Самоил Малчески, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

НЕРАВЕНСТВА НА ХЕЛДЕР И МИНКОВСКИ

Неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц прв го докажал францускиот математичар Коши во 1821 година, а интегралната аналогија на истото ја докажал рускиот математичар Буњаковски во 1859 година. Ова неравенство во своите работи го користел и германскиот математичар Шварц, но доста подоцна, по 1884 година. Покасно, германскиот математичар О. Хелдер докажал неравенство кое е обопштување на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, и кое е наречено според неговото име, а германскиот математичар Х. Минковски докажал неравенство кое го носи неговото име. Во оваа статија ќе ги разгледаме овие неравенства, при што за докажување на истите ќе ги користиме конвексните функции и неравенството на Јенсен.

1. КОНВЕКСНИ ФУНКЦИИ. НЕРАВЕНСТВО НА ЈЕНСЕН

Францускиот математичар Ч. Ермит во 1881 година го вовел поимот конвексна функција, а во 1906 година данскиот математичар Ј. Л. В. В. Јенсен конвексната функција ја дефинирал со неравенство и докажал неравенство, кое е наречено според него.

Дефиниција 1. За функцијата $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ќе велиме дека е *конвексна* на интервалот (a,b) ако за секои $x_1,x_2\in(a,b)$ и за секој $\alpha\in[0,1]$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\,. \qquad (1)$$

Функцијата f ја нарекуваме *строго конвексна* на интервалот (a,b) ако за секои $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1\neq x_2$ и за секој $\alpha\in(0,1)$ во (1) важи строго нера-венство.

Проверувањето дали дадена функција е конвексна најчесто не е едноставна задача. Меѓутоа, за диференцијабилните функции имаме едно-ставни критериуми за утврдување дали истите се или не се конвексни. Така, точни се следниве теореми чии докази нема да ги презентираме.

Теорема 1 ([5]). Нека $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f'(x)$. Функцијата f е конвексна (строго конвексна) на (a,b) ако и само ако функцијата f' монотоно расте (строго монотоно расте) на (a,b). ■

Теорема 2 ([5]). Нека $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ и за секој $x\in(a,b)$ постои $f''(x)$. Функцијата f е конвексна на (a,b) ако и само ако за секој $x\in(a,b)$ важи $f''(x)\geq 0$. Функцијата f е строго конвексна на (a,b) ако и само ако $f''(x)\geq 0$, за секој $x\in(a,b)$ и не постои интервал $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ таков што за секој $x\in(\alpha,\beta)$ важи $f''(x)=0$. ■

Како што рековме Јенсен докажал неравенство за конвексните функции, т.е. ја докажал следнава теорема, која нема да ја докажуваме, а чиј доказ може да се види, на пример во [1] и [2].

Теорема 3 (неравенство на Јенсен). Ако f е конвексна функција на (a,b), тогаш за секој $n\geq 2$, за секои $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ и за секои $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$ такви да $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+...+\alpha_nf(x_n). \qquad (2)$$

Ако функцијата f е строго конвексна, тогаш во (2) важи знак за строго неравенство при што броевите $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ не се сите меѓусебно еднакви, а броевите $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in[0,1]$ се позитивни. ■

2. НЕРАВЕНСТВО НА ХЕЛДЕР

Пред да преминеме на разгледување на неравенството на Хелдер, ќе го докажеме неравенството на англискиот математичар В. Х. Јанг, со чија помош може да се докажат многу други неравенства, меѓу кои и неравенството на Хелдер.

Теорема 4 (неравенство на Јанг). За секои $a,b,\ \lambda,\mu\in(0,+\infty)$ такви што $\lambda+\mu=1$, е исполнето неравенството

$$ab\leq\lambda a^{\frac{1}{\lambda}}+\mu b^{\frac{1}{\mu}}, \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a^{\frac{1}{\lambda}}=b^{\frac{1}{\mu}}$.

