Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 31

(збирка подготвителни задачи за натпревари за 4 одделение)

Скопје
16. јануари 2023

Рецензенти
д-р Катерина Аневска
д-р Методи Главче

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Книгава *Математички талент* 31 е наменета за талентираните ученици по математика од четврто одделение. Меѓутоа, сметам дека таа ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка Од 197 решени задачи во која во четири одделни дела се обработени аритметички, текстуални, логички, комбинаторни и геометриски задачи, приспособени за учениците на возраст од осум до девет години.

Природата на задачите содржани во оваа книга е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Тоа значи дека изборот на задачите е направен со цел развој на квалитетите на мислењето, како и усвојување на методите на решавање задачи, што треба да биде примарна цел на наставата по математика. Притоа, во четирите глави задачите не се систематизирани според тежината, туку тие се распределени според подобластите содржани во секоја глава. Така, во делот геометрија прво се разгледуваат отсечките, потоа периметрите и на крајот се задачите со плоштини.

Може да се каже дека оваа книга на извесен начин е дополнување на книгите од серијата Математички талент наменети за ученците од четврто одделение. Сепак, заради огромниот број задачи во многуте книги, можно е некои задачи да се повторуваат.

Рецензентите, д-р Катерина Аневска и д-р Методи Главче, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодарам.

И покрај вложениот напор, не можеам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторот
16 јануари, 2023 г.

I. ПРЕСМЕТУВАЊА, БРОЈНИ РЕБУСИ И РАВЕНКИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$81-27:9-67.$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$64-32:8-4.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот
$$54+27:9-6.$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот
$$42+28:7-5\cdot 2.$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот
$$33\cdot 3+33-33:3.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот
$$333-33\cdot 3+3:3.$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$33+3\cdot(33-33:33).$$

8. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$33+3\cdot(33-33:3).$$

9. Ако $\langle a\rangle=4a$, пресметај $\langle\langle 2\rangle\rangle$.

10. Нека
$$a\uparrow b=ab+a \text{ и } a\downarrow b=ab-a.$$
Пресметај $(20\uparrow 1)\downarrow 3$.

11. Кој е најголемиот број што може да се добие со поставување на загради во изразот
$$9\cdot 3+6:3-2.$$

12. Реши ја равенката
$$3(3+3x)-3=33.$$

13. Реши ја равенката
$$(333-3x):3=3\cdot 3+3.$$

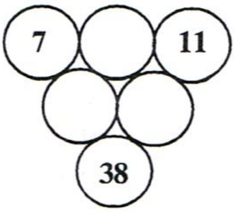
14. Кој е најголемиот природен број, кој може да се стави на местото на x во неравенството
$$4+88:(8-4)>4x,$$
така што тоа ќе биде точно?

15. Збирот на седум едноцифрени броеви е еднаков на 17. Шест од овие броеви се еднакви меѓу себе. Кои се тие броеви?

16. Кој е следниот број во низата броеви:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

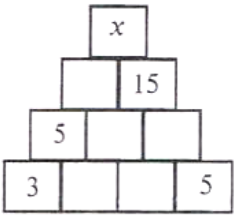
17. Кој е следниот број во низата броеви:
1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ...

18. Во секое од празните кругчиња на фигурата прикажана на цртежот десно запиши по еден природен број. Бројот во секое кругче треба да е еднаков на збирот на двата броја запишани во кругчињата од горниот ред кои се допираат до него. Пресметај го збирот на



броевите кои ги запиша.

19. Во секој правоаголник од фигурата прикажана на цртежот десно (освен во правоаголниците од долниот ред), е запишан број кој е еднаков на збирот на броевите кои се запишани во двата правоаголници од долниот ред, на кој лежи правоаголникот. Определи го бројот x?



20. Ако a,b и c се непознатите цифри во одземањето

$$\overline{a2b}-234=\overline{6c8},$$

пресметај го збирот $a+b+c$.

21. Кој е најмалиот број $\overline{ТРИ}$ за кој е точно равенството

$$\overline{ТРИ}+\overline{ТРИ}=\overline{ШЕСТ},$$

во кое на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

22. Во збирот $\overline{МА}+\overline{ТЕ}+\overline{МА}+\overline{ТИ}+\overline{КА}$ на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на еднаквите букви еднакви цифри. Ниту една цифра не е 0.

а) Која е најмалата вредност што може да ја прими овој збир?

б) Која е најголемата вредност која може да ја прими овој збир?

23. Нека A е најголемиот шестцифрен број кој е помал од бројот 564444 и е запишан со различни цифри. Колку е збирот на цифрите на бројот A?

24. Определи ја разликата на најголемиот трицифрен број чии соседни цифри се различни и најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри.

25. Одговорот на една задача е 56, при што последната аритметичка

операција е множење со 7. Кој ќе беше одговорот ако последната операција беше делење со 2.

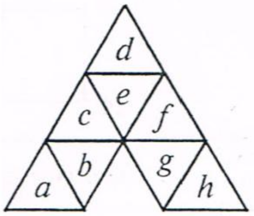
26. Кој двоцифрен број запишан со последователни цифри е делив без остаток со бројот 8.

27. Определи го збирот на цифрите на најмалиот четирицифрен непарен број A таков што збирот на цифрата не илјадитите и цифрата на единиците е 7.

28. Бројот x е таков што производот на 9 и x е помал од 70, а производот на 8 и x е поголем од 50. Определи го производот на 7 и x.

29. Секоја од буквите во фигурата прикажана на цртежот десно заменува еден од броевите од 1 до 8, при што различните букви заменуваат различни цифри и важи

$$a+b+c+d+e=s,$$
$$d+e+f+g+h=s,$$
$$s>22, e=5.$$



Кој број го заменува буквата d?

II. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Парните броеви од 10 до 100 се запишани последователно. Кој број е запишан дваесетти по ред?

2. За колку ќе се намали бројот 321 ако од него ја избришеме цифрата на десетките?

3. Збирот на три последователни броја е еднаков на 24. Кои се тие броеви?

4. Која е следната година по 2009 година, која ќе има еднаков збир на цифри како и 2009 година?

5. Пресметај го збирот на цифрите на најголемиот трицифрен број чии соседни цифри се различни?

6. Пресметај го збирот на цифрите на најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри таков што збирот на цифрата на единиците и цифрата на десетките е еднаков на цифрата на десетките.

7. Пабло замислил број на кој од десно му ја допишал цифрата 0. Потоа бројот кој што го добил го одзел од бројот 231 и го добил замислениот број. Кој број го замислил Пабло?

8. Архангел со последователни природни броеви, почнувајќи од бројот 1, ги нумерирал страните на својата тетратка. Тој вкупно запишал 55 цифри. Која е последната цифра што ја запишал Архангел?

9. Куќите од едната страна на нашата улица се означени со последователните непарни броеви од 1 до 41, а од другата страна со последователните парни броеви од 2 до 34. Колку куќи има во нашата улица?

10. Збирот на броевите со кои се нумерирани средните страници на една книга е 77. Колку страници има оваа книга?

11. Илија ги собрал секој едноцифрен број поголем од 3 со секој двоцифрен број. Колку од збировите кои ги добил Илија се трицифрени броеви?

12. Горјан запишал дваесет последователни непарни броеви. Потоа ја определил разликата $B-A$, каде A е збирот на првите дессет од запишаните броеви, а B е збирот од последните десет од запишаните броеви. Кој број го добил Горјан?

13. Кој е најголемиот трицифрен број кој е делив со 7 и кај кој збирот на неговите цифри исто така е делив со 7?

14. Андреј запишал три броја. Аритметичките средини на секои два од овие три броја се 33, 44 и 55 (артиметичка средина на неколку броја се нарекува бројот кој се добива кога збирот на тие броеви се подели со нивниот број). Кои броеви ги запишан Андреј?

15. Андреј користејќи ја по еднаш секоја од цифрите 0, 1, 3, 5, 7 и 9, запишал еден трицифрен, еден двоцифрен и еден едноцифрен број, така што збирот на трите броја бил најмал. Кој збир го добил Андреј?

16. Цифрата на десетките на еден трицифрен број не е 3 и е 3 пати поголема од цифрата на единиците на тој број и е за 3 помала од цифрата на стотките на тој број. Кој е тој трицифрен број?

17. Замислив еден број. Бројот го зголемив 3 пати. Добиениот број

го зголемив за 3. Новиот резултат го намалив 3 пати и добива нов број. За колку бројот кој го добив е поголем од замислениот број?

18. Кој е најголемиот четирицифрен број запишан со различни цифри така, што неговите први две цифри и последни две цифри формираат два последователни двоцифрени броја во растечки редослед?

19. За еден петцифрен број ќе велиме дека е „прекрасен“, ако е запишан со различни цифри и збирот на првата и последната цифра му е еднаков на збирот на преостанатите три цифри. На пример, бројот 70496 е „прекрасен“. Кој е следниот по големина „прекрасен“ број?

20. Андреј чита книга. Во овој момент тој прочитал толку страници, што бројот на цифрите на двоцифрените броеви со кои се нумерирани прочитаните страници е 10 пати поголем од бројот на цифрите на едноцифрените страници со кои се нумерирани прочитаните страници. Колку страници прочитал Андреј до овој момент?

21. За оваа учебна година Андреј се претплатил на списанијата „Нумерус“ и „Сигма“. Првото списание ќе го добива секои три месеци, а второто списание ќе го добива секои четири месеци. Колку броја од двете списанија ќе добие Андреј оваа година?

22. Колку најмногу петоци може да има во една година?

23. Збирот на годините на неколку деца е 20. По 3 години збирот на годините на истите деца бил 38. Определи го бројот на децата.

24. Андреј има три години, а неговиот брат Горјан е три пати постар. Колку години ќе имаат заедно по три години?

25. Денес мама, тато и јас заедно имаме 70 години. Колку години вкупно ќе имаме тројцата по 6 години?

26. Денес на 16.01.2023 година Ана, Дана, Живка, Филимена, Шана и Јана имаат роденден и тие имаат соодветно 4, 5, 6, 7, 8 и 9 години. Определи го збирот на нивните години на 16.01.2018 година.

27. Во моментот Стефан е 7 пати помлад од неговиот татко, а татко му е 30 години постар од него. Определи го збирот на нивните години.

28. Пабло има 6 години. По 4 години Пабло ќе биде x пати постар отколку пред 4 години. Колку е x?

29. Збирот на годините на таткото и синот е 36. Ако се избрише цифрата на единиците во бројот на годините на таткото ќе се добие бројот на годините на синот. Определи го производот на годините на таткото и синот.

30. На секој свој роденден Вера добивала онолку мечиња Сваровски колку што имала години. Во моментот таа има 91 мече. Колку години има Вера?

31. Кога Горјан погледнал во часовникот тој забележал дека остатокот од деноноќието е три пати поголем од изминатиот дел на деноноќието. Колку часот било кога Горјан го погледнал часовникот?

32. Денес е 11 часот и 27 минути. Колку ќе биде часот по 20 часа и 33 минути.

33. Лифт се качува од првиот до четвртиот кат на една зграда за 12 секунди. За колку секунди тој лифт ќе се качи во истата зграда од првиот до деветтиот кат?

34. Филип гледал Филм кој почнал во 19 часот и завршил во 21 часот. За време на филмот биле пуштени две реклами. Првата реклама траела 3 минути и 20 секунци, а втората реклама траела 2 минути и 40 секунви. Колку минути траел самиот филм.

35. Еден електронски часовник покажува 20:09 (дваесет часот и девет минути). По колку најмалку минути на дисплејот на тој часовник ќе бидат истите цифри, но во друг редослед?

36. Горјан домашните работи по математика и македонски јазик ги пишувал од 9 часот и 47 минути до 11 часот и 12 минути. За колку минути Горјан ги напишал домашните работи?

37. Андреј започнал да ги пишува домашните работи по македонски јазик и математика во 15 часот и 57 минути и истите ги завршил во 17 часот и 12 минути. Домашната по македонски јазик ја пишувал 36 минути. Колку минути ја пишувал домашната по математика?

38. Една ноќ се разбудив и погледнав на часовникот кој покажуваше 3 часот. Забележав дека часовникот застанал, па затоа го навив и продолжив да спијам. Кога сабајлето се разбудив, погледнав на уличниот часовник кој покажуваше 7:30. Мојот часовник покажуваше 5 часот и 30 минути. Во колку часот сум се разбудил таа ноќ?

39. Матеј е ученик во четврто одделение. Тој секој ден од понеделник до петок има по 5 наставни часа од по 45 минути и одмор од 15 минути меѓу секои два наставни часа. Колку саати во текот на една седмица траат часовите на Матеј, а колку одморите меѓу часовите?

40. Покрај тркачка патека на еднакви растојанија едно од друго се поставени знаменца. Стартот е од првото поставено знаменце.

Марко трча со постојана брзина и делот од патеката од првото до шестото знаменце знаменце го истрчал за 30 секунди? Тој продолжил да трча со истата брзина до десеттото знаменце. Колку време му било потребно на Марко да истрча од првото до десеттото знаменце?

41. За домашна работа по математика Пабло треба да реши 71 задача. Тој планирал неколку дена да решава по 7 задачи, а во другите денови да решава по 3 задачи. Определи го најмалиот можен број денови за кои Пабло може да ја напише домашната?

42. Дедо Стојан на сточниот пазар купил свиња и јагне. Свињата има десет пати поголема маса од јагнето, а јагнето има $180\,kg$ помала маса од свињата. Колку килограми заедно имаат свињата и јагнето?

43. Масата на 1 слон и 3 тигри е колку масата на 12 лавови, а 1 слон има маса колку 1 тигар и 8 лавови. Колку лавови имаат маса колку 1 слон и 1 тигар?

44. Киро и Рампо во ист момент тргнале пешки од Прилеп и Битола еден кон друг. Киро одел со постојана брзина $5\,km$ на час, а Рампо одел со постојана брзина од $6\,km$ на час. Ти се сретнале по 4 часа одење. Колку е долг патот од Прилеп дп Битола?

45. Велосипедист се движи со постојана брзина од $30\,km/h$. Колку метри поминал велосипедистот за 1 минута.

46. Киро и Рампо требало да бојадисаат со жолта боја линии од двете страни на штотуку асфалтирана улица. Киро пристигнал прв и на десната страна бојадисал $3\,m$, кога пристигнал Рампо и забележал дека договорот бил Киро да ја бојадиса левата страна. Киро почнал од почеток да ја бојадисува левата страна, а Рампо продолжил на десната страна од местото на кое застанал Киро.

Кога Рампо ја завршил својата страна, тој ја преминал улицата и му помогнал на Киро, при што бојадисал $6\,m$ додека се сретнал со Киро. Линиите на двете страни на улицата се со еднаква должина. Колку метри е разликата меѓу бојадисаното од Рампо и бојадисаното од Киро?

47. Кенгурот Скокалко прави скокови од по $9\,m$ нанапред и $4\,m$ наназад. Кој е најмалиот број скокови потребни за Скокалко да се придвиши точно $100\,m$ нанапред?

48. Принцот разбрал дека Пепелашка се наоѓа во горага на растојание од $50\,km$. Заради тешкиот пат тој преку ден можел да поминува точно по $20\,km$, а ноќе одмарал. Но, вештерката, т.е. лошата маќеа на Пепелашка секоја ноќ го враќала принцот $15\,km$ назад. Принцот тргнал кон Пепелашка во понеделник наутро. Во кој ден од седмицата тој ќе стигне до Пепелашка?

49. По рамен пат, на растојание $10\,km$ еден од друг, во иста насока и со иста брзина од $5\,km/h$ се движат двајца пешаци. Потоа секој од нив се искачува по угорнина со брзина од $3\,km/h$. Колкаво е растојанието меѓу пешаците во моментот кога вториот пешак започнува со искачувањето на угорнината, ако во тој момент првиот пешак се уште оди по угорнината?

50. Куќите на Киро и Рампо се оддалечени една од друга $2\,km$. Киро и Рампо тргнале од своите куќи истовремено еден кој друг. Киро на секои 4 минути поминува по 300 метри, а Рампо на секои 5 минути поминува по 400 метри. Колку метри ќе биде должината на патот меѓу Киро и Рампо по 10 минути од нивното поаѓање?

51. Ангел трча со брзина од $2\,m\,50\,cm$ во секунда, а Бојан трча со брзина од $165\,m$ во минута. Ангел почнал да трча 1 минута и 30

секунди пред Бојан, кој потрчал да го стигне. По колку минути Бојан ќе го стигне Ангел?

52. Во 8 часот наутро гaсениците Маја и Раја почнале да ползат нагоре по едно високо дрво. Маја минувала по 3 метри за 10 минути, а Раја минувала по 2 метра за 10 минути. Точно во 9 часот Маја се завртела и почнала да ползи надолу по дрвото. Во 9 часот и 5 минути тоа го направила и Раја. Колку метри се оддалечени една од друга двете гасеници во 9 часот и 20 минути.

53. Турист одел 3 часа со брзина од $3km/h$ и изминал $3km$ помалку од половина од патот. Потоа тој ја зголемил брзината за $1km/h$. За колку часа туристот ја поминал втората половина од патот?

54. Маша решила да го пренесе медот од кошницата на пчелите во куќата на Медо. Таа располага со два сада и тоа од 4 литри и 7 литри. Кој е потребниот најмали број на полнења до горе на секој од садовите за Маша да пренесе 51 литар мед?

55. Пабло кога влегол во продавницата имал 95 евра, а кога излегол му останале пет пати помалку пари. Колку пари потрошил Пабло?

56. Два сока се 30 денари поскапи од еден сок. Колку пари чинат 4 од овие сокови?

57. Филип и Андреј играат пинг-понг. По секој меч победениот му дава на победникот 10 евра. На крајот се покажало дека Филип победил 3 пати, а Андреј заработил 30 евра. Колку меча изиграле Филип и Андреј?

58. Андреј има монети од 5 денари, а Пабло има исто толку монети од 2 денари. Андреј има 27 денари повеќе од Пабло. Колку пари имаат двајцата заедно?

59. Кога Филип купил 5 исти сока му останале 20 денари, а за да купи 9 од истите сокови му недостасуваат 44 денари. Колку пари имал Филип?
60. Андреј купил две чоколади од по 42 денари и на продавачот му дал банкнота од 100 денари. Продавачот му вратил кусур во различни по вредност монети. Колку монети добил Андреј?

61. Пабло има само банкноти од 500 денари, а Филип има само банкноти од 200 денари. Кој е најмалиот број банкноти кои треба да ги дадат Пабло и Филип за да купат топка која чини 3800 денари, а продавачот да не треба да им враќа кусур?

62. Во една менувачница се менуваат швајцарски франци, евра, американски долари и кувајтски динари. Притоа 4 франци се менуваат за 5 евра, 2 долари и 1 динар се менуваат за 7 евра, 10 динари се менуваат за 12 франци и 15 евра. За колку евра се менува 1 долар?

63. Андреј сака да купи мастики. Во продавницата има мастики од 6 и од 7 денари. Колку најмногу мастики може Андреј да купи за точно 100 денари?

64. Горјан е во театар. Во редот во кој седи, лево од него има 5 седишта, а десно од него има 4 седишта. Колку седишта има во театарот, ако во него има 10 реда се еднаков број седишта?

65. Пабло има 12 фломастери во три бои – црвени, сини и зелени. Црвените се толку, колку што се сините, а зелените се два пати повеќе од црвените. Колку зелени фломастери има Пабло?

66. Во една кутија има бомбони. Кога Пабло зема бомбони, нивниот број се намалува 3 пати, а кога Андреј зема бомбони, нивниот број се намалува за 3. Прво зел бомбони Пабло, па Андреј и на крајот Пабло, по што останале 2 бомбони. Колку бомбони ќе

останат ако прво земе Андреј па Пабло и на крајот Андреј?

67. Ако Горјан изеде три пати повеќе бомбони отколку што изел тој ќе изедел 10 бомбони повеќе. Колку бомбони изел Горјан?
68. Во едно големо семејство Климент има 4 сестри и 4 браќа. Определи го производот mn, каде m е бројот на браќата, а n е бројот на сестрите на Илина, сестрата на Климент.

69. Дедо Трајко има четири сина. Секој од нив има по три деца, секој од нив има по две деца. Сите овие наследници се собрале за роденденот на дедо Трајко и само тие биле негови гости. Колку гости имал дедо Трајко?

70. Дончо е шофер во ГСП. Едно утро тој забележал дека на секоја постојка, почнувајќи од втората, од автобусот слегуваат половина од патниците и никој не се качува. Пред седмата постојка во автобусот имало само еден патник. Колку патници се качиле на првата постојка?

71. Во еден автобус патуваат 27 патници. Шоферот Дончо забележал дека седиштата со редни броеви 1, 2 и 3 се зафатени, а тие со редни броеви 4 и 5 се слободни. Понатаму, седиштата со редни броеви 6, 7 и 8 се зафатени, а тие со редни броеви 9 и 10 се слободни итн. до последните пет седишта, кои се распределени на истиот начин. Колку седишта има во автобусот?

72. Еден пајак има 8 нозе, а една мува има 6 нозе. Определи го најмалиот можен број на муви и пајаци за кои збирот на сите нивни нозе е еднаков на 62.

73. Ангелина купила едно пакетче со налепници. Половината на налепниците ги дала на најзината сестра Ивана, половина од преостанатите налепници ги дала на својот брат Михаил, за себе задржала 5 налепници и последните 4 налепници ги залепила во албумот. Колку налепници имало во пакетчето кое го купила

Ангелина?

74. Пабло има 8 стрелички со нив гаѓа мета. Секогаш кога ќе ја погоди метата тој добива 2 нови стрелички. Пабло 16 пати гаѓал во метата. Колку пати тој ја погодил метата?

75. Во 4 исти погачи баба Петранка става 10 јајца. Колку јајца и се потребни на баба Петранка за да направи 6 исти такви погачи?

76. Горјан има вкупно 29 книги. Тој книгите ги чува на полици така што на секоја полица има најмалку по 3 книги. Кој е најголемиот можен број полици на кои се наоѓаат книгите на Горјан?

77. На Државниот натпревар по математика учествувале ученици од четврто до деветто одделение. Во секое одделение тројцата најдобро пласирани ученици ќе добијат медали. Колку медали ќе бидат поделени на Државниот натпревар по математика?

78. Бројот на учениците во едно одделение е поголем од 20 и помал од 30. Во одделението има три пати повеќе момчиња од девојчиња. Бројот на девојчиња е непарен број. Колку девојчиња има во оваа одделение, а колку момчиња?

79. Во една кутија има 19 бомбони и тоа карамели, чоколадни и гумени бомбони. Од секој вид има барем една бомбона. Чоколадните бомбони се 9 пати повеќе од гумените бомбони. Колку бомбони има од секој вид?

80. Во нашето одделение има 27 ученици. Сите се синооки и црнооки. Синооките се два пати помалку од црнооките. Половина од момчињата се црнооки и тие се за 3 повеќе од сите девојчиња. Колку синооки девојчиња има во нашето одделение?

