $(2, +\infty)$. **9**. Опаѓа во $(-\infty, -1]$.

2.5. (Стр. 111)

1. Мајорирана, неминорирана; $E_f = (-\infty, 3]$; $\sup f =$ НГВ$f = 3$. **2**, **3**. Минорирана, немајорирана; $E_f = (0, +\infty)$; $\inf f = 0$, НМВf не постои. **4**. $E_f = (-\infty, +\infty)$, ни мајорирана, ни минорирана. **5**. $E_f = [-1, +\infty)$, минорирана; $\inf f =$ НМВ$f = -1$. **6**. $E_f = (-\infty, 1]$, мајорирана; $\sup f =$ НГВ$f = 2$ **7**. Ограничена; $E_f = [-1, 1]$; $\sup f =$ НГВ$f = 1$, $\inf f =$ НМВ$f = -1$. **8**. Минорирана; $E_f = [2, +\infty)$; $\inf f =$ НМВ$f = 2$. **9**. Види 1-8 погоре. **10**. НМВ$f = -25/4$ за $x = 1/2$; позитивна е во $D^+ = (-\infty, -2)\cup(3, +\infty)$, а негативна во $D^- = (-2, 3)$. **11**. НМВ$f = -49/8$ за $x =$

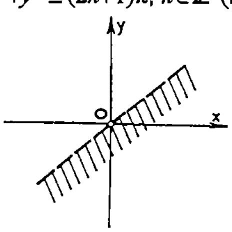
5/4; $D_f^+ = (-\infty, -1/2)\cup(3, +\infty)$, $D^- = (-1/2, 3)$. **12**. НГВ е $-3/4$ за $x = 1/2$; $D^- = (-\infty, +\infty)$. **13**. НМВ е 0 за $x = 0$; $D^+ = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. **14**. $y_{max} = 3$ за $x = 0$; $y_{min} = 0$ за $x = \pm\sqrt{3}$. **15**. $y_{max} = 4$ за $x = -2$; $y_{min} = 0$ за $x = -4$ и $x = 0$. **16**. $y_{min} = 0$ за $x = 0$ и $x = 2$, $y_{max} = 1$ за $x=1$. **17**. 13; 13. **18**. $d/4$; $d/4$. **19**. $a/2$; $h/2$. **20**. $D_f = R$; ни парна ни непарна; (апсолутен) минимум е 1 за $x = -1$; минорирана; опаѓа во $(-\infty, -1)$, а расте во $(-1, +\infty)$. **22**. $D_f = R$; ни парна ни непарна; минимум е 0 (за $x = 1$ и $x = 3$); максимум е 1 за $x = 2$; опаѓа во $(-\infty, 1)$ и во $(2, 3)$, а расте во $(1,2)$ и во $(3, +\infty)$. **23**. $D_f = R$; парна; максимум е 1 за $x = 0$; мајорирана; расте во $(-\infty, 0)$, опаѓа во $(0, +\infty)$. **24**. $D_f = R\backslash\{1, -1\}$; парна; (локален) минимум е 1 за $x = 0$; не е ни мајорирана, ни минорирана; $E_f = (-\infty, 0)\cup[1, +\infty)$; опаѓа во $(-\infty, -1)$ и во $(-1, 0)$ а расте во $(0, 1)$ и во $(1, +\infty)$. **25**. $D_f = R$; непарна; максимум е 1 за $x = 1$ а минимум е -1 за $x = -1$; ограничена; расте во $(0, 1)$, а опаѓа во $(1, +\infty)$. *Помош*. За наоѓање на екстремите може да се искористи резултатот од задачата 9 во **2.4** или, пак, да се реши по x равенката $2x/(1+x^2) = y$, за $y > 0$; притоа се добива дека решение постои само ако $y \leq 1$. Да забележиме уште еднаш дека, поради непарноста, доволно е да го најдеме максимумот.

2.6. (Стр. 117)

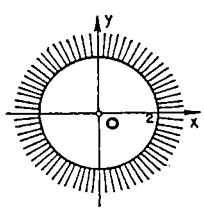
1. $x+1$. **2**. $(x-1)/2$. **3**. $f^{-1} = f$. **4**. 10^x-1. **5**. Нема. **6**. $\sqrt{x}$. **7**. Нема. **8**. $-1/\sqrt{x}$. **9**. $f^{-1}(x) = 1-x$ за $x \geq 1$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ за $x < 1$. **10**. Нема. **11**. Нема. **12**. Според Т.2, f^{-1} постои; $f^{-1}(x) = \arcsin x$. (За $\arcsin x$ в. **3.4**.) **13**. На пример, функцијата f, определена со: $f(x) = (x+1)/2$ за $x \in (-1, 1)$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 0$, не е монотона на $[-1, 1]$, а има инверзна f^{-1}: $f^{-1}(x) = 2x-1$ при $x \in (0, 1)$, $f^{-1}(0) = 1$, $f^{-1}(1) = -1$. **14**. $y = (\log_2 x)^2$. **15**. $y = (1-x)^{2/3}$. **16**. $y = \sqrt{1-x^2}$. *Помош*. $x = \sin t$, $y = \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$; в. и зад. 12. **17**. За зад.5): Една обопштена инверзија е дадена во одговорот на зад.6, а друга е, на пример, $g(x) = -\sqrt{x}$ за $x \in [0, +\infty)$. **19**. Празната функција. **20**. За секој природен k, функцијата f_k, дефинирана со: $f_k(x) = \sqrt{x}$ за $x \in [0, 1/k)\cup(1/k, +\infty)$ и $f_k(x) = -\sqrt{x}$ за $x = 1/k$, е обопштена инверзија на x^2.

2.7. (Стр. 120)

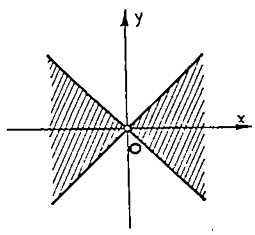
1. $y < x$ (црт.1). **2**. $x^2+y^2 \geq 4$ (црт.2). **3**. $(y \leq x \wedge y \geq -x) \vee (y \geq x \wedge y \leq -x)$ (црт.3). **4**. R^2. **5**. $(y \leq 1 \wedge x < 1) \vee (y \geq 1 \wedge x > 1)$ (црт. 4.). **6**. $2k\pi \leq x^2+y^2 \leq (2k+1)\pi$, $k \in Z$ (црт. 5).



Црт. 1

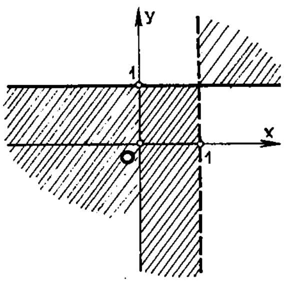


Црт. 2

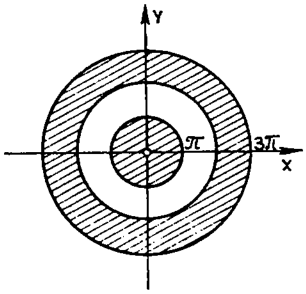


Црт. 3

7. а) $\sqrt{x}$. б). $-\sqrt{x}$ в) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\in\mathbf{Q}\cap[0,+\infty)\\ -\sqrt{x}, & x\in[0,+\infty)\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$. **8.** а) $\sqrt{1-x^2}$. б) $-\sqrt{1-x^2}$. **9.** За 7): Секоја обопштена инверзија на функцијата x^2; в. одг. на вежбата 20 во **2.6**. За 8): $f_k(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,1]\setminus\{1/k\}\\ -\sqrt{1-x^2}, & x=1/k\ \ (k\in\mathbf{N})\end{cases}$ **10.** а) $y=x^2$. б) $y=-1/2x$. в) Безброј многу. **11.** (7) $x=y^2$, $y\in\mathbf{R}$. (10.а) $x=\sqrt{y}$, $y\geq0$. (10.б) $x=-1/2y$, $y\neq0$. (10.в) Безброј многу.



Црт. 4



Црт. 5

2.8. (Стр. 125)

1. а)

x	0	1	3	5
$f(x)$	{0, 1}	{1, 2}	{4, 5}	{0}

$\Gamma^{-1}=\{(0,0),(0,5),(1,0),(1,1),(2,1),(4,3),(5,3)\}$

б)

y	0	1	2	4	5
$g(y)$	{0, 5}	{0, 1}	{1}	{3}	{3}

в)

x	0	1	3	5
f_1	0	1	4	0

x	0	1	3	5
f_2	1	2	4	0

и уште 6 други.

y	0	1	2	4	5
g_1	0	0	1	3	3

y	0	1	2	4	5
g_2	5	0	1	3	3

и уште 2 други.

2. б)

x	0	1	2	3	5	6
$g_1(x)$	3	0	1	6	9	7
$g_2(x)$	3	2	1	6	9	7
$g_3(x)$	5	4	1	6	9	8

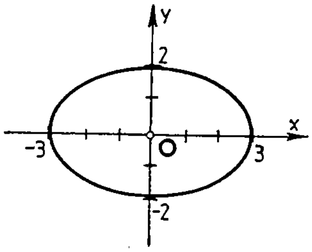
сите на број се 12.

3. а) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0]\\ -\sqrt{1-x^2}, & x\in(0,1]\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0]\\ \sqrt{1-x^2}, & x\in(0,1]\end{cases}$

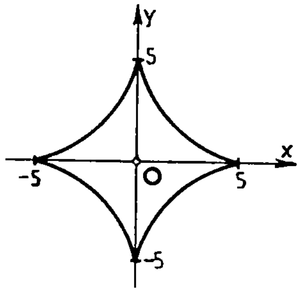
в) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,-1/2]\cup[-1/4,1/2]\\ -\sqrt{1-x^2}, & x\in(-1/2,-1/4)\cup(1/2,1].\end{cases}$ г) $y=-\sqrt{1-x^2}$.

4. а) $y=\sqrt{1-x^2/4}$. б) $y=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2/4}, & x\in[-2,0]\\ \sqrt{1-x^2/4}, & x\in(0,2].\end{cases}$ в) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2/4}, & x\in[-2,0]\\ -\sqrt{1-x^2/4}, & x\in(0,2].\end{cases}$

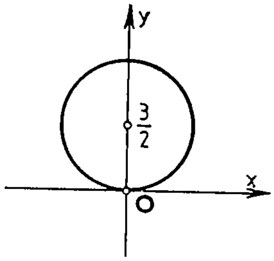
5. а) $\sqrt{x}$. б) $-\sqrt{x}$. в) $\sqrt{x}$ за $x\in[0, 1)$, $-\sqrt{x}$ за $x\in[1, +\infty)$. **6**. Кружница со центар $C(-2, 1)$ и радиус $r = 2$. **7**. Кружница: $C(3, 1)$, $r^2 = 24$. **8**. Елипса со полуоски $a = 3$, $b = 2$ (црт. 1). **9**. Рамнострана хипербола. **10**. Пар прави: $x-y = 0$, $x+y = 0$. **11**. Хипербола, црт. 9 во **2.2**. **12**. Астроида, црт. 2. **13**. Елипса, црт. 1. **14**. Астроида црт. 2. **15**. Кружница со центар во (0, 3/2) и радиус 3/2 (црт. 3). *Помош*. $y/x = t$. **16**. Гранка на хиперболата $x^2-y^2=4$, $x\geq 2$.



Црт. 1



Црт. 2



Црт. 3

I.3. Елементарни функции

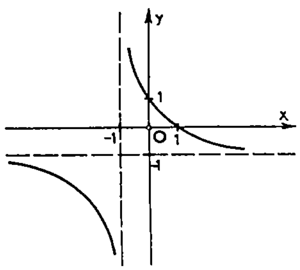
3.1. (Стр.137)

1. *Помош*. Да се примени Т.1 и Т.2. **2**. а) и б) Не. в) Да. **3**. $a = 2$. **4**. $a = -11/3$, $b = 14/3$. **5**. а) $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$. б) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$. **6**. а) 0,685. б) 0,6825. **7**. 1°. P и S се подредуваат по степените на x. Ако st$P$ < st$S$, тогаш (според Т.13) $q = 0$, $P = r$. 2°. Ако st$P\geq$st$S$, тогаш се поделува главниот член на P со главниот член на S и, така добиениот количник, се множи со S. Тој производ се одзема од P, при што се добива полином r_1. 3°. Ако str_1 < st$S$, постапката се запира, а ако st$r_1\geq$st$S$, постапката продолжува како во 2°. **8**. -2. *Помош*. $P(x) = x^{30}-x^{20}+2x^{10}-4$, $P(1) = P(-1) = -2$; $P(x)=(x^2-1)q(x)+Ax+B$; $-2 = A+B$, $-2 = -A+B$. **9**. $q = 3x^3+4x^2+8x+20$, $r = 39$.