Доказ. *Прв начин. За* функцијата $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ важи $f''(x)=e^x>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$, па затоа f е строго конвексна на целата реална права. Во неравенството на Јеснен ставаме $x_1=\frac{\ln a}{\lambda}$, $x_2=\frac{\ln b}{\mu}$ и последователно добиваме

$$e^{\lambda\frac{\ln a}{\lambda}+\mu\frac{\ln b}{\mu}}\leq\lambda e^{\frac{\ln a}{\lambda}}+\mu e^{\frac{\ln b}{\mu}},$$

$$e^{\ln ab}\leq\lambda e^{\ln a^{1/\lambda}}+\mu e^{\ln b^{1/\mu}},$$

$$ab \le \lambda a^{\frac{1}{\lambda}} + \mu b^{\frac{1}{\mu}},$$

за секои $a, b, \lambda, \mu \in (0, +\infty)$ такви што $\lambda + \mu = 1$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\ln a}{\lambda} = x_1 = x_2 = \frac{\ln b}{\mu}$, т.е. ако и само ако $a^{\frac{1}{\lambda}} = b^{\frac{1}{\mu}}$.

Втор начин. За функцијата $f(x) = -\ln x,\ x > 0$ важи $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, што значи дека таа е строго конвексна. Во неравенството на Јенсен ставаме $x_1 = a^{\frac{1}{\lambda}}, x_2 = b^{\frac{1}{\mu}}$ и последователно добиваме

$$-\ln(\lambda a^{\frac{1}{\lambda}} + \mu b^{\frac{1}{\mu}}) \le -\lambda \ln a^{\frac{1}{\lambda}} - \mu \ln b^{\frac{1}{\mu}},$$

$$-\ln(\lambda a^{\frac{1}{\lambda}} + \mu b^{\frac{1}{\mu}}) \le -\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \ln a - \mu \cdot \frac{1}{\mu} \ln b,$$

$$\ln ab \le \ln(\lambda a^{\frac{1}{\lambda}} + \mu b^{\frac{1}{\mu}}),$$

и како функцијата $\ln$ е монотоно растечка, од последното неарвенство следува неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\ln a}{\lambda} = x_1 = x_2 = \frac{\ln b}{\mu}$, т.е. ако и само ако $a^{\frac{1}{\lambda}} = b^{\frac{1}{\mu}}$. ■

Теорема 5 (неравенство на Хелдер). Ако $a_i, b_i > 0$, за $i = 1, ..., n$ и $p, q > 1$ се такви да $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

Доказ. *Прв начин*. Во неравенството на Јанг ставаме $\lambda = \frac{1}{p}, \mu = \frac{1}{q}$ и добиваме дека за $a, b > 0$ важи $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Ако во последното неравенство последователно ставиме

$$a = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}},\ b = \frac{b_i}{(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}},\ \text{за } i = 1, 2, ..., n,$$

ги добиваме неравенствата

$$\frac{a_i b_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q},\ \text{за } i = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

Со собирање на неравенствата (3) го добиваме неравенството

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

кое е еквивалентно на неравенството на (2). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство при секое користење на неравенството на Јанг, што значи ако и само ако $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \frac{a_n^p}{b_n^q}$.

Втор начин. Нека $p > 1$. За фукцијата $f(x) = x^p$, $x > 0$ важи $f''(x) > 0$, за секој $x > 0$, па затоа таа е конвексна за $x > 0$. Од неравенството на Јенсен, за $x_i > 0, y_i > 0, \lambda_i = y_i$, $i = 1, 2, ..., n$ и $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ следува

$$(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{Y} x_i)^p \le \frac{1}{Y} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p ,$$

односно

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^p \le (\sum_{i=1}^{n} y_i)^{p-1} (\sum_{i=1}^{n} x_i^p y_i) .$$

Ако земеме $x_i = a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}}$, $y_i = b_i^{\frac{p}{p-1}}$, $i = 1, 2, ..., n$ го добиваме неравенството (3). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n$, т.е. ако и само ако $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = ... = \frac{a_n^p}{b_n^q}$. ■