81. Андреј се подготвува за учество на математички натпревар. За една седмица тој решил 63 тешки задачи, при што секој ден, ос-

вен во понеделникот, тој решавал по една задача повеќе од претходнит ден. Колку задачи решил Андреј во четвртокот?

82. Јунакот Крали Марко сретнал група ламји. Секоја ламја имала толку глави колку што имало ламји во групата. Крали Марко забележал дека сите ламји заедно имаат повеќе од 20, но помалку од 30 глави. Колку ламји имало во групата?

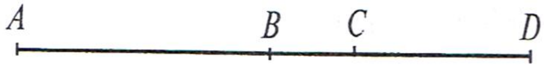
83. Во едно семејство секој брат има толку браќа, колку што има и сестри, а секоја сестра има два пати повеќе браќа, отколку што има сестри. Колку деца има во тоа семејство?

84. Пакети со еднакви плочки се означени со броевите 1, 2, 3 итн. Во секој пакет има толку плочки колку што е бројот со кој пакетот е означен. Филип од пакетот означен со најголемиот број зел x плочки, по што во сите пакети вкупно останале 70 плочки. Колку плочки зел Филип?

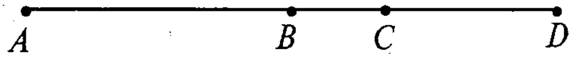
III. ГЕОМЕТРИЈА

1. На долниот цртеж $\overline{AB}=\overline{CD}, \overline{AD}=56\,cm, \overline{AC}=32\,cm$. Колку пати должината на отсечката BC е помала од должината на отсечката AB?

2. Точките A, B, C, D се означени во овој редослед на една права, при што $\overline{AB}=3\,cm, \overline{BC}=1\,cm$ и $\overline{CD}=2\,cm$. Определи го збирот на сите отсечки чии крајни точки се две од овие четири точки.



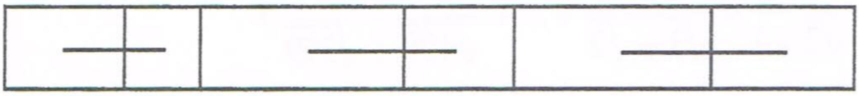
3. Точките A, B, C и D се распоредени као на цртежот десно. Должината на отсечката AD е $32\,cm$, а на отсечката BC е $6\,cm$. Колку сантиметри е должината на отсечката чии крајни точки се средините на отсечките AB и CD?



4. Една лента AB е долга $21\,cm$. Михаил сака ленатата да ја пресече на $4\,cm$ од A. Но, тој згрешил и лентата ја пресекол на $4\,cm$ од B. На колку сантиметри од саканото место ја пресекол Михаил лентата?

5. Должината на лентата на цртежот е еднаква на $7\,dm$. Таа е поделена на шест различни правоаголници. Центрите на правоагол-

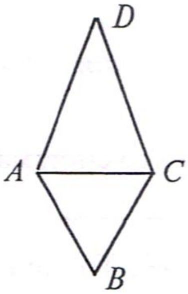
ниците се поврзани со отсечки како што е покажано на цртежот. Колку сантиметри е збирот на должините на овие отсечки?



6. Горјан нацртал 3 триаголника, 4 квадрати и 5 правоаголника, кои меѓу себе не се сечат. Колку агли нацртал Горја?

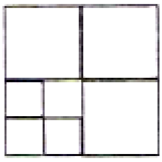
7. Рамностран триаголник и квадрат имаат еднакви периметри по $24 cm$. За колку сантиметри страната на триаголникот е подолга од страната на квадратот?

8. Четириаголникот $ABCD$ е поделен со својата дијагонала AC на рамностран триаголник ABC и рамнокрак триаголник ACD со основа AC. Периметарот на четириаголникот $ABCD$ е еднаков на $66 cm$, а периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $39 cm$. Определи ја должината на кракот на триаголникот ACD.

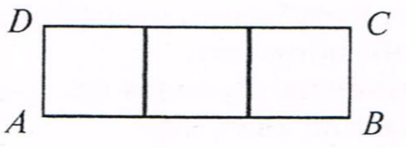


9. Должината на страната на еден квадрат е изразена со цел број сантиметри. Периметарот на квадратот, изразен во сантиметри, е најголемиот можен двоцифрен број. Определи ја страната на овој квадрат?

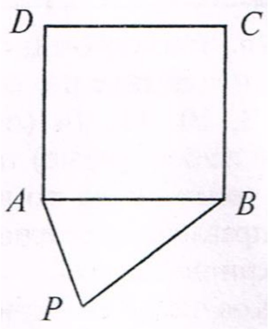
10. На цртежот десно е прикажана фигура која е добиена така што квадрат е поделен на четири квадрат, а потоа еден од добиените квадрати е поделен на четири квадрати. Колку пати периметарот на големиот квадрат е поголем од шпериметарот на најмалиот квадрат?



11. Правоаголникот $ABCD$ на цртежот десно е составен од три квадратчиња. Збирот на периметрите на сите правоаголници прикажани на цртежот е еднаков на $192\,cm$. Определи ја должината на страната на едно од квадратчињата. (Квадратот исто така е правоаголник.)

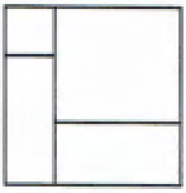


12. На цртежот десно должината на страната на квадратот $ABCD$ е $9\,cm$, а периметарот на триаголникот ABP е еднаков на $24\,cm$. Определи го периметарот на петаголникот $APBCD$.



13. Должината на едната страна на правоаголникот е $3\,cm$, а другата страна е два пати подолга. Периметарот на рамностран триаголник е за $12\,cm$ помал од периметарот на правоаголникот. Определи ја должината на страната на рамностраниот триаголник.

14. Квадратот прикажан на цртежот десно е поделен на четири правоаголници. Збирот на периметрите на овие правоаголници е еднаков на $100\,cm$. Колку дециметри е периметарот на квадратот?

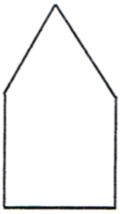


15. Горјан нацртал 10 квадрати и рамнострани триаголници со должини на страни $1\,cm$. Вкупниот број на темињата на квадратите бил за 19 поголем од вкупниот број на темињата на триаголниците. Колкав е збирот на периметрите на сите фигури кои ги нацртал Горјан?

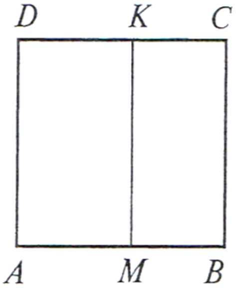
16. На страните на квадратен плоштад на секои 2 метра се поста-

вени столбчиња, вклучувајќи ги и темињата на плоштадот. На секоја страна се поставени по 21 столбче. Определи го периметарот на овој плоштад.

17. Фигурата на цртежот десно е составена од залепени квадрат и рамностран триаголник. На секоја нејзина страна се означени по 5 точки, при што во секое теме на фигурата има по една точка. Растојанието меѓу било кои две соседни означени точки е $3cm$. Определи го периметарот на оваа фигура.

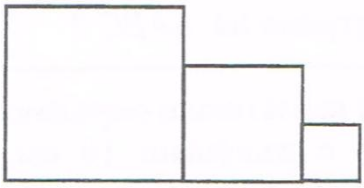


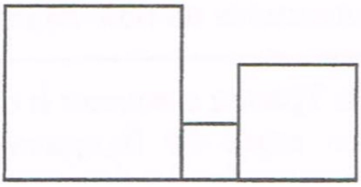
18. На цртежот десно се прикажани квадратот $ABCD$ и правоаголниците $AMKD$ и $MBCK$. Периметарот на квадратот $ABCD$ е $64cm$, а периметарот на правоаголникот $MBCK$ е $46cm$. Определи го периметарот на правоаголникот $AMKD$.



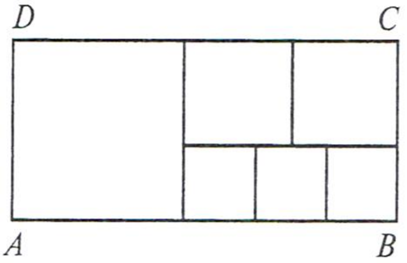
19. Правоаголник со должини на страни $7cm$ и $5cm$ е поделен на еднакви квадратчиња со должини на страна $5mm$. Добиените квадратчиња се наредени едно до друго така што формираат правоаголник со ширина $5mm$. Колку дециметри е должината на овој правоаголник?

20. Двете фигури прикажани на долните цртежи се составени од по три по парови еднакви квадрати. Разликата на должините на најмалиот и средниот квадрат е еднаква на $5cm$. Определи ја разликата на периметрите на двете фигури.

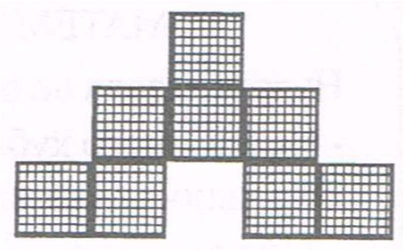




21. Правоаголникот $ABCD$, цртеж десно, е поделен на шест квадрати. Ако $\overline{AD}=10\,cm$, определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$.



22. Штрафираната фигура прикажана на цртежот десно е составена од еднакви мали квадратчиња. Секое од тие квадратчиња има периметар $12\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на оваа фигура.

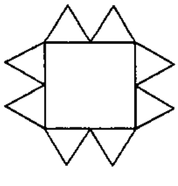


23. Фигурата прикажана на долниот цртеж е составена од 20 осумаголници, наредени во ред. Секоја страна на сите осумаголници има должина $1\,cm$. Определи го периметарот на оваа фигура.

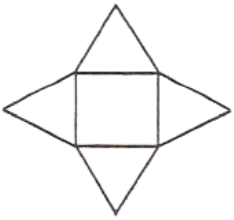
24. Периметарот на еден квадрат е еднаков на $36\,cm$. Определи ја неговата плоштина.

25. Од квадрат и рамностран триаголник со страна еднаква на страната на квадратот Филип направил „куќичка“ со периметар $45\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

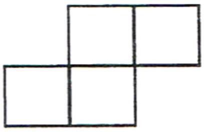
26. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од квадрат и еднакви рамнострани триаголници. Периметарот на оваа фигура е еднаков на $80\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на квадратот?



27. Над секоја страна на даден квадрат, надвор од него, е нацртан рамностран триаголник (види цртеж десно). Периметарот на добиената фигура е еднаков на $72\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на почетниот квадрат.



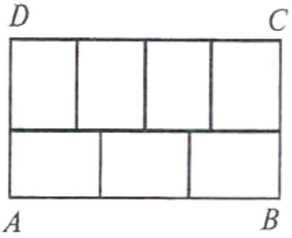
28. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од четири еднакви квадратчиња. Нејзиниот периметар е $60\,cm$. Определи ја нејзината плоштина.



29. Едната страна на правоаголник со плоштина $50\,cm^2$ е два пати подолга од другата негова страна. Определи го периметарот на овој правоаголник.

30. Андреј нацртал квадрат чија плоштина е цел број квадратни сантиметри и е поголема од $30\,cm^2$, а е помала од $40\,cm^2$. Определи го периметарот на квадраток кој што го нацртал Андреј.

31. Правоаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот десно е составен од седум еднакви правоаголници. Ако $\overline{AB}=24\,cm$, определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$.



32. Даден е правоаголник со должини на страни $9\,cm$ и $1\,cm$. Плоштината на еден квадрат е поголема од плоштината на овој правоаголник, а периметарот на квадратот е помал од периметарот на правоаголникот. Колкава е должината на страната на квадратот, ако таа е изразена со цел број сантиметри?

33. Од 7 квадрати со должина на страна $1cm$ и еден квадрат со поголема должина на страна е составен нов квадрат. Определи ја плоштината на новиот квадрат?

IV. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. На еден натпревар учествувале 7 ученици. Секое дете освоило барем по еден поен и немало деца со еднаков број поени. Горјан бил најдобар на натпреварот. Сите деца вкупно освоиле 30 поени. Кој е најголемиот број поени што можел да го освои Горјан?

2. На еден натпревар уествувале 5 ученици. Секој ученик освоил непарен број поени и немало два ученика кои освоиле еднаков број поени. Горјан победил на натпреварот. Кој е најмалиот број поени кои можел да ги освои Горјан?

3. Горјан, Пабло и Андреј вкупно изеле 28 бомбони. Горјан изел повеќе бомбони и од Пабло и од Андреј. Кој е најмалиот број бомбони што можел да ги изеде Горјан?

4. Во текот на една седмица Филип бил оценет по неколку предмети. Сите оценки кои ги добил биле тројки, четворки и петки, а збирот на добиените оценки бил 19. Кои оценки ги добил Филип?

5. Во одделението на Пабло има 27 ученици и тие во дневникот се запишани со редни броеви од 1 до 27. Колку ученици најмалку треба да има во училницата за со сигурност да се каже дека збирот на редните броеви на некои два ученика е еднаков на 28?

6. Околу тркалезна маса се наредени столици. Андреј и Пабло решиле да ги пребројат. Тие започнале од различни места, но и двајцата броеле во иста насока. Притоа осмата столица за Андреј е шеснаесетта за Пабло, а петнаесеттата за Андреј е петта за

Пабло. Колку столици имало околу масата?

7. Златарот Сребренко има шест исти сефови. Едно утро тој ги измешал клучевите на сефовите кои требало да ги отвори. Со колку најмалку проби Сребренко со сигурност ќе определи кој клуч на кој сеф му припаѓа?

8. Во една колона застанале 16 момчиња. Меѓу секои две момчиња застанало по едно девојче. Колку деца има сега во колоната?

9. Во списокот за на екскурзија пред мене се запишале 6 деца, а по мене има 34 деца повеќе. Колку деца се запишани во тој список?

10. Филип учествувал на крос. Тој бил побрз само од натпреварувачите кои биле пласирани по шестото место. Зад него се пласирале два пати повеќе тркачи отколку пред него. Колку натпреварувачи учествувале на овој кроз?

11. Учениците од едно одделение се построени во колона по двајца. Иван и Иванка се седми однапред-station наназад, а Виктор и Викторија се шести одназад-нанапред, но се пред Иван и Иванка. Меѓу овие два пара има уште еден пар деца. Колку деца имало во тоа одделение?

12. Децата во одделението на Пабло се построени во колона од по три ученици. Пабло пресметал дека е во шестата тројка од почетокот на колоната и во четвртата тројка од крајот на колоната. Колку ученици има во одделението на Пабло?

13. Горјан, Пабло, Андреј и Филип заедно имаат 100 џамлии, при што секој има барем една џамлија. Горјан има повеќе џамлии од секој од останатите тројца. Пабло и Андреј заедно имаат 65 џамлии. Колку џамлии има Филип?

14. Во секој „збор“ во еден чекор можеме да ги замениме местата на

било кои две соседни букви. Со колку најмалку чекори од „зборот“ ФЕНОТИП можеме да стигнеме до „збор“, во кој сите согласки ќе бидат една до друга?

15. Од почетокот на 2023 година секој ден Елена го запишувала збирот на броевите, кои го покажуваат денот, месецот и годината на соодветната дата. Колку различни збира добила Елена до 21.12.2024 година?

16. На колку начини може да се плати тетратка која чини 30 денари со монети од 2 денари, 5 денари и 10 денари, ако не е задолжително да се искористат сите три вида монети?

17. Триесет и три топки се распоредени во четири кутии, така што во секоја кутија има различен број топки. Нека n е бројот на топките во кутијата, која содржи најмалку топки. Која е најголемата можна вредност на n?

18. Дисплејот на електронскиот часовник покажува $ab:cb$ каде ab е часот во денонoќието, а cd се минутите во тој час. Колку пати во текот на едно денонoќие на дисплејот на часовникот истовремено ќе се појават цифрите 2, 0, 0 и 8.

19. Часовникот на Филип покажува 20:15 (дваесет часот и 15 минути). Колку пати во текот на едно денонoќие на дисплејот на часовникот истовремено во некаков редослед ќе се видат цифрите 0, 1, 2 и 5?

20. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

21. Пабло многу ја сака цифрата 1, па затоа ги запишал сите непарни двоцифрени броеви кои ја содржат оваа цифра. Колку пати Пабло ја употребил цифрата 1?

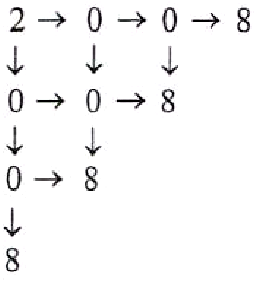
22. Андреј истовремено фрла три коцки за играње (на страните на секоја коцка се запишани сите броеви од 1 до 6, по еден број на секоја страна). При секое фрлање Андреј го пресметува збирот на паднатите броеви. Колку различни резултати може да добие Андреј?

23. Во едно одделение има 30 ученици. Од нив 18 ученици тренираат пливање, а 14 ученици тренираат кошарка. Ако е познато дека 6 ученици не тренираат ниру еден од двата спорта, определи колку ученици ги тренират само пливање, а колку само кошарка.

24. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 30 и кои без остаток се делат со 3 или со 4.

25. Определи го бројот на двоцифрените броеви кај кои цифрата на десетките е помала од 3, а цифрата на единиците е поголема од 7.

26. На коллку начини може да се добие бројот 2008, ако се следат стрелките на фигурата прикажана на долниот цртеж?



27. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои се запишани само со различни парни цифри.

28. Во едно мало кнежевство имало само 6 села и еден град. Од секое село излегуваат по три патишта – еден кон градот и два пата кон некои од селата. Колку патишта има во тоа кнежевство?

29. Пабло ги запишал во редица сите броеви помали од 300, во чиј запис не се содржи цифрата 1. Колку броеви запишал Пабло?

30. Колку броеви има кои се помали од 2023 и кои во својот запис имаат точно три единици?

31. Колку има трицифрени броеви чиј производ на цифри е 12. Пресметај го збирот на најмалиот и најголемиот од овие броеви?

32. За еден природен број ќе велиме дека е „*убав*“ ако тој е најмалиот меѓу сите двоцифрени броеви кои имаат еднаква сума на цифрите со кои се запишани. Определи го збирот на сите „убави“ броеви.

33. На фудбалски натпревар за победа се добиваат 3 бода, за пораз се добиваат 0 бодови, а при нерешен резултат двата тима добиваат по 1 бод. По одиграни 25 натпревари, тимот за кој навива Филип одиграл 8 натпревари нерешено и освоил 44 бодови. На колку натпревари бил поразен омилениот тим на Филип?

34. Датата 02.06.2013 година е запишана со 8 цифри, меѓу кои 5 се различни. Колку дати во 2013 година се запишани со 4 различни цифри?

35. Определи го бројот на броевите кои се помали или еднакви на 100 и кои се еднакви на производот на два исти или два последователни броја.

36. На секој километар од автопатот од Скопје до Гевгелија има табла, која го покажува (во километри) растојанието од Скопје до соодветната табла. Растојанието по автопатот од Скопје до Неготино е $123\,km$. На колку табли поставени на автопатот од Скопје до Неготино барем две од цифрите се еднакви?

37. Определи го бројот на двоцифрените броеви чиј збир на цифри се дели без остаток со 7.

38. Определи го бројот на природните броеви кои се поголеми од 10 и кои се запишани со различни цифри чиј производ е еднаков на 6.

39. Колку пати цифрата 3 е употребена за запишување на непарните двоцифрени броеви?

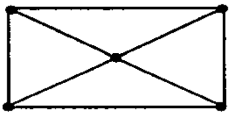
40. Определи го бројот на трицифрените броеви во чии записи точно по еднаш се среќават цифрите 2 и 6.

41. Определи го бројот на трицифрените броеви во чии записи се среќават и цифрата 2 и цифрата 6.

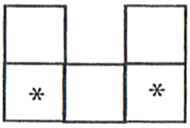
42. Колку е бројот на можностите за бројот пресечните точки на 4 отсечки?

43. Колку отсечки се прикажани на цртежот десно?

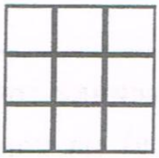
44. Колку отсечки чии крајни точки се темињата и пресекот на дијагоналите на правоаголникот прикажан на цртежот десно.



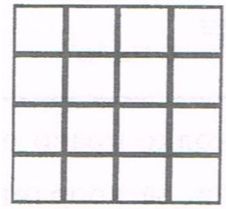
45. Определи го бројот на правоаголниците од фигурата прикажана на цртежот десно, кои содржат барем една ѕвездичка. (Квадратот е правоаголник!)



46. Колку квадрати се содржани во фигурата прикажана на цртежот десно?



47. Колку квадрати се содржани во фигурата прикажана на цртежот десно?



48. Даден е рамностран триаголник со должина на страна $6cm$, кој е расечен на рамнострани триаголници со должина на страна $1cm$. Колку рамнострани триаголници со должина на страна $1cm$ се добиени?

49. Во полињата на квадратната табла прикажана на цртежот десно биле запишани броевите 1, 2 и 3 така, што во секој ред и во секоја колона броевите биле различни. Потоа поголем број од броевите биле избришани. Определи го збирот $x+y+z$.

		1
2	y	
x		z

50. Во табелата прикажанана цртежот десно пополни ги празните полиња со броевите од 1 до 5, така што секој број ќе биде запишан само една во секој ред, секоја колона и на секоја од двете основни дијагонали.

		1		
	2			
				3
				4
		5		

51. Ангела треба да постави жетони во малите квадратчиња на табелата прикажана на цртежот десно, при што го почитувала следново правило: во секој ред, секоја колона и на секоја од двете главни дијагонали не може да има повеќе од 3 жетони. Колку најмногу жетони може да постави Ангела?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I. ПРЕСМЕТУВАЊА, БРОЈНИ РЕБУСИ И РАВЕНКИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$81-27:9-67.$$

Решение. Имаме:

$$81-27:9-67=81-3-67=78-67=11.$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$64-32:8-4.$$

Решение. Имаме:

$$64-32:8-4=64-4-4=60-4=56.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот

$$54+27:9-6.$$

Решение. Имаме:

$$54+27:9-6=54+3-6=57-6=51.$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот

$$42+28:7-5\cdot 2.$$

Решение. Имаме:

$$42+28:7-5\cdot 2=42+4-10=46-10=36.$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот

$$33\cdot 3+33-33:3.$$

Решение. Имаме:

$$33\cdot 3+33-33:3=99+33-11=132-11=121.$$

6. Пресметај ја вредноста на изразот

$$333-33\cdot 3+3:3.$$

Решение. Имаме:

$$333-33\cdot 3+3:3=333-99+1=334+1=335.$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$33+3\cdot(33-33:33).$$

Решение. Имаме

$$33+3\cdot(33-33:33)=33+3\cdot(33-1)=33+3\cdot 32=33+96=129.$$

8. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$33+3\cdot(33-33:3).$$

Решение. Имаме:

$$33+3\cdot(33-33:3)=33+3\cdot(33-11)=33+3\cdot 22=33+66=99.$$

9. Ако $\langle a\rangle=4a$, пресметај $\langle\langle 2\rangle\rangle$.