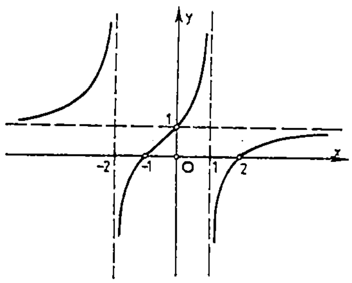
10. а) 125. б) $-24{,}32347$. в) $212{,}65625$. **11**. x, $x+3$, x^2+3x = НЗД(P, Q).
12. $x-1$. **13**. x^2+3x+2. **14**. -2 и 3. **17**. 2. **18**. 1, -3. **19**. 2(двократен)
20. 1, -2, 3. **21**. а) $-1/3$; б) $-1/3$, $3/2$ **23**. *Помош*. Поради $x^3+ax^2+bx+c-M$ =
$\frac{x^3}{4}+\left(\frac{x^3}{4}+ax^2\right)+\left(\frac{x^3}{4}+bx\right)+\left(\frac{x^3}{4}+c-M\right)$, ако се избере $x_0\in\mathbb{R}^+$, така што да биде: $x_0\geq-4a\wedge x_0^2\geq 4b\wedge x_0^3 > 4(M-c)$, се добива бараниот резултат. б) Според а), постои $y\in\mathbb{R}^+$, таков што: $x > s\Rightarrow x^3-ax^2+bx-c > -M$. Тогаш, ако се стави $x_0=-y$, ќе имаме: $x < x_0\Rightarrow -x > y$, па: $x < x_0\Rightarrow -x^3-ax^2-bx-c > -M$, т.е. $x < x_0\Rightarrow x^3+ax^2+bx+c < M$. **24**. *Помош*. Како и во 23 се покажува дека постојат x_1, $x_2\in\mathbb{R}^+$, такви што: $x > x_1\Rightarrow x^4+ax^3+bx^2+cx+d > M$, $x > x_2\Rightarrow x^4-ax^3+bx^2-cx+d > M$. Ставајќи x_0 = $\max\{x_1, x_2\}$, го добиваме бараниот резултат.

3.2. (Стр. 144)

1. $y = -1+2/(1+x)$; со транслација: $x' = x+1$, $y' = y+1$ се добива $y' = 2/x'$ (црт. 1). **4**. Црт. 2.



Црт. 1



Црт. 2

5. $(x^3+x-2)/(x^2-2x)$; $(x^2+1)/(x-2)$; $(x^2+1)/(x-1)^2$. **6**. $(2+t^3+t^4)/(1+t)$; $(1-t)(1-t+t^2)$; $(1-t)/(1+t)(1+t^3)$; $-t^3/(2+t^3)$; $1+(1-t)^3/(1+t)^3$. **9**. $\frac{3}{4x}-\frac{9}{8(x-2)}+\frac{11}{8(x+2)}$.

10. $\frac{2}{x+1}+\frac{x-3}{x^2+x+1}$. **11**. $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2x-4}{(x^2+1)^2}$.

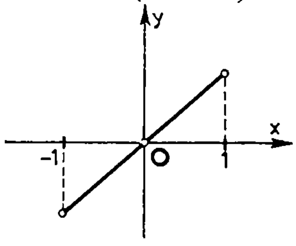
12. $1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$.

3.3. (Стр.150)

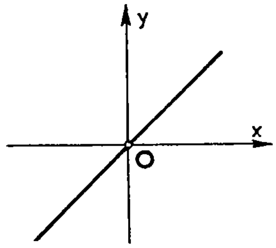
1. $x\in[2k\pi, (2k+1)\pi]$, к$\in\mathbb{Z}$. **2**. За секој $x\in\mathbb{R}$. **3**. $x\in[(4k-1)\pi, (4k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$. **4**. $x\neq(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$. **5**. $x\in((4k-1)\pi/2, (4k+1)\pi/2)$, $k\in\mathbb{Z}$. **6**, **7**, **8**. $x\in\mathbb{R}$. **17**. $5\pi/2$. **18**. 1. **19**. 2π. **20**. 3. **21**. 12π. *Помош*. Основен период на $\sin(3/2)x$ е $4\cdot\pi/3$, а на $\cos(2/3)x$ е $3\pi = 9\cdot\pi/3$. Бидејќи НЗС(4, 9) = 36, основниот период на дадената функција ќе биде $36\cdot\pi/3 = 12\pi$. **22**. $4\pi/3$. **23**. Период е 1/2. **24**. Период е 1. **25**. Не е периодична.

3.4. (Стр.154)

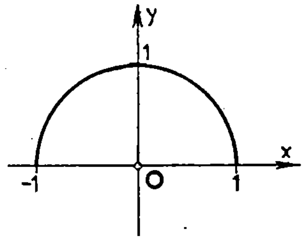
1. $[0, 2]$; $f(0) = -\pi/2$, $f(1) = 0$, $f(2) = \pi/2$. **2**. $R\backslash\{0\}$; $f(0)$ не постои, $f(1) = -\pi/4$, $f(2) = 0$. **3**. $(-\infty, 1]$; $f(0) = \pi/2$, $f(1) = \pi$, $f(2)$ не постои. **4**. $R\backslash\{2\}$; $f(0) = \mathrm{arcctg}(1/2)$, $f(1) = \pi/2$, $f(2)$ не постои **5**. а) Следува директно од дефиницијата на инверзниот синус: $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$; значи, $\sin(\arcsin x)=x$, $x\in[-1, 1]$. б) $x\in[-1, 1]$. **6**. $x\in R$. **7**. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-[\cos(\arccos x)]^2} = \sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1, 1]$. **8**. $x\in[-1, 1]$. **9**. $x\in R$. **10**. *Решение*. Користејќи го идентитетот $\mathrm{tg}\alpha = 1/\mathrm{ctg}\alpha$, $\alpha\neq(2k+1)\pi/2$, и $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x) = x$ за секој $x\in R$, добиваме дека даденото равенство е точно за секој $x\neq 0$ ($0 < \mathrm{arcctg}x < \pi$, а $\mathrm{arcctg}x = \pi/2$ само за $x = 0$, па само тогаш $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}x)$ нема смисла). **11**. *Решение*. Нека $y = \arcsin x+\arccos x$. Со помош на 5° од **3.3** и вежб. 7, 8 и 5, добиваме $\sin y = 1$. Од друга страна имаме $-\pi/2 < y < 3\pi/2$, од што следува $y = \pi/2$, т.е. даденото равенство, за секој $x\in[-1, 1]$. **12**. $[0, 1]$. **13**. *Решение*. За $x\in(0, 1)$ десната страна е негативна, а левата позитивна; за $x\in[-1, 0]$ левата и десната страна „се наоѓаат" во $[0, \pi/2]$. Да ставиме: $\alpha = \arccos\sqrt{1-x^2}$, $\beta = -\arcsin x$. Тогаш лесно се добива $\cos\alpha = \cos\beta$, а потоа и $\alpha = \beta$. Според тоа, равенството е точно за секој $x\in[-1, 0]$. **14**. $x\in(-\infty, 0)$. **15**. Црт. 1 (в. вежба 5.а). **16**. Црт. 2 (в. вежба 6.а). **17**. $[-1, 1]$; црт. 3. **18**. $[-1, 1]$; Црт. 4 (В.вежба 13). **19**. $R\backslash\{0\}$; Црт. 5 (в. вежба 14). **20**. Црт. 6. *Решение*. Функцијата има период 2π. Поради $-1\leq\sin x\leq 1$, функцијата е дефинирана за секој $x\in R$. Од дефиницијата на арксинус добиваме и $\sin y = \sin x$, при што $-\pi/2\leq y\leq\pi/2$, па $y = x$ за $-\pi/2\leq x\leq\pi/2$; $y = \pi-x$ за $\pi/2\leq x\leq 3\pi/2$; $y = x-2\pi$ за $3\pi/2\leq x\leq 5\pi/2$; општо: $y = x-2k\pi$ за $(2k\pi-\pi/2)\leq x\leq(2k\pi+\pi/2)$ и $y = (\pi-x)+2k\pi$ за $(2k\pi+\pi/2)\leq x\leq(2k\pi+3\pi/2)$.



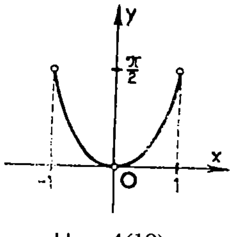
Црт. 1(15)



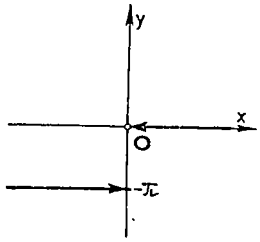
Црт. 2(16)



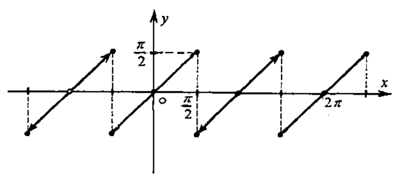
Црт. 3(17)



Црт. 4(18)

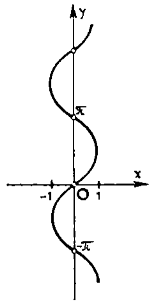


Црт. 5(19)

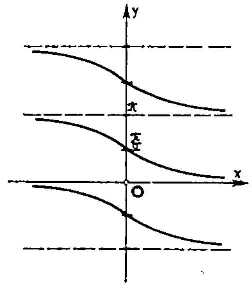


Црт. 6(20)

24. Arcsin$x$: црт. 7. Arcctg$x$: црт. 8.



Црт. 7(24)



Црт. 8(24)

25. Функцијата $f(x) = \pi - \arcsin x$ е обопштена инверзија на $\sin x$, а $g(x) = \pi - \mathrm{arctg}\, x$ на $\mathrm{tg}\, x$.

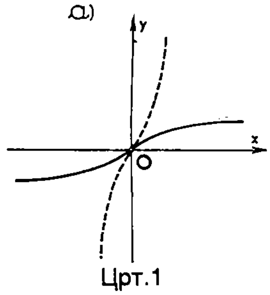
3.5. (Стр.159)

1. *Решение.* а) $\mathrm{sh}\alpha \cdot \mathrm{ch}\beta - \mathrm{ch}\alpha \cdot \mathrm{sh}\beta = (1/4)(e^{\alpha} - e^{-\alpha})(e^{\beta} + e^{-\beta}) - (1/4)(e^{\alpha} + e^{-\alpha})(e^{\beta} - e^{-\beta}) = (1/2)(e^{\alpha-\beta} - e^{-(\alpha-\beta)}) = \mathrm{sh}(\alpha - \beta)$. б) Да се постапи како во а). **2**. а) Користејќи ги равенствата 4° и 5′: $(1/2)(ch^2x - 1) = (1/2)(\mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x - 1) = (1/2)(2\mathrm{sh}^2x) = \mathrm{sh}^2x$. б) Исто како а). г) $\mathrm{th}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{sh}(\alpha+\beta)}{\mathrm{ch}(\alpha+\beta)} = \dfrac{\mathrm{sh}\alpha \cdot \mathrm{ch}\beta + \mathrm{sh}\beta \cdot \mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha \cdot \mathrm{ch}\beta + \mathrm{sh}\alpha \cdot \mathrm{sh}\alpha}$; броителот и именителот се делат со $\mathrm{ch}\alpha \cdot \mathrm{ch}\beta$ и се добива даденото равенство.

3. *Решение.* Ќе покажеме: $\mathrm{Arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Имаме: $x = \mathrm{sh}y = (1/2)(e^y - e^{-y}) = (e^{2y} - 1)/2e^y$, па $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$; решенија на оваа квадратна равенка се $(e^y)_1 = x + \sqrt{x^2+1}$ и $(e^y)_2 = x - \sqrt{x^2+1}$, при што второто отпаѓа (поради $e^y > 0$). По логаритмирањето на двете страни од равенството $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, добиваме $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, т.е. (3).

