XIII ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2026

IV одделение

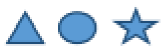
1. Еден зимски ден, во Скопје за прв пат во 5:25 часот наутро измерена е температура $-10°C$. На секои два часа температурата се зголемува за $1{,}5°C$. Во колку часот за прв пат температурата ќе изнесува $-4°C$?

Решение. *Прв начин*. Температурата во 5:25 часот е $-10°C$. За да достигне $-4°C$, треба да се зголеми за $-4°C-(-10°C)=6°C$. Секое зголемување од $1{,}5°C$ се случува на секои 2 часа, односно секое зголемување на температурата за $3^{\circ}C$ се случува на секои 4 часа. Значи, за температурата да се зголеми за $6^{\circ}C$ потребни ни се $2\cdot 4=8$ часа. Следува, за прв пат температурата ќе биде $-4°C$ во 13:25 часот.

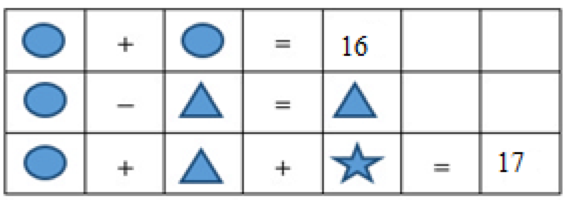
Втор начин. Бидејќи со секои изминати два часа температурата се зголемува за $1{,}5°C$, зголемувањето на температурата ќе се одвива како во следната табела:

Време	5:25	7:25	9:25	11:25	13:25
Температура	$-10°C$	$-8{,}5°C$	$-7°C$	$-5{,}5°C$	$-4°C$

2. Томе пробува да отклучи една фиока. На фиоката стои ознаката



така што секоја фигура означува одреден број, а до неа има писмо за дешифрирање:



Определи ја шифрата со која Томе може да ја отклучи фиоката.

Решение. Од првата редица следува дека на кругот соодветствува цифрата $16:2=8$. Според втората редица кругот е еднаков на збирот на два триаголника, што значи дека на еден триаголник соодветствува цифрата $8:2=4$. Конечно, од третата редица следува дека на ѕвездата соодветствува цифрата $17-(8+4)=5$. Значи, шифрата е бројот 485.

3. Дедо Цане тргнал на пазар со 630 денари. Од таа сума $\frac{1}{3}$ потрошил за да купи грозје. Со $\frac{1}{4}$ од останатите пари купил сливи, а со $\frac{1}{3}$ од преостанатите пари купил компири. Колку пари му останале на дедо Цане по купувањето на компирите?

   Решение. За купувањето на грозјето дедо Цане потрошил $\frac{1}{3}\cdot 630=210$ денари, по што му останале $630-210=420$ денари. За купувањето на слвите потрошил $\frac{1}{4}\cdot 420=105$ денари, по што му преостанале $420-105=315$ денари. Компирите чинеле $\frac{1}{3}\cdot 315=105$ денари, што значи дека по пазарувањето дедо Цане имал $315-105=210$ денари.

4. Дедо Мраз се движи над покривите на куќите во улицата на едно село и ги спушта подароците низ оџаците. Со секој свој чекор поминува 75 *cm*. Растојанието меѓу оџакот на првата и оџакот на втората куќа изнесува 9 *m*. Растојанието меѓу оџаците на втората и на третата куќа е за 1,5 *m* поголемо отколку растојанието меѓу оџаците на првите две куќи. Растојанието меѓу оџаците на третата и на четвртата куќа е за 1,5 *m* поголемо отколку растојанието меѓу оџаците на втората и на третата куќа. Колку чекори треба да направи Дедо Мраз за да стигне од оџакот на првата до оџакот на четвртата куќа?

   Решение. Од $9\,m=900\,cm$ и $1,5\,m=150\,cm$ следува дека растојанието меѓу оџаците на првата и втората куќа е еднакво на $900\,cm$, меѓу оџаците на втората и третата е еднакво на $900+150=1050\,cm$ и меѓу оџаците на третата и четвртата куќа е еднакво на $1050+150=1200\,cm$.