Решение. Имаме:

$$\langle\langle 2\rangle\rangle=\langle 4\cdot 2\rangle=\langle 8\rangle=4\cdot 8=32.$$

10. Нека

$$a\uparrow b=ab+a \text{ и } a\downarrow b=ab-a.$$

Пресметај $(20\uparrow 1)\downarrow 3$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(20\uparrow 1)\downarrow 3&=(20\cdot 1+20)\downarrow 3\\&=(20+20)\downarrow 3\\&=40\downarrow 3\\&=40\cdot 3-40\\&=120-40\\&=80.\end{aligned}$$

11. Кој е најголемиот број што може да се добие со поставување на загради во изразот

$$9\cdot 3+6:3-2.$$

Решение. Најголемиот можен број ќе се добие ако 9 го множиме со најголемиот можен број, а потоа добиениот резултат го поделиме со најмалиот можен бро. Така добиваме:

$$9\cdot(3+6):(3-2)=9\cdot 9:1=81.$$

12. Реши ја равенката

$$3(3+3x)-3=33.$$

Решение. Имаме

$$3(3+3x)-3=33,$$
$$3\cdot 3+3\cdot 3x-3=33,$$
$$9+9x-3=33,$$
$$9x+6=33,$$
$$9x=33-6,$$
$$9x=27,$$
$$x=27:9,$$
$$x=3.$$

13. Реши ја равенката

$$(333-3x):3=3\cdot 3+3.$$

Решение. Имаме

$$(333-3x):3=3\cdot 3+3,$$
$$(333-3x):3=9+3,$$
$$(333-3x):3=12,$$
$$333-3x=3\cdot 12,$$
$$333-3x=36,$$
$$333-36=3x,$$
$$3x=297,$$
$$x=297:3$$
$$x=99.$$

14. Кој е најголемиот природен број, кој може да се стави на местото на x во неравенството

$$4+88:(8-4)>4x,$$

така што тоа ќе биде точно?

Решение. Имаме

$$4+88:(8-4)>4x,$$
$$4+88:4>4x,$$
$$4+22>4x,$$
$$26>4x.$$

Сега, бидејќи $4\cdot 6=24<26$ и $4\cdot 7=28>26$, заклучуваме дека најголемиот природен број кој може да се стави на местото на x така што даденото неравенсвто ќе биде точно е $x=6$.

15. Збирот на седум едноцифрени броеви е еднаков на 17. Шест од овие броеви се еднакви меѓу себе. Кои се тие броеви?

Решение. Бидејќи $17-6\cdot 1=17-6=11$ и 11 е двоцифрен број, заклучуваме дека шесте броеви кои се еднакви меѓу себе не се еднакви на бројот 1. Понатаму, $17-6\cdot 2=17-12=5$ и како $6\cdot 3=18>17$, заклучуваме дека бараните броеви се 2, 2, 2, 2, 2, 2 и 5.

16. Кој е следниот број во низата броеви:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Решение. Забележуваме дека

$$2=1+1, \quad 3=2+1, \quad 5=3+2,$$
$$8=5+3, \quad 13=8+5, \quad 21=13+8,$$
$$34=21+13, \quad 55=34+21, \quad 89=55+34.$$

Според тоа, почнувајќи од третиот број, секој број во дадената низа броеви е еднаков на збирот на претходните дв=а броја во низата. Значи, следниот број во низата е $89+55=144$.

17. Кој е следниот број во низата броеви:

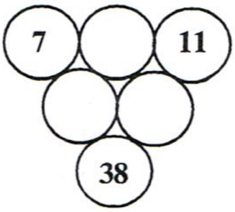
1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ...

Решение. Забележуваме дека почнувајќи од вториот член на дадената виза точни се равенствата

$$1+1=2, 2+2=4, 4+3=7, 7+4=11,$$
$$11+5=16, 16+6=22, 22+7=29.$$

Според тоа, од вториот член на низата па натаму секој член е еднаков на збирот на членот пред него и бројот на броевите кои се наоѓаат пред него. Треба да го пресметаме деветтиот член на низата, па затоа тој е еднаков на $29+8=37$.

18. Во секое од празните кругчиња на фигурата прикажана на цртежот десно запиши по еден природен број. Бројот во секое кругче треба да е еднаков на збирот на двата броја запишани во кругчињата од горниот ред кои се допираат до него. Пресметај го збирот на броевите кои ги запиша.

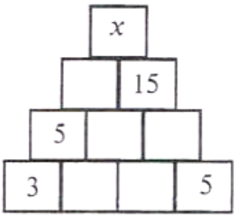


Решение. Нека во празното кругче на најгорниот ред е запишан бројот x. Тогаш во кругчињата под него се запишани броевите $7+x$ и $x+11$, па затоа важи $7+x+11+x=38$, од каде последователно добиваме

$$\begin{aligned}2x+18&=38,\\ 2x&=38-18,\\ 2x&=20,\\ x&=20:2,\\ x&=10.\end{aligned}$$

Сега, $7+x=7+10=17$ и $x+11=10+11=21$, па збирот броевите кои ги запишав е $10+17+21=48$.

19. Во секој правоаголник од фигурата прикажана на цртежот десно (освен во правоаголниците од долниот ред), е запишан број кој е еднаков на збирот на броевите кои се запишани во двата правоаголници од долниот ред, на кој лежи правоаголникот. Определи го бројот x?



Решение. Јасно, во левиот правоаголник на првиот ред е запишан бројот $5-3=2$. Сега, ако во десниот правоаголник е запишан бројот a, тогаш во левиот празен правоаголник од вториот ред е запишан бројот $2+a$, а во десниот е запишан бројот $a+5$.

Последното значи дека $(a+2)+(a+5)=15$, од каде добиваме $2a+7=15$, па затоа $2a=8$, односно $a=4$. Значи:

- во првиот ред во кавдаратите од лево на десно се запишани броевите 3, 2, 4 и 5,
- во вториот ред во квадратите од лево на десно се запишани броевите 5, $2+4=6$ и $4+5=9$,
- во третиот ред во квадратите од лево на десно се запишани броевите $5+6=11$ и 15,
- во четвртиот ред е запишан бројот $11+15=26$, т.е. $x=26$.

20. Ако a,b и c се непознатите цифри во одземањето

$$\overline{a2b}-234=\overline{6c8},$$

пресметај го збирот $a+b+c$.

Решение. Јасно, $b=2$, па одземањето го добива бидот

$$\overline{a22}-234=\overline{6c8}$$

Сега, $c=8$, па затоа одземањето е

$$\overline{a2b}-234=688,$$

што значи дека

$$\overline{a22}=234+688=922,$$

од каде добиваме дека $a=9$. Конечно, бараниот збир е

$$a+b+c=9+2+8=19.$$

21. Кој е најмалиот број $\overline{ТРИ}$ за кој е точно равенството

$$\overline{ТРИ}+\overline{ТРИ}=\overline{ШЕСТ},$$

во кое на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

Решение. Јасно, $Ш=1$. Цифрата на единиците на местото на буквата $Т$ во бројот $\overline{1ЕСТ}$ е цифра на единиците на збир на два исти броја $И+И$, па затоа таа е парна. Понатаму, ако $\overline{ТРИ}$ е најмалиот број, тогаш и збирот е најмал. За да збирот биде најмал, мора цифрата на стотките на двата собирци да биде најмалата можна цифра, при што бидејќи збирот на двата трицифрени броја е четирицифрен број, а при пренос може да имаме најмногу 1, добиваме дека цифрата T може да биде 6 или 8. За $T=6$, имаме $И=3$ или $И=8$. Ако $И=3$, тогаш

$$\overline{6P3}+\overline{6P3}=\overline{1EC6}.$$

Лесно се гледа дека P не може да е 0, 1, 2 и 3, а за $P=4$ добиваме

$$643+643=1286,$$

при што се исполнети сите услови од задачата. Ако $И=8$, тогаш

$$\overline{6P8}+\overline{6P8}=\overline{1EC6}.$$

Лесно се гледа дека P не може да 0, 1 и 2, а за $P=4$ добиваме

$$638+638=1276,$$

при што се исполнети сите услови на задачата.

Конечно, $638<643$, што значи дека бараниот најмал број $\overline{TPИ}$ е 638.

22. Во збирот $\overline{MA}+\overline{TE}+\overline{MA}+\overline{TИ}+\overline{KA}$ на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на еднаквите букви еднакви цифри. Ниту една цифра не е 0.

а) Која е најмалата вредност што може да ја прими овој збир?

б) Која е најголемата вредност која може да ја прими овој збир?

Решение. а) Најмала вредност ќе ја добиеме прво ако во броевите кај кои иста цифра се јавува по два пати како цифра на десетките ги избереме најмалите можни цифри, потоа истото го направиме за петтиот двоцифрен број, па потоа прво ја избереме најмалата можна цифра за буквата A, а потоа истото го направиме и за буквите E и $И$.

Еден можен избор на цифрите за дадените букви е

$$M=1, T=2, K=3, A=4, E=5, И=6.$$

Притоа ќе се добие најмалиот можен збир:

$$14+25+14+26+34=113$$

б) Со аналогни заклучувања дека збирот ќе прими најголема вредност ако прво за буквите M и T избереме најголеми можни цифри, па потоа тоа го направиме за цифрата K, потоа за буквата A и на крајот за буквите E и $И$ во произволен редослед.

Еден можен избор на цифрите за дадените букви е:

$$M=9, T=8, K=7, A=6, E=5, И=4.$$

Притоа ќе се добие најголемиот можен збир:

$$96+85+96+84+76=437$$

23. Нека A е најголемиот шестцифрен број кој е помал од бројот 564444 и е запишан со различни цифри. Колку е збирот на цифрите на бројот A?

    Решение. Најголемиот шестцифрен број кој е помал од бројот 564444 и е запишан со различни цифри се добива ако прво цифрата на стотките ја избереме да е најголема можна, а потоа истото го направиме со цифрите на десетките и единиците. Така го добиваме бројот 564398. Збирот на неговите цифри е

$$5+6+4+3+9+8=35.$$

24. Определи ја разликата на најголемиот трицифрен број чии соседни цифри се различни и најмалиот трицифрен број запишан со различни цифри.

    Решение. Најголемиот трицифрен број чии соседни цифри се различни е 989, а најмалиот тицифрен број запишан со различни цифри е 102. Бараната разлика е $989-102=887$.

25. Одговорот на една задача е 56, при што последната аритметичка операција е множење со 7. Кој ќе беше одговорот ако последната операција беше делење со 2.

    Решение. Пред да множиме со 7 сме добиле $56:7=8$. Затоа ако наместо множење со 7 имаме делење со 2, тогаш одговорот на задачата ќе беше $8:2=4$.

26. Кој двоцифрен број запишан со последователни цифри е делив без остаток со бројот 8.

    Решение. Јасно, двоцифрениот број кој без остаток се дели со бројот 8 мора да е парен. Парни броеви запишани со последователни цифри се: 10, 12, 32, 34, 54, 56, 76, 78 и 98. Од овие броеви само броевите 32 и 56 се деливи со бројот 8 и тоа се бараните броеви.

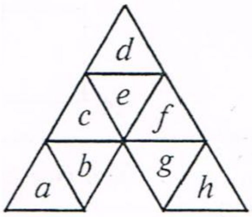
27. Определи го збирот на цифрите на најмалиот четирицифрен непарен број A таков што збирот на цифрата не илјадитите и цифрата на единиците е 7.

Решение. Бидејќи $7=1+6=2+5=3+4$, а бројот A треба да е најмал непарен четирицифрен број, добиваме дека $A=\overline{2xy5}$. Понатаму, бројот A е најмал ако цифрите x и y се најмалите можни, а тоа е ако $x=0$ и $y=1$. Значи, бараниот број е 2015 и збирот на неговите цифри е $2+0+1+5=8$.

28. Бројот x е таков што производот на 9 и x е помал од 70, а производот на 8 и x е поголем од 50. Определи го производот на 7 и x.

Решение. Од условот на задачата имаме $9x<70$ и $8x>50$. Сега, бидејќи $9\cdot 8=72>70$ и $8\cdot 6=48<50$ добиваме дека $6<x<8$, односно $x=7$. Значи, $7x=7\cdot 7=49$.

29. Секоја од буквите во фигурата прикажана на цртежот десно заменува еден од броевите од 1 до 8, при што различните букви заменуваат различни цифри и важи



$$a+b+c+d+e=s,$$
$$d+e+f+g+h=s,$$
$$s>22, e=5.$$

Кој број го заменува буквата d?

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$a+b+c=f+g+h,$$

и бидејќи $e=5$, броевите a,b,c,f,g,h се шест од броевите 1, 2, 3, 4, 6, 7 и 8. Збирот на овие седум броја е непарен број, па за да шест од нив може да се поделат во две групи од по три броја со еднакви збирови треба да исфрлиме непарен број. Значи, d е некој од броевите 1, 3 или 7.

Ако $d=1$, тогаш збирот на преостанатите броеви е 30. Сега, збирот на три од нив треба да е еднаков на 15. Групите се: 3, 4, 8 и 2, 6, 7. Но тогаш

$$a+b+c+d+e=d+e+f+g+h=1+5+15=21<22,$$

што противречи на условот на задачата.

Ако $d=3$, тогаш збирот на преостанатите броеви е 28. Сега, збирот на три од нив треба да е еднаков на 14. Групите се: 1, 6, 7 и 2, 4, 8. Но, тогаш

$$a+b+c+d+e=d+e+f+g+h=3+5+14=22,$$

што противречи на условот на задачата.

Ако $d=7$, тогаш збирот на преостанатите броеви е 24. Сега, збирот на три од нив треба да е еднаков на 12. Групите се: 1, 3, 8 и 2, 4, 6. Тогаш,

$$a+b+c+d+e=d+e+f+g+h=7+5+12=24>22.$$

Според тоа, решение на задачата е $d=7$

II. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Парните броеви од 10 до 100 се запишани последователно. Кој број е запишан дваесетти по ред?

   Решение. Првиот запишан број е 10, а потоа се запишани 19 броја, секој од кои е за 2 поголем од претходниот. Значи, дваесеттиот по ред запишан број е
   $$10+2\cdot 19=10+38=48.$$

2. За колку ќе се намали бројот 321 ако од него ја избришеме цифрата на десетките?

   Решение. Ако од бројот 321 ја избришеме цифрата на десетките го добиваме бројот 31. Имаме, $321-31=290$, што значли дека бројот 321 ќе се намали за 290.

3. Збирот на три последователни броја е еднаков на 24. Кои се тие броеви?

   Решение. Средниот од трите броја е за 1 поголем од првиот број и е за 1 поголем од вториот број. Тоа значи дека средниот број е трипати помал од збирот на трите броја. Според тоа, средниот број е $24:3=8$. Конечно, броевите се $7,8$ и 9.

4. Која е следната година по 2009 година, која ќе има еднаков збир на цифри како и 2009 година?

   Решение. Имаме $2+0+0+9=11$ и како $2+0+1+8=11$, следната година која ќе има еднаков збир на цифри како и 2009 година е 2018 година.

5. Пресметај го збирот на цифрите на најголемиот трицифрен број чии соседни цифри се различни?

Решение. Најголемиот трицифрен број е 999, но неговите соседни цифри се еднакви. Сега, најголемиот трицифрен број кај кој цифрите на десетките и стотките се различни, го добиваме ако цифрата на десетките ја замениме со цифрата 8. Притоа го добиваме бројот 989 и тоа е најголемиот трицифрен број кај кој соседните цифри се различни. Збирот на неговите цифри е $9+8+9=26$.

6. Пресметај го збирот на цифрите на најголемиот трицифрен број запишан со различни цифри таков што збирот на цифрата на единиците и цифрата на десетките е еднаков на цифрата на десетките.

Решение. Јасно, треба да ја определиме најголемата можна цифра на стотките. Тоа не може да биде цифрата 9, бидејќи тогаш цифрата на единиците мора да е 0, па за цифрата на десетките имаме $9+0=9$, што противречни на условот на заадачата. Ако цифрата на стотките е 8, тогаш цифрата на единиците може да биде 1, а за цифрата на десетките добиваме $8+1=9$ и бараниот број е 891. Конечно, збирот на неговите цифри е $8+9+1=18$.

7. Пабло замислил број на кој од десно му ја допишал цифрата 0. Потоа бројот кој што го добил го одзел од бројот 231 и го добил замислениот број. Кој број го замислил Пабло?

Решение. Нека x е бројот што го замислил Пабло. Кога од десно му ја допишал цифрата 0, добил број кој е 10 пати поголем од замислениот број, т.е го добил бројот $10x$. Според тоа,

$$231-10x=x,$$

од каде добиваме

$$10x+x=231, \text{ т.е. } 11x=231.$$

Значи, Пабло го замислил бројот $x=231:11=21$.

8. Архангел со последователни природни броеви, почнувајќи од бројот 1, ги нумерирал страните на својата тетратка. Тој вкупно запишал 55 цифри. Која е последната цифра што ја запишал Архангел?

Решение. Првите 9 страници Архангел ги нумерирал со едноцифрените броеви од 1 до 9, за што употребил 9 цифри. Значи, тој со преостанатите $55-9=46$ цифри нумерирал двоцифрени броеви. Бидејќи за секој двоцифрен број се потребни по 2 цифри, Архангел запишал $46:2=23$ двоцифрени броеви. Понатаму, дваесет и третиот двоцифрен број е $23+9=32$, што значи дека последната цифра која ја запишал Архангел е цифрата на единиците на бројот 32, а тоа е цифрата 2.

9. Куќите од едната страна на нашата улица се означени со последователните непарни броеви од 1 до 41, а од другата страна со последователните парни броеви од 2 до 34. Колку куќи има во нашата улица?

   Решение. *Прв начин.* За нумерирање на куќите во улицата се употребени сите броеви од 1 до 34 и уште броевите 35, 37, 39 и 41. Според тоа, во улицата има $34+4=38$ куќи.

   Втор начин. Бидејќи $1=2\cdot1-1$ и $41=2\cdot21-1$, има 21 непарни броеви, а парни броеви од 2 до 34 има $34:2=17$. Според тоа, за нумерирање на куќите во улицата се употребени $21+17=38$ броеви, што значи дека во улицата има 38 куќи.

10. Збирот на броевите со кои се нумерирани средните страници на една книга е 77. Колку страници има оваа книга?

    Решение. Средните страници на секоја книга се нумерирани со два последователни броја. Бидејќи $77=38+39$, оваа книга има $2\cdot38=76$ страници.

11. Илија ги собрал секој едноцифрен број поголем од 3 со секој двоцифрен број. Колку од збировите кои ги добил Илија се трицифрени броеви?

    Решение. За бројот 4 имаме 4 збирови кои се трицифрени броеви, за бројот 5 имаме 5 збирови кои се трицифрени броеви итн. за бројот 9 имаме 9 збирови кои се трицифрени броеви. Провери! Според тоа, $4+5+6+7+8+9=39$ од збировите кои ги добил Илија се трицифрени броеви.

12. Горјан запишал дваесет последователни непарни броеви. Потоа ја определил разликата $B-A$, каде A е збирот на првите дессет од запишаните броеви, а B е збирот од последните десет од запишаните броеви. Кој број го добил Горјан?

    Решение. Секои два последователни непарни броеви се разликуваат за 2. Според тоа, единаесеттиот број е поголем од првиот за $2\cdot10=20$. Слично, дванаесеттиот број е поголем од вториот за 20, тринаесеттиот е поголем од третиот за 20, ..., дваесеттиот е поголем од десеттиот за 20. Значи, секој од десетте собирци во вториот збир е поголем за 20 од соодветниот по ред собирок во првиот збир. Затоа, важи $B=A+10\cdot20$, односно $B-A=200$.

13. Кој е најголемиот трицифрен број кој е делив со 7 и кај кој збирот на неговите цифри исто така е делив со 7?

    Решение. Најголем трицифрен број кој е делив со 7 е бројот $994=142\cdot7$. Но, збирот на неговите цифри е $9+9+4=22$ и тој не е делив со 7. Враќајќи се наназад, трицифрени броеви кои се деливи со 7 се:

    $$987, 980, 973, 966, 959, ...$$

    Го бараме првиот број во оваа низа чиј збир на цифри е делив со 7. Тоа е бројот 966, кој има збир на цифри: $9+6+6=21$ и тоа најголемиот трицифрен број кој е делив со 7 и чиј збир на цифри е делив со 7.

14. Андреј запишал три броја. Аритметичките средини на секои два од овие три броја се 33, 44 и 55 (артиметичка средина на неколку броја се нарекува бројот кој се добива кога збирот на тие броеви се подели со нивниот број). Кои броеви ги запишан Андреј?

    Решение. Бидејќи аритметичките средини на два по два броја се 33, 44 и 55, нивните збирови се

    $$2\cdot33=66, 2\cdot44=88, 2\cdot55=110.$$

    Во трите збира секој од броевите се јавува два пати, па затоа збирот на трите броја е еднаков на половина од збирот

    $$66+88+110=264,$$

    т.е. еднаков на $264:2=132$. Според тоа, броевите кои ги запишал Андреј се $132-66=66$, $132-88=44$ и $132-110=22$.

15. Андреј користејќи ја по еднаш секоја од цифрите 0, 1, 3, 5, 7 и 9, запишал еден трицифрен, еден двоцифрен и еден едноцифрен број, така што збирот на трите броја бил најмал. Кој збир го добил Андреј?

    Решение. За да збирот на трите запишани броја е најмал цифрите стотките и десетките на трицифрениот број мора да се најмали можни, па затоа цифрата на стотките на трицифрениот број мора да е 1, а цифрата на десетките да е 0. Понатаму, од исти причини цифрата на десетките на двоцифрениот број мора да е најмала можна, а тоа е цифрата 3. Сега, можеме цифрите на единиците произволно да ги распределиме. Така, збирот кој го добил Андреј е

    $$100+30+5+7+9=151.$$

16. Цифрата на десетките на еден трицифрен број не е 3 и е 3 пати поголема од цифрата на единиците на тој број и е за 3 помала од цифрата на стотките на тој број. Кој е тој трицифрен број?

    Решение. Ако цифрата на единицте на бараниот број е 1, тогаш цифрата на десетките треба да е $3\cdot 1=3$, а тоа противречи на условот на задачата. Цифрата на единиците на бараниот број не може да е 3, бидејќи тогаш цифрата на десетките ќе биде $3\cdot 3=9$, па за цифрата на стотките би добиле $9+3=12$, а 12 не е цифра. Јасно, цифрата на единиците не може да е поголема од 3. Останува, цифрата на единиците на бараниот број да е 2, при што за цифрата на десетките добиваме $3\cdot 2=6$, а цифрта на стотките е $6+3=9$. Значи, бараниот број е 962.

17. Замислив еден број. Бројот го зголемив 3 пати. Добиениот број го зголемив за 3. Новиот резултат го намалив 3 пати и добива нов број. За колку бројот кој го добив е поголем од замислениот број?

    Решение. Нека замислениот број е x. Прво го добив бројот $3x$, па бројот $3x+3$ и на крајот бројот $(3x+3):3=3x:3+3Ч3=x+1$.