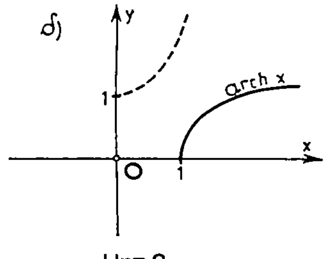
Равенствата (4) – (6) се докажуваат аналогно. На пример: $x = \mathrm{th}y = (e^{2y} - 1)/(e^{2y} + 1)$, $e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x$, $e^{2y}(1-x) = 1 + x$; итн. **4**. Црт.1 – Црт.4.

а)

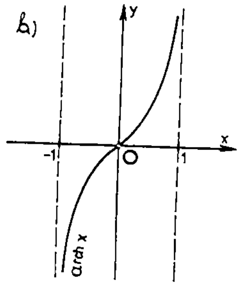


Црт.1

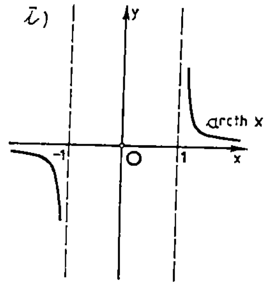
б)



Црт.2



Црт.3



Црт.4

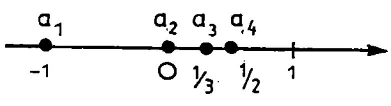
3.6. (Стр.164)

1. $f(x) = x+2$, $g(x) = \ln x$; $(g\circ f)(x) = g(x+2) = \ln(x+2)$; $D = (-2, +\infty)$. **2.** $|x|\geq 3$. **3.** $D = [1, 4]$. **4.** $D = [1, 3]$. **5.** $D = [-1, 3]$. **6.** $D = [-2, 0)\cup(0, 1)$. **7.** $D = \{2\}$. **8.** $D = \varnothing$. **9.** а) $(fg)(x) = \sqrt{1-x}/(1-\sqrt{x})$; $D = (0, 1)$. б) $(f\circ g)(x) = \sqrt{1-x}\,/\,(x-\sqrt[4]{x^2-x^3})$; $D = (-\infty, 1)\setminus\{0, (-1-\sqrt{5})/2, (-1+\sqrt{5})/2\}$; $(f\circ g)(3)$ не постои. **10.** $\sqrt{2}$. **11.** Да; за $r < 0$, x^r не е дефинирана во точката $x = 0$. **12.** $x(y-x)^3-x^2-1 = 0$. **13.** $y_{1,2} = x\pm\sqrt{1+1/x}$; $D = [-1, -0]\cup(0, +\infty)$.

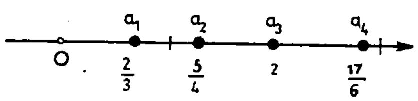
I.4. Низи од реални броеви

4.1. (Стр.168)

1. а) Расте. б) 1. в) −1. г) Црт. 1. **2.** а) Расте. б) Не постои. в) 2/3. г) Црт. 2. **3.** а) Не е. б) Не постои. в) 0. **4.** а) Не е. б) 1/2. в) −1/2.

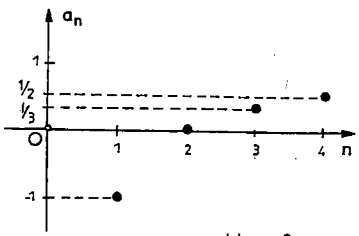


Црт.1

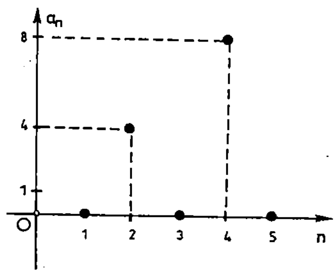


Црт. 2

5. За 1: Црт. 3. За 3: Црт. 4.



Црт. 3



Црт. 4

6. Претставувањето на низата врз бројната оска се добива со ортогонална проекција од нејзиниот график врз ординатната оска, земена како бројна оска (в. црт.1 и црт.3). **9**. На пример, $\sqrt{\frac{2n-1}{n}}$ има супремум во $\mathbb{R}$, но нема супремум во $\mathbb{Q}$, и покрај тоа што е мајорирана во $\mathbb{Q}$. (На пример 2 е мајорирант.) Секоја мајорирана низа во $\mathbb{R}$ има супремум во $\mathbb{R}$, па значи и секоја мајорирана низа во $\mathbb{Q}$ има супремум во $\mathbb{R}$. **10**. Дека низата е растечка се покажува на ист начин како во Пр.3. Истото се однесува и за ограниченоста. Имено, ако се избере број d таков што $\sqrt{2+d} < d$, ќе имаме: $a_n < d$ за секој d.

4.2. (Стр.171)

1. *Решение*. Нека $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Имаме:

$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0| = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, од каде што следува дека најмалиот n_0 со бараното својство е 24. **2**. $n > 1/\varepsilon$; $n_0 = 100$. **3**. $n > 1/2\varepsilon$; $n_0=500$. **4**. $a_n = \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\ldots+\frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$. Според тоа $\left|a_n-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3\cdot 10^n}$, па $n_0 = 3$. **5**. $n > 2/\varepsilon^2$; $n_0 = 2\cdot 10^{10}$. **6**. 0 и 1 се точки на натрупување. **7**. 0 е единствената точка на натрупување но ако n е парен и ако $n > m/2$, тогаш $a_n > m$. **8**. Од слични причини како во 6. **9**. *Помош*. Да се искористи неравенството $||a_n|-|a|| \leq |a_n-a|$. (Претходно да се докаже тоа неравенство). **10**. За $n_0 = k$ имаме: $n > n_0 \Rightarrow |a_n-a| = 0$. **11**. *Решение*. Да претпоставиме дека a е граница на низата и дека за даден $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ е избрано така што $|a-a_n| < \varepsilon/2$, при $n > n_0$. Тогаш, ако p, $q > n_0$ ќе имаме: $|a_p-a_q| = |a_p-a+a-a_q| \leq |a_p-a|+|a-a_q| < \varepsilon$. Земајќи, на пример, $\varepsilon = 1/2$, добиваме дека $|a_p-a_q| < 1/2$, за секои p, $q > n_0$ што, поради a_p, $a_q \in \mathbb{Z}$, е можно само ако сите членови a_n, за $n > n_0$, се еднакви.

4.3. (Стр.175)

1. За, $n \geq 2$, $a_n > \sqrt{n}$, па, значи, a_n не е ограничена. **2**. За $n = 2k+1$, $a_n=n$, а $a_n = -n$ за $n = 4k+3$; 0 е единствената точка на натрупување. **3**. $a_n > (3/2)^n$. **4**. $a_n > 2^n$. **5–6**. Со директна примена на дефиницијата за конвергентност. **7**. (c_n) е конвергентна акко и двете низи (a_n), (b_n) се конвергентни со иста граница. **8**. Избирајќи го n_0 така, да биде $a_n = b_n$ за $n > n_0$ добиваме дека $|a_n-a| = |b_n-a|$, за секој $a \in \mathbb{R}$, при услов $n > n_0$. **9**. *Помош*. Поради $a_n = (1/2)(3-1/3^n)$ имаме $a_n < 3/2$, а јасна е монотоноста. Границата е $3/2$, бидејќи $|a_n-3/2| = 1/3^n$. **10**. Види зад. 10 од **4.1**. **11**. *Решение*. Нека $a_1 = 1$, $a_2 = 1{,}4$, $a_3 = 1{,}41$; да претпоставиме дека a_1, a_2, ..., a_n се избрани така што да биде $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $a_k = 1{,}41d_3\ldots d_{k-1}$ за секој

$k \leq n$, при што $d_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $a_k^2 < 2$, $(a_k + 1/10^{k-1})^2 > 2$. Тогаш $d_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ се избира така што $(a_{n+1})^2 < 2$, $(a_{n+1} + 1/10^n)^2 > 2$, каде што $a_{n+1} = 1, d_1 d_2 \ldots d_n$. Добиената низа е неопаѓачка со мајорант $\sqrt{2}$, па значи и конвергентна. Притоа, имаме: $0 < \sqrt{2} - a_n < \frac{1}{10^{n-1}}$, од што следува дека $a_n = \sqrt{2}$. **12.** На ист начин како и во 11. **13.** $5 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5 - \frac{1}{n}\right)$. **14.** Да ставиме $\sqrt[n]{n+1} = 1 + b_n$. Имаме $b_n > 0$ и $n+1 = (1+b_n)^n > 1 + \binom{n}{2} b_n^2$, т.е. $0 < b_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ за $n > 1$. Според тоа: $0 < \sqrt[n]{n+1} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, за $n > 1$. За $\varepsilon > 1$, избирајќи го n_0 така што да биде: $n_0 > 1 + 2/\varepsilon^2$, добиваме: $n > n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{n+1} - 1| < \varepsilon$. (Работата би била пократка кога би се искористела теоремата за "сендвич низа".) **15.** а) Кога би било $a - b = 2c > 0$, тогаш во интервалот $(a-c, a+c)$ би имало бесконечно многу членови на низата (a_n), а само конечно на низата (b_n). Значи, би постоел n таков што $b_n \in (b-c, b+c)$, $a_n \in (a-c, a+c)$, но тогаш би имале $b_n < a_n$. б) За $a_n = 1/n$ и $b_n = 1 + 1/n$ имаме: $a_n < b_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $a = 0 < 1 = b$, а за $a_n = 1 + 1/n$ и $b_n = 1 + 2/n$ имаме: $a_n < b_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $a = 1 = b$.

4.4. (Стр.177)

1–2. Низите се конвергентни со граница e, бидејќи се поднизи од $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. **3.** *Решение.* Ако ставиме $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = a_n^2$ имаме: $0 < e^2 - b_n = (e - a_n)(e + a_n) < 6(e - a_n)$, од што следува дека e^2 е граница на b_n.
4. Слично како и во **3** се добива дека низата е конвергентна со граница e^3.

4.5. (Стр.181)

1. 1/3. **2.** 3. **3.** 0. **4.** 0. **5.** а) 2. б) 6. **6.** *Решение.* б) Нека $a = 0$, и $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што: $n > n_0 \Rightarrow a_n < \varepsilon^{2k}$, па: $n > n_0 \Rightarrow \sqrt[2k]{a_n} < \varepsilon$; значи $\sqrt[2k]{a_n} \to 0$. Ако $a_k > 0$, тогаш: $\left|\sqrt[2k]{a} - \sqrt[2k]{a_n}\right| \leq \frac{|a - a_n|}{\sqrt[2k]{a^{2k-1}}} \to 0$. **8.** Се користат резултатите од **6** и **7**. **9.** *Решение.* Ќе покажеме прво дека, $e^{a_n} \to 1$, за $a = 0$. Навистина, ако $\varepsilon > 0$ и ако: $n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \ln(1+\varepsilon)$, тогаш: $n > n_0 \Rightarrow e^{|a_n|} - 1 < \varepsilon$. Од тоа следува дека $e^{|a_n|} \to 1$; од последниот резултат лесно се добива дека $e^{a_n} \to 1$. Во општ случај имаме: $e^a - e^{a_n} = e^a(1 - e^{a_n - a}) \to e^a(1-1) = 0$.
10. *Помош.* Слично како во претходната задача со тоа што прво ќе се докаже дека $\log a_n \to 0$, за $a = 1$. Потоа: $\log a_n - \log a = \log\frac{a_n}{a} \to 0$, бидејќи $\frac{a_n}{a} \to 1$. **11.** *Решение.* Ако a_n е која било низа, тогаш низата $a_n + (-a_n)$ има граница 0. Ако $(a_n + b_n)$ и (b_n) се конвергентни, тогаш и $(-b_n)$ е конвергентна, па значи и $(a_n) = (a_n + b_n) + (-b_n)$. **12.** *Решение.* Ако a_n е произволна низа, таква

што $a_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш $(a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_n}\right) \to 1$. Ако $(a_n b_n)$ и (b_n) се конвергентни, при што $b_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш и (a_n) е конвергентна. Но, може (a_n) да не е, а $(a_n b_n)$ и (b_n) да се конвергентни: $a_n = (-1)^n$, $b_n = -1/n$.