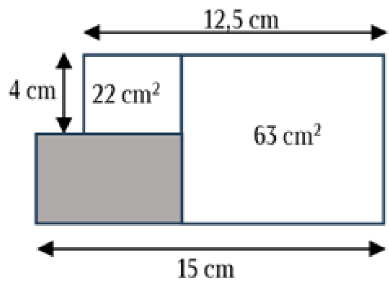
   Прв начин. Од оџакот на првата до оџакот на втората куќа Дедо Мраз ќе направи $900:75=12$ чекори. Од оџакот на втората до оџакот на третата куќа ќе направи $1050:75=14$ чекори и од оџакот на третата до оџакот на четврата куќа ќе направи $1200:75=16$ чекори. Значи, Дедо Мраз вкупно ќе направи $12+14+16=42$ чекори.

   Втор начин. Меѓу оџакот на првата и оџакот на четвртата куќа вкупно има $900+1050+1200=3150$ *cm*. Значи, Дедо Мраз вкупно ќе направи $3150:75=42$ чекори.

V одделение

1. Дедо Петре засадил во дворот црн бор висок 96 *cm*. Секои 3 месеци, овој вид бор пораснува 4 *dm*. Колку метри ќе биде висок борот на дедо Петре по 7 години?
   Решение. Во една година имаме $12:3=4$ периоди од по 3 месеци. Значи, во 7 години имаме $7\cdot 4=28$ периоди од по 3 месеци. Според тоа, за 7 години борот ќе порасне $28\cdot 4=112\,dm=11,2\,m$. На почетокот борот бил висок $96\,cm=0,96\,m$, па како пораснал $11,2\,m$ по 7 години борот ќе биде висок $0,96+11,2=12,16\,m$.

2. Определи ја плоштината на затемнетиот дел од фигурата прикажана на цртежот десно. Броевите во правоаголниците се нивните плоштини.



   Решение. Правоаголникот чијашто плоштина е $22\,cm^2$ има ширина $4\,cm$, па неговата должина е еднаква на $22:4=5,5\,cm$. Должината на правоаголникот со плоштина $63\,cm^2$ е $12,5-5,5=7\,cm$, па за неговата ширина добиваме $63:7=9\,cm$. Сивиот правоаголник има ширина $9-5=4\,cm$. Неговата должина е $15-7=8\,cm$. Бараната плоштина е $8\cdot 5=40\,cm^2$.

3. Еден шестцифрен број исто се чита и одлево-надесно, и оддесно-налево. Првата цифра одлево е за 1 поголема од втората цифра, а втората цифра е за 1 поголема од третата. Збирот на цифрите на шестцифрениот број е 24. Кој е тој шестцифрен број?
   Решение. *Прв начин.* Бидејќи шестцифрениот број исто се чита и одлево-надесно, и оддесно-налево, првата и шестата цифра се исти, втората и петтата цифра се исти, третата и четвртата цифра се исти. Бидејќи збирот на сите шест цифри е 24, тоа значи дека збирот на првите три цифри (како и збирот на последните три цифри) е половина од 24, односно тој е еднаков на 12. Бидејќи првата цифра е за 1 поголема од втората цифра, а втората е за 1 поголема од третата цифра, бараме три последователни броеви чиј збир е 12 . Сега, од

$$1+2+3=6,\ 2+3+4=9,\ 3+4+5=12,\ 4+5+6=15,...$$

заклучиуваме дека бараните броеви се 3, 4 и 5. Сега, бидејќи првата цифра од лево е најголема, заклучуваме дека бараниот број е 543345.

Втор начин. Бараниот број е од видот $\overline{abccba}$. Тогаш

$$b=c+1, a=b+1=c+2$$

и затоа

$$\begin{aligned}&a+b+c+c+b+a=24,\\&2(a+b+c)=24,\\&a+b+c=12,\\&c+2+c+1+c=12,\\&3c=9,\\&c=3.\end{aligned}$$

Значи, $b=3+1=4$, $a=3+2=5$. Конечно, бараниот број е 543345.