Значи, бројот кој го добива е за 1 поголем од замислениот број.

18. Кој е најголемиот четирицифрен број запишан со различни цифри така, што неговите први две цифри и последни две цифри формираат два последователни двоцифрени броја во растечки редослед?

    Решение. Бидејќи цифрите на четирицифрениот број се различни, двата двоцифрени последователни броја не може да припаѓаат на иста десетка. Според тоа, првиот број треба да припаѓа на една десетка, а вториот треба да припаѓа на следната десетка. Вакви парови брови се 19 и 20, 29 и 30, 39 и 40, 49 и 50, 59 и 60, 69 и 70, 79 и 80, 89 и 90. Соодветните четирицифрени броеви се 1920, 2930, 3940, 4950, 6970, 7980 и 8990. Но, бројот 8990 не е запишан со различни цифри, па затоа бараниот број е 7980.

19. За еден петцифрен број ќе велиме дека е „прекрасен“, ако е запишан со различни цифри и збирот на првата и последната цифра му е еднаков на збирот на преостанатите три цифри. На пример, бројот 70496 е „прекрасен“. Кој е следниот по големина „прекрасен“ број?

    Решение. Лесно се гледа дека следниот по големина прекрасен број не може да има цифра на стотките 4. Да го побараме најмалиот прекрасен број чија цифра на стотките е 5, т.е. да побараме број од видот $\overline{705xy}$. За таа цел треба да ја определиме најмалата можна вредност на x. Јасно $x>1$. За $x=2$, добиваме $7+y=0+5+2$, т.е. $y=0$, но бројот 70520 не е запишан со различни цифри. За $x=3$, добиваме $7+y=0+5+3$, т.е. $y=1$. Значи, го добивме бројот 70531 и тоа е бараниот број.

20. Андреј чита книга. Во овој момент тој прочитал толку страници, што бројот на цифрите на двоцифрените броеви со кои се нумерирани прочитаните страници е 10 пати поголем од бројот на цифрите на едноцифрените страници со кои се нумерирани прочитаните страници. Колку страници прочитал Андреј до овој момент?

Решение. Едноцифрените броеви со кои се нимерирани прочитаните страници се запишани со 9 цифри. Значи, за запишување на двоцифрените броеви се употребени $10 \cdot 9 = 90$ цифри. Според тоа, Андреј прочитал $90:2=45$ страници нумерирани со двоцифрени броеви. Значи, Андреј вкупно прочитал $9+45=54$ страници.

21. За оваа учебна година Андреј се претплатил на списанијата „Нумерус“ и „Сигма“. Првото списание ќе го добива секои три месеци, а второто списание ќе го добива секои четири месеци. Колку броја од двете списанија ќе добие Андреј оваа година?

    Решение. Годината има 12 месеци, што значи дека од списанието „Нумерус“ Андреј ќе добие $12:3=4$ броја, а од списанието „Сигма“ тој ќе добие $12:4=3$ броја. Конечно, од двете списанија Андреј ќе добие $4+3=7$ броја.

22. Колку најмногу петоци може да има во една година?

    Решение. Една година има 365 или 366 дена (престапна година). Бидејќи $365=7 \cdot 52+1$ и $366=7 \cdot 52+2$, во една година може да има најмногу 53 петоци. Ако имаме обична година, тогаш тоа е случај кога петок е на 01.01, а ако годината е престапна тоа е случај кога петок е на 01 или 02.01.

23. Збирот на годините на неколку деца е 20. По 3 години збирот на годините на истите деца бил 38. Определи го бројот на децата.

    Решение. По 3 години збирот на годините на децата се зголемил за $38-20=18$ години. Бидејќи во овој период секое дете е постаро за 3 години, бројот на децата бил $18:3=6$.

24. Андреј има три години, а неговиот брат Горјан е три пати постар. Колку години ќе имаат заедно по три години?

    Решение. Бидејќи Горјан во моментот е три пати постар од Андреј, тој има $3 \cdot 3=9$ години. По 3 години Андреј ќе има $3+3=6$, а Горјан ќе има $9+3=12$ години. Значи, по 3 години збирот на нивните години ќе биде $6+12=18$.

25. Денес мама, тато и јас заедно имаме 70 години. Колку години вкупно ќе имаме тројцата по 6 години?

    Решение. Со секоја измината година тројцата заедно имаме $3 \cdot 1 = 3$ години повеќе. Значи, по 5 години вкупно ќе имаме $5 \cdot 3 = 15$ години повеќе, односно ќе имаме $70 + 15 = 85$ години.

26. Денес на 16.01.2023 година Ана, Дана, Живка, Филимена, Шана и Јана имаат роденден и тие имаат соодветно 4, 5, 6, 7, 8 и 9 години. Определи го збирот на нивните години на 16.01.2018 година.

    Решение. На 16.01.2018 година, т.е. пред 5 години Ана, која има 4 години, не била родена, а Дана се родила на тој ден, т.е. имала 0 години. Понатаму, Живка, Филимена, Шана и Јана имале 1, 2, 3 и 4 години, соодветно. Значи, на 16.01.2018 година збирот на годините на девојчињата бил $1+2+3+4=10$.

27. Во моментот Стефан е 7 пати помлад од неговиот татко, а татко му е 30 години постар од него. Определи го збирот на нивните години.

    Решение. Нека Стефан има x години. Тогаш татко му има $7x$ години и бидејќи е 30 години постар од Стефан добиваме $7x - x = 30$, од каде наоѓаме $6x = 30$, т.е. $x = 5$. Значи, збирот на годините на Стефан и неговиот татко е $x + 7x = 8x = 8 \cdot 5 = 40$.

28. Пабло има 6 години. По 4 години Пабло ќе биде x пати постар отколку пред 4 години. Колку е x?

    Решение. Пред 4 години Пабло имал $6 - 4 = 2$ години, а по 4 години тој ќе има $6 + 4 = 10$ години. Според тоа, Пабло по 4 години ќе биде $x = 10 : 2 = 5$ пати постар отколку пред 4 години.

29. Збирот на годините на таткото и синот е 36. Ако се избрише цифрата на единиците во бројот на годините на таткото ќе се добие бројот на годините на синот. Определи го производот на годините на таткото и синот.

    Решение. Јасно, бројот на годините на синот е еднаков на цифрата на десетките на бројот на годините на таткото. Ако таткото има помалку од 30 години, тогаш синот ќе има помалку од 3 години, па затоа збирот на нивните години ќе биде помал од $30+3=33$, што не е можно бидејќи збирот на нивните години е 36. Значи, за годините x на таткото важи $30 \leq x < 36$. Според тоа, цифрата на десетките на годините на таткото е 3, што значи дека синот има 3 години. Понатаму, таткото има $36-3=33$ години и производот на годините на таткото и синот е $3 \cdot 33 = 99$.

30. На секој свој роденден Вера добивала онолку мечиња Сваровски колку што имала години. Во моментот таа има 91 мече. Колку години има Вера?

Решение. Последователно добиваме

$$1+2=3,$$
$$1+2+3=6,$$
$$1+2+3+4=10,$$
$$1+2+3+4+5=15,$$

....

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78,$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=91,$$

што значи дека во моментот Вера има 13 години.

31. Кога Горјан погледнал во часовникот тој забележал дека остатокот од денонокието е три пати поголем од изминатиот дел на денонокието. Колку часот било кога Горјан го погледнал часовникот?

Решение. Ако во моментот кога Горјан го погледнал часовникот било x часот, тогаш до крајот на денонокието требало да поминат $3x$ часа. Значи, $x+3x=24$, од каде добиваме $x=6$. Значи, Горјан го погледнал часовникот во 6 часот.

32. Денес е 11 часот и 27 минути. Колку ќе биде часот по 20 часа и 33 минути.

Решение. Бидејќи кога од 11 часот и 27 минути ќе поминат 20 часа и 33 минути, ќе помине денешниот ден, за да одговориме на прашањето треба да ги собереме дадените времиња и од добиениот збирот да одземеме 24 часа. Имаме:

$$\begin{aligned} 11\,h\,27\text{ min} + 20\,h\,33\text{ min} - 24\,h &= (11+20)\,h\,(27+33)\text{ min} - 24\,h \\ &= 31\,h\,60\text{ min} - 24\,h \\ &= 32\,h - 24\,h \\ &= 8\,h, \end{aligned}$$

што значи дека бараното време е 8 часот.

33. Лифт се качува од првиот до четвртиот кат на една зграда за 12 секунди. За колку секунди тој лифт ќе се качи во истата зграда од првиот до деветтиот кат?

Решение. Од првиот до четвртиот кат има $4-1=3$ еднакви растојанија, што значи за да искачи едно растојание на лифтот му се потребни $12:3=4$ секунди. Понатаму, од првиот до деветтиот кат има $9-1=8$ еднакви растојанија, па затоа за лифтот се искачи од првиот до деветтиот кат му се потребни $8\cdot 4=32$ секунди.

34. Филип гледал Филм кој почнал во 19 часот и завршил во 21 часот. За време на филмот биле пуштени две реклами. Првата реклама траела 3 минути и 20 секунци, а втората реклама траела 2 минути и 40 секунви. Колку минути траел самиот филм.

Решение. Прикажувањето на филмот заедно со рекламите траело

$$21-19=2\,h=2\cdot 60\text{ min}=120\text{ min}.$$

Понатаму, вкупното времетраење на рекламите било

$$3\text{ min }20\text{ s}+2\text{ min }40\text{ s}=5\text{ min }(20+40)\text{ s}=5\text{ min }60\text{ s}=6\text{ min}.$$

Значи, самиот филм траел $120-6=114\text{ min}$.

35. Еден електронски часовник покажува 20:09 (дваесет часот и девет минути). По колку најмалку минути на дисплејот на тој часовник ќе бидат истите цифри, но во друг редослед?

Решение. Цифрите на 2, 0, 0 и 9 на дисплејот на екранот повторно за прв пат ќе се појават во 00:29, односно 29 по полноќ. Од 20:09 до полноќ има $4 \cdot 60 - 9 = 231$ минута. Бидејќи цифрите 2, 0, 0 и 9 за прв пат повторно ќе се појават 29 минути по полнот, одговорот на поставеното прашање е $231 + 29 = 260$ минути.

36. Горјан домашните работи по математика и македонски јазик ги пишувал од 9 часот и 47 минути до 11 часот и 12 минути. За колку минути Горјан ги напишал домашните работи?

    Решение. Од 9 часот и 47 минути до 10 часот има 13 минути. Од 10 часот до 11 часот има 60 минути. Од 11 часот до 11 часот и 12 минути има 12 минути. Значи, Горјан домашните работи ги напишал за $13 + 60 + 12 = 85$ минути.

37. Андреј започнал да ги пишува домашните работи по македонски јазик и математика во 15 часот и 57 минути и истите ги завршил во 17 часот и 12 минути. Домашната по македонски јазик ја пишувал 36 минути. Колку минути ја пишувал домашната по математика?

    Решение. Од 15 часот и 57 минути до 17 часот и 12 минути има $3 + 60 + 12 = 75$ минути. Андреј за домашната по македонски јазик потрошил 36 минути, што значи дека домашната по математика ја пишувал $75 - 36 = 39$ минути.

38. Една ноќ се разбудив и погледнав на часовникот кој покажуваше 3 часот. Забележав дека часовникот застанал, па затоа го навив и продолжив да спијам. Кога сабајлето се разбудив, погледнав на уличниот часовник кој покажуваше 7:30. Мојот часовник покажуваше 5 часот и 30 минути. Во колку часот сум се разбудил таа ноќ?

    Решение. Според мојот часовник од моментот кога го навив часовникот, до моментот кога станав сабајлето поминале

    $$5\,h\,30\,\text{min} - 3\,h = 2\,h\,30\,\text{min}\,.$$

    Според уличниот часовник точното време во моментот кога станав е 7:30. Но, ноќта се разбудив пред $2\,h\,30\,\text{min}$, што значи дека се разбудив во $7\,h\,30\,\text{min} - 2\,h\,30\,\text{min} = 5\,h$.

39. Матеј е ученик во четврто одделение. Тој секој ден од понеделник до петок има по 5 наставни часа од по 45 минути и одмор од 15 минути меѓу секои два наставни часа. Колку саати во текот на една седмица траат часовите на Матеј, а колку одморите меѓу часовите?

    Решение. Матеј има 5 часа секој ден, што значи дека меѓу часовите има 4 одмори дневно. Еден одмор трае 15 минути, па затоа секој ден одморите траат $4 \cdot 15 = 60\,\text{min} = 1\,h$. Сега, бидејќи Матеј оди 5 дена на училиште, во текот на една седмица одморите траат $5 \cdot 1 = 5\,h$.

    Часовите на Матеј секој ден траат по $5 \cdot 45 = 225\,\text{min}$. Според тоа, во текот на една седмица часовите на Матеј траат
    $$5 \cdot 225 = 1125\,\text{min} = 18 \cdot 60 + 45\,\text{min} = 18\,h\,45\,\text{min}.$$

40. Покрај тркачка патека на еднакви растојанија едно од друго се поставени знаменца. Стартот е од првото поставено знаменце. Марко трча со постојана брзина и делот од патеката од првото до шестото знаменце знаменце го истрчал за 30 секунди? Тој продолжил да трча со истата брзина до десеттото знаменце. Колку време му било потребно на Марко да истрча од првото до десеттото знаменце?

    Решение. Од првото до шестото знаменце има $6-1=5$ еднакви растојанија и овој дел од патеката Марко го истрчал за 30 секунди. Значи, за да истрча едно од овие растојание на Марко му се потребни $30:5=6$ секунди. Од првото до десеттото знаменце има $10-1=9$ еднакви растојание. Бидејќи Марко едно растојание трча за 6 секунди, тој од првото до десеттото знаменце ќе истрча за $9 \cdot 6 = 54$ секунди.

41. За домашна работа по математика Пабло треба да реши 71 задача. Тој планирал неколку дена да решава по 7 задачи, а во другите денови да решава по 3 задачи. Определи го најмалиот мо-

жен број денови за кои Пабло може да ја напише домашната?

Решение. Најмалиот можен број денови за кои Пабло ќе ја напише домашната ќе го определиме ако го определиме најголемиот можен број денови во кои Пабло ќе решава по 7 задачи. Бидејќи $7\cdot 11=77>71$, Пабло домашната ќе ја решава помалку од 11 дена. Сега од:

$$71=7\cdot 10+3\cdot 0+1,$$
$$71=7\cdot 9+3\cdot 2+2,$$
$$71=7\cdot 8+3\cdot 5,$$

заклучуваме дека најголемиот можен број денови во кои Пабло ќе решава по 7 задачи е 8, а во 5 дена тој ќе решава по 3 задачи. Конечно, најмалиот можен број денови потребен Пабло да ја напише домашната работа е еднаков на $8+5=13$.

42. Дедо Стојан на сточниот пазар купил свиња и јагне. Свињата има десет пати поголема маса од јагнето, а јагнето има $180\,kg$ помала маса од свињата. Колку килограми заедно имаат свињата и јагнето?

Решение. Нека масата на јагнето е $x\,kg$. Тогаш масата на свињата е $10\,x\,kg$. Бидејќи јагнето има $180\,kg$ помала маса од свињата, добиваме $10x-x=180$, од каде наоѓаме $x=20\,kg$. Конечно, свињата и јагнето заедно имаат $10x+x=11x=11\cdot 20=220\,kg$.

43. Масата на 1 слон и 3 тигри е колку масата на 12 лавови, а 1 слон има маса колку 1 тигар и 8 лавови. Колку лавови имаат маса колку 1 слон и 1 тигар?

Решение. Бидејќи 1 слон има маса колку 1 тигар и 8 лавови, добиваме дека 1 слон и 3 тигри имаат маса колку $1+3=4$ тигри и 8 лавови. Но, 1 слон и 3 тигри имаат маса колку 12 лавови, па затоа 4 тигри и 8 лавови имаат маса колку 12 лавови. Според тоа, 8 лавови имаат маса колку 8 тигри, што значи дека 1 лав има маса колку 1 тигар. Сега, бидејќи 1 слон има маса колку 1 тигар и 8 лавови, добиваме дека 1 слон има маса колку $1+8=9$ лавови. Конечно, 1 слон и 1 тигар имаат маса колку $9+1=10$ лавови.

44. Киро и Рампо во ист момент тргнале пешки од Прилеп и Битола еден кон друг. Киро одел со постојана брзина $5\,km$ на час, а Рампо одел со постојана брзина од $6\,km$ на час. Ти се сретнале по 4 часа одење. Колку е долг патот од Прилеп дп Битола?

    Решение. Киро и Рампо заедно за еден час минуваат пат со должина $5+6=11\,km$. Тие тргнале во ист момент и се сретнале по 4 часа одење, што значи дека до средбата поминале $4\cdot 11=44\,km$. Јасно, од тргнувањето до средбата тие го поминале патот меѓу двата града, што значи дека патот од Прилеп до Битола е долг $44\,km$.

45. Велосипедист се движи со постојана брзина од $30\,km/h$. Колку метри поминал велосипедистот за 1 минута.

    Решение. За еден час велосипедистот поминал

$$30\cdot 1000=30000\,m.$$

    Но, $1h=60\min$, што значи дека за 1 минута влосипедистот поминал

$$30000:60=500\,m.$$

46. Киро и Рампо требало да бојадисаат со жолта боја линии од двете страни на штотуку асфалтирана улица. Киро пристигнал прв и на десната страна бојадисал $3\,m$, кога пристигнал Рампо и забележал дека договорот бил Киро да ја бојадиса левата страна. Киро почнал од почеток да ја бојадисува левата страна, а Рампо продолжил на десната страна од местото на кое застанал Киро. Кога Рампо ја завршил својата страна, тој ја преминал улицата и му помогнал на Киро, при што бојадисал $6\,m$ додека се сретнал со Киро. Линиите на двете страни на улицата се со еднаква должина. Колку метри е разликата меѓу бојадисаното од Рампо и бојадисаното од Киро?

    Решение. Ако линијата на едната страна е долга a метри, тогаш Рампо на десната страна бојадисал $a-3$ метри, а на левата страна бојадисал $6\,m$, што значи дека тој вкупно бојадисал

$$a-6+3=a+3 \text{ метри.}$$

Киро на десната страна бодадисал $3m$, а на левата страна бојадисал $a-6$ метри, што значи дека тој вкупно бојадисал

$$a-6+3=a-3 \text{ метри.}$$

Значи, Рампо бојадисал $3m$ повеќе од должината на едната линија, а Киро бојадисал $3m$ помалку од должината на едната линија, што значи дека разликата меѓу бојадисаното на Рампо и бојадисаното на Киро била $3+3=6m$.

47. Кенгурот Скокалко прави скокови од по $9m$ нанапред и $4m$ наназад. Кој е најмалиот број скокови потребни за Скокалко да се придвиши точно $100m$ нанапред?

Решение. Ако Скокалко направи x скокови нанапред и y скокови наназад, тогаш за тој да се придвижи $100m$ нанапред треба да важи $9x=100+4y$. Сега за да го определиме најмалиот број скокови со кои Скокалко ќе се придвижи $100m$ нанапред, треба да го најдеме најмалиот број скокови што Скокалко ќе ги направи наназад, при што ќе важи горното равенство.

Јасно, $y\geq 1$, бидејќи за $y=0$ добиваме $9x=100$, што не е можно бидејќи не постои природен број кој помножен со 9 дава 100. Понатаму, ако $y=1$, тогаш $9x=100+4$, т.е. $9x=104$, што повторно не е можно. Но, за $y=2$, добиваме $9x=100+8$, т.е. $9x=108$, од каде следува $x=12$. Конечно, најмалиот број скокови со кои Скокалко ќе се придвижи за $100m$ нанапред е $2+12=14$.

Забелешка. Скокалко може да се придвижи $100m$ нанапред и ако направи 16 скокови нанапред и 11 скокови наназад. Навистина, тогаш тој ќе се придвижи $9\cdot 16-4\cdot 11=144-44=100m$ нанапред. Обиди се да најдеш и друга комбинација на скокови со која Скокалко ќе се придвижи $100m$ нанапред.

48. Принцот разбрал дека Пепелашка се наоѓа во горката на растоја-

ние од $50\,km$. Заради тешкиот пат тој преку ден можел да поминува точно по $20\,km$, а ноќе одмарал. Но, вештерката, т.е. лошата маќеа на Пепелашка секоја ноќ го враќала принцот $15\,km$ назад. Принцот тргнал кон Пепелашка во понеделник наутро. Во кој ден од седмицата тој ќе стигне до Пепелашка?

Решение. Бидејќи преку ден принцот поминува $20\,km$, а ноќе вештерката го враќа назад $15\,km$, тој во текот на едно деноноќие ќе се приближува до Пепелашка по $20-15=5\,km$. Меѓутоа, последниот ден, тој ќе ги помине последните $20\,km$, па затоа вештерката може принцот да го враќа назад само додека тој ги помине почетните $50-20=30\,km$. Овие $30\,km$ принцот ќе ги помине за $30:5=6$ дена, што значи дека тој ќе стигне до Пепелашка седмиот ден од поаѓањето, а тоа е недела.

49. По рамен пат, на растојание $10\,km$ еден од друг, во иста насока и со иста брзина од $5\,km/h$ се движат двајца пешаци. Потоа секој од нив се искачува по угорнина со брзина од $3\,km/h$. Колкаво е растојанието меѓу пешаците во моментот кога вториот пешак започнува со искачувањето на угорнината, ако во тој момент првиот пешак се уште оди по угорнината?

Решение. Во моментот кога првиот пешак почнал да се качува по угорнината вториот пешак е оддалечен од него $10\,km$. Бидејќи $10:5=2$, за да стигне до почетокот на угорнината на вториот пешак му се потребни 2 часа. За тоа време првиот пешак на угорнината ќе изоди $2\cdot 3=6\,km$ и тоа е бараното растојание меѓу двата пешаци.

50. Куќите на Киро и Рампо се оддалечени една од друга $2\,km$. Киро и Рампо тргнале од своите куќи истовремено еден кој друг. Киро на секои 4 минути поминува по 300 метри, а Рампо на секои 5 минути поминува по 400 метри. Колку метри ќе биде должината на патот меѓу Киро и Рампо по 10 минути од нивното поаѓање?

Решение. *Прв начин*. Имаме $10=2\cdot4+2$. Бидејќи $4:2=2$ Киро за 2 минути поминува $300:2=150\,m$, па затоа за 10 минути тој ќе помине $2\cdot300+150=750\,m$. Понатаму, бидејќи и $10=2\cdot5$, Рампо за 10 минути ќе помине $2\cdot400=800\,m$. Според тоа, за 10 минути двајцата заедно ќе поминат $800+750=1550\,m$, па затоа по 10 минути од нивното поаѓање должината на патот меѓу нив ќе биде

$$2\,km-1550\,m=2\cdot1000\,m-1550\,m=2000\,m-1550\,m=450\,m.$$

Втор начин. Киро за 1 минута поминува $300:4=75\,m$, а Рампо за 1 минута поминува $400:5=80\,m$. Според тоа, двајцата заедно за 1 минута поминуваат $75+80=155\,m$, што значи дека за 10 минути двајцата заедно поминуваат $10\cdot155=1550\,m$. Сега, бидејќи $2\,km=2000\,m$, по 10 минути од нивното поаѓање должината на патот меѓу нив ќе биде $2000-1550=450\,m$.