Забелешка 1. Ако броевите a_i, b_i, $i = 1, 2, ..., n$ не се позитивни, тогаш од својствата на апсолутната вредност и од теорема 5 следува

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot |b_i| \le (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q)^{\frac{1}{q}} ,$$

и ова е обликот на неравенството на Хелдер за произволни реални броеви a_i, b_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Последица 1 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). За секои реални броеви a_i, b_i, $i = 1, 2, ..., n$ важи

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Доказ. Доволно е во неравенството на Хелдер да ставиме $p = q = 2$. ■

Пример 1. Нека $a_i > 0, i = 1, 2, ..., k$ и $n > 1$. Докажи дека

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i)^n \le k^{n-1} \sum_{i=1}^{k} a_i^n \ .$$

Решение. Од неравенството на Хелдер, применето на броевите $a_i > 0$, $i = 1, 2, ..., k$ и $b_i = 1$, $i = 1, 2, ..., k$, при $p = n$ и $q = \frac{n}{n-1}$ следува

$$(\sum_{i=1}^{k} a_i)^n = (\sum_{i=1}^{k} 1 \cdot a_i)^n \le [(\sum_{i=1}^{k} a_i^n)^{\frac{1}{n}} (\sum_{i=1}^{k} 1^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}}]^n = k^{n-1} \sum_{i=1}^{k} a_i^n \ . \ \blacksquare$$

Пример 2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \le 1 \ . \qquad (4)$$

Решение. Од неравенството на Хелдер за $n = 2$ и $p = q = 2$, односно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+y)(x+z)} &= [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2]^{\frac{1}{2}} [(\sqrt{z})^2 + (\sqrt{x})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\ge \sqrt{x}\sqrt{z} + \sqrt{y}\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z}), \end{aligned}$$

па затоа

$$x + \sqrt{(x+y)(x+z)} \ge x + \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z}),$$

т.е.

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{x}{x+\sqrt{x}(\sqrt{y}+\sqrt{z})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \ .$$

Аналогно добиваме

$$\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} \le \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}, \quad \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \le \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \ .$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (4). ■

Пример 3. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што важи $ab + bc + ca \ge 3$. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}} \ .$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$(\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}})^{\frac{2}{3}} [a(a+b) + b(b+c) + c(c+a)]^{\frac{1}{3}} \ge a + b + c \ ,$$

т.е.

$$(\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}})^2 \ge \frac{(a+b+c)^3}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \ .$$

Според тоа, за да го докажеме бараното неравенство доволно е да докажеме дека

$$2(a+b+c)^3 \ge 9(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \ . \qquad (5)$$

Нека $m=a+b+c$ и $n=ab+bc+ca$. Тогаш $n\ge 3$ и неравенството (5) е еквивалентно со неравенството $2m^3+9n\ge 9m^2$. Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2m^3+9n\ge 2m^3+27=m^3+m^3+27\ge 3\sqrt[3]{27m^3m^3}=9m^2 . \blacksquare$$

Пример 4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви $a,b,c,\ \ x,y,z$ важи

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\ge\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}. \tag{6}$$

Решение. При ознаки

$$m=\frac{a}{\sqrt[3]{x}},\ n=\frac{b}{\sqrt[3]{y}},\ k=\frac{k}{\sqrt[3]{z}},\ u=\sqrt[3]{x},\ v=\sqrt[3]{y},\ w=\sqrt[3]{z},$$

неравенството (6) го добива обликот

$$3(m^3+n^3+k^3)(u^3+v^3+w^3)\ge(mu+nv+kw)^3. \tag{7}$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$3(m^3+n^3+k^3)=(1^2+1^2+1^2)(m^3+n^3+k^3)\ge(m^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{3}{2}}+k^{\frac{3}{2}})^2. \tag{8}$$