Трет начин. Според условот на задачата цифрите на стотките и илјадитите се еднакви и тие се најмали. Потоа цифрите на десетките и десетилјадитите се еднакви и тие се за 1 поголеми, а цифрите на единиците и стоилјадитите се еднакви и тите се уште за 1 поголеми. Имајќи го предвид кажаното ја составуваме следнава табела

СИ	ДИ	И	С	Д	Е	Збир
9	8	7	7	8	9	48
8	7	6	6	7	8	42
7	6	5	5	6	7	36
6	5	4	4	5	6	30
5	**4**	**3**	**3**	**4**	**5**	**24**
4	3	2	2	3	4	18
3	2	1	1	2	3	12
2	1	0	0	1	2	6

Ккко што можеме да видиме само во еден случај збирот на цифрите е 24, што значи дека бараниот број е 543345.

4. Во пет училници се наоѓаат вкупно 200 ученици. Во првата и втората училница заедно има 80 ученици, во втората и третата има 75 ученици, во третата и четвртата има 55 ученици, а во четвртата и петтата има 90 ученици. Колку ученици има во секоја училница одделно?

Решение. Во првата, втората, третата и четвртата училница вкупно има $80+55=135$ ученици. Значи, во петтата училница има $200-135=65$ ученици.

Понатаму, во четвртата и петтата училница има 90 ученици, па затоа во четвртата училница има $90-65=25$ ученици.

Бидејќи во третата и четвртата училница има 55 ученици, во третата училница има $55-25=30$ ученици.

Сега, во втората и третата училница има 75 ученици, па затоа во втората училница има $75-30=45$ ученици.

Конечно, во првата и втората училница има 80 ученици, што значи дека во првата училница има $80-45=35$ ученици.

Забелешка. Задачата може да се реши и ако прво определиме колку ученици има во било кои други четири училници, а потоа продолжуаме како погоре. Притоа, бројот на учениците во првата, втората, третата, четвртата, петтата училница можеме да го означиме со x, y, z, u, v, со што ги добиваме равенките

$$x+y+z+u+v=200,\ x+y=80,\ y+z=75,\ z+u=55,\ u+v=90.$$

Постојат повеќе начини од последните равенки да го добиеме решението на задачата. Обиди се тоа да го направиш на барем еден начин.

VI одделение

1. Во две продавници за овошје имало вкупно 365 килограми јаболка, кои се продавале по иста цена за килограм. Првата продавница продала одредена количина јаболка за 1240 денари, а втората продавница продала одредена количина јаболка за 2500 денари. По продажбата, во првата продавница останале 102 килограми, а во втората продавница останале 76 килограми јаболка. По колку килограми јаболка имало во секоја од продавниците на почетокот?

   Решение. Двете продавници продале вкупно
   $$365-(102+76)=365-178=187$$
   килограми јаболка. Овие 187 килограми јаболка биле продадени за $1240+2500=3740$ денари, па цената на еден килограм јаболка е $3740:187=20$ денари. Првата продавница продала $1240:20=62$ килограми јаболка, па на почетокот во неа имало $62+102=164$ килограми јаболка. Во втората продавница на почетокот имало $365-164=201$ килограм јаболка.

2. Збирот на периметрите на еден триаголник, еден квадрат и еден правоаголник е 141 *cm*. Периметарот на триаголникот е за 45 *cm* поголем од

периметарот на квадратот, а периметарот на правоаголникот е за 60% помал од периметарот на квадратот. Пресметај ги периметарот и плоштината на квадратот.

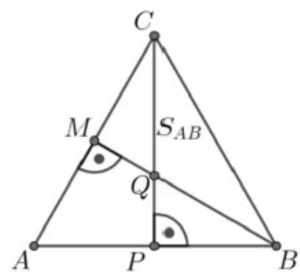
Решение. Нека периметарот на квадратот го означиме со L. Тогаш периметарот на триаголникот е $L+45$, а периметарот на правоаголникот е $(1-0,6)L=0,4L$. Од условот на задачата следува

$$L+L+45+0,4L=141,$$
$$2,4L=96,$$
$$L=40\ cm.$$

Тогаш страната на квадратот е $a=40:4=10\ cm$, па неговата плоштина е $P=a^2=10^2=100\ cm^2$.

3. Нека P е средишната точка на отсечката AB. На симетралата s_{AB} на отсечката AB е избрана точка C таква што $\overline{AB}=\overline{AC}$. Нека средината на отсечката AC е точката M и нека пресечната точка на отсечката MB со симетралата s_{AB} е точката Q. Определи ја големината на $\measuredangle PQB$.