4.6. (Стр. 184)

1. а) Одговорот е негативен за сите три низи. б) $\lim a_n = +\infty$ во 1, 3 и 4, а во 2 не постои. **2.** Да се извлече пред заграда n^k. **3.** Да се искористи резултатот од вежбата 2. **4.** Да се искористат својствата на функциите e^x, $\log x$ и Т.1.

4.7. (стр.188)

1. *Решение.* Ако се стави $\sqrt[n]{2} = 1 + b_n$, добиваме $2 > 1 + nb_n$, т.е. $0 < b_n < \frac{1}{n}$, од што следува $b_n \to 0$; според тоа $\sqrt[n]{2} \to 1$. **2.** *Помош.* За $a > 1$, на ист начин како во вежбата 1, се добива $\sqrt[n]{a} \to 1$; за $0 < a < 1$, ставајќи $b = 1/a$ се добива: $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{b} \to 1$. **3.** Низата е растечка и ограничена, па значи и конвергентна.

4.8. (стр.191)

1. *Решение.* Од ограниченоста на низата следува дека множеството $\{a_n \mid n \geq 1\} = A$ е конечно подмножество од $\mathbb{Z}$. Ако, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ тогаш постои $m \in \mathbb{Z}$ таков што $m < a < m+1$. Ставајќи $\varepsilon = \min\{a-m, m+1-a\}$ добиваме дека во $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ нема ниеден член на низата, па a не е точка на натрупување на таа низа. Ако $m \in \mathbb{Z}$ ставајќи, $A_m = \{n \mid a_n = m\}$, добиваме дека: $A_m \neq \varnothing$ акко $m \in A$. Потоа, лесно се заклучува дека: m е точка на натрупување акко A_m е бесконечно множество. **2.** *Решение.* Ако $a_n = 1 - 1/n$, тогаш 1 е единствената точка на натрупување, но 1 не е член на низата. Ако $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ се состои од сите позитивни рационални броеви помали од 1, тогаш постои низа (a_n), таква што $\{a_n \mid n \geq 1\} = A$; притоа сите елементи од A се точки на натрупување на низата; освен нив, постојат уште безброј многу точки на натрупување на низата, а тоа се сите ирационални точки на $[0, 1]$, вклучувајќи ги и крајните точки 0 и 1. **3.** *Решение.* Ако (a_n), (b_n), се конвергентни низи рационални броеви, такви што $a_n \to \sqrt{2}$, $b_n \to \sqrt{3}$, и ако ставиме $c_{2n} = a_n$, $c_{2n+1} = b_n$, добиваме низа (c_n) од рационални броеви, таква што $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ се нејзините единствени точки на натрупување.

4.9. (стр.193)

1 – 3. *Помош.* Сите три низи се конвергентни, па затоа доволно е да определиме n_0, таков што: $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{20}$, каде што a е границата на соодветната низа. Имено, тогаш ќе имаме: $m > n_0$, $k > 0 \Rightarrow |a_m - a_{m+k}| \leq |a_m - a| + |a - a_{m+k}| < \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$. Во зад. 1 и 2 доволно е да ставиме $n_0 = 20$, а $n_0 = 99$ во 3. **4.** Ако постои $m \geq 1$ таков што $a_{m+k} = a_m$ за секој $k \geq 1$. **5.** а) Да. б) Не.

I. 5. Граници и непрекинатост на функции

5.1. (стр. 199)

1. 2. **2.** 3. **3.** 0. **4.** Не постои. **5.** 0. **6.** 30. **7.** 0. **8.** 1/4.

5.2. (стр. 202)

1. 1. **2.** a. **3.** 5/3. **4.** 3/4. **5.** 2. **6.** 1. **7.** 3/4. **8.** 0. **9.** 0.

5.3. (стр. 206)

6. *Решение.* Ќе покажеме, прво, дека $\lim\limits_{x\to 1}\log_a x = 0$. Да претпоставиме дека $a > 1$. Тогаш: $0 < 1-a^{-\varepsilon}=a^{-\varepsilon}(a^{\varepsilon}-1) < a^{\varepsilon}-1$. Го бираме δ така што да биде $0<\delta<1-a^{-\varepsilon}$. Тогаш $-\varepsilon<\log_a(1-\delta)$, како и: $\log_a(1-\delta)<\varepsilon$, бидејќи: $\delta<a^{\varepsilon}-1$. Според тоа, ако $1-\delta < x < 1+\delta$, имаме: $\log_a(1-\delta) < \log_a x < \log_a(1+\delta)$, од што следува: $-\varepsilon < \log_a x < \varepsilon$, што и сакавме да покажеме. Од добиениот резултат следува:

$$\lim_{x\to x_0}(\log_a x - \log_a x_0) = \lim_{x\to x_0}\log_a \frac{x}{x_0} = 0.$$

7. 1. **8.** 1. **9.** $\pi/3$. **10.** $\pi/4$.

5.4. (стр. 211)

1. 1/4. **2.** 1/12. **3.** $1/3\sqrt[3]{x^2}$. **4.** $1/4a\sqrt{a-3}$. **5.** –2. **6.** $-\sin a$. **7.** 1.

5.5. (стр. 222)

1. 0. **2.** 3/2. **3.** ∞. **4.** ∞. **5.** 0; a_0/b_0; ∞. **6.** –1. **7.** 1. **8.** –1. **9.** 1. **10.** $+\infty$. **11.** $-\infty$. **12.** $\ln(a/b)$. **13.** $\cos a$. **14.** e^{-4}. **15.** e^5. **16.** $\sqrt{e}$. **17.** $\sqrt{ab}$. **18.** $m=1$, $n=-1$. **19.** Еквивалентни. **20.–21.** Од ист ред, нееквивалентни. **22.** $1-\cos x$ е од повисок ред, во однос на x.

5.6. (стр. 227)

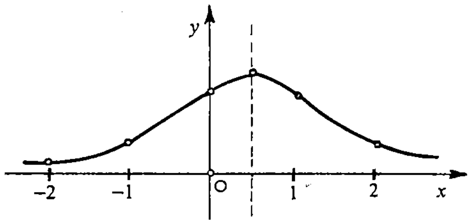
1. *Доказ.* Според теоремата на Вајерштрас, постојат c, $d\in[a, b]$ такви што $f(c)$ е најмалата, а $f(d)$ најголемата вредност на $f(x)$ во $[a, b]$. Ако $f(c)=t$ или $f(d)=t$ нема што да се покажува. Затоа, нека $f(c)<t<f(d)$ и нека $c<d$. Тогаш, бидејќи $f(x)$ е непрекината и на $[c, d]$, до бараниот заклучок доаѓаме со помош на Т. 3. (Разјасни ги и случаите 1) $f(c)=f(d)$, 2) $d<c$.) **2.** *Доказ.* За поедноставно, да претпоставиме дека $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Тогаш: $p(x)=\frac{x^3}{4}+(\frac{x^3}{4}+ax^2)+(\frac{x^3}{4}+bx)+(\frac{x^3}{4}+c)$. Да го избереме $x=\beta>0$, така што да биде $\beta^3>-4ax^2$, $\beta^3>-4bx$, $\beta^3>-4c$. Тогаш, добиваме $p(\beta)>0$. Применувајќи ја истата постапка на $q(x)=-p(-x)$ добиваме дека постои $-\alpha>0$, таков што: $q(-\alpha)>0$, т. е. $\alpha<0$ и $p(\alpha)<0$. Потоа се применува Т. 1. (Да забележиме дека овде го повторивме доказот на вежбата 23 од **3. 1**. На сосема ист начин се спроведува доказот за случај кога $p(x)$ е полином со произволен непарен степен и главен коефициент 1.) **3**. *Доказ*. По претпоставка, $f(x+\omega_n)=f(x)$, за секој $x\in\mathbb{R}$ и $n\geq 1$. Поради непрекинатоста на f и фактот што $\lim\limits_{n\to\infty}(x+\omega_n)=x+\omega$, добиваме $f(x+\omega)=f(x)$.

5.7. (стр. 231)

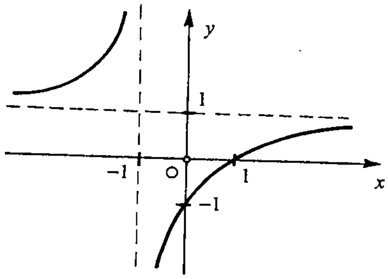
1. Непрекината на $[0, 2]$. **2**. $f(1^-)=0\neq f(1)=f(1^+)$, па 1 е точка на прекин од прв вид; непрекината во сите други точки. **3**. Поради $f(0)=f(0^+)$ и тоа што $f(0^-)$ не постои, f има прекин од втор вид во 0. **4**. Непрекината во секоја точка $x\neq k\pi$, каде што $k\in\mathbb{Z}$; секоја точка $x=k\pi$ е прекин од втор вид. **5**. $a=1$. **6**. $a=3$.

5.8. (стр. 235)

1. $y=x+3$; $x=1$; $x=2$. **2**. $x=\pm 3$; $y=\pm 2$. **3**. $x=\pm 2$; $y=\pm x$. **4**. $x=0$, $y=0$, $y=1$. **5**. $y=\dfrac{1}{x^2-x+1}$, $D=\mathbb{R}$, $y=0$ е асимптота; $y(0)=1$, $y(x)>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. $y(1/2)=4/3$ е најголема вредност; $y(1)=1$, $y(-1)=1/3$, $y(2)=1/3$, $y(-2)=1/7$. Графикот е симетричен во однос на $x=1/2$ (црт. 1).



Црт. 1



Црт. 2

6. Со средување се добива $y=(x-1)/(x+1)=1-2/(x+1)$, при што 0 е отстранлив прекин, па според направениот договор, $y(0)=-1$. Како што знаеме, графикот е хипербола, со асимптоти $y=1$, $x=-1$. (Црт. 2).

7. а) $\lim\limits_{x\to 0^-} y=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y=+\infty$,

$y(-1)=e^{-2}$, $y(1)=e^2$,

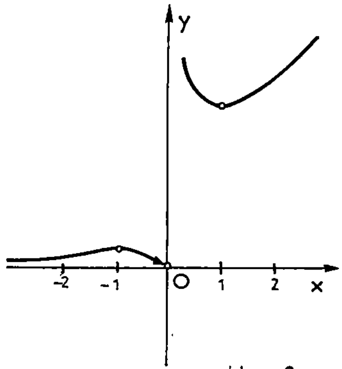
б) $y=e^{1+1/x}$,

$\lim\limits_{x\to 0^-} y=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty$,

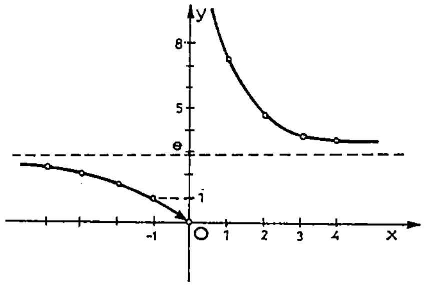
$\lim\limits_{x\to\infty} y=e$; $y(-1)=1$,

$y(-2)=e^{-5/2}$, $y(2)=e^{5/2}$ (Црт. 3).

$y(-2)=e^{1/2}$, $y(1)=e^2$, $y(2)=e^{3/2}$. (Црт. 4).

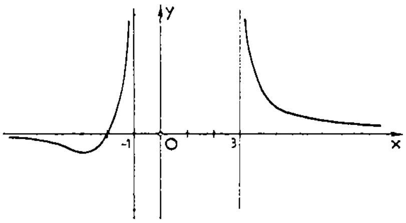


Црт. 3

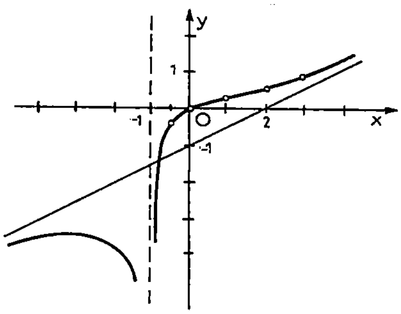


Црт. 4

8. $D=(-\infty,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$; $y>0$ за $\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}>1$, т.е. $x\in(-3/2,\ -1)\cup(3,\ +\infty)$, $y=(-3/2)=0$; $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$; асимптоти $y=0$, $x=-1$, $x=3$ (црт. 5). **9**. $D=(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$. Асимптоти $x=-1$ и $y=\frac{x}{2}-1$; $\lim\limits_{x\to-1} y=-\infty$; $y(0)=0$, $y(1)=1/8$, $y(2)=4/9$, $y(3)=27/32$, $y(4)=32/25$, $y(-2)=-4$, $y(-3)=-27/8$ (црт. 6).