51. Ангел трча со брзина од $2\,m\,50\,cm$ во секунда, а Бојан трча со брзина од $165\,m$ во минута. Ангел почнал да трча 1 минута и 30 секунди пред Бојан, кој потрчал да го стигне. По колку минути Бојан ќе го стигне Ангел?

Решение. За $1\,\text{min}\,30\,\text{s}=90\,\text{s}$ Ангел ќе помине

$$90\cdot(2\,m\,50\,cm)=180\,m\,4500\,cm=180\,m+45\,m=225\,m,$$

што значи дека тој има $225\,m$ предност пред Бојан да почне да трча. За $1\,\text{min}=60\,\text{s}$ Ангел претрчува

$$60\cdot(2\,m\,50\,cm)=120\,m\,3000\,cm=120\,m+30\,m=150\,m,$$

а Бојан претрчува $165\,m$. Според тоа, за $1\,\text{min}$ Бојан го пристигнува Ангел за $165-150=15\,m$. Конечно, бидејќи Ангел има предност од $225\,m$, Бојан ќе го стигне по $225:15=15\,\text{min}$.

52. Во 8 часот наутро гасениците Маја и Раја почнале да ползат нагоре по едно високо дрво. Маја минувала по 3 метри за 10 минути, а Раја минувала по 2 метра за 10 минути. Точно во 9 часот Маја се завртела и почнала да ползи надолу по дрвото. Во 9 ча-

сот и 5 минути тоа го направила и Раја. Колку метри се оддалечени една од друга двете гасеници во 9 часот и 20 минути.

Решение. Од 8 до 9 часот има $60=6\cdot 10\,\mathrm{min}$, па затоа Маја се искачила $6\cdot 3=18\,m$. Од 9 часот до 9 часот и 20 минути има $20=2\cdot 10\,\mathrm{min}$, па затоа Маја се симнала $2\cdot 3=6\,m$, што значи дека во 9 часот и 20 минути таа е на височина $18-6=12\,m$.

Од 8 до 9 часот Раја се искачила $6\cdot 2=12\,m$ и во следните $10:2=5\,\mathrm{min}$ таа се искачила уште $2:2=1\,m$, т.е. била на височина од $12+1=13\,m$. Од 9 часот и 5 минути до 9 часот и 20 минути Раја се симнала $2+1=3\,m$, па затоа таа била на височина $13-3=10\,m$.

Конечно, во 9 часот и 20 минути Маја и Раја една од друга биле оддалечени $12-10=2\,m$.

53. Турист одел 3 часа со брзина од $3\,km/h$ и изминал $3\,km$ помалку од половина од патот. Потоа тој ја зголемил брзината за $1\,km/h$. За колку часа туристот ја поминал втората половина од патот?

Решение. Половината од патот е еднаква на $3\cdot 3+3=12\,km$. Бидејќи втората половина од патот туристот одел со брзина $3+1=4\,km/h$, тој втората половина од патот ја поминал за $12:4=3\,h$.

54. Маша решила да го пренесе медот од кошницата на пчелите во куќата на Медо. Таа располага со два сада и тоа од 4 литри и 7 литри. Кој е потребниот најмали број на полнења до горе на секој од садовите за Маша да пренесе 51 литар мед?

Решение. Најмалиот број на полнења до горе на секој од садовите ќе добиеме ако го определиме најголемиот можен број полнења до горе на садот од 7 литри. Бидејќи $7\cdot 8=56>51$ садот од 7 литри мора да го наполниме помалку од 8 пати. Сега, од

$$51=7\cdot 7+0\cdot 4+2,$$

$$51 = 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1,$$
$$51 = 7 \cdot 5 + 4 \cdot 4,$$

заклучуваме дека најголемиот можен број полнења на садот од 7 литри е 5 и притоа садот од 4 литри треба да го наполниме 4 пати. Значи, бараниот најмал број полнења на двата сада е $5 + 4 = 9$.

55. Пабло кога влегол во продавницата имал 95 евра, а кога излегол му останале пет пати помалку пари. Колку пари потрошил Пабло?

Решение. Кога излегол од продавницата на Пабло му останале $95:5 = 19$ евра. Значи, тој потрошил $95 - 19 = 76$ евра.

56. Два сока се 30 денари поскапи од еден сок. Колку пари чинат 4 од овие сокови?

Решение. Бидејќи два сока се 30 денари поскапи од еден сок, заклучуваме дека два сока чинат колку еден сок и 30 денари. Според тоа, еден сок чини 30 денари. Конечно, 4 од овие сокови чинат $4 \cdot 30 = 120$ денари.

57. Филип и Андреј играат пинг-понг. По секој меч победениот му дава на победникот 10 евра. На крајот се покажало дека Филип победил 3 пати, а Андреј заработил 30 евра. Колку меча изиграле Филип и Андреј?

Решение. Бидејќи Андреј заработил 30 евра, тој победил $30:10 = 3$ меча повеќе од Филип. Филип победил во 3 меча, па затоа Андреј победил во $3 + 3 = 6$ меча. Конечно, Филип и Андреј изиграле $3 + 6 = 9$ меча.

58. Андреј има монети од 5 денари, а Пабло има исто толку монети од 2 денари. Андреј има 27 денари повеќе од Пабло. Колку пари имаат двајцата заедно?

Решение. Од $5 - 2 = 3$ следува дека со секоја монета Андреј има по 3 денари повеќе од Пабло. Бидејќи Андреј има 27 днари повеќе од Пабло, тој има $27:3 = 9$ монети. Значи, Андреј и Пабло имаат по 9 монети, па затоа тие заедно имаат

$$9\cdot5+9\cdot2=45+18=63 \text{ денари.}$$

59. Кога Филип купил 5 исти сока му останале 20 денари, а за да купи 9 од истите сокови му недостасуваат 44 денари. Колку пари имал Филип?

Решение. Ако Филип купува 9 сока, тој купува $9-5=4$ сока повеќе, и за тоа уште ќе ги потроши оние 20 денари кои му преостануваат и уште 44 денари кои му недостасуваат. Тоа значи, дека за 4 сока Филип ќе плати $20+44=64$ денари. Значи, 1 сок чини $64:4=16$ денари. Конечно, Филип има $5\cdot16+20=100$ денари.

60. Андреј купил две чоколади од по 42 денари и на продавачот му дал банкнота од 100 денари. Продавачот му вратил кусур во различни по вредност монети. Колку монети добил Андреј?

Решение. Андреј за чоколадите требало да плати $2\cdot42=84$ денари. Тој на продавачот му дал банкнота од 100 денари, што значи дека добил кусур од $100-84=16$ денари. Имаме монети од 1, 2, 5 и 10 денари. Бидејќи единствен начин бројот 16 да се прикаже како збир на некои од броевите 1, 2, 5 и 10 во кој сите собирци се различни е $1+5+10=16$, заклучуваме дека кусурот на Андреј бил вратен со по една монета од 1, 5 и 10 денари, односно со 3 монети.

61. Пабло има само банкноти од 500 денари, а Филип има само банкноти од 200 денари. Кој е најмалиот број банкноти кои треба да ги дадат Пабло и Филип за да купат топка која чини 3800 денари, а продавачот да не треба да им враќа кусур?

Решение. Бидејќи $500>200$, најмалиот број банкноти се добива ако Пабло даде најголем можен број банкноти од по 500 денари. Имаме $3800=7\cdot500+300$, но Пабло не може да даде 7 банкноти од по 500 денари, бидејќи во тој случај Филип не може со банкноти од по 200 денари да плати сума од 300 денари, а продавачот да не му враќа кусур. Ако Пабло даде 6 банкноти од по

500 денари, тогаш од $3800-6\cdot500=800=4\cdot200$ следува дека Филип треба да даде 4 банкноти од по 200 денари.

Според тоа, бараниот најмал број банкноти е $6+4=10$.

62. Во една менувачница се менуваат швајцарски франци, евра, американски долари и кувајтски динари. Притоа 4 франци се менуваат за 5 евра, 2 долари и 1 динар се менуваат за 7 евра, 10 динари се менуваат за 12 франци и 15 евра. За колку евра се менува 1 долар?

    Решение. Бидејќи 4 франци се менуваат за 5 евра, добиваме дека $2\cdot4=12$ франци се менуваат за $3\cdot5=15$ евра. Сега, бидејќи 10 динари се менуваат 12 франци и 15 евра, добиваме дека 10 динари се менуваат за $15+15=30$ евра. Тоа значи дека 1 динар се менува за 3 евра. Но, 2 долари и 1 динар се менуваат за 7 евра, па затоа само 2 долари се менуваат за $7-3=4$ евра. Конечно, 1 долар се менува за $4:2=2$ евра.

63. Андреј сака да купи мастики. Во продавницата има мастики од 6 и од 7 денари. Колку најмногу мастики може Андреј да купи за точно 100 денари?

    Решение. За точно 100 денари Андреј ќе купи најмногу мастики, ако купи најголем можен број мастики од по 6 денари. Бидејќи $100=6\cdot16+4$, Андреј може најмногу да купи 16 мастики, при што ќе купи $16-4=12$ мастики од по 6 денари и 4 мастики од по 7 денари.

    Значи, за да потроши точно 100 денари, Андреј треба во равенството $100=6\cdot16+4$ точно четири броја еднакви на 6 да замени со четири броја еднакви на 7 и ќе го добие равенството

    $$12\cdot6+4\cdot7=100.$$

64. Горјан е во театар. Во редот во кој седи, лево од него има 5 седишта, а десно од него има 4 седишта. Колку седишта има во театарот, ако во него има 10 реда се еднаков број седишта?

    Решение. Во редот во кој седи Горјан, освен неговото седиште има $5+4=9$ седишта. Значи, во театарот во еден ред има

$1+9=10$ седишта. Бидејќи се 10 реда со еднаков број седишта, во театарот има $10 \cdot 10=100$ седишта.

65. Пабло има 12 фломастери во три бои – црвени, сини и зелени. Црвените се толку, колку што се сините, а зелените се два пати повеќе од црвените. Колку зелени фломастери има Пабло?

Решение. Ако со x го означиме бројот на црвените фломастери, тогаш Пабло има x сини и $2x$ зелени фломастери. Значи,

$$x+x+2x=12$$

од каде добиваме

$$4x=12, \text{ т.е. } x=12:4=3.$$

Значи, Пабло има 3 црвени, 3 сини и $2 \cdot 3=6$ зелени фломастери.

66. Во една кутија има бомбони. Кога Пабло зема бомбони, нивниот број се намалува 3 пати, а кога Андреј зема бомбони, нивниот број се намалува за 3. Прво зел бомбони Пабло, па Андреј и на крајот Пабло, по што останале 2 бомбони. Колку бомбони ќе останат ако прво земе Андреј па Пабло и на крајот Андреј?

Решение. За да го определиме бројот на бомбоните ќе одиме однназад – нанапред. Пред Пабло втор пат да земе бомбони во кутијата имало три пати повеќе бомбони од тие што останале, т.е. имало $3 \cdot 2=6$ бомбони. Пред Андреј да земе бомбони во кутијата имало 3 бомбони повеќе, што значи дека имало $6+3=9$ бомбони. Значи, пред првиот пат Пабло да земе бомбони, односно на почетокот во кутијата имало $3 \cdot 9=27$ бомбони.

Сега, одиме однапред – наназад. Во кутијата имало 27 бомбони и кога Андреј ќе земе 3 бомбони во неа останале $27-3=24$ бомбони. Понатаму, кога Пабло ќе земе бомбони, бројот на бомбоните ќе се намали три пати, што значи дека ќе останат $24:3=8$ бомбони. Конечно, кога Андреј втор пат ќе земе 3 бомбони, во кутијата ќе останат $8-3=5$ бомбони.

67. Ако Горјан изеде три пати повеќе бомбони отколку што изел тој ќе изедел 10 бомбони повеќе. Колку бомбони изел Горјан?

Решение. Нека Горјан изел x бомбони. Трипати повеќе бомбони се $3x$, па ако ги изел овие бомбони тој ќе изедел 10 бомбони повеќе отколку што изел. Значи, $3x-x=10$, од каде добиваме $2x=10$, односно $x=10:2=5$. Значи, Горјан изел 5 бомбони.

68. Во едно големо семејство Климент има 4 сестри и 4 браќа. Определи го производот mn, каде m е бројот на браќата, а n е бројот на сестрите на Илина, сестрата на Климент.

    Решение. Бидејќи Климент има 4 браќа и 4 сестри, во семејството има $4+1=5$ машки и 4 женски деца. Тоа значи дека Илина има $m=5$ браќа и $n=4-1=3$ сестри. Конечно, бараниот производ е $mn=5\cdot3=15$.

69. Дедо Трајко има четири сина. Секој од нив има по три деца, секој од нив има по две деца. Сите овие наследници се собрале за роденденот на дедо Трајко и само тие биле негови гости. Колку гости имал дедо Трајко?

    Решение. Децата на синовите се внуци на дедо Трајко, а нивните деца се правнуци на дедо Трајко. Дедо Трајко има 4 сина и секој има по 3 деца, што значи дека дедо Трајко има $4\cdot3=12$ внуци. Секој внук има по 2 деца, па затоа дедо Трајко има $12\cdot2=24$ правнуци. Конечно, дедо Трајко на неговиот роденден имал $4+12+24=40$ гости.

70. Дончо е шофер во ГСП. Едно утро тој забележал дека на секоја постојка, почнувајќи од втората, од автобусот слегуваат половина од патниците и никој не се качува. Пред седмата постојка во автобусот имало само еден патник. Колку патници се качиле на првата постојка?

    Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад – нанапред. Од условот на задачата следува дека одејќи наназад бројот на патниците на секоја постојка се удвојува, т.е. е два пати поголем. Тоа значи дека пред шестата постојка во автобусот имало $2\cdot1=2$ патника, пред петтата постојка имало $2\cdot2=4$ патници, пред четвртата имало $2\cdot4=8$ патници, пред третата имало

$2\cdot 8=16$ патници и пред втората во автобусот имало $2\cdot 16=32$ патника. Но, бројот на патниците пред втората постојка всушност е бројот на патниците кои се качиле на првата постојка, што значи дека на првата постојка се качиле 32 патника.

71. Во еден автобус патуваат 27 патници. Шоферот Дончо забележал дека седиштата со редни броеви 1, 2 и 3 се зафатени, а тие со редни броеви 4 и 5 се слободни. Понатаму, седиштата со редни броеви 6, 7 и 8 се зафатени, а тие со редни броеви 9 и 10 се слободни итн. до последните пет седишта, кои се распределени на истиот начин. Колку седишта има во автобусот?

Решение. Забележуваме дека во секоја група од по 5 седишта три се зафатени и две се слободни. Бидејќи во автобусот патувале 27 патници имаме $27:3=9$ групи од по три седишта зафатени. Тоа значи дека во автобусот има 9 групи од по 5 седишта, односно вкупно $9\cdot 5=45$ седишта.

72. Еден пајак има 8 нозе, а една мува има 6 нозе. Определи го најмалиот можен број на муви и пајаци за кои збирот на сите нивни нозе е еднаков на 62.

Решение. Бидејќи $8>6$ најмалиот можен број на муви и пајаци се добива за најголемиот можен број пајаци. Но, $8\cdot 8=64>62$, па затоа бројот на пајаците е помал од 8. Понатаму, ако бројот на пајаците е 7, тогаш имаме

$$62=8\cdot 7+6=8\cdot 7+1\cdot 6,$$

што значи дека 7 пајаци и 1 мува имаат точно 62 нозе, па затоа најмалиот можен број муви и пајаци е $7+1=8$.

Забелешка. Имаме $62=8\cdot 4+5\cdot 6$, што значи дека и 4 пајаци и 5 муви имаат 62 нозе, а исто така и 1 пајак и 9 муви имаат 62 нозе.

73. Ангелина купила едно пакетче со налепници. Половината на налепниците ги дала на најзината сестра Ивана, половина од преостанатите налепници ги дала на својот брат Михаил, за себе задржала 5 налепници и последните 4 налепници ги залепила во албумот. Колку налепници имало во пакетчето кое го купила

Ангелина?

Решение. Откако му дала налепници на својот брат Михаил, на Ангелина и останале $5+4=9$ налепници. Бидејќи на Михаил му дала половина од налепниците кои Ангелина ги имала во тој момент, таа пред да му даде налепници на Михаил имала $2\cdot 9=18$ налепници. Но, Ангелина на Ивана и дала половина од налепниците кои ги купила по што и преостанале 18 налепници, од каде следува дека Ангелина купила $2\cdot 18=36$ налепници.

74. Пабло има 8 стрелички со нив гаѓа мета. Секогаш кога ќе ја погоди метата тој добива 2 нови стрелички. Пабло 16 пати гаѓал во метата. Колку пати тој ја погодил метата?

    Решение. Пабло 16 пати гаѓал во метата, а на почетокот имал 8 стрелички. Значи, заради погодоците тој добил $16-8=8$ нови стрелички. Бидејќи за секој погодок Пабло добивал по 2 нови стрелички, тој метата ја погодил $8:2=4$ пати.

75. Во 4 исти погачи баба Петранка става 10 јајца. Колку јајца и се потребни на баба Петранка за да направи 6 исти такви погачи?

    Решение. Бидејќи за 4 погачи баба Петранка троши 10 јајца таа за 2 погачи ќе потроши $10:2=5$ јајца. Сега, од $6=3\cdot 2$ следува дека за да направи 6 исти такви погачи на баба Петранка и се потребни $3\cdot 5=15$ јајца.

76. Горјан има вкупно 29 книги. Тој книгите ги чува на полици така што на секоја полица има најмалку по 3 книги. Кој е најголемиот можен број полици на кои се наоѓаат книгите на Горјан?

    Решение. Најголемиот можен број полици на кои се наоѓаат книгите се добива ако на секоја полица распоредиме најмал можен број книги. Но, на секоја полица треба да има најмалку 3 книги, па како $29=9\cdot 3+2$, заклучуваме дека најголемиот можен број полици е 9. Притоа можно е или на 8 полици да има по 3 книги и на 1 полица да има 5 книги, или на 2 полици да има по 4 книги и на 7 полици да има по 3 книги.

77. На Државниот натпревар по математика учествувале ученици од четврто до деветто оддление. Во секое одделение тројцата најдобро пласирани ученици ќе добијат медали. Колку медали ќе бидат поделени на Државниот натпревар по математика?

    Решение. Од четврто до деветто одделение имаме 6 одделенија и во секое одделение се доделуваат по 3 медали. Според тоа на Државниот натпревар по математика ќе се доделат $6 \cdot 3 = 18$ медали.

78. Бројот на учениците во едно одделение е поголем од 20 и помал од 30. Во одделението има три пати повеќе момчиња од девојчиња. Бројот на девојчиња е непарен број. Колку девојчиња има во оваа одделение, а колку момчиња?

    Решение. Нека бројот на девојчињата е x. Тогаш во одделението има $3x$ момчиња, а вкупно има $x+3x=4x$ ученици. Бројот на учениците е поголем од 20, а е помал од 30, па затоа $20<4x<30$. Бидејќи $4\cdot 5=20$ и $4\cdot 8=32>30$, последните неравенства се исполнети за $x=6$ и за $x=7$. Но, бројот на девојчињата е непарен број, па затоа $x=7$. Според тоа, во одделението има 7 девојчиња и $3\cdot 7=21$ момче.

79. Во една кутија има 19 бомбони и тоа карамели, чоколадни и гумени бомбони. Од секој вид има барем една бомбона. Чоколадните бомбони се 9 пати повеќе од гумените бомбони. Колку бомбони има од секој вид?

    Решение. Ако има 2 гумени бомбони, тогаш бројот на чоколадните бомбони ќе биде еднаков на $9\cdot 2=18$, што не е можно бидејќи $2+18=20>19$. Значи, во кутијата има 1 гумена бомбона,, 9 чоколадни бомбони и $19-(1+9)=9$ карамели.

80. Во нашето одделение има 27 ученици. Сите се синооки и црнооки. Синоокитe се два пати помалку од црноокитe. Половина од момчињата се црнооки и тие се за 3 повеќе од сите девојчиња. Колку синооки девојчиња има во нашето одделение?

    Решение. Бидејќи синоокитe деца се двапати помалку од црнооките тие се три пати помалку од сите деца, што значи дека во нашето одделение има $27:3=9$ синооки деца. Ако во одделението има x црнооки момчиња, тогаш бројот на сите момчиња е еднаков на $2x$, а бројот на сите девојчиња е $27-2x$. Но, црноооките момчиња се за 3 помалку од сите девојчиња, па затоа важи $x=27-2x-3$, од каде добиваме $3x=24$, односно $x=8$. Значи, во одделението има 8 црнооки и 8 синооки момчиња, па како има 9 синооки деца, добиваме дека има само едно синооко девојче.

81. Андреј се подготвува за учество на математички натпревар. За една седмица тој решил 63 тешки задачи, при што секој ден, освен во понеделникот, тој решавал по една задача повеќе од претходнит ден. Колку задачи решил Андреј во четвртокот?

    Решение. Ако во понеделникот Андреј решил x задачи, тогаш во следните шест дена тој редоследно решавал $x+1, x+2, x+3$, $x+4$, $x+5$ и $x+6$. Затоа важи

    $$x+x+1+x+2+x+3+x+4+x+5+x+6=63.$$

    Според тоа, $7x+21=63$, од каде добиваме $7x=42$, т.е. $x=6$. Андреј во четвртокот решил $x+3=9$ задачи.

82. Јунакот Крали Марко сретнал група ламји. Секоја ламја имала толку глави колку што имало ламји во групата. Крали Марко забележал дека сите ламји заедно имаат повеќе од 20, но помалку од 30 глави. Колку ламји имало во групата?

    Решение. Нека во групата имало x ламји. Бидејќи секоја ламја има толку глави колку што имало ламји во групата, заклучуваме дека секоја ламја има по x глави. Според тоа, сите ламји заедно имаат $x \cdot x$ ламји. Значи, $20 < x \cdot x < 35$. Сега, бидејќи

    $$4 \cdot 4 = 18 < 20,\ 6 \cdot 6 = 36 > 35 \text{ и } 20 < 5 \cdot 5 = 25 < 30$$

    заклучуваме дека во групата имало $x=5$ ламји.

83. Во едно семејство секој брат има толку браќа, колку што има и сестри, а секоја сестра има два пати повеќе браќа, отколку што има сестри. Колку деца има во тоа семејство?