Решение. Од $C\in s_{AB}$, следува $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle BPQ=90^\circ$. Понатаму, $\overline{AB}=\overline{AC}$, па затоа триголникот ABC е рамностран. Значи, $\measuredangle BAM=\measuredangle BAC=60^\circ$. Точката M е средина на AC и $\overline{AB}=\overline{CB}$, па затоа MB е симетрала на AC. Значи, $\measuredangle AMB=90^\circ$. Сега, од триаголникот ABM следува



$$\measuredangle QBP=\measuredangle MBP=180^\circ-\measuredangle BAM-\measuredangle AMB=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ.$$

Конечно, од триаголникот PQB добиваме

$$\measuredangle PQB=180^\circ-\measuredangle BPQ-\measuredangle QBP=180^\circ-90^\circ-30^\circ=60^\circ.$$

4. Аритметичката средина на растојанијата од домовите на Никола, Ѓорѓи и Анета до нивното училиште е 2026 *m*. По неколку години, тројцата ученици се преселиле во нови домови. Новиот дом на Никола се наоѓа 1002 *dm* подалеку од училиштето во однос на неговиот стар дом, новиот дом на Ѓорѓи е 2075 *cm* поблиску до училиштето во однос на неговиот стар дом, и новиот дом на Анета е 4945 *cm* поблиску до училиштето во

однос на нејзиниот стар дом. Пресметај ја аритметичката средина на растојанијата од новите домови на тројцата ученици до нивното училиште.

Решение. Домот на Никола е 100,2 m подалеку, а домовите на Ѓорѓи и Анета се соодветно 20,75 m и 49,45 m поблиску до училиштето. Според тоа, домовите на Никола, Ѓорѓи и Анета заедно се

$$100,2-20,75-49,45=30\ m$$

подалеку од училиштето. Тоа значи дека секој од трите дома е во просек $30:3=10\ m$ подалеку од училиштето. Затоа просечното растојание на новите домови до училиштето, т.е. аритметичката средина на растојанијата од домовите до училиштето е $2026+10=2036\ m$.

VII одделение

1. Определи го природниот број n за кој важи:

$$n<(\tfrac{1}{2}+1):\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\cdot(\tfrac{1}{4}+1):\frac{1}{\frac{1}{5}+1}\cdot(\tfrac{1}{6}+1):\frac{1}{\frac{1}{7}+1}\cdot(\tfrac{1}{8}+1):\frac{1}{\frac{1}{9}+1}\cdot(\tfrac{1}{10}+1)<n+1.$$

Решение. Имаме

$$n<(\tfrac{1}{2}+1):\frac{1}{\frac{1}{3}+1}\cdot(\tfrac{1}{4}+1):\frac{1}{\frac{1}{5}+1}\cdot(\tfrac{1}{6}+1):\frac{1}{\frac{1}{7}+1}\cdot(\tfrac{1}{8}+1):\frac{1}{\frac{1}{9}+1}\cdot(\tfrac{1}{10}+1)<n+1,$$

$$n<(\tfrac{1+2}{2}):\frac{1}{\frac{1+3}{3}}\cdot(\tfrac{1+4}{4}):\frac{1}{\frac{1+5}{5}}\cdot(\tfrac{1+6}{6}):\frac{1}{\frac{1+7}{7}}\cdot(\tfrac{1+8}{8}):\frac{1}{\frac{1+9}{9}}\cdot(\tfrac{1+10}{10})<n+1,$$

$$n<\frac{3}{2}:\frac{1}{\frac{4}{3}}\cdot\frac{5}{4}:\frac{1}{\frac{6}{5}}\cdot\frac{7}{6}:\frac{1}{\frac{8}{7}}\cdot\frac{9}{8}:\frac{1}{\frac{10}{9}}\cdot\frac{11}{10}<n+1,$$

$$n<\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{11}{10}<n+1$$

$$n<\frac{11}{2}<n+1$$

Според тоа, $n<5,5<n+1$, па затоа $n=5$.

2. Најди го најголемиот петцифрен број кој што истовремено е делив со 4, 5 и 9, и за кој што важат следните услови: цифрата на илјадарките е за еден помала од цифрата на десетките, а збирот од цифрите на единиците и десетките е поголем од 2 , а помал од 8 .