Црт. 5



Црт. 6

(Се препорачува да се внесуваат добиените резултати во соодветни таблици, а тоа, обично ја намалува можноста за грешење.)

5.9. (стр. 237)

1. $-1/11$. **2**. 1. **3**. $-1/2$. **4**. -7. **10**. $\Delta y=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2-2\Delta x=\Delta x\cdot(2x-2+\Delta x)$. За да биде монотона во x_0, треба знакот на $\Delta y\cdot\Delta x=\Delta x^2(2x-2+\Delta x)$, да не зависи од знакот на Δx, при доволно мало $|\Delta x|$. Тоа е точно акко $2x-2\neq 0$, т.е. $x\neq 1$. Според тоа функцијата опаѓа за $x<1$, а расте за $x>1$. За $x=1$ имаме $\Delta y=\Delta x^2$, од што следува дека $y(1)=1$ е минимум. (Секако, до овие резултати би можеле да дојдеме и без поимот за нараснување.)

I.6. Задачи за повторување

$$\mathbf{1}.\, f\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix},\quad g\circ h=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix},\quad f\circ g\circ h=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}.$$

2. Групоидот не е комутативен **4**. Да. **5**. Да. **6**. Да **7**. а) и б) Не, бидејќи нема единица за множење. **8**. а) и б) Да. **11**. *Помош*. Се гледа, прво, дека $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$, за секој $n\geq 1$. Потоа, имајќи предвид дека $a_1<a_2$, претпоставувајќи $a_{n-1}<a_n$, се добива $a_n<a_{n+1}$. Ако се избере број d таков што $\sqrt{c+d}>d$, ќе имаме $a_n<d$ за секој $n\geq 1$. **12**. *Решение*. За $n=2$ равенството е јасно. Да ја означиме левата страна со $f(n)$ и да го користиме равенството

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} \quad \text{за} \quad 1\leq k\leq n+1.$$

Добиваме:

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k\binom{n}{k-1}=\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k(k-1)\binom{n}{k-1}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n}{k-1}=\\
&= f(n)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\\
&= f(n)-f(n)-0=0,
\end{aligned}$$

бидејќи: $0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

13–14. *Помош*. Ако ставиме: $f(n)=n^3+5n$, $g(n)=6^{2n}+3^{n+2}+3^n$, добиваме: $f(n+1)=f(n)+3n(n+1)+6$, $g(n+1)=33\cdot 6^{2n}+3\cdot f(n)$ **15**. *Помош*. За $n=1$ важи равенство. Претпоставувајќи $(1+x)^n\geq 1+nx$, добиваме: $(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x+nx^2\geq$ $\geq 1+(n+1)x$. **16**. *Помош*. Поради $x\geq 0$, имаме: $(1+x)^n=1+nx+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n\geq$ $\geq 1+nx$. **17**. *Решение*: За $k=0$ имаме $\mathscr{P}_0(A)=\{\varnothing\}$ а исто така и $\binom{n}{0}=1$. Нека $1\leq k\leq n$. За $n=1$ имаме $k=1$ и $|\mathscr{P}_1(A)|=1$, $\binom{1}{1}=1$. Ако $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a^*\notin A$, $A^*=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a^*\}$, тогаш $|A^*|=n+1$. Едно подмножество B на A^* има k

елементи, т.е. $B\in\mathcal{P}_k(A^*)$ акко $B\in\mathcal{P}_k(A)$ или $B=B^*\cup\{a^*\}$, каде што $B^*\in\mathcal{P}_{k-1}(A)$. Според тоа: $|\mathcal{P}_k(A^*)|=|\mathcal{P}_k(A)|+|\mathcal{P}_{k-1}(A)|=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$. Имајќи предвид дека $\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}_0(A)\cup\mathcal{P}_1(A)\cup\ \ldots\ \cup\mathcal{P}_n(A)$, добиваме: $\mathcal{P}(A)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$. **18**. *Решение*. 1) Појдувајќи од $(a-b)^2\geq0$, добиваме $a^2+b^2\geq2ab$ т.е. $a^2+b^2+2ab\geq4ab$ односно $(a+b)^2\geq4ab$. Поради $a,\ b>0$, можеме да коренуваме и го добиваме бараниот резултат. 2) Користејќи го резултатот од 1), добиваме: $a+b+c+d\geq2(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})\geq2\cdot2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=4$. 3) Да определиме, прво, број d така што да биде $\sqrt[4]{abcd}=\sqrt[3]{abc}$. Јасно е дека $d=\sqrt[3]{abc}$. Потоа, користејќи го резултатот од 2), добиваме: $a+b+c+d\geq4\sqrt[4]{abcd}$, т.е. $a+b+c\geq4\sqrt[3]{abc}-\sqrt[3]{abc}$. 4) Користејќи го 1), лесно се покажува точноста на 4) за секој n од облик $n=2^k$. Потоа, слично како при доказот на 3), се покажува дека точноста на 4) за $n=m+1$, повлекува точност и за $n=m$. На крајот се користи фактот што за секој $n\geq1$, постои k таков што $n\leq2^k$.

19. *Решение*. Нека $r=a/b$, $s=c/d$, каде што $(a,\ b)=(c,\ d)=1$.

Тогаш: $r^s=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}}=\sqrt[d]{\frac{a^c}{b^c}}=t$. Ако $t=u/v$, каде што $(u,\ v)=1$, добиваме: $a^cv^d=b^cu^d$, т.е. $a^c=u^d$, $b^c=v^d$. Според тоа, треба да биде: $\sqrt[d]{a}$, $\sqrt[d]{b}\in\mathbb{N}$. **20**. *Решение*. Прво, треба да се претпостави: $a_k\neq1$, $a_k>0$, за секој k: $1\leq k\leq n$. Потоа, ставајќи $x_k=\log_{a_k}a_{k+1}$, за $k<n$ и $x_n=\log_{a_n}a_1$, добиваме:

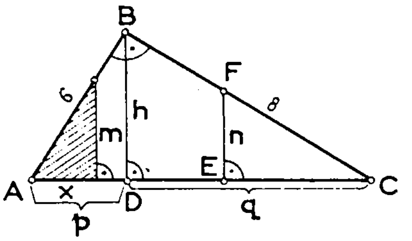
$$a_1=a_n^{x_n}=(a_{n-1}{}^{x_{n-1}})^{x_n}=a_{n-1}{}^{x_{n-1}x_n}=\ldots=a_2{}^{x_2x_3\cdots x_n}=a_1{}^{x_1x_2\cdots x_n}$$

21. $1+\sqrt{3}$ и $1-\sqrt{5}$. *Помош*. Десната страна може да се напише во облик $3+|2x-1|$, па, за $2x\geq1$, добиваме $x_1=1+\sqrt{3}$, а $x_2=1-\sqrt{5}$, за $2x\leq1$. **22**. $\pm\sqrt{870}/7$. **23**. -1; 3; 2; 1. (Последното решение може и да не се прифати, бидејќи, за $x=1$, левата страна на равенката добива облик $0^{\sqrt{2}}$, а при дефиницијата на степен со ирационален експонент во **1.10**. претпоставуваме дека основата е позитивна. Сепак, можеме (по договор) да го прифатиме равенството $0^s=0$, за секој позитивен реален број s.) **24**. $x_1=1$, $x_2=2$. **25**. $(-\infty,\ -2]\cup(14,\ +\infty)$. **26**. $(-2,\ 7)$, $(1,\ 4)$. **27**. $(1,\ 2)$, $(-5/3,\ 2/3)$. **28**. $(\sqrt{2},\ 2)$, $(2,\ \sqrt{2})$.

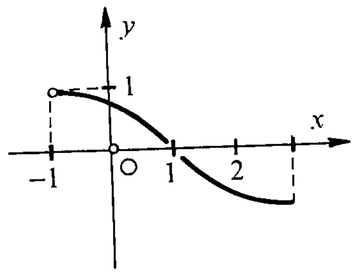
29. а). $V=(\pi/3)(2R-H)H^2$, $0<H<2R$. б) $V=(\pi/3)\cdot r^2(R\pm\sqrt{R^2-r^2})$, $0<r<R$. (Како што гледаме, V е двозначна функција од r.) в) $V=\frac{8\pi R^3}{3}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^3}$, $0<\alpha<\pi/2$. **30**. $P=\pi RH^2/(H-2R)$, $2R<H<+\infty$. **31**. Домен: $0<x<10$; $P=2x^2/3$ за $0<x\leq18/5$, а $P=(216/25)+(x-18/5)(246-15x)/20$ за $18/5<x<10$. *Помош*. ΔABC е правоаголен (црт.1); $\overline{AD}=p=\frac{18}{5}$, $\overline{DC}=q=\frac{32}{5}$, $\overline{BD}=h=\sqrt{pq}=\frac{24}{5}$; $m{:}x=h{:}p$, $m=4x/3$; $n{:}(10-x)=h{:}q$, $n=\frac{3(10-x)}{4}$; $P=\frac{xm}{2}$, $0<x\leq r$; $P=P_{ADB}+P_{BDEF}$ за

$p < x < 10$. **32**. Квадрат со страна $a=\sqrt{P}$. *Помош*. Ако $P=ab$ е дадена, тогаш $L=2(a+b)=2(a+P/a)$. Притоа $a>0$. Решавајќи ја равенката, сметајќи a да е непозната, добиваме $a_{1,2}=\frac{L\pm\sqrt{L^2-16P}}{4}$, од што се добива дека $L^2\geq16P$, т.е. $L\geq4\sqrt{P}$. Тогаш, имаме квадрат со страна $a=\sqrt{P}$. **33**. а) $\mathbb{R}$; б) Унија на сите интервали $[2k\pi, (2k+1)\pi]$. в) $\{(4k+1)\pi/2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **34**. $f^n(x)=1/(x^n)$, $x\neq0$; $f^{(2k+1)}=f$, $f^{(2k)}(x)=x$ за $x\neq0$ **35**. $f^{2k}(x)=x^{2k}$, $f^{2k+1}(x)=x^{2k}|x|$; $f^{(n)}=f$. **36**.

$f^{(2k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$, $f^{2k+1}=f$; $f^{(n)}=f$.

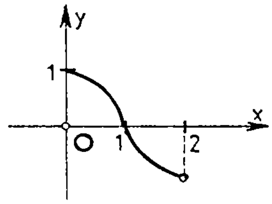


Црт.1 (31)

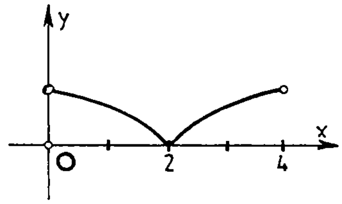


Црт.2 (37)

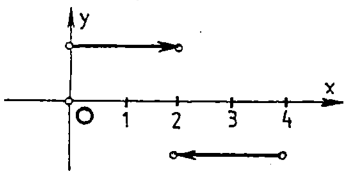
37. (Црт.2) **38**. (црт.3) **39**. (црт.4) **40**. (црт.5) **41**. (црт.6) **42**. (црт.7) **43**. (црт.8)



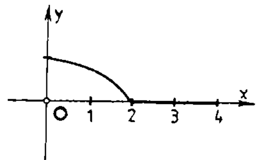
Црт.3 (38)



Црт.4 (39)



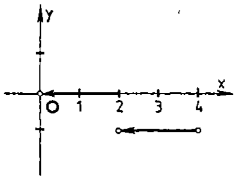
Црт.5 (40)



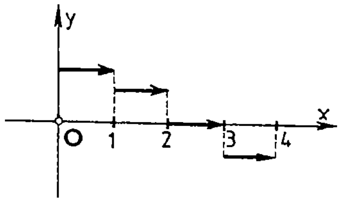
Црт.6 (41)

47. а) 2^x+0. б) $\sqrt[3]{x}+2$. в) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$. **48**. x^2-1.