Од друга страна, од неравенството на Хелдер, применето на броевите $m^3,\ \ n^3,k^3$ и u^3,v^3,w^3, при $p=\frac{2}{3},q=\frac{1}{3}$ добиваме

$$(m^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{3}{2}}+k^{\frac{3}{2}})^2(u^3+v^3+w^3)\ge(mu+nv+kw)^3. \tag{9}$$

Конечно, ако ги помножиме неравенствата (8) и (9) го добиваме неравенството (7), со што е докажано неравенството (6). ■

Пример 5. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^3=3 \text{ и } \sum_{i=1}^{n}a_i^5=5. \tag{10}$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n}a_i>\frac{3}{2}. \tag{11}$$

Решение. Од неравенството на Хелдер и од условите (10) следува

$$3=\sum_{i=1}^{n}a_i^3=\sum_{i=1}^{n}a_i^2a_i\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}}=(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}(\sum_{i=1}^{n}a_i^5)^{\frac{2}{5}}=5^{\frac{2}{5}}(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}},$$

т.е.

$$\frac{3}{5^{\frac{2}{5}}}\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}. \tag{12}$$

Нека $A=\sum_{i=1}^{n}a_i$. Од $0<\frac{a_i}{A}<1$ следува $(\frac{a_i}{A})^{\frac{5}{3}}\le\frac{a_i}{A}$, што значи дека

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\frac{5}{3}} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A}=1\,,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{5}{3}} \le A^{\frac{5}{3}}=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{5}{3}}. \tag{13}$$

Конечно, бидејќи $2>5^{\frac{2}{5}}$, од неравенствата (12) и (13) следува

$$\frac{3}{2}<\frac{3}{5^{\frac{2}{5}}}\le\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}\le\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{5}{3}}\right]^{\frac{3}{5}}=\sum_{i=1}^{n} a_i\ ,$$

што значи дека точно е неравенството (11). ■

Пример 6. Нека a,b,c се позитивни реални броеви и $n,k\in\mathbb{N}$. Докажи дека

$$\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\ge a^k+b^k+c^k\,.$$

Решение. Од неравенството на Хелдер за $p=\frac{n+k}{k}$, $q=\frac{n+k}{n}$ следува

$$\begin{aligned}a^k+b^k+c^k&=\frac{a^k}{b^{\frac{nk}{n+k}}}b^{\frac{nk}{n+k}}+\frac{b^k}{c^{\frac{nk}{n+k}}}c^{\frac{nk}{n+k}}+\frac{c^k}{a^{\frac{nk}{n+k}}}a^{\frac{nk}{n+k}}\\&\le\left(\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\right)^{\frac{k}{n+k}}(a^k+b^k+c^k)^{\frac{n}{n+k}},\end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. ■

Пример 7. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+8bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+8ca}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+8ab}}\ge 1\,.$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$\sum_{cyc} a(a^2+8bc)\cdot\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+8bc}}\ge(a+b+c)^3.$$

Според тоа, доволно е да го докажеме неравенството

$$(a+b+c)^3\ge\sum_{cyc} a(a^2+8bc)\,,$$

кое е еквивалентно на неравенството

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge 6abc\,.$$

Последното неравенств непосредно следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. ■

Пример 8. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+2c}}+\frac{b+c}{\sqrt{b+2a}}+\frac{c+a}{\sqrt{c+2b}}\ge 2\sqrt{a+b+c}\,.$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$(\sum_{cyc}\frac{a+b}{\sqrt{a+2c}})^2\sum_{cyc}(a+b)(a+2c)\geq(a+b+b+c+c+a)^2.$$

Според тоа, доволно е да докажеме неравенството

$$\frac{8(a+b+c)^3}{\sum_{cyc}(a+b)(a+2c)}\geq(2\sqrt{a+b+c})^2,$$

кое е еквивалентно со точното неравенство

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca. \blacksquare$$

Пример 9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што важи $a+b+c=3$. Докажи го неравенството

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+3b+5bc}}\geq 1.$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$\sum_{cyc}a^2(a+3b+5bc)\cdot(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+3b+5bc}})^2\geq(a+b+c)^3.$$