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcde}$. Бројот е делив со 4 и 5, што значи е делив со 10, па затоа $e=0$, т.е. бројот е од видот $\overline{abcd0}$. Понатаму, од деливоста со 4 следува дека двоцифрениот завршеток на бројот е делив со 4, па затоа $d\in\{0,2,4,6,8\}$. Но, збирот од цифрите на единиците и десетките $d+0=d$ е поголем од 2 , а помал од 8, па затоа

$d \in \{4,6\}$. Исто така, од условот на задачата следува $b = d - 1$, па затоа $d = 4, b = 3$ или $d = 6, b = 5$.

Ако $d = 4, b = 3$, тогаш бројот е од видот $\overline{a3c40}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $a + c + 7$ е делив со 9. Последното значи дека $a + c \in \{2,11\}$. Во случајов најголемиот број се добива за $a = 9, c = 2$ и тоа е бројот 93240.

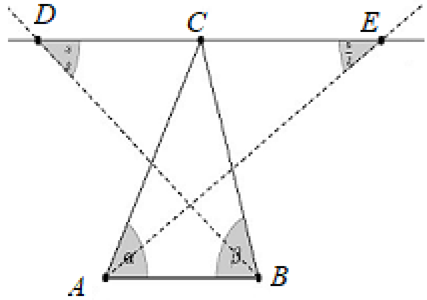
Ако $d = 6, b = 5$, тогаш бројот е од видот $\overline{a6c50}$, па од деливоста со 9 следува дека збирот на цифрите $a + c + 11$ е делив со 9. Последното значи дека $a + c \in \{7,16\}$. Во случајов најголемиот број се добива за $a = 9, c = 7$ и тоа е бројот 95760.

3. Во три вреќи има вкупно 32,1 *kg* јачмен. Во првата вреќа има 20% помалку јачмен отколку во втората, а во третата има 42,5% од количеството јачмен во првата вреќа. Колку јачмен има во секоја вреќа?

Решение. Нека во втората вреќа има *x* *kg* јачмен. Тогаш во првата вреќа има 80% од *x*, односно $\frac{4}{5}x$ *kg* јачмен, а во третата вреќа има 42, 5% од $\frac{4}{5}x$ *kg* односно има $\frac{42,5}{100} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{17}{50}x$ *kg* јачмен. Оттука добиваме $\frac{4}{5}x + x + \frac{17}{50}x = 32,1$, односно $x = 15$. Според тоа, во првата вреќа има $\frac{4}{5}x = \frac{4}{5} \cdot 15 = 12$ *kg* јачмен, а во третата има $32,1 - 12 - 15 = 5,1\,kg$ јачмен.

4. Нека *ABC* е остроаголен разностран триаголник. Низ темето *C* повлечена е права *p* паралелна со страната *AB*. Симетралата на аголот *ABC* ја сече правата *p* во точката *D*, а симетралата на аголот *BAC* ја сече правата *p* во точката *E*. Докажи дека $\overline{DE} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

Решение. Бидејќи правата *p* е паралелна со страната *AB*, симетралите на аглите $\alpha = \measuredangle BAC$ и $\beta = \measuredangle ABC$ се трансверзали на овие паралелни прави. Од еднаквоста на аглите заклучуваме дека $\measuredangle CEA = \frac{\beta}{2}$. Оттука триаголникот *AEC* има два еднакви агли, односно триаголникот *AEC* е рамнокрак и важи $\overline{AC} = \overline{CE}$. Слично, $\overline{BC} = \overline{CD}$. Оттука,



$$\overline{DE}=\overline{CE}+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{BC}\,.$$

VIII одделение

1. Во една акција за пошумување учествувале 35 ученици од 10 различни училишта и вкупно засадиле 80 садници. Секој ученик од исто училиште засадил еднаков број садници, а учениците од различни училишта засадиле различен број садници. Секој ученик засадил барем една садница. Колку вкупно ученици засадиле само една садница?
Решение. Нека секој ученик од првото училиште засадил барем 1 садница, од второто училиште барем 2 садници, од третото училиште барем 3 садници, и така натаму, од десеттото училиште барем 10 садници. Тогаш 10 ученици (сите од различни училишта) засадиле најмалку $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$ садници. Останатите $35-10=25$ ученика засадиле најмногу $85-55=25$ садници. Бидејќи секој ученик засадил барем една садница, следува дека секој од тие 25 ученици засадил само по една садница. Значи, и овие 25 ученика се од првото училиште. Според тоа, $25+1=26$ ученици засадиле само по една садница.