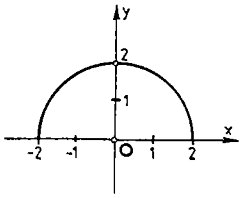
49. $(x-1)^2$. **50**. x^3-3x. **51**. $-\frac{2x+1}{(x+1)^2}$. **53**. (црт.9). $D=[-2, 2]$; парна; расте во $[-2, 0]$, опаѓа во $[0, 2]$. 0 е најмалата, а 2 најголемата вредност. **54**. (црт.10). $D=(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$; парна; опаѓа во $(-\infty, -1]$, расте во $[1, +\infty)$; 0 е најмала вредност; не е мајорирана. **55**. (црт.11). $D=\mathbb{R}$; парна; расте во $(-\infty, 0]$, опаѓа во $[0, +\infty)$; 2 е најголема вредност, но нема најмала; 0 е инфимум. **56.** (црт.12). $D=\mathbb{R}$; ни парна ни непарна; опаѓа во $(-\infty, -1]$, константна во $[-1, 0]$, расте во $(0, +\infty)$. Нема ни најмала ни најголема вредност; 1 е инфимум; не е мајорирана. **57.** $\frac{3-x}{2}$, $D=\mathbb{R}$. **58.** x^3+1, $D=\mathbb{R}$. **59.** $\log_3(x+2)$, $D=(-2, +\infty)$.



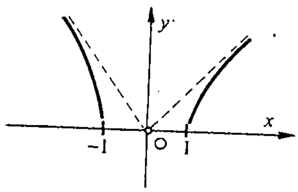
Црт.7 (42)



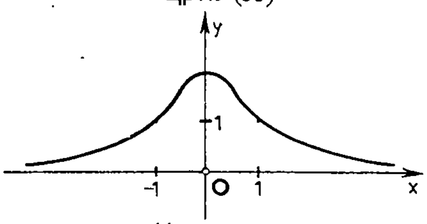
Црт.8 (43)



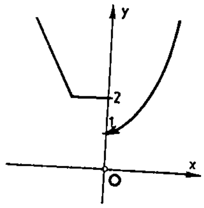
Црт.9 (53)



Црт.10 (54)



Црт.11 (55)



Црт.12 (56)

60. $\frac{x-1}{x+1}$, $D=(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. **61.** $\frac{2^x-2^{-x}}{2}$; $D=\mathbb{R}$. **62.** $x-1$ за $x<0$, $\sqrt{x}-1$ за $x\geq 0$; $D=\mathbb{R}$. **63.** $\psi_0\varphi^{-1}$; постои инверзија, акко рестрикцијата од ψ на опсегот од φ е инјекција. **64.** $y=(x-3)^2+1$. **65.** $y=\sqrt[3]{x^2}$. **66.** $y=\frac{3-x}{3}$, за $x\in[0, 3]$. **67.** $x^2+y^2=4$; $D=[-2, 2]$; двозначна. **68.** $y=xt$, $t=y/x$, $x^3=yx-y^2$; двозначна во: $(-\infty, 1/4]$. **69.** а) За 67: $x^2+y^2=4$; $y_1=\sqrt{4-x^2}$ за $x\in[-2, 0]$, $y_1=-\sqrt{4-x^2}$ за $x\in(0, 1]$, $y_1=\sqrt{4-x^2}$ за $x\in(1, 2]$; $y_2=\sqrt{4-x^2}$ за $x\in[-2, 2]$; $y_3=-\sqrt{4-x^2}$ за $x\in[-2, 2]$ б) За 67: $y_1=\frac{1}{2}x(1+\sqrt{1-4x})$, $y_2=\frac{1}{2}x(1-\sqrt{1-4x})$ за $x\in(-\infty, 1/4]$, $y_3=\frac{1}{2}x(1-\sqrt{1-4x})$ за $x\in(-\infty, 0)$, $y_3=\frac{1}{2}x(1+\sqrt{1-4x})$ за $x\in[0, 1/4]$. **70.** а) a е корен на x^n-a^n. б) $-a$ е корен на $x^{2n}-a^{2n}$; в) $-a$ е корен на $x^{2n+1}+a^{2n+1}$. **72.** а) a не е корен на x^n+a^n; б) $-a$ не е корен на $x^{2n+1}-a^{2n+1}$; в) ниеден од броевите a,

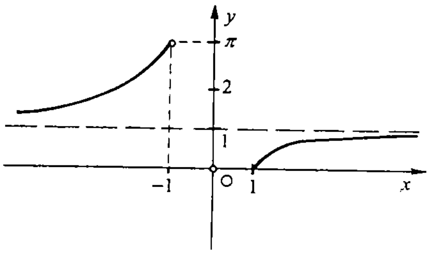
$-a$ не е корен на $x^{2n}+a^{2n+1}$. **73**. $p(-1/2)=\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}-1+1=0$. **74**. а) $(x+1)\cdot(x^2-x+1)$. б) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)\cdot(x^2+x+1)$. в) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$. г) $(x^2-x\sqrt{2}+1)\cdot(x^2+x\sqrt{2}+1)$. д) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$. ѓ) $(x^4-1)^4=(x-1)^4\cdot(x+1)^4(x^2+1)^4$. **75**. Потребно е (а и доволно) да постои број $\beta\neq\alpha$, таков што $x^3+px+q=(x-\alpha)^2(x-\beta)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Ако се изврши множење на десната страна и сравнат коефициентите, ќе се добие: $\beta=-2\alpha$, $q=2\alpha^3$, $p=-3\alpha^2$. Не може да биде $\alpha=0$, бидејќи тогаш $p=q=0$, па 0 би бил троен корен. Значи, треба $p=-3\alpha^2<0$. Потоа: $2p+3\cdot\sqrt{2q^2}=0$. **76**. Од условот 1 да е корен се добива $a+b=1$, т.е. $b=1-a$. Во тој случај, имаме: $3x^5-4x^2+ax+1-a=3(x^5-1)-4(x^2-1)+a(x-1)=(x-1)[3(x^4+x^3+x^2+x+1)-4(x+1)+a]$. Заменувајќи $x=1$ во вториот фактор, добиваме: $a=-7$, па значи $b=8$. **77**. $p(x)=a(x-1)^2(x+2)x$, $a\neq0$.

78. Рационални корени, во случајов, можат да бидат само делителите на 14, а веднаш се гледа дека $x=1$ е еден таков корен. Со раставување добиваме: $(x-1)(x^2-9x+14)=(x-1)(x-2)(x-7)$. (Корените 2 и 7 би можеле да ги добиеме и со проверка, бидејќи тие се делители на 14.) **79**. -1, 3; $(x+1)(x-3)(x^2-2)=(x+1)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. **80**. 1, 2, -2; натаму нема потреба да се проверува; може да се врши постепено разложување, знаејќи дека $x-1$, $x-2$ и $x+2$ се фактори, или пак да се подели дадениот полином со: $(x-1)\cdot(x-2)(x+2)=x^3-x^2-4x+4$; по делењето ќе се добие количникот $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Според тоа, дадениот полином може да се претстави во облик: $(x-1)^2(x-2)(x+2)^2$. **81**. -1, 1/2, 2; $(x+1)(2x-1)(x-2)$. **82**. $-1/3$; $3x^3-2x^2+2x+1=(3x+1)(x^2-x+1)$ **83**. 2, $-1/3$; $(x-2)(3x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ **84**. Дадените полиноми се заемно прости. *Помош*. $P(x)=Q(x)\cdot(x-1)-(x^3+2x-2)$, $Q(x)=(x^3+2x-2)\cdot(x-1)+3x-1$; $3x-1$ не е делител на x^3+2x-2, па $P(x)$ и $Q(x)$ се заемно прости. **85**. $-7x^2-9x+17$. *Помош*. $x^5+3x^4-2x^2-1=(x-1)(x+2)(x+3)p(x)+ax^2+bx+c$; a, b и c ги определуваме со замени: $x=1$, $x=-2$, $x=-3$. Така го добиваме системот равенки: $a+b+c=1$, $4a-2b+c=7$, $9a-3b+c=-19$, чии решенија се: $a=-7$, $b=-9$, $c=17$. **86**. Секој $x\geq0$. **87**. Секој $x>0$. **88**. Секој $x\in[1,+\infty)$.

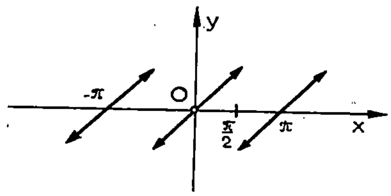
89. Секој $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$, каде k е кој било цел број. **90**. Секој $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **91**. $x=0$. **92**. Секој $x\in(0,+\infty)$. **93**. Секој $x\in[0,+\infty)$. *Помош*. Изразите од обете страни се дефинирани за секој $x\in\mathbb{R}$; левата е секогаш ненегативна, а десната – само за $x\geq0$. Користејќи го идентитетот $\cos2\alpha=(1-\mathrm{tg}^2\alpha)/(1+\mathrm{tg}^2\alpha)$, $\alpha\neq(2k+1)\pi/2$, добиваме дека даденото равенство е точно за секој $x\geq0$.

94. Секој $x\in(1,+\infty)$. **96**. а) $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ (црт.13). б) $f(x)$ е дефинирана за секој $x\neq(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$; периодична, со период π; $f(x)=x$ за $x\in(-\pi/2,\pi/2)$; $f(x)=x-\pi$ за $x\in(\pi/2,3\pi/2)$ итн.(црт.14). **97**. $[-3,-1)\cup(1,3]$. **98**. $[1/2,1]$. **99**. $(1,2]$. **100**. $\varnothing$. **101**. $(1+\sqrt{1+4c})/2$. *Помош*. Конвергентноста следува од монотоноста и ограниченоста на a_n, покажани во **11**. Ако $x=\lim a_n$, тогаш, поради $a_{n+1}^2=c+a_n$, добиваме $x^2=x+c$ (и $x>0$). **102**. Дивергентна,

$\lim a_n=+\infty$. **103**. Дивергентна; 0 е единствена точка на натрупување; $\lim a_{2n}=+\infty$, $\lim a_{2n+1}=0$. **104**. Ограничена, но дивергентна; -1 и 1 се точки на натрупување. **105**. $\lim a_n=0$. **106**. $\lim a_n=1/3$. **107**. $\lim a_n=2{,}12+21/9900$

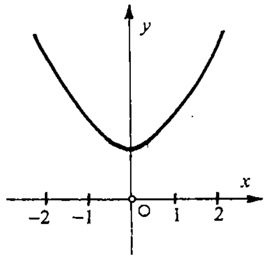


Црт.13 (96*a*)

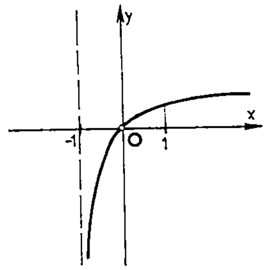


Црт.14 (96*b*)

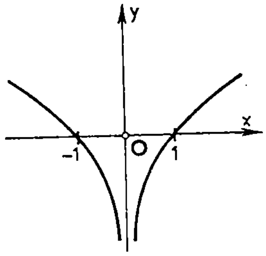
109. Имајќи предвид дека секое комплетно поле е изоморфно со $\mathbb{R}$, како и Т.2 од **4**. **3**, заклучуваме дека, во комплетно поле, секоја монотона и ограничена низа е конвергентна. Обратно, нека F е подредено поле во кое секоја монотона и ограничена низа е конвергентна. Ќе покажеме, прво, дека F е архимедово. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат a, $b\in F^+$, такви што $na\le b$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Тогаш, низата (na) е и ограничена и монотона, па значи е конвергентна. Нека $\lim\limits_{n\to+\infty}(na)=c$. Тогаш: $c+a=\lim\limits_{n\to+\infty}(na+a)=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)a=c$, т.е. $a=0$. (Да забележиме дека својството $\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n$ важи кај кое било подредено поле.) Со тоа докажавме дека F е архимедово. Нека B е минорино подмножество на F и нека A е множеството миноранти на B. Од архимедовоста на F следува дека во множеството цели броеви што се во A постои најголем, да го означиме со a_0. Ако $a_0+1/2\in A$ ќе ставиме $a_1=1$, а во спротивност $a_1=0$. Значи: $a_0+a_1/2\in A$. Нека $x_n=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}\in A$ е таков што, $a_1, a_2, \ldots, a_n\in\{0, 1\}$ и $x_n+\frac{1}{2^n}\notin A$. Низата (x_n) е монотона и ограничена, па според тоа и конвергентна. Релативно лесно се покажува дека границата x на добиената низа е најголемиот елемент на A, т.е. инфимумот на B. **110**. 1/2. **111**. −2. **112**. −1/2. **113**. 2. *Помош*. $\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}=(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)+(x-\sqrt{x^2-2x})$. **114**. 1. **115**. e. **116**. $D=\mathbb{R}$; парна; $f(0)=1$ најмала вредност; $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$; асимптоти нема; опаѓа во $(-\infty, 0)$, расте во $(0, +\infty)$ (црт.15). **117**. $D=(-1, +\infty)$; $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(9)=1$, $x=-1$, асимптота; расте (црт.16). **118**. $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$; парна; опаѓа во $(-\infty, 0)$, расте во $(0, +\infty)$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$; $x=0$ асимптота (црт.17). **119**. $D=\mathbb{R}$; парна; опаѓа во $(-\infty, 0)$, расте во $(0,+\infty)$; $f(0)=0$ најмала вредност; $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ (црт.18).