Решение. Ако со x го означиме бројот на браќата, а со y бројот на сестрите во ова семејство, тогаш бидејќи секој брат има $x-1$ браќа и y сестри, добиваме $x-1=y$, т.е. $x=y+1$.
Понатаму, секоја сестра има $y-1$ сестра и x браќа, па затоа

$$x=2(y-1).$$

Според тоа,

$$y+1=2(y-1),$$
$$y+1=2y-2,$$
$$2y-y=1+2,$$
$$y=3.$$

Значи, во семејството има 3 сестри и $3+1=4$ браќа, односно $3+4=7$ деца.

84. Пакети со еднакви плочки се означени со броевите 1, 2, 3 итн. Во секој пакет има толку плочки колку што е бројот со кој пакетот е означен. Филип од пакетот означен со најголемиот број зел x плочки, по што во сите пакети вкупно останале 70 плочки. Колку плочки зел Филип?

Решение. Последователно имаме:

$$1=1,$$
$$1+2=3,$$
$$1+2+3=6,$$
$$1+2+3+4=10,$$
$$1+2+3+4+5=15,$$
$$1+2+3+4+5+6=21,$$
$$1+2+3+4+5+6+7=28,$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8=36,$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45,$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55,$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66,$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78,$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=91.$$

За да откако Филип ќе земе x плочки останат 70 плочки, од добиените збирови, заклучуваме дека мора да има најмалку 12 пакети. Понатаму, ако има 13 пакети, тогаш во нив ќе има 91 плочка, па како $91-13=78>70$ не е можно Филип од пакетот со најмногу плочки да земе определен број плочки и да останат вкупно 70 плочки. Значи, имало 12 пакети со вкупно 78 плочки, па како $78-70=8$ заклучуваме дека Филип зел 8 плочки.

III. ГЕОМЕТРИЈА

1. На долниот цртеж $\overline{AB}=\overline{CD}, \overline{AD}=56\,cm, \overline{AC}=32\,cm$. Колку пати должината на отсечката BC е помала од должината на отсечката AB?

Решение. Имаме,

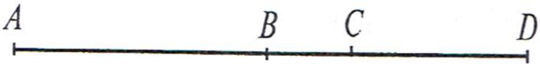
$$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{AC}=56-32=24\,cm.$$

Сега,

$$\overline{BC}=\overline{AD}-(\overline{AB}+\overline{CD})=56-(24+24)=56-48=8\,cm.$$

Според тоа, $\overline{AB}=24=3\cdot 8=6\overline{BC}$, што значи дека должината на отсечката BC е 3 пати помала од должината на отсечката AB.

2. Точките A, B, C, D се означени во овој редослед на една права, при што $\overline{AB}=3\,cm, \overline{BC}=1\,cm$ и $\overline{CD}=2\,cm$. Определи го збирот на сите отсечки чии крајни точки се две од овие четири точки.



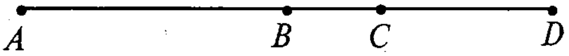
Решение. Имаме 6 отсечки чии крајни точки се дадените четири точки A, B, C, D и тоа:

$$\overline{AB}=3\,cm, \overline{BC}=1\,cm, \overline{CD}=2\,cm,$$
$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=3+1=4\,cm,$$
$$\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}=1+2=3\,cm,$$
$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=3+1+2=6\,cm.$$

Според тоа, збирот на сите отсечки чии крајни точки се две од дадените четири точки е:

$$3+1+2+4+3+6=19\,cm.$$

3. Точките A, B, C и D се распоредени као на цртежот десно. Должината на отсечката AD е $32\,cm$, а на отсечката BC е $6\,cm$. Колку сантиметри е должината на отсечката чии крајни точки се средините на отсечките AB и CD?

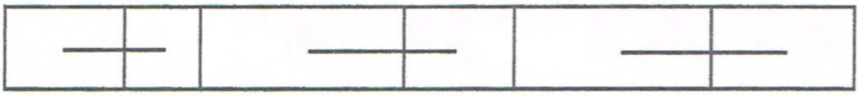


Решение. Должината на отсечката чии крајни точки се средините на отсечките AB и CD е еднаква на збирот на половина од должината на отсечката AB, должината на отсечката BC и половина од должината на отсечката CD. Понатаму, збирот на должините на отсечките AB и CD е еднаков на разликата на должините на отсечките AD и BC, што значи дека е еднаков на $32-6=26\,cm$. Значи, збирот на половина од должината на отсечката AB и половина од должината на отсечката CD е еднаков на $26:2=13\,cm$. Конечно, растојанието меѓу средините на отсечките AB и CD е еднакво на $13+6=19\,cm$.

4. Една лента AB е долга $21\,cm$. Михаил сака ленатата да ја пресече на $4\,cm$ од A. Но, тој згрешил и лентата ја пресекол на $4\,cm$ од B. На колку сантиметри од саканото место ја пресекол Михаил лентата?

Решение. Ако Михаил точно ја пресекол лентата, тогаш од саканото место за сечење до B ќе има $21-4=17\,cm$. Тој лентата ја пресекол на $4\,cm$ од B, па затоа од местото на кое Михаил ја пресекол лентата до местото на кое сакал да ја пресече лентата има $17-4=13\,cm$.

5. Должината на лентата на цртежот е еднаква на $7\,dm$. Таа е поделена на шест различни правоаголници. Центрите на правоаголниците се поврзани со отсечки како што е покажано на цртежот. Колку сантиметри е збирот на должините на овие отсечки?



Решение. Збирот на должините на шесте правоаголници е еднаков на должината на лентата, т.е. на $7\,dm = 70\,cm$. Должината на секоја од трите нацртани отсечки е еднаква на половина од збирот на должините на страните на двата правоаголници чии центри ги поврзува. Затоа збирот на должините на сите три отсечки е еднаков на половина од должината на лентата, т.е. е еднаков на $70:2 = 35\,cm$.

6. Горјан нацртал 3 триаголника, 4 квадрати и 5 правоаголника, кои меѓу себе не се сечат. Колку агли нацртал Горја?

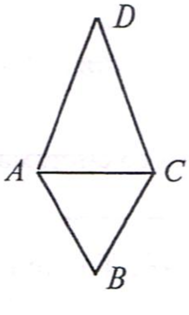
   Решение. Триаголникот има 3 агли, а квадратот и правоаголникот имаат по 4 агли. Значи, Горјан нацртал

   $$3\cdot3+4\cdot4+5\cdot4=9+16+20=45 \text{ агли.}$$

7. Рамностран триаголник и квадрат имаат еднакви периметри по $24\,cm$. За колку сантиметри страната на триаголникот е подолга од страната на квадратот?

   Решение. Страната на триаголникот е еднаква на $24:3=8\,cm$, а страната на квадратот е еднаква на $24:4=6\,cm$. Значи, страната на триаголникот од страната на квадратот е поголема за $8-6=2\,cm$.

8. Четириаголникот $ABCD$ е поделен со својата дијагонала AC на рамностран триаголник ABC и рамнокрак триаголник ACD со основа AC. Периметарот на четириаголникот $ABCD$ е еднаков на $66\,cm$, а периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $39\,cm$. Определи ја должината на кракот на триаголникот ACD.



   Решение. Триаголникот ABC е рамностран со периметар $39\,cm$, па затоа должината на неговата страна е $a=39:3=13\,cm$. Ако b е должината на кракот на рамнокракиот триаголник ACD, тогаш за периметарот на четириаголникот $ABCD$ добиваме

$$\begin{aligned}&2a+2b=66,\\&2\cdot13+2b=66,\\&26+2b=66,\\&2b=66-26,\\&2b=40,\\&b=40:2\\&b=20\,cm.\end{aligned}$$

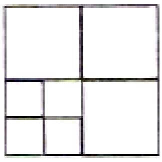
9. Должината на страната на еден квадрат е изразена со цел број сантиметри. Периметарот на квадратот, изразен во сантиметри, е најголемиот можен двоцифрен број. Определи ја страната на овој квадрат?

Решение. Од

$$\begin{aligned}&99=4\cdot24+3,\\&98=4\cdot24+2,\\&97=4\cdot24+1,\\&96=4\cdot24,\end{aligned}$$

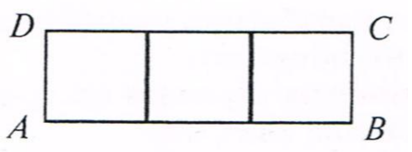
следува дека периметарот на квадратот е еднаков на $96\,cm$, а неговата страна е еднаква на $24\,cm$.

10. На цртежот десно е прикажана фигура која е добиена така што квадрат е поделен на четири квадрат, а потоа еден од добиените квадрати е поделен на четири квадрати. Колку пати периметарот на големиот квадрат е поголем од шпериметарот на најмалиот квадрат?



Решение. Нека должината на страната на најмалиот квадрат е x. Тогаш должината на страната на средниот квадрат е $2x$, а должината на страната на големиот квадрат е $2\cdot2x=4x$. Според тоа периметарот на најмалиот квадрат е $L=4x$, а периметарот на големиот квадрат е $L' = 4\cdot 4x = 4L$. Значи, периметарот на големиот квадрат е четири пати поголем од периметарот на најмалиот квадрат.

11. Правоаголникот $ABCD$ на цртежот десно е составен од три квадратчиња. Збирот на периметрите на сите правоаголници прикажани на цртежот е еднаков на $192\,cm$. Определи ја должината на страната на едно од квадратчињата. (Квадратот исто така е правоаголник.)

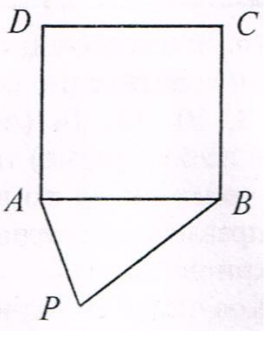


Решение. Нека должината на страната на едно од квадратчињата е a. На цртежот имаме три квадратчиња, секое со периметар $4a$, два правоаголници составени од по две квадратчиња кои се со периметар $2(a+2a)=6a$ и еден правоаголник составен од три квадратчиња кој е со периметар $2(a+3a)=8a$. Според тоа, збирот на периметрите на сите правоаголници е:

$$3\cdot 4a + 2\cdot 6a + 8a = 192,$$

од каде добиваме $32a = 192$, т.е. $a = 6\,cm$.

12. На цртежот десно должината на страната на квадратот $ABCD$ е $9\,cm$, а периметарот на триаголникот ABP е еднаков на $24\,cm$. Определи го периметарот на петаголникот $APBCD$.



Решение. Периметарот на триаголникот ABP е $24\,cm$, а $\overline{AB} = 9\,cm$, па затоа

$$\overline{AP} + \overline{PB} = 24 - \overline{AB} = 14 - 9 = 15\,cm.$$

Сега, за периметарот на петаголникот $APBCD$ добиваме

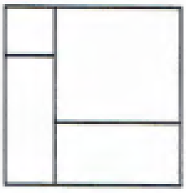
$$L = 3\overline{AB} + \overline{AP} + \overline{PB} = 3\cdot 9 + 15 = 27 + 15 = 42\,cm.$$

13. Должината на едната страна на правоаголникот е $3\,cm$, а другата страна е два пати подолга. Периметарот на рамностран триа-

голник е за $12\,cm$ помал од периметарот на правоаголникот. Определи ја должината на страната на рамностраниот триаголник.

Решение. Должината на втората страна на правоаголникот е $2\cdot 3=6\,cm$. Значи, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2\cdot(6+3)=2\cdot 9=18\,cm$. Според тоа, периметарот на рамностраниот триаголник е $18-12=6\,cm$, па затоа должината на неговата страна е $6:3=2\,cm$.

14. Квадратот прикажан на цртежот десно е поделен на четири правоаголници. Збирот на периметрите на овие правоаголници е еднаков на $100\,cm$. Колку дециметри е периметарот на квадратот?



Решение. Нека должината на страната на квадратот е a. Тогаш неговиот периметар е $L'=4a$. Во збирот на периметрите на делбените правоаголници учествуваат страните на квадратот и по два пати секоја од делбените отсечка (еднаш за левиот и еднаш за десниот правоаголник, односно, еднаш за долниот и еднаш за горниот правоаголник). Но, збирот на хоризонталните делбени отсечки е еднаков на должината на страната на квадратот, а исто така и збирот на вертикалните делбени отсечки е еднаков на должината на страната на квадратот. Според тоа, збирот на периметрите на делбените правоаголници е

$$L=4a+2(a+a)=4a+2\cdot 2a=4a+4a=2L'.$$

Оттука следува дека

$$L'=L:2=100:2=50\,cm=5\,dm.$$

15. Горјан нацртал 10 квадрати и рамнострани триаголници со должини на страни $1cm$. Вкупниот број на темињата на квадратите бил за 19 поголем од вкупниот број на темињата на триаголниците. Колкав е збирот на периметрите на сите фигури кои ги нацртал Горјан?

Решение. Со x да го означиме бројот на квадратите кои ги нацртал Горјан. Тогаш тој нацртал $10-x$ рамнострани триаголници. Квадратот има 4 темиња, а рамностраниот триаголник има 3 темиња, па затоа

$$4x = 3(10 - x) + 19,$$

од каде последователно добиваме

$$\begin{aligned} &4x = 30 - 3x + 19, \\ &4x + 3x = 49, \\ &7x = 49, \\ &x = 49 : 7 = 7. \end{aligned}$$

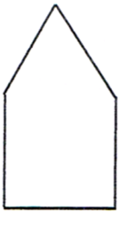
Според тоа, Горјан нацртал 7 квадрати и $10 - 7 = 3$ триаголници. Конечно, збирот на периметрите на сите фигури кои ги нацртал Горјан е еднаков на

$$7 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 1 = 28 + 9 = 37\,cm.$$

16. На страните на квадратен плоштад на секои 2 метра се поставени столбчиња, вклучувајќи ги и темињата на плоштадот. На секоја страна се поставени по 21 столбче. Определи го периметарот на овој плоштад.

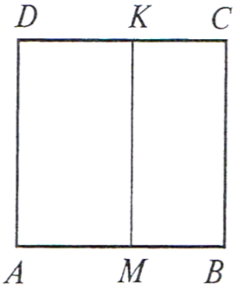
Решение. Меѓу првото и дваесет и првото столбче на една страна има $21 - 1 = 20$ растојанија од по $2\,m$. Според тоа, должината на страната на плоштадот е еднаква на $2 \cdot 20 = 40\,m$, а неговиот периметар е $L = 4 \cdot 40 = 160\,m$.

17. Фигурата на цртежот десно е составена од залепени квадрат и рамностран триаголник. На секоја нејзина страна се означени по 5 точки, при што во секое теме на фигурата има по една точка. Растојанието меѓу било кои две соседни означени точки е $3\,cm$. Определи го периметарот на оваа фигура.



Решение. Јасно сите страни на фигурата имаат еднаква должина. Бидејќи на секоја страна се означени по пет точки кои се на еднакви растојанија од $3\,cm$, секоја страна е поделена на 4 отсечки со должина $3\,cm$. Според тоа, должината на секоја страна на фигурата е еднаква на $4 \cdot = 12\,cm$. Конечно, за периметарот на дадената фигура добиваме $L = 5\cdot 12 = 60\,cm$.

18. На цртежот десно се прикажани квадратот $ABCD$ и правоаголниците $AMKD$ и $MBCK$. Периметарот на квадратот $ABCD$ е $64\,cm$, а периметарот на правоаголникот $MBCK$ е $46\,cm$. Определи го периметарот на правоаголникот $AMKD$.



Решение. *Прв начин*. Должината на страната на квадратот $ABCD$ е $a = 64:4 = 16\,cm$. Според тоа, должината на пократката страна на правоаголникот $MBCK$ е

$$b = (46-2a):2 = (46-2\cdot 16):2 = 14:2 = 7\,cm.$$

Понатаму, должината на пократката страна на правоаголникот $AMKD$ е $c = 16-7 = 9\,cm$, па затоа неговиот периметар е

$$L = 2(a+c) = 2\cdot(16+9) = 2\cdot 25 = 50\,cm.$$

Втор начин. Нека должината на страната на квадратот е a, а должините на помалите страни на правоаголниците $AMKD$ и $MBCK$ се c и b. Тогаш $b+c=a$, па затоа

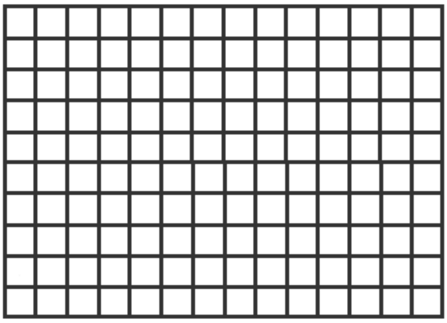
$$\begin{aligned} L_{AMKD} + L_{MBKC} &= 2(a+c)+2(a+b) \\ &= 4a+2(b+c) \\ &= 4a+2a \\ &= L_{ABCD} + L_{ABCD}:2 \end{aligned}$$

од каде добиваме

$$L_{AMKD} + 46 = 64 + 64:2, \text{ т.е. } L_{AMKD} = 64+32-46 = 50\,cm.$$

19. Правоаголник со должини на страни $7\,cm$ и $5\,cm$ е поделен на еднакви квадратчиња со должини на страна $5\,mm$. Добиените квадратчиња се наредени едно до друго така што формираат правоаголник со ширина $5\,mm$. Колку дециметри е должината на овој правоаголник?

Решение. Бидејќи



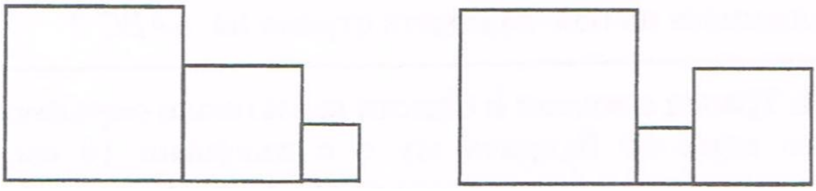
$7\,cm = 70\,mm = 14\cdot 5\,mm$ и

$5\,cm = 50\,mm = 10\cdot 5\,mm$,

при поделбата на подолгата страна се добиени 14 отсечки со страна $5\,mm$, а на пократката се добиени 10 отсечки со страна $5\,mm$. Тоа значи дека при поделбата се добиени $10\cdot 14 = 140$ квадрати со страна $5\,mm$, (цртеж горе). Значи, должината на страната на новиот правоаголник е еднаква на

$$140\cdot 5 = 700\,mm = 70\,cm = 7\,dm.$$

20. Двете фигури прикажани на долните цртежи се составени од по три по парови еднакви квадрати. Разликата на должините на најмалиот и средниот квадрат е енаква на $5\,cm$. Определи ја разликата на периметрите на двете фигури.



Решение. Нека должините на страните на најголемиот, средниот и најмалиот квадрат се a, b и c, соодветно. Тогаш периметарот на левата фигура е

$$L = (a+b+c)+(a+b+c)+a+(a-b)+(b-c)+c = 4a+2b+2c,$$

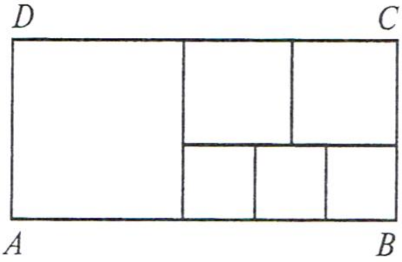
а периметарот на десната фигура е

$$L' = (a+c+b)+(a+c+b)+a+(a-c)+(b-c)+b = 4a+4b.$$

Според тоа, разликата на периметрите на двете фигури е

$$\begin{aligned} L'-L &= 4a+4b-(4a+2b+2c) \\ &= 4a+4b-4a-2b-2c \\ &= 2(b-c) \\ &= 2\cdot 5 \\ &= 10\,cm. \end{aligned}$$

21. Правоаголникот $ABCD$, цртеж десно, е поделен на шест квадрати. Ако $\overline{AD}=10\,cm$, определи го периметарот на правоаголникот $ABCD$.



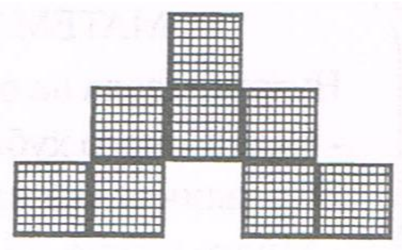
Решение. Нека $2a$ должината на страната на најмалите квадрати на кои е поделен правоаголникот $ABCD$. Тогаш за должината b на страната на средниот по големина делбен квадрат добиваме $2b=3\cdot 2a$, т.е. $2b=6a$, од каде следува $b=6a:2=3a$. Сега $\overline{AD}=b+2a=3a+2a=5a$, па затоа $5a=10$, од каде добиваме $a=10:5=2\,cm$. Според тоа,

$$\overline{AB}=\overline{AD}+3\cdot 2a=10+3\cdot 2\cdot 2=22\,cm,$$

па затоа периметарот на правоаголникот $ABCD$ е

$$L=2(\overline{AB}+\overline{AD})=2\cdot(22+10)=2\cdot 32=64\,cm.$$

22. Штрафираната фигура прикажана на цртежот десно е составена од еднакви мали квадратчиња. Секое од тие квадратчиња има периметар $12\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на оваа фигура.



Решение. Должината на страната на квадратчињата од кои е составена фигурата е еднаква на $12:4=3\,cm$.

Затоа плоштината на едно квадратче е еднаква на $3\cdot 3=9\,cm^2$. Фигурата е составена од 8 мали квадратчиња, што значи дека нејзината плоштина е $P=8\cdot 9=72\,cm^2$.

Периметарот на дадената фигура го формираат $5+5=10$ хоризонтални и $3+2+3=8$ вертикални отсечки со должина $3\,cm$. Според периметарот на дадената фигура е $L=18\cdot 3=54\,cm$.

23. Фигурата прикажана на долниот цртеж е составена од 20 осумаголници, наредени во ред. Секоја страна на сите осумаголници има должина $1\,cm$. Определи го периметарот на оваа фигура.

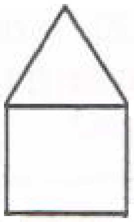
Решение. Во периметарот на фигурата првиот и последниот осумаголник учествуваат со 7 страни, а останатите 18 многуаголници со по 6 страни. Според тоа, периметарот на дадената фигура е

$$L = 2\cdot 7 + 18\cdot 6 = 14 + 108 = 122\,cm$$

24. Периметарот на еден квадрат е еднаков на $36\,cm$. Определи ја неговата плоштина.

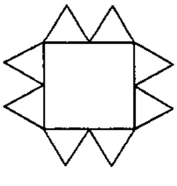
Решение. Бидејќи периметарот на квадратот е составен од 4 страни со еднакви должини, добиваме дека должинта на страната на квадратот е $a = 36:4 = 9\,cm$. Според тоа, плоштината на овој квадрат е $P = a\cdot a = 9\cdot 9 = 81\,cm^2$.

25. Од квадрат и рамностран триаголник со страна еднаква на страната на квадратот Филип направил „куќичка“ со периметар $45\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.



Решение. Периметарот на куќичката се состои од три страни на квадратот и две страни на рамностраниот триаголник, што значи од 5 отсечки со еднаква должина. Сега, бидејќи периметарот е еднаков на $45\,cm$, задклучуваме дека должината на страната на квадратот е $45:5 = 9\,cm$. Конечно, плоштината на квадратот е $9\cdot 9 = 81\,cm^2$.

26. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од квадрат и еднакви рамнострани триаголници. Периметарот на оваа фигура е еднаков на $80\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината

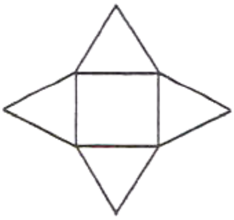


на квадратот?

Решение. *Прв начин.* Над секоја страна на квадратот имаме по два еднакви рамнострани триаголника, што значи дека во периметарот на фигурата над секоја страна учествуваат по 4 страни на рамностраните триаголници. Значи, периметарот на фигурата се состои од $4\cdot 4=16$ страни на рамностраните триаголници, па затоа должината на страната на рамностраните триаголници е еднаква на $80:16=5\,cm$. Сега, должината на страната на квадратот е еднаква на $2\cdot 5=10\,cm$, па затоа неговиот периметар е $L=4\cdot 10=40\,cm$, а неговата плоштина е $P=10\cdot 10=100\,cm^2$.

Втор начин. Должината на секоја страна на квадратот е еднаква на збирот на должините на две страни на рамностраните триаголници, а над секоја страна на квадратот во периметарот на фигурата учествуваат по 4 страни на рамностраните триаголници. Затоа периметарот на квадратот е $4:2=2$ пати помал од периметарот на фигурата, т.е. $L=80:2=40\,cm$. Според тоа, должината на страната на квадратот е $40:4=10\,cm$ и неговата плоштина е $P=10\cdot 10=100\,cm^2$.

27. Над секоја страна на даден квадрат, надвор од него, е нацртан рамностран триаголник (види цртеж десно). Периметарот на добиената фигура е еднаков на $72\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на почетниот квадрат.



Решение. *Прв начин.* Нека должината на страната на квадратот е a. Тогаш периметарот на добиената фигура е $L=8a$, па затоа $8a=72$, т.е. $a=9\,cm$. Според тоа, периметарот на почетниот квадрат е

$$L'=4a=4\cdot 9=36\,cm,$$

а неговата плоштина е

$$P=a\cdot a=9\cdot 9=81\,cm^2.$$

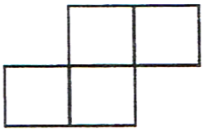
Втор начин. Добиената фигура има двапати поголем периметар од квадратот, бидејќи над секоја страна на квадратот се нацртани две отсечки кои имаат иста должина како и страната на квадратот. Значи, периметарот на квадратот е

$$L' = 72 : 2 = 36\,cm^2.$$

Сега, должината на страната на квадратот е $a = 36 : 4 = 9\,cm$, па неговата плоштина е

$$P = a \cdot a = 9 \cdot 9 = 81\,cm^2.$$

28. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од четири еднакви квадратчиња. Нејзиниот периметар е $60\,cm$. Определи ја нејзината плоштина.



Решение. Нека должината на страната на секое од четирите квадратчиња е a. Тогаш периметарот на дадената фигура е $L = 10a$, па затоа $10a = 60$, односно $a = 6\,cm$. Конечно, плоштината на дадената фигура е

$$P = 4a \cdot a = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144\,cm^2.$$

29. Едната страна на правоаголник со плоштина $50\,cm^2$ е два пати подолга од другата негова страна. Определи го периметарот на овој правоаголник.

Решение. Нека должината на пократката страна на правоаголникот е a. Тогаш подолгата негова страна е $2a$ и плоштината на правоаголникот е $P = 2a \cdot a$. Според тоа, $2a \cdot a = 50$, од каде добиваме дека $a \cdot a = 25$, па затоа $a = 5\,cm$. Серга, периметарот на правоаголникот е

$$L = 2(a + 2a) = 2 \cdot 3a = 6a = 6 \cdot 5 = 30\,cm.$$

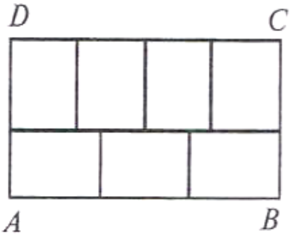
30. Андреј нацртал квадрат чија плоштина е цел број квадратни сантиметри и е поголема од $30\,cm^2$, а е помала од $40\,cm^2$. Определи го периметарот на квадраток кој што го нацртал Андреј.

Решение. Бидејќи

$$5\cdot 5=25<30<6\cdot 6=36<40<49=7\cdot 7,$$

заклучуваме дека должината на страната на квадратот кој што го нацртал Андреј е $a=6\,cm$. Според тоа, периметарот на квадратот е $L=4a=4\cdot 6=24\,cm$.

31. Правоаголникот $ABCD$ прикажан на цртежот десно е составен од седум еднакви правоаголници. Ако $\overline{AB}=24\,cm$, определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$.



Решение. Нека x и y се соодветно должините на подолгата и пократката страна на еден од седумте еднакви помали правоаголници. Тогаш $3x=24$ и $4x=24$, од каде добиваме $x=8\,cm$ и $y=6\,cm$.

Според тоа, плоштината на правоаголникот $ABCD$ е

$$P=7xy=7\cdot 8\cdot 6=336\,cm^2.$$

Сега, $\overline{BC}=8+6=14\,cm$, па затоа периметарот на правоаголникот $ABCD$ е

$$L=2(\overline{AB}+\overline{BC})=2\cdot(24+14)=76\,cm.$$

32. Даден е правоаголник со должини на страни $9\,cm$ и $1\,cm$. Плоштината на еден квадрат е поголема од плоштината на овој правоаголник, а периметарот на квадратот е помал од периметарот на правоаголникот. Колкава е должината на страната на квадратот, ако таа е изразена со цел број сантиметри?

Решение. Плоштината на правоаголникот е $9\cdot 1=9\,cm^2$, а неговиот периметар е $2\cdot(9+1)=20\,cm$. Нека a е должината на страната на квадратот. Тогаш периметарот на квадратот е $L=4a$, а неговата плоштина е $P=a\cdot a$. Според условот на задачата треба да важи

$$4a<20 \text{ и } a\cdot a>9. \qquad (1)$$

Сега, бидејќи $4\cdot 5=20$, $3\cdot 3=9$ и $9<4\cdot 4<20$, добиваме дека единствен број кој ги задоволува неравенствата (1) е 4, што значи дека должината на страната на квадратот е $a=4\,cm$.

33. Од 7 квадрати со должина на страна $1\,cm$ и еден квадрат со поголема должина на страна е составен нов квадрат. Определи ја плоштината на новиот квадрат?

Решение. Јасно, поголемиот квадрат мора да е во едното теме на новиот квадрат, па потоа седумте мали квадрати треба да се распоредат околу неговите страни така што ќе се добие квадрат. Бидејќи $7=2\cdot 3+1$, заклучуваме дека 3 мали квадрати треба да се постават вертикално на страна на големиот квадрат, 3 мали квадрати хоризонтално на страна на големиот квадрат и со преостанатото квадратче да го формираме аголот на новиот квадрат (цртеж десно). Според тоа, должината на страната на новиот квадрат е $4\,cm$ и неговата плоштина е $P=4\cdot 4=16\,cm^2$.

IV. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. На еден натпревар учествувале 7 ученици. Секое дете освоило барем по еден поен и немало деца со еднаков број поени. Горјан бил најдобар на натпреварот. Сите деца вкупно освоиле 30 поени. Кој е најголемиот број поени што можел да го освои Горјан?

   Решение. Горјан ќе освои најмногу поени, ако секое од преостанатите шест деца освои најмал можен број поени. Бидејќи немало две деца што освоиле еднаков број поени, тие освоиле 1, 2, 3, 4, 5 и 6 поени во некој редослед. Според тоа, најмалиот број поени што може да го освоиле преостанати шест деца е

   $$1+2+3+4+5+6=21,$$

   па затоа најголемиот број поени што можел да го озвои Горјан е $30-21=9$.

2. На еден натпревар уествувале 5 ученици. Секој ученик освоил непарен број поени и немало два ученика кои освоиле еднаков број поени. Горјан победил на натпреварот. Кој е најмалиот број поени кои можел да ги освои Горјан?

   Решение. Најмалиот број поени кои можел да ги освои Горјан се добива ако секое од петте деца освојува најмал можен непарен број различни поени. Според тоа, петте деца во некој редослед освоиле 1, 3, 5, 7 и 9 поени. Горјан победил на натпреварот, што значи дека тој освоил најмногу поени, т.е. тој освоил 9 поени и тоа е најмалиот можен број поени кои можел да ги освои Горјан.

3. Горјан, Пабло и Андреј вкупно изеле 28 бомбони. Горјан изел повеќе бомбони и од Пабло и од Андреј. Кој е најмалиот број бомбони што можел да ги изеде Горјан?

Решение. Горјан ќе изеде најмалку бомбони, кога Пабло и Андреј истовремено, секој од нив, јаде најголем можен број бомбони. Бидејќи $28=3\cdot 9+1$, последното е случај кога Пабло и Андреј јадат по 9 бомбони и тогаш Горјан јаде $28-(9+9)=10$ бомбони.

Не е можно Горјан да изеде 9 бомбони, бидејќи тогаш Пабло и Андреј може да изедат најмногу $8+8=16$ бомбони, а бројот на бомбоните кои не се изедени од Горјан е $28-9=19>16$.

4. Во текот на една седмица Филип бил оценет по неколку предмети. Сите оценки кои ги добил биле тројки, четворки и петки, а збирот на добиените оценки бил 19. Кои оценки ги добил Филип?

Решение. Оценките кои ги добил Филип биле тројки, четворки и петки, што значи дека тој добил барем по една од сите три оценки. Последното значи дека збирот на другите оценки бил еднаков на $19-(3+4+5)=19-12=7$. Но, бројот 7 како збир на собирци кои се поголеми или еднакви на 3 може да се запише на единствен начин и тоа како $3+4=7$. Според тоа, оценките кои ги добил Филип се 3, 3, 4, 4 и 5.

5. Во одделението на Пабло има 27 ученици и тие во дневникот се запишани со редни броеви од 1 до 27. Колку ученици најмалку треба да има во училницата за со сигурност да се каже дека збирот на редните броеви на некои два ученика е еднаков на 28?

Решение. Редните броеви на учениците да ги поделиме на парови чиј збир е 28 и бројот 14. Добиваме 14 и

$$(1,27),(2,26),(3,25),(4,24),(5,23),(6,22),(7,21),$$
$$(8,20),(9,19),(10,18),(11,17),(12,16),(13,15).$$

Според тоа, имаме тринаесет парови и бројот 14. Јасно, ако од секој пар земеме по еден број и го земеме бројот 14, добиваме 14 броја за кои збирот на било кои два е различен од 28. Но, ако земеме 15 броја, тогаш мора да има два броја кои припаѓаат на ист пар и нивниот збир е 28. Конечно, во училницата треба да влезат најмалку 15 ученици и тогаш со сигурност збирот на редните броеви на некои два ученика ќе биде 28.

6. Околу тркалезна маса се наредени столици. Андреј и Пабло решиле да ги пребројат. Тие започнале од различни места, но и двајцата броеле во иста насока. Притоа осмата столица за Андреј е шеснаесетта за Пабло, а петнаесеттата за Андреј е петта за Пабло. Колку столици имало околу масата?

   Решение. Бидејќи осмата столица за Андреј е шеснаесетта за Пабло, Пабло почнал да брои осум столици пред Андреј. Сега, ако Пабло изброи 5 столици, тој ќе биде три столици пред Андреј, кој броејќи до тоа место ќе изброи 15 столици. Затоа вкупниот број на столици е еднаков на $3+15=18$.

7. Златарот Сребренко има шест исти сефови. Едно утро тој ги измешал клучевите на сефовите кои требало да ги отвори. Со колку најмалку проби Сребренко со сигурност ќе определи кој клуч на кој сеф му припаѓа?

   Решение. Ако Сребренко го земе првиот клуч, тогаш по 5 проби тој со сигурност ќе знае на кој сеф му припаѓа клучот. Сега му преостануваат 5 клуча за 5 сефа. Ако го земе вториот клуч, тогаш по 4 проби Сребренко со сигурност ќе знае на кој сеф му припаѓа. На ист начи за третиот клуч на Сребренко му се потребни 3 проби, за четвртиот клуч му се потребни 2 проби и на крајот со 1 проба ќе определи на кој сеф му припаѓа секој од преостанатите два клуча.

   Конечно, Сребренко со $5+4+3+2+1=15$ проби со сигурност ќе определи кој клуч на кој сеф му припаѓа.

8. Во една колона застанале 16 момчиња. Меѓу секои две момчиња застанало по едно девојче. Колку деца има сега во колоната?

   Решение. Меѓу 16 момчиња кои застанале едно по друго има $16-1=15$ места на кои може да застане по едно девојче. Според тоа, во колоната сега има $16+15=31$ дете.

9. Во списокот за на екскурзија пред мене се запишале 6 деца, а по

мене има 34 деца повеќе. Колку деца се запишани во тој список?

Решение. Ако пред мене има 6 деца, а по мене има 34 деца повеќе, тогаш по мене има $6+34=40$ деца. Според тоа, на списокот се запишани $6+1+40=47$ деца.

10. Филип учествувал на крос. Тој бил побрз само од натпреварувачите кои биле пласирани по шестото место. Зад него се пласирале два пати повеќе тркачи отколку пред него. Колку натпреварувачи учествувале на овој кроз?

    Решение. Бидејќи Филип бил побрз само од натпреварувачите кои се пласирале по шестото место, тој бил шести. Според тоа, пред него се пласирале 5 натпреварувачи, а зад него $2\cdot 5=10$ натпреварувачи.

    Конечно, на натпреварот учествувале $5+1+10=16$ натпреварувачи.

11. Учениците од едно одделение се построени во колона по двајца. Иван и Иванка се седми однапред-наназад, а Виктор и Викторија се шести одназад-нанапред, но се пред Иван и Иванка. Меѓу овие два пара има уште еден пар деца. Колку деца имало во тоа одделение?

    Решение. Бидејќи Виктор и Викторија се пред Иван и Иванка, меѓу двата пара има само еден пар деца и Иван и Иванка се седми гледајќи однапред-наназад, заклучуваме дека Виктор и Викторија гледајќи однапред наназад се петти по ред. Но, тие гледајќи одназад-нанапред се шести по ред, што значи дека зад нив има уште пет пара деца. Тоа значи, дека во одделението вкупно има $5+5=10$ пара деца, односно $20\cdot 2=20$ ученици.

12. Децата во одделението на Пабло се построени во колона од по три ученици. Пабло пресметал дека е во шестата тројка од почетокот на колоната и во четвртата тројка од крајот на колоната. Колку ученици има во одделението на Пабло?

    Решение. Пабло е во шестата тројка од почетокот на колоната, што значи дека пред него има пет тројки. Но, тој е во четвртата тројка од крајот на колоната, па затоа зад него има три тројки. Значи, во колоната заедно со тројката во која е Пабло има $5+1+3=9$ тројки, односно $9\cdot 3=27$ ученици.

13. Горјан, Пабло, Андреј и Филип заедно имаат 100 џамлии, при што секој има барем една џамлија. Горјан има повеќе џамлии од секој од останатите тројца. Пабло и Андреј заедно имаат 65 џамлии. Колку џамлии има Филип?

    Решение. Нека Горјан има x џамлии. Бидејќи Горјан има повеќе џамлии од секое од другите три деца, а Пабло и Андреј заедно имаат 65 џамлии, добиваме дека удвоениот број на џамлиите на Горјан е поголем од 65, што значи дека $2x>65$. Сега, бидејќи $2\cdot 32=64<65$ и $2\cdot 33=66>65$, заклучуваме дека Горјан има најмалку 33 џамлии. Ако Горјан има 33 џамлии, тогаш бидејќи $65=32+33$, тој ќе има еднаков број џамлии со Андреј или со Пабло, што не е можно, бидејќи тој има повеќе џамлии од секое од другите три деца. Значи, Горјан има најмалку 34 џамлии.

    Понатаму, сите заедно имаат 100 џамлии, и секој има барем една џамлија, па бидејќи Горјан има x џамлии, а Пабло и Андреј заедно имаат 65 џамлии, добиваме дека $x+65<100$, од каде следува дека Горјан има помалку од 35 џамлии. Значи,, Горјан има најмалку 34 и помалку од 35 џамлии, па затоа тој има 34 џамлии. Конечно, Филип има $100-(34+65)=100-99=1$ џамлија.

14. Во секој „збор“ во еден чекор можеме да ги замениме местата на било кои две соседни букви. Со колку најмалку чекори од „зборот“ ФЕНОТИП можеме да стигнеме до „збор“, во кој сите согласки ќе бидат една до друга?

    Решение. Најмалиот број чекори се добива ако буквите ги менуваат местата така што согласките се преместат во средината на „зборот“. Тоа може, на пример, последователно да се направи на следниов начин:

    ЕФНОТИП,
    ЕФНОТПИ,

ЕФОНТПИ,
ЕОФНТПИ.

Според тоа, за да се постигне целта потребни се најмалку 4 чекори.

15. Од почетокот на 2023 година секој ден Елена го запишувала збирот на броевите, кои го покажуваат денот, месецот и годината на соодветната дата. Колку различни збира добила Елена до 21.12.2024 година?

Решение. За секој месец во секоја од двете години ќе го определиме најголемиот и најмалиот збир, при што треба да имаме предвид дека секој број меѓу овие два броја може да се добие и дека 2024 е престапна година, т.е. месецот февруари има 29 дена. Исто така треба да имаме предвид дека во 2024 година Елена ги собирала броевите до 21.12. Имаме:

Месец	2023		2024	
	Најмал	Најголем	Најмал	Најголем
Јануари	2025	2055	2026	2056
Февруари	2026	2053	2027	2055
Март	2027	2057	2028	2058
Април	2028	2057	2029	2058
Мај	2029	2059	2030	2060
Јуни	2030	2059	2031	2060
Јули	2031	2061	2032	2062
Август	2032	2062	2033	2063
Септември	2033	2062	2034	2063
Октомври	2034	2064	2035	2065
Ноември	2035	2064	2036	2065
Декември	2036	2066	2037	2057

Значи во разгледуваниот период најмалиот збир кој го добила Елена е 2025, а најголемиот збир е 2066. Конечно, таа добила точно $2066-2024=42$ различни збирови.

16. На колку начини може да се плати тетратка која чини 30 денари со монети од 2 денари, 5 денари и 10 денари, ако не е задолжително да се искористат сите три вида монети?

Решение. Сите видови плаќања на сума од 30 денари со монети од 2, 5 и 10 денари се дадени во следнава табела.

10 денари	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
5 денари	0	2	0	4	2	0	6	4	2	0
2 денари	0	0	5	0	5	10	0	5	10	15

Според тоа, имаме вкупно 10 можни начини да се плати сумата од 30 денари со монети од 2, 5 и 10 денари.

17. Триесет и три топки се распоредени во четири кутии, така што во секоја кутија има различен број топки. Нека n е бројот на топките во кутијата, која содржи најмалку топки. Која е најголемата можна вредност на n?

Решение. Бројот n не може да е еднаков на 7. Имено, бројот на топките во кутиите е различен, па затоа во другите три кутии мора да има најмалку $8+9+10=27$ топки, што значи дека бројот на топките ќе биде поголем или еднаков на $7+27=34>33$.

Ако $n=6$, тогаш во другите три кутии може да има 8, 9 и 10 топки, во некој распоред, па така во четири кутии ќе распоредиме $6+8+9+10=33$ топки, при што во секоја кутија има различен број топки.

Забелешка. Бројот n е најголем ако разликите на бројот на топките во кутии се најмали, а тоа е во случај ако бројот на топките може да се четири последователни броеви. Во случајот тоа треба да се броевите $n, n+1, n+2$ и $n+3$ и притоа треба да важи

$$n+n+1+n+2+n+3\leq 33,$$

што значи $4n+6\leq 33$. Јасно, во случајот најголемата вредност за n е 6. Притоа важи $4n+6=30$, па имаме $33-30=3$ топки кои треба да ги распоредиме во кутиите со 7, 8 и 9 топки, но така што во секоја кутија да има различен број топки. Еден од можните распореди е 8, 9 и 10. Обиди се да најдеш уште два такви распореди.

18. Дисплејот на електронскиот часовник покажува $ab:cb$ каде ab е часот во денонoќието, а cd се минутите во тој час. Колку пати во текот на едно денонoќие на дисплејот на часовникот истовремено ќе се појават цифрите 2, 0, 0 и 8.

Решение. На дисплејот на часовникот истовремено ќе се појават цифрите 2, 0, 0 и 8 во:

00:28, 02:08, 08:02, 08:20 и 20:08

часот. Според тоа, во текот на едно денонoќие на дисплејот на часовникот цифрите 2, 0, 0 и 8 истовремено ќе се појават 5 пати.

19. Часовникот на Филип покажува 20:15 (дваесет часот и 15 минути). Колку пати во текот на едно денонoќие на дисплејот на часовникот истовремено во некаков редослед ќе се видат цифрите 0, 1, 2 и 5?

Решение. На дисплејот на часовникот истовремено ќе се појават цифрите 0, 1, 2 и 5 во:

01:25, 01:52, 02:15, 02:51, 05:12, 05:21, 10:25, 10:52,
12:05, 12:50, 15:02, 15:20, 20:15, 20:51, 21:05, 21:50,

што значи 16 пати.

20. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

Решение. Бидејќи

$$4=4+0+0=3+1+0=2+2+0=2+1+1$$

и нулата не може да биде прва цифра од лево, добиваме дека трицифрени броеви чиј збир на цифри е 4 се:

400, 310, 301, 130, 103, 220, 202, 211, 121, 112.

Според тоа, има 10 трицифрени броеви чиј збир на цифри е 4.

21. Пабло многу ја сака цифрата 1, па затоа ги запишал сите непарни двоцифрени броеви кои ја содржат оваа цифра. Колку пати Пабло ја употребил цифрата 1?

Решение. Пабло ги запишал броевите 11, 13, 15, 17, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 и 91. Притоа тој цифрата 1 ја употребил 14 пати.

22. Андреј истовремено фрла три коцки за играње (на страните на секоја коцка се запишани сите броеви од 1 до 6, по еден број на секоја страна). При секое фрлање Андреј го пресметува збирот на паднатите броеви. Колку различни резултати може да добие Андреј?

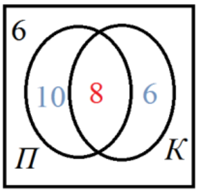
Решение. Најмалиот збир се добива ако на секоја од трите коцки падне бројот 1, а најголемиот збир се добива ако на секоја од трите коцки падне бројот 6. Значи, најмалиот збир е $1+1+1=3$, а најголемиот збир е $6+6+6=18$. Според тоа, Андреј може да ги добие збировите 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18, што значи дека може да добие 16 различни збирови.

Обиди се да најдеш барем по една комбинација на броеви која го дава секој од горните збирови.

