

VI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата

Десет години републички натпревари по математика 1976-1985

подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Збирот на два природни броја изнесува 252, а нивниот најголем заеднички делител е 36. Кои се тие броеви?

2. Пресметај ја бројната вредност на изразот:
 $4a^2x^2 - 4acx^2 + c^2x^2 - 16a^2xy + 16acxy - 4c^2xy + 16a^2y^2 - 16acy^2 + 4c^2y^2$;
ако: $a = 3276$, $c = 5552$, $x = 9463$ и $y = 4731$.

3. Во паралелограмот ABCD страната AB е двапати подолга од страната BC. Нека M е средина на страната AB. Докажи дека отсечките CM и DM се заемно нормални.

4. Конструирај го триаголникот ABC ако се дадени: аголот α , тежишната линија ta и висината h_c .

37. (1981.VII.1)

1. Бараните природни броеви нека се x и y . Тогаш од условот на задачата е: $x + y = 252$ и $x = 36x_1$, $y = 36y_1$, каде што x_1 и y_1 се заемно прости броеви, н.з.д. $(x_1, y_1) = 1$

$$36x_1 + 36y_1 = 252$$

$$36(x_1 + y_1) = 252$$

$$x_1 + y_1 = 7.$$

Бидејќи x_1 и y_1 се заемно прости броеви, постојат следните можности за паровите (x_1, y_1) : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) и (6, 1). За овие вредности на x_1 и y_1 ќе одговараат следниве парови за x и y : $(x, y) \in \{(36, 216), (72, 180), (108, 144), (144, 108), (180, 72), (216, 36)\}$

Одговор: 36 и 216; 72 и 180; 108 и 144; (144 и 108; 180 и 72; 216 и 36) – вкупно шест решенија.

38. (1981.VII.2)

I. Прво, изразот ќе го разложиме на множители.

Имаме:

$$\begin{aligned} & 4a^2x^2 - 4acx^2 + c^2x^2 - 16a^2xy + 16acxy - 4c^2xy + 16a^2y^2 - 16acy^2 + 4c^2y^2 = \\ & = x^2(4a^2 - 4ac + c^2) - 4xy(4a^2 - 4ac + c^2) + 4y^2(4a^2 - 4ac + c^2) = \\ & = (4a^2 - 4ac + c^2)(x^2 - 4xy + 4y^2) = (2a - c)^2(x - 2y)^2. \end{aligned}$$

Сега ќе ги замениме соодветните вредности за променливите a, c, x и y :

$$\begin{aligned} (2a - c)^2(x - 2y)^2 &= (2 \cdot 3276 - 5552)^2(9463 - 2 \cdot 4731)^2 = \\ &= (6552 - 5552)^2(9463 - 9462)^2 = 1000^2 \cdot 1^2 = 10^6. \end{aligned}$$

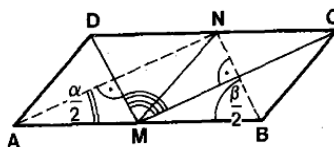
Одговор: 1 000 000.

39. (1981.VII.3)

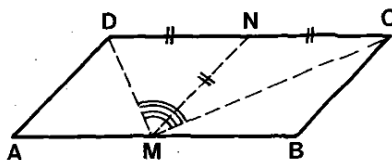
I. Паралелограмот $ABCD$ нека е таков што да е $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ и нека е M средина на страната AB , т.е. $\overline{AM} = \overline{MB}$. Нека е уште N средина на страната DC , т.е. $\overline{DN} = \overline{NC}$. Да го разгледаме триаголникот DMC . Во него е $\overline{DN} = \overline{NC}$, но поради $\overline{MN} = \overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{DC}$, ќе следува:

$$\overline{DN} = \overline{MN} = \overline{NC}.$$

Значи, N е центар на опишаната кружница околу $\triangle DMC$, па ќе следува дека $\sphericalangle DMC = 90^\circ$, како перифериски агол на дијаметарот DC .