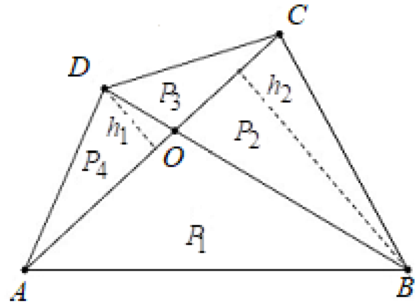
2. Докажи дека ако n е непарен природен број, тогаш
$$A=n^2+(n^2+1)+(n^2+2)+...+(n^2+2026)$$
е парен број делив со 2027.
Решение. Имаме
$$\begin{aligned}A&=n^2+(n^2+1)+(n^2+2)+...+(n^2+2026)\\&=2027n^2+(1+2026)+(2+2025)+...+(1013+1014)\\&=2027n^2+1013\cdot 2027\\&=2027(n^2+1013).\end{aligned}$$
Сега е јасно дека $2027\,|\,A$ и како збир на два непарни броја е парен број, а производ на непарен и парен број е парен број добиваме дека A е парен број.

3. Дијагоналите на еден конвексен четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и го делат тој четириаголник на триаголниците OAB, OBC, OCD и ODA. Дали производот од плоштините на триаголниците OBC и ODA е еднаков со производот од плоштините на триаголниците OAB и OCD?

Решение. При ознаки како на цртежот десно имаме

$$P_1 = P_{ABO}, P_2 = P_{BCO},$$
$$P_2 = P_{CDO}, P_4 = P_{DAO},$$

па затоа



$$\begin{aligned} P_2P_4 &= \frac{\overline{OC}\cdot h_2}{2}\cdot\frac{\overline{OA}\cdot h_1}{2} \\ &= \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OC}\cdot h_1\cdot h_2}{4} \\ &= \frac{\overline{OA}\cdot h_2}{2}\cdot\frac{\overline{OC}\cdot h_1}{2} \\ &= P_1P_3. \end{aligned}$$

Значи, производот од плоштините на триаголниците *OBC* и *ODA* е еднаков со производот од плоштините на триаголниците *OAB* и *OCD*?

4. Определи ги сите тројки прости броеви x, y и z за кои важи

$$x^2(2026y + 1013z) = 2026\cdot 2025. \tag{1}$$

Решение. Имаме:

$$x^2(2026y + 1013z) = 2026\cdot 2025,$$
$$1013x^2(2y+z) = 2\cdot 1013\cdot 3^4\cdot 5^2,$$
$$x^2(2y+z) = 2\cdot 3^4\cdot 5^2.$$

Сега, бидејќи x е прост број добиваме $x = 3$ или $x = 5$.

Ако $x = 3$, тогаш $2y + z = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$. Десната страна на последната равенка е парен број, па затоа мора да е парен број и левата страна, од каде бидејќи z е прост број добиваме $z = 2$. Но, тогаш $y = 224$ е сложен број, па затоа во овој случај немаме решение.

Ако $x = 5$, тогаш $2y + z = 2\cdot 3^4$. Десната страна на последната равенка е парен број, па затоа мора да е парен број и левата страна, од каде бидејќи z е прост број добиваме $z = 2$. Но, тогаш $y = 80$ е сложен број, па затоа во овој случај немаме решение.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека равенката (1) нема решение во множеството прости броеви.