23. Во едно одделение има 30 ученици. Од нив 18 ученици тренираат пливање, а 14 ученици тренираат кошарка. Ако е познато дека 6 ученици не тренираат ниру еден од двата спорта, определи колку ученици ги тренират само пливање, а колку само кошарка.

Решение. Во одделението има 30 ученици, а 6 не тренираат ниту еден од двата спорта. Значи, $30-6=24$ ученици тренираат барем еден спорт. Но, $18+14=32$, што значи дека двата спорта ги тренираат $32-24=8$ ученици. Конечно, само пливање тренираат $18-8=10$, а само кошарка тренираат $14-8=6$ ученици.

Забелешка. Задачата може да се реши и со Венов дијаграм (цртеж десно). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.



24. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 30 и кои без остаток се делат со 3 или со 4.

Решение. Бидејќи $29=9\cdot3+2$, бројот на природните броеви кои се помали од 30 и без остаток се делат со 3 е еднаков на 9. Понатаму, од $29=7\cdot4+1$ следува дека бројот на природните броеви кои без остаток се делат со 4 е еднаков на 7. Но, меѓу овие броеви два пати се броеви броевите кои без остаток се делат и со 3 и со 4, а тоа се броевите 12 и 24, т.е. има 2 такви броеви. Според тоа, имаме $9+7-2=14$ броеви кои се помали од 30 и кои без остаток се делат со 3 или со 4.

25. Определи го бројот на двоцифрените броеви кај кои цифрата на десетките е помала од 3, а цифрата на единиците е поголема од 7.

Решение. *Прв начин.* Бараните броеви се 18, 19, 28 и 29, што значи дека имаме 4 такви броеви.

Втор начин. За цифрата на десетките имаме 2 можности и тоа цифрите 1 и 2. За секоја од овие 2 можности за цифрата на единиците имаме по 2 можности и тоа се цифрите 8 и 9. Значи, бројот на бараните броеви е $2\cdot2=4$.

26. На коллку начини може да се добие бројот 2008, ако се следат стрелките на фигурата прикажана на долниот цртеж?

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 8 \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 8 & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 8 & & \\
8 & & &
\end{tikzcd}$$

Решение. Од бројот 2 кон првата 0 водат две стрелки, што значи дека за избор на бројот 20 имаме 2 можности. Потоа, од секоја нула кон втората нула излегуваат по две стрелки, што значи дека за избор на бројот 200 имаме $2\cdot2=4$ можности. Конечно, од секоја втора нула кон цифрата 8 излегуваат по две стрелки, што значи дека за избор на бројот 2008 имаме $2\cdot2\cdot2=2\cdot4=8$ можности.

27. Определи го бројот на двоцифрените броеви кои се запишани само со различни парни цифри.

Решение. *Прв начин*. За цифрата на десетките имаме 4 можности (една од цифрите 2, 4, 6 и 8). Понатаму, за секоја избрана цифра на десетките за избор на цифрата на единиците имаме 4 можности (цифрата 0 и три од цифрите 2, 4, 6 и 8 кои не се избрани). Според тоа, бројот на двоцифрените броеви запишани со различни парни цифри е еднаков на $4 \cdot 4 = 16$.

Втор начин. Двоцифрени броеви запишани само со различни парни цифри се:

$$\begin{gathered}20, 24, 26, 28,\\ 40, 42, 46, 48,\\ 60, 62, 64, 68,\\ 80, 82, 84, 86.\end{gathered}$$

Според тоа, имаме 16 двоцифрени броеви кои се запишани само со различни парни цифри.

28. Во едно мало кнежевство имало само 6 села и еден град. Од секое село излегуваат по три патишта – еден кон градот и два пата кон некои од селата. Колку патишта има во тоа кнежевство?

Решение. Во кнежевството има два вида патишта и тоа село-град и село-село. Бидејќи од секое село води пат до градот, а имаме 6 села, заклучуваме дека има 6 патишта од видот село-град. Понатаму, од секое село водат два пата до други две села, па затоа од селата кон селата излегуваат $6 \cdot 2 = 12$ патишта. Притоа, патот кој оди од селото A кон селото B е истиот пат кој оди од селото B кон селото A, што значи дека овие 12 патишта се добиени така што секој пат од видот село-село е броен два пати. Значи, од видот село-село имаме $12 : 2 = 6$ патишта.

Конечно, во кнежевството вкупно има $6 + 6 = 12$ патишта.

29. Пабло ги запишал во редица сите броеви помали од 300, во чиј запис не се содржи цифрата 1. Колку броеви запишал Пабло?

Решение. Од првата стотка Пабло запишал 8 едноцифрени и $8 \cdot 9 = 72$ двоцифрени броеви, што значи запишал $8 + 72 = 80$

броеви. Од втората стотка Пабло го запишал само бројот 200, т.е. запишал еден број и од третата стотка запишал исто толку броеви колку што запишал од првата стотка, т.е. запишал 80 броеви. Конечно, Пабло запишал $80+1+80=161$ број.

30. Колку броеви има кои се помали од 2023 и кои во својот запис имаат точно три единици?

Решение. Најмал број кој е помал од 2023 и кој во својот запис има точно три единици е бројот 111. Другите броеви кои се помали од 2023 и кои во својот запис имаат точно три единици се добиваат така што на бројот 111 од десно му ја допишеме една од цифрите 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, потоа секоја од овие цифри ќе ја запишеме меѓу првата и втората единица и секоја од овие цифри ја запишеме меѓу втората и третата единица. На тој начин добиваме три пати по 9 броја, со што сме ги запишале сите броеви со саканите својства. Конечно, имаме $1+3\cdot 9=28$ броеви кои се помали од 2023 и кои во својот запис имаат точно три единици.

31. Колку има трицифрени броеви чиј производ на цифри е 12. Пресметај го збирот на најмалиот и најголемиот од овие броеви?

Решение. Имаме $12=1\cdot 2\cdot 6=1\cdot 3\cdot 4=2\cdot 2\cdot 3$, па затоа трицифрени броеви чиј производ на цифри е 6 се:

126, 162, 216, 261, 612, 621,
134, 143, 314, 341, 413, 431,
223, 232, 322.

Значи, имаме $6+6+3=15$ трицифрени броеви чиј производ на цифри е 12. Најмалиот од овие броеви е 126, а најголемиот е 621. Нивниот збир е $126+621=747$.

32. За еден природен број ќе велиме дека е „*убав*“ ако тој е најмалиот меѓу сите двоцифрени броеви кои имаат еднаква сума на цифрите со кои се запишани. Определи го збирот на сите „убави“ броеви.

Решение. Збирот на цифрите на двоцифрен број може да биде 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18. Притоа, соодветните „убави“ броеви се:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 и 99.

Нивниот збир е:

$$\begin{aligned} S &= 10+11+12+13+14+15+16+17+18+ \\ &\quad +19+29+39+49+59+69+79+89+99 \\ &= 657. \end{aligned}$$

33. На фудбалски натпревар за победа се добиваат 3 бода, за пораз се добиваат 0 бодови, а при нерешен резултат двата тима добиваат по 1 бод. По одиграни 25 натпревари, тимот за кој навива Филип одиграл 8 натпревари нерешено и освоил 44 бодови. На колку натпревари бил поразен омилениот тим на Филип?

    Решение. Тимот освоил 44 бодови, а 8 натпревари одиграл нерешено, т.е. на 8 натпревари тој освоил по еден бод. Преостанатите $44-8=36$ бода тимот ги освоил на натпреварите на кои победил. Значи, тимот победил на $36:3=12$ натпреваи. Конечно, омилениот тим на филип загубил на $25-(8+12)=25-20=5$ натпревари.

34. Датата 02.06.2013 година е запишана со 8 цифри, меѓу кои 5 се различни. Колку дати во 2013 година се запишани со 4 различни цифри?

    Решение. Бидејќи годината 2013 се запишува со 4 различни цифри, потребно е да преброиме колку пати денот и месецот може да се запишат со цифрите 0, 1, 2 и 3.

    Месеците кои може да се запишат со цифрите 0, 1, 2 и 3 се:

    01, 02, 03, 10, 11 и 12.

    Деновите кои може да се запишат со цифрите 0, 1, 2 и 3 се:

    01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30 и 31.

    Во месеците 01, 03, 10 и 12, т.е. во месеците јануари, март, октомври и декември, кои имаат по 31 ден, имаме 13 денови кои го задоволуваат условот на задачата, што значи $4\cdot 13=52$ дена. Во месецот 02, т.е. во месецот февруари, кој има 28 дена, имаме 11 денови кои го задоволуваат условот на задачата и во месецот

11, т.е. во месецот ноември, кој има 30 дена, имаме 12 дена кои го задоволуваат условот на задачата. Конечно, во 2013 година со 4 различни цифри може да се запишат $52+11+12=75$ дати.

35. Определи го бројот на броевите кои се помали или еднакви на 100 и кои се еднакви на производот на два исти или два последователни броја.

Решение. Броеви кои се еднакви на производот на два исти броја се:

$$1\cdot 1=1, \quad 2\cdot 2=4,\ 3\cdot 3=9,\ \ 4\cdot 4=16,\ 5\cdot 5=25,$$

$$6\cdot 6=36, 7\cdot 7=49, 8\cdot 8=64, 9\cdot 9=81,\ 10\cdot 10=100,$$

што значи дека имаме 10 такви броеви. Броеви кои се еднакви на производот на два последователни броја се:

$$1\cdot 2=2,\ \ 2\cdot 3=6,\ \ 3\cdot 4=12, 4\cdot 5=20,\ 5\cdot 6=30,$$

$$6\cdot 7=42, 7\cdot 8=56, 8\cdot 9=72, 9\cdot 10=90,$$

што значи дека имаме 9 такви броја. Конечно, имаме $10+9=19$ броја кои го задоволуваат условот на задачата.

36. На секој километар од автопатот од Скопје до Гевгелија има табла, која го покажува (во километри) растојанието од Скопје до соодветната табла. Растојанието по автопатот од Скопје до Неготино е $123\,km$. На колку табли поставени на автопатот од Скопје до Неготино барем две од цифрите се еднакви?

Решение. Броеви кои се помали од 100 и кои се запишани со две еднакви цифри се: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 и 99. Броеви кои се поголеми или еднакви на 100 и кои се помали од 123, а во чиј запис има барем две еднакви цифри се: 100, 101, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121 и 122. Значи, имаме 9 двоцифрени и 14 трицифрени броеви кои го задоволуваат условот на задачата. Според тоа, на автопатот од Скопје до Неготино се поставени $9+14=23$ табли во чиј запис има барем две еднакви цифри.

37. Определи го бројот на двоцифрените броеви чиј збир на цифри

се дели без остаток со 7.

Решение. Збирот на цифрите на двоцифрен број е помал или еднаков на $9+9=18$. Броеви кои се помали или еднакви на 18 и кои без остаток се деливи со 7 се 7 и 14.

Бидејќи $7=7+0=6+1=5+2=4+3$, двоцифрени броеви чиј збир на цифри е 7 се: 70, 61, 16, 52, 25, 43, 34.

Бидејќи $14=9+5=8+6=7+7$, двоцифрени броеви чиј збир на цифри е 14 се: 95, 59, 86, 68 и 77.

Конечно, бројот на двоцифрените броеви чиј збир на цифри без остаток се дели со 7 е еднаков на $7+5=12$.

38. Определи го бројот на природните броеви кои се поголеми од 10 и кои се запишани со различни цифри чиј производ е еднаков на 6.

Решение. Бројот 6 како производ на два или повеќе различни броја може да се запише на еден од следниве начини:

$$6=1\cdot 6=2\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3.$$

Според тоа, броеви кои се поголеми од 10 и кои се запишани со различни цифри чиј производ е еднаков на 6 се:

16, 61, 23, 32, 123, 231, 312, 321, 132 и 213.

Значи, бараниот број броеви е 10.

39. Колку пати цифрата 3 е употребена за запишување на непарните двоцифрени броеви?

Решение. Непарни двоцифрени броеви во кои е употребена цифрата 3 се:

13, 23, 31, 33, 35, 37, 39, 43, 53, 63, 73, 83 и 93.

Според тоа, за запишување на непарните двоцифрени броеви цифрата 3 е употребена 14 пати.

40. Определи го бројот на трицифрените броеви во чии записи точно по еднаш се среќаваат цифрите 2 и 6.

Решение. Трицифрените броеви во чии записи точно по еднаш се среќаваат цифрите 2 и 6 се од видот:

$$\overline{x26}, \overline{x62}, \overline{2x6}, \overline{6x2}, \overline{26x}, \overline{62x}.$$

Во првиот и вториот случај $x \neq 0, 2, 6$, па затоа имаме по 7 можности, а во останатите четири случаи $x \neq 2, 6$, па затоа имаме по 8 можности. Конечно, постојат $2 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 14 + 32 = 46$ трицифрени броеви во чии записи цифрите 2 и 6 се среќаваат точно по еднаш.

41. Определи го бројот на трицифрените броеви во чии записи се среќават и цифрата 2 и цифрата 6.

Решение. Трицифрените броеви во чии записи се среќаваат цифрите 2 и 6 се од видот:

$$\overline{x26}, \overline{x62}, \overline{2x6}, \overline{6x2}, \overline{26x}, \overline{62x}.$$

Во првиот и вториот случај $x \neq 0$, па затоа имаме по 9 можности, а во останатите четири случаи x е било која цифра, па затоа имаме по 10 можности. Меѓутоа, и во двата случаја некои броеви се појавуваат по два пати и тоа се броевите кога $x = 2$ или $x = 6$, при што добиваме

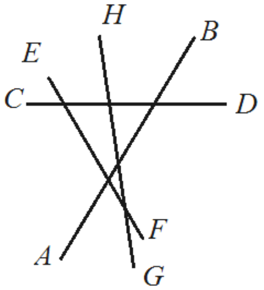
226, 262, 226, 622, 262, 622,
626, 662, 266, 662, 266, 626.

Според тоа, шест броја се бројат два пати, па затоа имаме

$$2 \cdot 9 + 4 \cdot 10 - 6 = 18 + 40 - 6 = 52$$

трицифрени броеви во чии записи се среќават и цифрата 2 и цифрата 6

42. Колку е бројот на можностите за бројот пресечните точки на 4 отсечки?



Решение. Четири отсечки може воопшто да не се сечат, па затоа најмалиот број пресечни точки е 0. Понатаму, ако секоја отсечка ја сече секоја друга отсечка, тогаш секоја отсечка сече 3 отсечки, па имаме $4 \cdot 3 = 12$ пресечни точки, при што се пребројани 12 точки бидејќи секоја пресечна точка е броена два пати (Зошто?). Значи, во овој случај имаме $12 : 2 = 6$ пресечни точки и тоа е најголемиот можен број точки во кои се сечат 4 отсечки (цртеж горе десно).

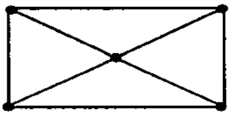
Конечно, четири отсечки можќе да имаат 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6 пресечни точки, па затоа вкупниот број можности за бројот на пресечните точки на 4 отсечки е 7. (Дади примери кога 4 отсечки имаат 1, 2, 3, 4 или 5 пресечни точки!)

43. Колку отсечки се прикажани на цртежот десно?

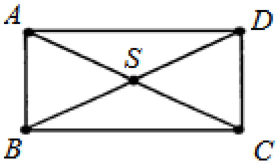
Решение. На даденио цртеж се пшрикажани 3 вертикални отсечки. Понатаму, долу имаме 2 хоризонтални отсечки кои се страни на малите правоаголници и 1 хоризонтална отсечка која е страна на големиот правоаголник, што значи $2+1=3$ отсечки. Јасно, и горе имаме 3 хоризонтално отсечки.

Значи, на дадениот цртеж се прикажани $3+3+3=9$ отсечки.

44. Колку отсечки чии крајни точки се темињата и пресекот на дијагоналите на правоаголникот прикажан на цртежот десно.



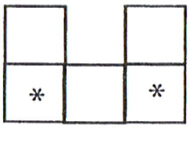
Решение. Темињата на правоаголникот и пресекот на неговите диојагонали да ги означиме како на цртежот десно. При ова означување отсечки чии крајни точки се темињата на правоаголникот и пресекот на неговите дијагонали се:



$$AB, BC, CD, DA, AS, SC, AC, BS, SD, BC .$$

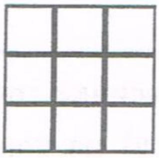
Значи имаме 10 отсечки кои го задоволуваат условот на задачата.

45. Определи го бројот на правоаголниците од фигурата прикажана на цртежот десно, кои содржат барем една ѕвездичка. (Квадратот е правоаголник!)



Решение. На фигурата има 2 квадрати кои содржат по 1 ѕвездичка, 4 правоаголници од по два квадрати кои содржат по една ѕвездичка и 1 правоаголник од три квадрати кои содржи две ѕвездички. Според тоа, бараниот број правоаголници е еднаков на $2+4+1=7$.

46. Колку квадрати се содржани во фигурата прикажана на цртежот десно?

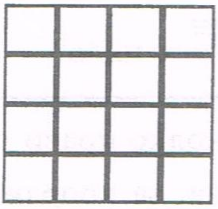


Решение. Јасно, дадена фигура содржи квадрати составени од 1, 4 и 9 мали квадратчиња.

Фигурата содржи 9 квадрати составени од 1 квадратче и 1 квадрат составен од 9 квадратчиња. Останува да ги преброиме квадратите составени од по 4 квадратчиња. За таа цел прво ќе ги означиме малите квадратчиња (цртеж десно). Според тоа, квадрати составени од по 4 мали квадратчиња се: абгд, бвдѓ, гдеж, дѓжз, т.е. имаме 4 вакви квадрати. Конечно, дадената фигура содржи $9+4+1=14$ квадрати.

а	б	в
г	д	ѓ
е	ж	з

47. Колку квадрати се содржани во фигурата прикажана на цртежот десно?

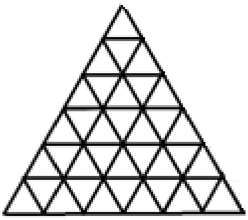


Решение. Дадената фигура содржи квадрати составени од 1, 4, 9 и 16 мали квадратчиња.

Фигурата содржи 16 квадрати составени од 1 мало квадратче и 1 квадрат составен од 16 мали квадратчиња. Останува да ги преброиме квадратите составени од по 4 и од по 9 мали квадратчиња. За таа цел прво ќе ги означиме малите квадратчиња (цртеж десно). Сега, квадрати составени од по 4 мали квадратчиња се: 1б12, бв23, вг34, 12дѓ, 23ѓе, 34еж, дѓ56, ѓе67, еж78, т.е. има 9 такви квадрати. Квадрати составени од по 9 мали квадратчиња се: абв123дѓе, бвг234ѓеж, 123дѓе567, 234ѓеж678, т.е. има 4 такви квадрати. Конечно, дадената фигура содржи $16+9+4+1=30$ квадрати.

а	б	в	г
1	2	3	4
д	ѓ	е	ж
5	6	7	8

48. Даден е рамностран триаголник со должина на страна $6cm$, кој е расечен на рамнострани триаголници со должина на страна $1cm$. Колку рамнострани триаголници со должина на страна $1cm$ се добиени?



Решение. Јасно, при расекувањето на долната страна на големиот триаголник се поставени 6 исправени рамнострани триаголници со должина на страна $1cm$ (цртеж десно). Сега меѓу нив се наоѓаат 5 превртени триаголници, па над нив 5 исправени и 4 превртени триаголници, па над нив 4 исправени и 3 превртени триаголници, па над нив 3 исправени и 2 превртени триаголници, па над нив 2 исправени и 1 превртен триаголник и конечно најгоре уште 1 исправен триаголник со должина на страна $1cm$. Конечно, при даденото расекување се добиени

$$(1+2+3+4+5+6)+(1+2+3+4+5)=21+15=36$$

рамнострани триаголници со должина на страна $1cm$.

49. Во полињата на квадратната табла прикажана на цртежот десно биле запишани броевите 1, 2 и 3 така, што во секој ред и во секоја колона броевите биле различни. Потоа поголем број од броевите биле избришани. Определи го збирот $x+y+z$.

		1
2	y	
x		z

Решение. Јасно, во полето кое се наоѓа во пресекот на вториот ред и третата колона мора да е бројот 3, па затоа $z=2$ и $y=1$. Понатаму, во празното поле на третиот ред не може да е бројот 1, па затоа $x=1$. Конечно, $x+y+z=1+1+2=4$.

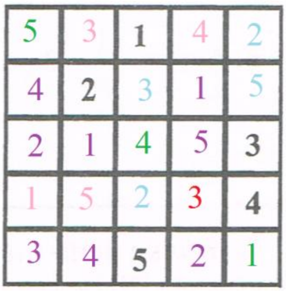
50. Во табелата прикажанана цртежот десно пополни ги празните полиња со броевите од 1 до 5, така што секој број ќе биде запишан само една во секој ред, секоја колона и на секоја од двете основни ди-

		1		
	2			
				3
				4
		5		

јагонали.

Решение. Во секој чекор броевите во табелата ќе ги запишуваме со друга боја.

Бројот 3 е веќе запишан во третиот ред и петтата колна, па затоа на дијагоналата може да биде запишан во пресекот на првиот ред и првата колона, или во пресекот на четвртиот ред и четвртата колона. Да го запишеме бројот 3 во пресекот на четвртиот ред и четвртат колона (црвена боја). Сега местата на броевите 1 и 5 на дијагоналата се еднозначно определени, а со тоа и местото на бројот 4 (зелена боја). Понатаму, во третата колона во празните полиња одгоре-надолу мора да се броевите 3 и 2, а во петтата колона во празните полиња одгоре-надолу мора да се броевите 2 и 5 (сина боја). Сега во првиот ред гледајќи од лево во празните полиња мора да се броевите 3 и 4, а во празните полиња на четвртиот ред гледајќи од лево броевите 1 и 5 (портокалова боја). Сега лесно ја пополнуваме втората колона: 1 и 4, па вториот ред: 4 и 1, па третиот ред: 2 и 5, и на крајот петтиот ред: 3 и 2 (лилјакова боја).

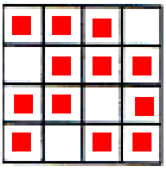


5	3	1	4	2
4	2	3	1	5
2	1	4	5	3
1	5	2	3	4
3	4	5	2	1

Случајот кога во првиот потез бројот 3 го запишуваме во пресекот на првиот ред и првата колона не е можен. Провери!

51. Ангела треба да постави жетони во малите квадратчиња на табелата прикажана на цртежот десно, при што го почитувала следново правило: во секој ред, секоја колона и на секоја од двете главни дијагонали не може да има повеќе од 3 жетони. Колку најмногу жетони може да постави Ангела?

Решение. Имаме 4 реда и во секој ред Ангела може најмногу да постави по 3 жетони. Значи, Ангела не може да постави повеќе од $4 \cdot 3 = 12$ жетони. На цртежот десно е покажан еден распоред како Ангела може да постави точно 12 жетони.



■	■	■	
	■	■	■
■	■		■
■		■	■