Црт. 26

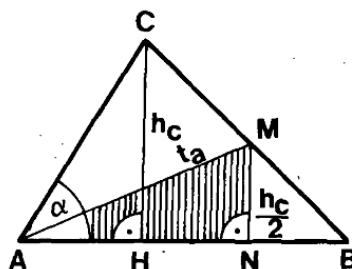


Црт. 27

II. Од условот за задачата имаме: $AMND$ и $MBCN$ се ромбови, па нивните дијагонали MD и MC се симетри на аглите. Од $\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$.

40. (1981.VII.4)

1. **Анализа:** Да претпоставиме дека задачата е решена, и притоа нека $\angle A = \alpha$, $\overline{AM} = t_a$ и $\overline{CH} = h_c$. (види цртеж 28). Нека е MN висина на $\triangle ABM$. Лесно се забележува дека е $\overline{MN} = \frac{1}{2} h_c$ (средна линија во $\triangle HBC$).



Црт. 28

Помошниот ΔANM можеме да го конструираме, бидејќи за него знаеме:

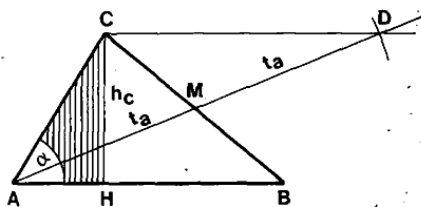
- 1) $\overline{AM} = t_a$
- 2) $\overline{MN} = \frac{1}{2} h_c$
- 3) $\angle ANM = 90^\circ$.

Откако ќе го конструираме $\triangle ANM$, можеме да го определиме темето C , во пресе-
кот на полуправата AX која со AN го зафаќа аголот α и правата $l \parallel AB$ на рас-
стојание hc од AB . На крајот, темето B се добива во пресекот на AN и CM .

2) Конструкција: Следува од анализата.

3) Доказ: Следува од анализата.

4) **Дискусија:** Задачата има секогаш решение ако е $\frac{h_c}{2} < t_a$, т.е. ако е $h_c < 2t_a$.



Црт. 29

II. Првин го конструираме $\triangle AHC$ (ACA), потоа D , кое лежи на $l \parallel AB$ и е $\overline{AD} = 2t_a$, M е средина на $AD \Rightarrow \overline{CM} = \overline{MB}$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Од градовите А и В што се наоѓаат на растојание од 390 километри истовремено тргнале два камиона еден кон друг. Брзината на едниот е за 10 километри на час поголема од брзината на другиот камион. По три часа патување тие се наоѓаат на растојание од 24 километри еден од друг. Колкава е брзината на секој од нив?

2. Равенките на три прави се: $3x - 7y + 5 = 0$; $12x + 5y - 46 = 0$ и $3x + 4y + 16 = 0$. Определи го периметарот и плоштината на триаголникот што се образува со тие три прави.

3. Околу кружница со радиус 2 cm е опишан рамнокрак трапез со плошина $16\sqrt{2}\text{ cm}^2$.

а) Определи ги должините на страните на тој трапез;

б) Определи ги аглиите на тој трапез.

4. Дадена е правилна шестстрана пирамида со основен раб 24 cm и бочен раб 26 cm. Секое коше од таа пирамида е пресечено со рамнина што минува низ средините на рабовите на тоа коше. Определи го волуменот на така добиеното тело.

41. (1981.VIII.1)

І. Брзината на едниот камион нека е x km/h, тогаш брзината на другиот камион ќе биде $(x + 10)$ km/h. Постојат две можности:

а) Во првиот случај камионите се наоѓаат на растојание од 24 километри, пред нивната средба. Тогаш е:

$$3x + 3(x + 10) = 390 - 24$$

или

$$6x = 336 \Leftrightarrow x = 56$$

$$\Rightarrow x + 10 = 66.$$

Значи, во овој случај брзината на едниот камион е 56 km/h, а на другиот 66 km/h.

б) Во вториот случај камионите се наоѓаат на растојание од 24 километри по разминувањето, тогаш е:

$$3x + 3(x + 10) = 390 + 24$$

или

$$6x = 384 \Leftrightarrow x = 64 \Rightarrow$$

$$x + 10 = 74.$$

Значи брзините на камионите се 64 km/h и 74 km/h.