Според тоа, доволно е да докажеме неравенството

$$\frac{(a+b+c)^3}{\sum_{cyc}a^2(a+3b+5bc)}\geq 1,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc\geq 5abc(a+b+c).$$

Ако во последното неравенство заемниме $a+b+c=3$, го добиваме неравенството

$$a^2c+ab^2+ac^2\geq 3abc,$$

кое непосредно следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. ■

Пример 10. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}}\geq 4.$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$(\sum_{cyc}\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}}))^2\cdot\sum_{cyc}(b+c)(a^2+bc)\geq 8(a+b+c)^3$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$(a+b+c)^3\geq 2[(b+c)(a^2+bc)+(c+a)(b^2+ca)+(a+b)(c^2+ab)],$$

т.е.

$$(a+b+c)^3\geq 4[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)],$$

односно

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\,.$$

Последното неравенство следува од неравенството (2) и од фактот дека $abc \geq 0$. ■

2. ОБОПШТЕНИ НЕРАВЕНСТВА НА ХЕЛДЕР

Претходно го докажавме неравенството на Хелдер и разгледавме повеќе примери во кои истото го применивме. Во продолжение ќе докажеме две обпштувања на неравенството на Хелдер.

Теорема 6. (прво обопштено неравенство на Хелдер). Нека a_i, b_i, $i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви и нека за позитивните реални броеви p,q,r важи $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Тогаш

$$[\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)^r]^{\frac{1}{r}} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}\,. \tag{1}$$

Доказ. Броевите a_i^r, b_i^r, $i=1,2,...,n$ се позитивни и за позитивните реални броеви $p'=\frac{p}{r}$, $q'=\frac{q}{r}$ важи $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$.

Сега од неравенството на Хелдер следува неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^r \leq [\sum_{i=1}^{n}(a_i^r)^{p'}]^{\frac{1}{p'}}[\sum_{i=1}^{n}(b_i^r)^{q'}]^{\frac{1}{q'}}\,,$$

т.е. неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r b_i^r \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{r}{p}}(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{r}{q}}\,,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). ■

Теорема 7. (второ обопштено неравенство на Хелдер). Нека a_i, b_i, c_i, $i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви и нека за позитивните реални бро-еви p,q,r важи $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^{n} c_i^r)^{\frac{1}{r}}\,. \tag{2}$$

Доказ. Од тежинското неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за $n=3$, $\alpha_1=\frac{1}{p}, \alpha_2=\frac{1}{q}$, $\alpha_3=\frac{1}{r}$, $a_1=a^p, a_2=b^q$ и $a_3=c^r$ следува

$$abc=(a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}}(c^r)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q+\frac{1}{r}c^r\,. \tag{3}$$

Ако во неравенството (3) последователно ставиме

$$a=\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}},\ b=\frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}},\ c=\frac{c_i}{(\sum_{i=1}^n c_i^r)^{\frac{1}{r}}},\ \text{за }\ i=1,2,...,n\ ,$$

ги добиваме неравенствата

$$\frac{a_ib_ic_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^n c_i^r)^{\frac{1}{r}}}\le\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}+\frac{1}{r}\frac{c_i^r}{\sum_{i=1}^n c_i^r},\ \text{за }\ i=1,2,...,n\ . \tag{4}$$

Со собирање на неравенствата (4) го добиваме неравенството

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^n c_i^r)^{\frac{1}{r}}}\le\frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}+\frac{1}{r}\frac{\sum_{i=1}^n c_i^r}{\sum_{i=1}^n c_i^r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). ■

На потполно идентичен начин како и неравенството (2), за m низи позитивни реални броеви може да се докаже следново обопштување на второто обопштено неравенство на Хелдер, чиј доказ го препуштаме на читателот за вежба.