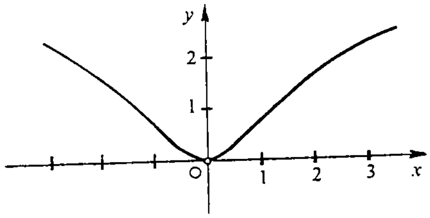
Црт.15 (116)



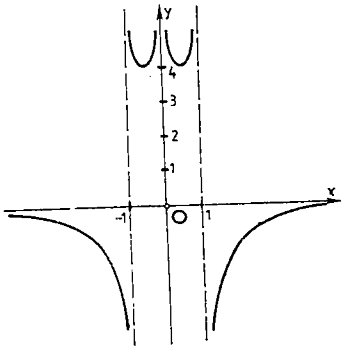
Црт.16 (117)



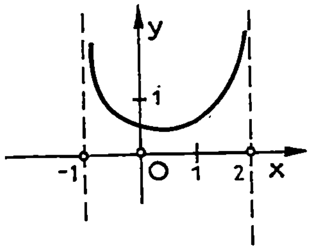
Црт.17 (118)



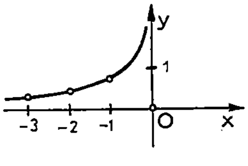
Црт.18 (119)



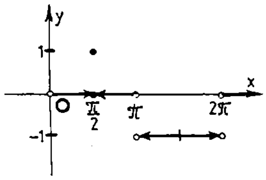
Црт.19 (120)



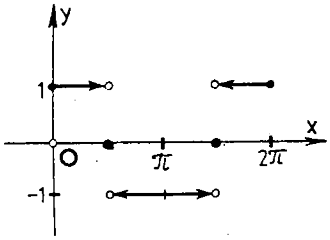
Црт.20 (122)



Црт.21 (123)

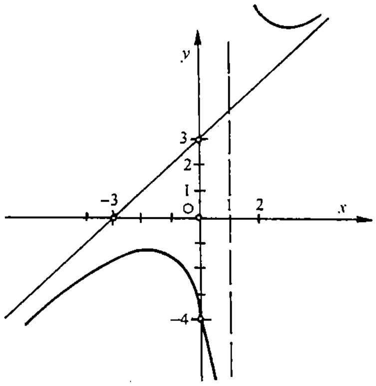


Црт.22 (125)

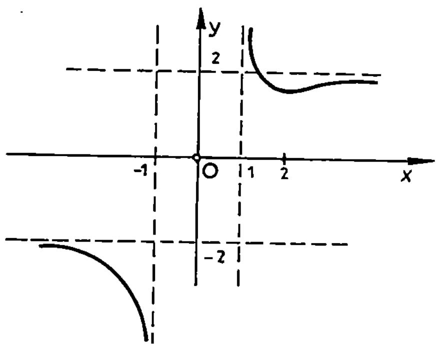


Црт.23 (126)

120. $D=\mathbb{R}\setminus\{0, 1, -1\}$; парна; правите $x=0$, $x=\pm1$ се асимптоти; $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0^-$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$. За $x=\pm1/\sqrt{2}$ $f(x)$ има локални минимуми. $f(\pm1/\sqrt{2})=4$. (До последниот резултат се доаѓа со дискусија на равенката $x^2(1-x^2)=t$.) (црт.19). **121**. $D=\mathbb{R}$; нема нули и асимптоти; $y\to+\infty$ (кога $x\to\pm\infty$); $y_{\min}=\sqrt{47/8}$ за $x=-1/4$. **122**. $D=(-1, 2)$; $x=-1$, $x=2$ асимптоти; $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$ (црт.20). **123**. $D=(-\infty, 0)$; $x=0$ и $y=0$ асимптоти; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ (црт.21). **125**. $D=\mathbb{R}$; непарна; периодична со период 2π; $f(x)=0$ за $x\in[0, \pi/2)\cup(\pi/2, \pi]$, $f(\pi/2)=1$, $f(x)=-1$ за $x\in(\pi, 2\pi)$, $f(2\pi)=0$ (црт.22). **126**. $D=\mathbb{R}$; парна; период 2π; $f(\pi/2)=f(3\pi/2)=0$, $f(x)=1$ за $x\in[0, \pi/2)\cup(3\pi/2, 2\pi]$, $f(x)=-1$ за $x\in(\pi/2, 3\pi/2)$ (црт.23). **127**. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{x-1}=x+3+\dfrac{7}{x-1}$. $D=(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $y=x+3$ и $x=1$ се асимптоти. $f(1-\sqrt{7})=4-2\sqrt{7}$ е локален максимум, а $f(1+\sqrt{7})=4+2\sqrt{7}$ е локален минимум. (До овие сведенија се доаѓа со решавање по x на равенката $f(x)=y$.) (црт.24). **128**. $D=(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$. Асимптоти: $x=\pm1$, $y=\pm2$; $f(2)=\sqrt{3}$ е локален минимум. Графикот ја сече асимптотата $y=2$ за $x=5/4$. Функцијата опаѓа во $(-\infty, -1)$, $(1, 2]$, а расте во $[2, +\infty)$ (црт.25).



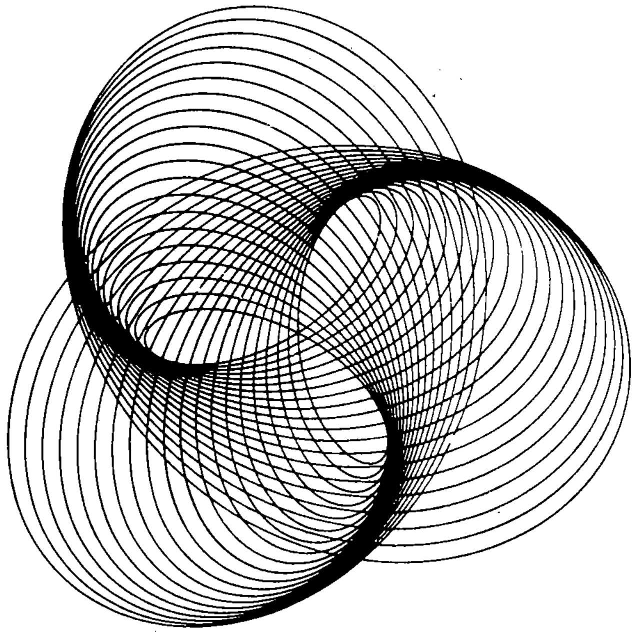
Црт.24 (127)



Црт.25 (128)

129. Границата $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не постои ниту за една вредност на $a\in\mathbb{R}$, бидејќи во секој интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ постојат рационални и ирационални броеви. **130**. *Решение*. а) Нека $f(1)=a$. Од претпоставката дека $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои x, $y\in\mathbb{R}$, добиваме: $f(0)=f(0)+f(0)$, т.е. $f(0)=0$; потоа $0=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$, т.е. $f(-x)=-f(x)$. Со индукција се добива дека $f(nx)=nf(x)$

за секој $n\in\mathbb{N}$, а потоа и за секој $n\in\mathbb{Z}$. Потоа: $f(x)=f\left(\frac{nx}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right)$, т.е. $f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$, за секој $n\in\mathbb{Z}^+$. Од тоа лесно се добива и дека $f(rx)=rf(x)$, за секој $r\in\mathbb{Q}$. Според тоа: $f(r)=f(r\cdot 1)=rf(1)=ra$, за секој $r\in\mathbb{Q}$. Нека $x\in\mathbb{R}$ и нека r_n е низа рационални броеви, такви што $\lim r_n=x$. Тогаш: $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n a)=ax$. Според тоа: $f(x)=ax$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Обратно, ако $a\in\mathbb{R}$ е даден број и ако $f(x)=ax$ за секој $x\in\mathbb{R}$, тогаш: $f(x+y)=a(x+y)=ax+ay=f(x)+f(y)$. б) Ако $f(0)=0$, тогаш $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=0$, за секој x, т.е. f е нултата функција. Затоа, нека $f(0)\neq 0$. Тогаш: $f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)$, од што следува дека $f(0)=1$. Потоа: $1=f(0)=f(x+(-x))=f(x)f(-x)$, т.е. $f(-x)=[f(x)]^{-1}$. Слично како и во а) се добива дека $f(rx)=[f(x)]^r$, за секој $x\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{Q}$, од што ќе следува: $f(r)=a^r$ и конечно: $(\forall x\in\mathbb{R})\, f(x)=a^x$.



ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н.: *Сборник задач по курсу математического анализа;* Москва 1969
2. Берс Л.: *Математический анализ,* том I; Москва 1975
3. Blanuša D.: *Viša matematika,* I-1 (1963) и I-2 (1965), Zagreb
4. Гребанча М. К., Новоселов С. И.: *Курс математического анализа*, том I, Москва 1960
5. Demidovič B. P. (redaktor): *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke,* Zagreb 1978 (превод од руски)
6. Курош А. Г.: *Курс высшей алгебры;* Москва 1975
7. Рождественский Б. Л.: *Лекции по математическому анализу;* Москва 1972
8. Самарџиски А., Целакоски Н.: *Решени задачи по алгебра* I; Скопје 1985
9. Толстов Г. П.: *Элементы математического анализа,* том I; Москва 1974
10. Толстов Г. П.: *Курс математического анализа,* том I; Москва 1957
11. Фихтенгольц Г. М.: *Курс дифференциального и интегрального исчисления,* том I; Москва 1966
12. Чупона Ѓ., Трпеновски Б.: *Предавања по алгебра,* кн.II: Скопје 1973
13. Чупона Ѓ.: *Алгебарски структури и реални броеви;* Скопје 1976
14. Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н.: *Предавања по виша математика,* кн.I; Скопје 1984

ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ, ИМИЊА И ТЕОРЕМИ

Абел 29

агол, поларен 75

АИ (= аксиома на индукцијата) 23

акко (= ако и само ако) 4

аксиома
– на индукцијата 23
– на Архимед 46

аксиоми, Пеанови 23

алгоритам, Евклидов 135

амплитуда 147

апсциса 70

аргумент 80

Архимед 46

аркус косинус 153

аркус котангенс 154

аркус синус 152

аркус тангенс 154

асимптота 232
–, вертикална 232
–, коса 232
–, хоризонтална 232

Безу 128

Бернули 43

бдд (= бесконечна десетична дропка) 56

биекција 16

Болцано 188

броеви
–, заемно прости 38
–, негативни цели 30
–, позитивни цели 30
–, рационални 37
–, цели 30

број
–, ирационален 51, 54
–, конјугиран 133
–, прост 27, 35, 38
–, рационален 37
–, реален 51, 193
–, сложен 38

бројот e 176

БГВ 181, 215

БМВ 183, 215

БФ 67

Вадење 29

Вајерштрас 188

величина
–, бескрајно голема (БГВ) 181, 215
–, бескрајно мала (БМВ) 183, 215
–, еквивалентни БМВ 220

вкдд (= вистинска конечна децимална дропка) 56

вредност
–, апсолутна 45, 87
–, аритметичка (на корен) 61
–, вистинитосна 10
–, главна 152
–, најголема (НГВ) 104
–, најмала (НМВ) 104
–, реципрочна 87