Одговор: 56 km/h и 66 km/h или
64 km/h и 74 km/h.

42. (1981.VIII.2)

Првин ќе ги определиме координатите на темињата на триаголникот. Првото теме го определуваме со решавање на системот:

$$\begin{cases} 3x - 7y + 5 = 0 \\ 3x + 4y + 16 = 0 \end{cases} \quad \text{Имаме} \quad \begin{cases} -3x + 7y = 5 \\ 3x + 4y = -16 \\ \hline 11y = -11 \\ y = -1, \end{cases}$$

тогаш е $3x = -7 - 5 \Leftrightarrow x = -4$. Значи едно теме е $A(-4, -1)$. На сличен начин со решавање на системот равенки:

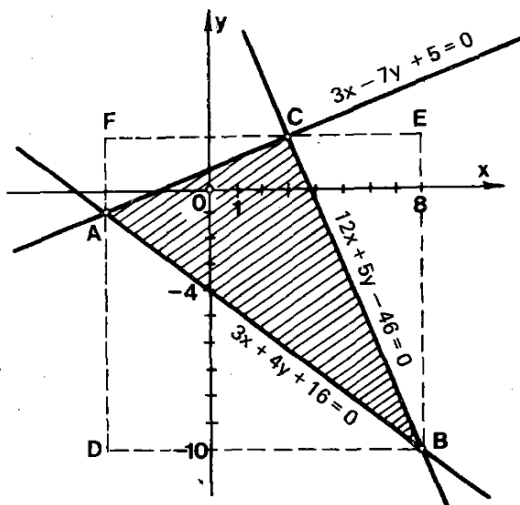
$$\begin{cases} 3x + 4y + 16 = 0 \\ 12x + 5y - 46 = 0, \end{cases}$$

ги добиваме координатите на второто теме $B(8, -10)$ и на крај, со решавање на системот:

$$\begin{cases} 3x - 7y + 5 = 0 \\ 12x + 5y - 46 = 0, \end{cases}$$

ги добиваме координатите на темето $C(3, 2)$.

Да го нацртаме сега триаголникот ABC , чијшто координати на темињата се $A(-4, -1)$, $B(8, -10)$ и $C(3, 2)$.



Црт. 30

Користејќи ја Питагоровата теорема за $\triangle ABD$ ќе имаме: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2} =$

$= \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. Аналогно, од триаголниците BCE и ACF , ќе имаме:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{CF}^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}.$$

Периметарот на $\triangle ABC$ е:

$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 15 + 13 + \sqrt{58} = 28 + \sqrt{58}$$

Плоштината на $\triangle ABC$ ќе ја добиеме ако од плоштината на квадратот DBEF ги одземеме плоштините на правоаголните триаголници ABD, BCE и ACF.

$$P_{DBEF} = 12^2 = 144; \quad P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54;$$

$$P_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30; \quad P_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = \frac{21}{2}$$

$$P_{ABC} = 144 - (54 + 30 + \frac{21}{2}) = 144 - \frac{189}{2} = \frac{99}{2} = 49,5.$$

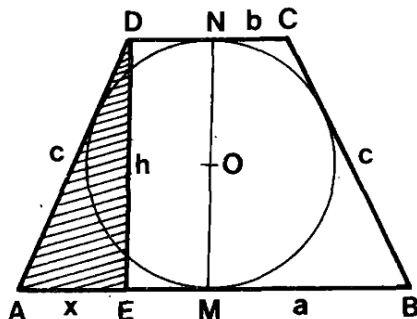
Одговор: $L = (28 + \sqrt{58})$ единици; $P = 49,5$ кв. единици.