Теорема 8. Нека за броевите $p_i>0,\ i=1,2,...,m$ важи

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_m}=1$$

и нека се дадени m низи позитивни реални броеви

$$(a_{11},a_{21},...,a_{n1}),\ (a_{21},a_{22},...,a_{n2}),...,(a_{1m},a_{2m},...,a_{nm})\ .$$

Точно е неравенството

$$\sum_{i=1}^n a_{i1}a_{i2}...a_{im}\le(\sum_{i=1}^n a_{i1}^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}(\sum_{i=1}^n a_{i2}^{p_2})^{\frac{1}{p_2}}...(\sum_{i=1}^n a_{im}^{p_m})^{\frac{1}{p_m}}\ .\ ■ \tag{5}$$

Забелешка 2. Ако во неравенството (5) земеме $p_1=p_2=...=p_m=m$, тогаш истото го добива видот

$$(\sum_{i=1}^n a_{i1}a_{i2}...a_{im})^m\le(\sum_{i=1}^n a_{i1}^m)(\sum_{i=1}^n a_{i2}^m)...(\sum_{i=1}^n a_{im}^m)\ . \tag{6}$$

Пример 11. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи го неравенство-то

$$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)\ge(a+b+c)^3\ .$$

Решение. Од второто обопштено неравенство на Хелдер, т.е. од забелешка 2, за $m=n=3$ следува

$$\begin{aligned}(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)&=(a^3+1^3+1^3)(1^3+b^3+1^3)(1^3+1^3+c^3)\\&\ge(a\cdot1\cdot1+1\cdot b\cdot1+1\cdot1\cdot c)^3=(a+b+c)^3,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 12. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Решение. Од второто обопштено неравенство на Хелдер следува неравенството

$$(a+b+c)((c+a)+(a+b)+(c+b))(\frac{1}{a(c+a)}+\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(c+b)})\geq$$
$$\geq(a(c+a)\frac{1}{a(c+a)}+b(a+b)\frac{1}{b(a+b)}+c(c+b)\frac{1}{c(c+b)})^3=27,$$

кое е еквивалентно со даденото неравенство. ■

3. НЕРАВЕНСТВО НА МИНКОВСКИ

Теорема 6 (неравенство на Минковски). Ако $a_i,b_i>0$, за $i=1,...,n$ и $p>1$, тогаш важи неравенството

$$[\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p]^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^n b_i^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}.$$

Доказ. За $p>1$, наоѓаме $q=\frac{p}{p-1}>1$ за кој важи $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. За вака најденото q со примена на неравенството на Хелдер го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p&=\sum_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)^{p-1}\\
&\leq(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}+(\sum_{i=1}^n b_i^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}\\
&=(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p]^{1-\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^n b_i^p)^{\frac{1}{p}}[\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p]^{1-\frac{1}{p}}\\
&=[(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^n b_i^p)^{\frac{1}{p}}][\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p][\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p]^{-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Сега, ако поделиме со $\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p>0$ и помножиме со $[\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p]^{\frac{1}{p}}>0$ го добиваме неравенството (1).

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1^p}{b_1^p}=\frac{a_2^p}{b_2^p}=...=\frac{a_n^p}{b_n^p}$, што значи ако и само ако $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$. ■

Забелешка 3. Аналогно како и кај неравенството на Хелдер и во случај на неравенството на Минковски, ако броевите a_i, b_i, $i=1,...,n$ се произволни по знак, тогаш точно е неравенството

$$(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

Пример 13. Нека a,b,c се реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2} \geq \tfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Од неравенството на Минковски следува