Граница на низа 169

граница на функција 195, 199
–, бескрајна 211
–, во бескрајна точка 212
–, еднострана 214
–, десна 214
–, лева 214
– по Коши 199
– по Хајне 199

график на
- исказна функција 11
- полифункција 121
- релација 5
- функција 85

грешка
–, апсолутна 58
–, релативна 59

група
–, абелова 29
–, адитивна (на прстен) 31
–, комутативна 29

групоид 19
–, адитивен (на $\mathbb{N}$) 24
–, асоцијативен 25
–, комутативен 25
–, мултипликативен (на $\mathbb{N}$) 25
- со кратење 25

Делител 38, 134
–, најголем заеднички (НЗД) 38
- на нулата 33

дефиниција на граница 195
- по Коши 199
- по Хајне 199

Дирихле 81

дисјункција 9
–, исклучна 9

дискриминанта 108

домен 11, 15, 19, 79
- на позитивност/негативност на f 85
–, интегрален 32

дропка
–, бесконечна десетична (бдд) 56
–, вистинска кдд (вкдд) 56
–, десетична 56
–, конечна десетична (кдд) 56
–, нечисто периодична 57
–, периодична 57
–, правилна 141
–, проста 142
–, чисто периодична 57

Единица (на прстен) 31

еквивалентност 6

еквиваленција 9

екстрем 106
–, локален 106
–, строг локален 106

елемент
–, инверзен 29
–, најголем 44
–, најмал 44
–, негативен 41
–, неутрален 26
–, позитивен 40
–, спротивен 29

Зависнопроменлива 81

задавање на функција
–, аналитично 82
–, експлицитно 82
–, графичко (геометриско) 86
–, таблично 82

закон
–, дистрибутивен 25
–, логички 10

закон за
- двојна негација 14
- исклучување на трето 14
- контрадикција 14
- контрапозиција 14
- кратење 24
- одделување 14

запирка, десетична 56

збир
–, конечен 69
- на функции 93

знак за конечен збир 69

Израз, неопределен 217

импликација 9

инверзија 35, 112
 –, главна обопштена 152
 –, десна 118
 –, лева 118
 – на хиперболична функција 158

инјекција 16

интервал 52
 –, затворен 52
 –, отворен 52
 –, почетен 49

инфимум 44, 104, 166

исказ 8
 –, вистинит 10
 –, невистинит 10

Кардиоида 77

квадранти 70

квантификатор
 –, егзистенцијален 12
 –, универзален 12

кдд (= конечна десетична дропка) 56
 –, цел дел на 56

класа на еквивалентност 8

кодомен 15

коефициент на полином 127
 –, главен 127
 –, слободен 127

количник на
 – полиноми 134
 – функции 93

композиција на
 – полифункции 126
 – пресликувања 18
 – функции 95

конјункција 9

координати
 –, нови 73
 –, поларни 75
 –, правоаголни декартови 70
 –, стари 73

корен
 –, аритметички 61
 –, n–ти 60
 – на полином 127
 –, прост 133
 –, сложен 133

косеканс 148

косинус 145, 146
 –, инверзен 153
 –, хиперболичен 157

косинусоида 147

котангенс 145, 146
 –, инверзен 154
 –, хиперболичен 157

котангенсоида 147

Коши 191

критериум
 –, основен Кошиев 192

кружница
 –, тригонометриска 145

Лимес
 –, бескраен 211
 – во бескрајна точка 212
 –, десен 214
 –, едностран 214
 –, лев 214
 – на низа 169
 – на функција 195, 199

логаритам 64
 –, природен 156

логаритмирање 63

Мајорант 44, 166

максимум 106
 –, апсолутен 106
 –, локален 106
 –, строг локален 106

меѓа
–, горна 44, 166
–, долна 44, 166
–, најголема долна 44
–, најмала горна 44

метод на неопределени коефициенти 143

минимум 106
–, апсолутен 106
–, локален 106
–, строг локален 106

минорант 44, 166

множење 25

множества
–, дисјунктни 4
–, еднакви 3
–, еквивалентни 17

множество
– вредности (= опсег) 79
–, дефиниционо 79
–, затворено 54
–, инверзно 123
–, конечно 28
–, мајорирано 44
–, минорирано 44
– на реалните броеви 51
– нули на f 85
–, ограничено 44
– од реални броеви 53
–, отворено 54
–, партитивно 5
–, празно 4
– решенија 11
–, симетрично 90
–, универзално 11

Нараснување на функција 235

НГВ (= најголема вредност) 104

негација 9

независнопроменлива 80

непрекинатост на функција 203, 208, 223

неравенство
–, Бернулиево 43, 46

НЗД (= најголем заеднички делител) 38, 135

низа 165
–, бесконечна 165
–, дивергентна 169
–, конвергентна 161, 191
–, константна 171
–, кошиева 192
–, мајорирана 166
–, минорирана 166
–, монотона 167
–, неопаѓачка 167
–, нерастечка 167
–, нестрого опаѓачка 167
–, нестрого растечка 167
–, нула – 182
–, ограничена 166, 191
– од природните броеви 165
–, опаѓачка 167
–, растечка 167
–, строго монотона 167
–, фундаментална 192
– што неограничено расте по апсолутна вредност 182

НМВ (= најмала вредност) 104

носител на релација 5

нула на група 29

Облик, параметарски 116

околина 53

операција 19
–, делумна 20
–, логичка 10

опсег 15, 19, 79

ордината 70

оска
–, апсцисна (или: x–) 70
–, ординатна (или: y–) 70
–, поларна 75
–, рационална бројна 51
–, реална бројна 52

оски, координатни 70

остаток 38

ОТАЛ (= основна теорема на алгебрата) 133

Парабола 86

параметар 116

Паскал 68

Пеано 23

период 149
–, најмал 146, 149
–, основен 149

ПМИ (= принцип на математичката индукција) 23

поддомен 36

подмножество 4
–, вистинско 3
–, заситено 117
–, независно 117
–, партитивно 5

подниза 190

показател, коренов 60

подредување 6
–, добро 44
–, стриктно 6
–, строго 6

поле 35
–, архимедово 46
–, комплетно подредено 46, 194
– на реалните броеви 50
–, подредено 40

полином 127
–, канончен 127
–, константен 127
–, нулти 127

полиња, изоморфни 49

полифункција 121

полугрупа 26
–, адитивна (на $\mathbb{N}$) 26
–, комутативна 26
–, мултипликативна (на $\mathbb{N}$) 26
–, мултипликативна (на прстен) 31

полусегмент (лев, десен) 52

потфункција 123

почеток, координатен 70

пресек 4

пресликувања, еднакви 17

пресликување 15
–, инверзно 17
–, обратно 17
–, празно 18

претставник 8

претходник 22

приближување 58

принцип на математичка индукција 23

природа на низа 173

производ
–, директен 4
– на функции 93

променлива
–, исказна 9
–, независна 11

прстен 31
– со делители на нулата 98

Равенка на
– елипса 73
– кружница 72
– парабола 73
– хипербола 73

радијан 146

радиус на околина 53

разлика 4, 27
- на функции 93

рамнина, координатна 70

релации, еднакви 5

релација 5
-, антисиметрична 6
- „е поголем" (во $\mathbb{Q}$) 37
- за деливост 34
- за еквивалентност 6
- за инклузија 4
- за подредување 6
- за стриктно подредување 6, 37
-, нерефлексивна 5
-, рефлексивна 5
-, симетрична 6
-, транзитивна 6

рестрикција 79

Сегмент 52

секанс 148

силогизам, хипотетичен 14

синус 145, 146
-, инверзен 152
-, хиперболичен 157

синусоида 147

систем
-, правоаголен декартов координатен 70
-, поларен координатен 70

скок на функција 229

следбеник 22

слика 15

собирање (во $\mathbb{N}$) 24

состав на
- пресликувања 18
- на фунции 95

спирала, архимедова 77

степен 26, 63
- на полином 127

степенување 62, 63

суперпозиција 95

супремум 44, 104, 166

сурјекција 16

Тавтологија 10

тангенс 145, 146
-, инверзен 154
-, хиперболичен 157

тангенсоида 147

теорема
-, биномна 67
-, основна (на алгебрата) 133
-, основна (на аритметиката) 38
-, Њутнова 67

теорема за
- асоцијативност на композицијата 19
- бдд 56
- БГВ и БМВ 216
- бескрајни граници 213
- бројот на корените на полином 129
- вкдд 56
- граница од збир, производ и количник 197
- граница на сложена функција 207, 208
- густа подреденост на $\mathbb{Q}$ 43
- делење со остаток 38, 134
- добра подреденост на $\mathbb{N}$ 44
- егзистенција на комплетно поле 50
- егзистенција на корен 61, 131
- еднаквост на полиномни функции 129

[теорема за]
- еднозначност на границата 169
- еднострани граници 215
- екстреми (преку нарасну-вање) 236
- запазување на знакот 223
- изоморфизам на комплетни полиња 48
- конвергенција на монотона и ограничена низа 172
- конјугирано комплексни корени 133
- корен од негативен број 61
- меѓувредност 224
- монотоност (преку нарасну-вање) 236
- непрекинатост 236
- непрекинатост на елемен-тарни функции 204, 209
- непрекинатост на сложена функција 208
- НЗД 38
- операции со низи 178
- определување на рационални корени 132
- разложување на полином 133
- разложување на рационални функции 142
- рамномерна непрекинатост 226
- рационалните броеви како периодични дропки 57
- „сендвич–низа“ 173
- сместување на $\mathbb{Q}$ во подре-дено поле 42
- споредување на БМВ 220
- факторизација на полином 128

теорема на
- Безу 128
- Болцано–Вајерштрас 188
- Болцано–Коши 223
- Вајерштрас 225

точка
- –, атхерентна 210
- –, внатрешна 54
- –, допирна 210
- –, изолирана 53
- –, ирационална 51
- –, рационална 51

точка на
- згуснување 53, 195
- натрупување 169
- отстранлив прекин 228
- прекин 227
- прекин од втор вид 230
- прекин од прв вид 229

транслација на координатен систем 73
трансформација, единична 21
триаголник, Паскалов 68

Унија 4

Фактор–множество 8

форма, нескратлива (на рацио-нална функција) 141
формула
- –, биномна (БФ) 67
- –, исказна 10
- –, Њутнова 67

функции
- –, еднакви 79, 90, 141
- –, инверзни тригонометриски 154
- –, инверзни хиперболични 158
- –, основни елементарни 159
- –, полиномни 127, 129
- –, рационални 139
- –, тригонометриски 154
- –, хиперболични 157
- –, циклометриски 154

функција 19
- –, алгебарска 162
- –, дробна (рационална) 139
- –, дробнолинеарна 139
- –, експлицитна алгебарска 164
- –, елементарна 160

[функција]
- „знак од“ 81
- –, имплицитна алгебарска 164
- –, инверзна 112
- –, ирационална 162
- –, исказна 11
- –, квадратна 106
- –, линеарна 87
- –, мајорирана 104
- –, минорирана 104
- –, многузначна 121
- –, монотона 100
- –, монотона во точка 101
- –, монотона по делови 101
- на апсолутна вредност 87
- на Дирихле 81
- на обратна пропорционалност 87
- на права пропорционалност 87
- на реципрочна вредност 87
- –, неопаднувачка 100
- –, непарна 90
- –, непрекината во интервал 223
- –, непрекината во точка 203, 229
- –, непрекината во сегмент 223
- –, нерастечка 100
- –, нулта 98
- –, ограничена 104
- од една реална променлива 79
- од n реални аргументи 118
- –, опаднувачка 99
- –, основна елементарна 159
- –, парна 90
- –, периодична 146, 149
- –, полиномна 127, 129
- –, правилна рационална 141
- –, празна 79
- –, растечка 99, 101
- –, рационална 139
- „сигнум од“ 81
- –, сложена 95
- –, степена 160
- –, строго монотона 100
- –, трансцендентна 163
- –, цела рационална 139
- –, циклометриска 154

Хајне 199

Хорнер 130

Центар на околина 53

Член
- –, главен (на полином) 127
- на низа 165
- –, општ (на низа) 165
- –, слободен (на полином) 127

Шема
- –, келиева 21
- –, хорнерова 130