43. (1981.VIII.3)

I. ABCD нека е рамно-
крак трапез и нека во него е впишана
кружница со радиус 2 cm. Основите
нека се $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, а краците:
 $\overline{BC} = \overline{AD} = c$. Висината е $h = 2r = 4$.
Бидејќи трапезот ABCD е тангентен,
ќе имаме:

$$a + b = 2c \quad (1)$$

Одовде е $\frac{a+b}{2} = c$



Црт. 31

Плоштината е $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, или $16\sqrt{2} = c \cdot 2r \Leftrightarrow 16\sqrt{2} = c \cdot 2 \cdot 2$, од каде што

$$c = \frac{16\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2}. \text{ Имајќи ја предвид равенката (1), ќе добиеме}$$

$$a + b = 8\sqrt{2} \quad (2).$$

Понатаму од $\triangle AED$ имаме:

$$x = \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{32 - 16} = 4, \text{ па поради } \frac{a-b}{2} = x, \text{ ќе следува}$$

$$a - b = 8. \quad (3)$$

Со решавање на системот равенки:

$$\begin{cases} a + b = 8\sqrt{2} \\ a - b = 8, \end{cases} \text{ добиваме: } \begin{aligned} a &= 4\sqrt{2} + 4 = 4(\sqrt{2} + 1) \\ b &= 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

б) За да ги определиме аглите во трапезот, доволно е да го определиме $\sphericalangle A$. Бидејќи $\triangle AED$ е рамнокрак правоаголен ($\overline{AE} = \overline{ED} = 4$), следува $\sphericalangle A = 45^\circ$.

Тогаш $\sphericalangle B = 45^\circ$; $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 135^\circ$.

Одговор: а) $4(\sqrt{2} + 1)$ cm, $4(\sqrt{2} - 1)$ cm и $4\sqrt{2}$ cm.

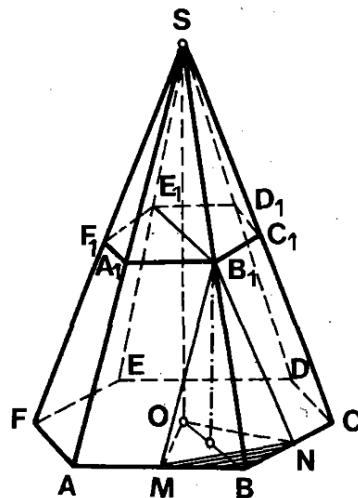
б) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45^\circ$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 135^\circ$.

44. (1981.VIII.4)

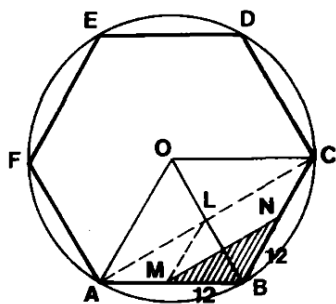
I. $SABCDEF$ нека е правилна шестстрана пирамида со врв S и со основа правилен шестаголник $ABCDEF$.

Основниот раб е $\overline{AB} = \overline{BC} = 24$ см, а бочниот раб $\overline{SB} = 26$ см. По пресечувањето на оваа пирамида со рамнини дадени во условот на задачата, ќе се добијат 6 складни тристрани пирамиди (една таква е нацртана на цртежот — со основа MBN и врв B_1) и една шестстрана пирамида со основа $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и врв S .

Основата на пирамидата B_1MBN е рамнокрак триаголник, со агол кај темето B еднаков на 120° и со краци $\overline{MB} = \overline{BN} = 12$ см. Плоштината на $\triangle MBN$ (види црт. 32) е



Црт. 32



Црт. 33

$$B = \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}.$$

Од $\triangle OBS$ е:

$$H = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10.$$

Висината на пирамидата B_1MBN е $\overline{B_1L}$ =

$$= \frac{H}{2} = 5, \text{ на нејзиниот волумен е:}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} B \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 5 = 60\sqrt{3}.$$

Волуменот на пирамидата $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ е

$$V_2 = \frac{1}{3} 6 \cdot \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{H}{2} = 360\sqrt{3}.$$

Волуменот на целата пирамида $SABCDEF$ е

$$V = \frac{1}{3} 6 \cdot \frac{24^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = 2880\sqrt{3}.$$

Тогаш волуменот на бараното тело е:

$$V_3 = V - 6V_1 - V_2 = 2880\sqrt{3} - 360\sqrt{3} - 360\sqrt{3} = 2160\sqrt{3}.$$

Одговор: $V = 2160\sqrt{3} \text{ cm}^3$.