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2} &\geq \sqrt{(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2}\\ &= \sqrt{2(a+b+c-\tfrac{3}{2})^2+\tfrac{9}{2}} \geq \tfrac{3\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 14. Докажи дека за секој реален број $p \geq 1$ и за секој $n \in \mathbb{N}$ точно е неравенството

$$1^p+2^p+...+n^p \geq n(\tfrac{n+1}{2})^p. \qquad (3)$$

Решение. За $p=1$ имаме

$$1+2+...+n = \tfrac{n(n+1)}{2} \geq \tfrac{n(n+1)}{2},$$

што е точно. Нека $p>1$ и да земеме $a_i = i, b_i = n+1-i$, за $i=1,2,...,n$. Од неравенството на Минковски последователно добиваме

$$\begin{aligned}&[\sum_{i=1}^{n}(i+n+1-i)^p]^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n}i^p)^{\frac{1}{p}} + [\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)]^{\frac{1}{p}} \quad \Leftrightarrow\\ &[n(n+1)^p]^{\frac{1}{p}} \leq 2(\sum_{i=1}^{n}i^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \Leftrightarrow\\ &n(\tfrac{n+1}{2})^p \leq \sum_{i=1}^{n}i^p.\ ■\end{aligned}$$

Пример 15. Докажи дека

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}} < 1+\tfrac{\sqrt[n]{2}}{2},$$

каде $n>1$ е природен број и a,b,c се должини на страни на триаголник со единичен периметар.

Решение. Ако a,b,c се должини на страни со единичен периметар, тогаш користејќи ја трансформацијата на Рави добиваме дека постојат броеви $x,y,z>0$ такви што важи

$$a=y+z, b=z+x,\ c=x+y\ .$$

Понатаму, од $a+b+c=1$ следува $x+y+z=\frac{1}{2}$. Сега од неравенството на Минковски добиваме

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}=[(y+z)^n+(z+x)^n]^{\frac{1}{n}}\le(x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}+(2z^n)^{\frac{1}{n}}<c+\sqrt[n]{2}z\ .$$

Слично, $(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}<a+\sqrt[n]{2}x$ и $(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<b+\sqrt[n]{2}y$. Оттука следува

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<c+a+b+\sqrt[n]{2}(z+x+y)=1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\ .\ \blacksquare$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството
$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}\ge\sqrt{a+b+c}\ .$$
2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи го неравенството
$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+6b+2bc}}\ge 1\ .$$
3. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството
$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+6b+2bc}}\ge 1\ .$$
4. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи го неравенството
$$\sum_{cyc}\sqrt{a^3+2bc}\ge 3\sqrt{3}\ .$$
5. Ако a,b,c,d се позитивните броеви такви што $c^2+d^2=(a^2+b^2)^3$, тогаш $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\ge 1$. Докажи!
6. Нека $k,l\in\mathbb{N}$ и нека $a_{ij}>0; i=1,...,k,\ j=1,2,...,l$ се позитивни реал-ни броеви. Докажи дека за $q\ge p>0$ важи
$$(\sum_{j=1}^{l}(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}^{p})^{\frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}}\le(\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}^{q})^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}}\ .$$
7. Нека a,b,c,x,y,z,t,u,v се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(t^3+u^3+v^3)\ge(axt+byu+czv)^3\ .$$
8. Нека за реалните броеви $a,b,c\ge 1$ важи $a+b+c=2abc$. Докажи дека

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^2} \geq \sqrt[3]{ab-1}+\sqrt[3]{bc-1}+\sqrt[3]{ca-1}.$$

9. Нека a_1, a_2, a_3 се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$(a_1^5 - a_1^2 + 3)(a_2^5 - a_2^2 + 3)(a_3^5 - a_4^2 + 3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)^3.$$

10. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви такви што $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Докажи дека

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993
2. J. E. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996
3. Р. Малчески, А. Малчески, Д. Велинов, С. Малчески, С. Костадинова, *Математички талент С7 (збирка задачи за IV година, прв дел),* Армаганка, Скопје, 2019
4. Р. Малчески, *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства,* Армаганка, Скопје, 2019
5. Р. Малчески, *Математичка анализа* 1 (второ издание), Армаганка, 2019

Статијата прв пат е објавена како
Samoil Malcheski, Katerina Anevska - **HöLDER’S AND MINKOWSKI’S INEQUALITIES**, Volume 34, Number 1, 2026, Matematika+, Arhimed, Sofia