IX одделение

1. Нека $x + y + xy = 1$, каде $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A = xy + \frac{1}{xy} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x}.$$

Решение. Имаме

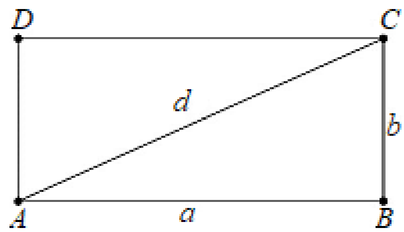
$$\begin{aligned}A = xy + \frac{1}{xy} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} &= \frac{x^2y^2+1-x^2-y^2}{xy}\\ &= \frac{y^2(x^2-1)-(x^2-1)}{xy} = \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}\\ &= \frac{(x+1)(y+1)(x-1)(y-1)}{xy}\\ &= \frac{(xy+x+y+1)(xy-x-y+1)}{xy}\\ &= (xy+x+y+1)(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}).\end{aligned}$$

Понатаму, $x+y+xy=1$ и како $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ако последното равенство го поделиме со x,y добиваме $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}$, односно $\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$. Сега, со замена во горното равенство наоѓаме $A=(1+1)(1+1)=4$.

2. Правоаголникот $ABCD$ има плоштина $\frac{m}{4}+\frac{1}{8}$ и дијагонала со должина $\frac{m}{2}$. Изрази го периметарот на правоаголникот преку m.

Решение. При ознаки како на цртежот десно имаме $d=\sqrt{a^2+b^2}$, што според условот на задачата значи $\frac{m}{2}=\sqrt{a^2+b^2}$, односно

$$a^2+b^2=\frac{m^2}{4}. \qquad (1)$$



Понатаму, плоштината на правоаголникот е $P=ab$, па од условот на задачата следува $ab=\frac{m}{4}+\frac{1}{8}$. Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$2ab=\frac{2m+1}{4}. \qquad (2)$$

Сега, ако ги собереме (1) и (2) добиваме $a^2+2ab+b^2=\frac{m^2}{4}+\frac{2m+1}{4}$, од каде наоѓаме $(a+b)^2=(\frac{m+1}{2})^2$. Но, $a+b>0$, $\frac{m+1}{2}>0$, па од последното равенство следува $a+b=\frac{m+1}{2}$. За периметарот на правоаголникот добиваме

$$L = 2(a+b) = 2 \cdot \tfrac{m+1}{2} = m+1 \; . \; .$$

3. Нека a, b, c се цели броеви што ги исполнуваат условите $a+b=c$ и $ab+bc+ca=1$. Докажи дека производот abc е делив со 3.

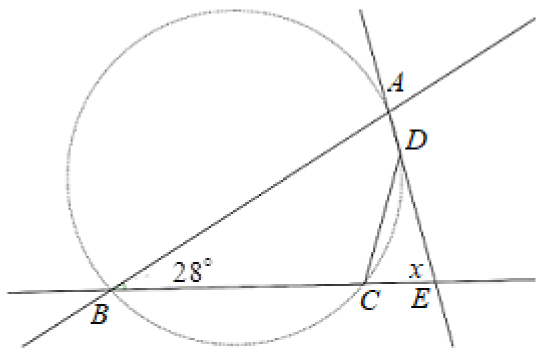
Решение. Од $ab+bc+ca=1$ и $a+b=c$ следува

$$abc = (1-bc-ca)c = (1-c(a+b))c = (1-c^2)c = -(c-1)c(1+c) \; .$$

Сега тврдењето на задачата следува од тоа што производот на трите последователни цели броеви $c-1, c, c+1$ е делив со 3.

4. Точките A, B, C, D лежат на иста кружница. Притоа, $\measuredangle ABC = 28^\circ$ и правите AD и BC се сечат во точка E така што $\overline{DC} = \overline{DE}$. Одреди го аголот меѓу правите AD и BC, ако точките C и D лежат од иста страна на правата AB и точката C се наоѓа меѓу точките B и E.

Решение. Нека $\measuredangle AEC = x$.



Бидејќи $\overline{DC} = \overline{DE}$, триаголникот DCE е рамнокрак, па

$$\measuredangle DCE = \measuredangle DEC = x \; .$$

Сега, $\measuredangle ADC$ е надворешен за триаголникот DCE па имаме дека

$$\measuredangle ADC = \measuredangle DEC + \measuredangle DCE$$
$$= x + x = 2x$$

Точките A, B, C, D лежат на иста кружница, па четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Значи, неговите спротивни агли се суплементни. Според тоа,

$$\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180^\circ,$$

$$2x + 28^\circ = 180^\circ,$$

$$x = 76^\circ.$$