Понешто о елементарним функцијама - функцијама које нам је природа подарила

др Небојша Икодиновић, др Марија Станић, **Крагујевац**

Још од древних времена па све до данас људи су премеравањем окружења уочавали свакакве међусобне везе међу добијеним разултатима и пре или касније долазили до веома корисних законитости. Иза огромног броја природних закона крију се управо функције са којима се упознајемо у средњој школи. Реч је реалним функцијама реалне променљиве: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$[1]. Ако $x \in D$, онда са $f(x)$ означавамо број који функција f додељује броју x. Када будемо желели да истакнемо само процес додељивања писаћемо $x \mapsto f(x)$, $x \in D$.

Вероватно претпостављате о којим функцијама ће бити речи.

Функције којима се представља директна пропорционалност неке две величине спадају у најједноставније функције са којима се сусрећемо свакодневно (на пример, приликом сваке куповине када је свота новца коју треба издвојити директно пропорционална количини купљеног производа при чему је цена једног комада коефицијент пропорционалности). Изрека „колико пара толико и музике" само је грубо изражавање неке уочене директне пропорционалности. Неупоредиво прецизније о њима говоре **функције директне пропорционалности** и, општије, линеарне функције. Свакодневна пракса нам указује и на значај **функција обрнуте пропорционалности** (што више радника на градилишту, мање времена је потребно да се посао заврши, што већом брзином трчимо то нам мање времена треба до циља на стази од 100 m, $t = 100/v$, запремина коцке тешке 1 kg је све већа што је мања густина материјала од кога је направљена, $V = 1/\rho$, и тако даље). Значајне су и **степене функције** (слон никако не би могао да скаче као бува, јер тежина тела расте са кубом, а отпорност ногу тек са квадратом његових димензија) и **корене функције** (време које је потребно телу приликом слободног пада да удари у земљу, директно је пропорционално квадратном корену висине са које је бачено). **Експоненцијална функција** се крије у великом броју природних процеса. По овој законитости се размножавају вируси и бактерије, неповратно одвијају радиоактивни процеси, изграђују и разграђују хемијске везе, деле ћелије свих живих организама, успостављају напони у електричним колима, мере количине новца стављеног у банке на штедњу са одговарајућим каматама, предвиђају порасти броја становника и потреба за енергијом, храном и тако даље. У борби са великим бројевима доста нам помажу логаритми, тј. **логаритамске функције**. Њима се множење своди на сабирање. Њима се изражавају количина водоникових јона (pH вредност), мери (по Рихтеру) јачина земљотреса, изражава јачина звука који производи неки инструмент, изражава сјајност звезда на небу. Проучавања кружног кретања, осцилација као и било ког таласног кретања незамисливо је без **тригонометријских функција**. Свакодневно нам у домове долазе многобројне синусоиде и косинусоиде доносећи нам музику у радио пријемнике.

На средини овог броја Тангенте дат је дволист на коме су нацртани графици поменутих функција и наведене њихове главне особине – заправо оно без чега не можемо да радимо. Ова два листа можете истргнути и користити их као подсетник.

[1] Сетимо се да реалним бројевима изражавамо резултате свакаквих премеравања света у коме живимо.

Снага функција које смо набројали много је већа ако допустимо да се оне слажу градећи нове сложеније функције; на пример, функције задате изразима: $f(x) = \sin(2x-1)$, $g(x) = 2^{\cos x}$, $h(x) = \sqrt{|x^3|-1}$ и тако даље. Цртање графика и иситивање особина оваквих функција спада у значајније задатке области познате као математичка анализа. Читава математичка „машинерија" је створена у циљу решавања оваквих задатака. Ипак, у неким случајевима сложенијих функција лако цртамо њихове графике и уочавамо најзначајније особине.

Пре него што наведемо неке од тих случајева рећи ћемо нешто о уобичајеном начину задавања функција.

Веома су чести задаци типа: *испитати особине и нацртати график функције* $y = f(x)$, при чему је $f(x)$ неки израз. Наравно, навођењем само израза $f(x)$ није задата функција, јер нису задати домен и кодомен; али за домен (област дефинисаности), ако није другачије речено, узимамо скуп свих реалних бројева x за које израз $f(x)$ има смисла, тј. за које су све операције које учествују у формирању тог израза изводљиве, а за кодомен (скуп вредности), ако није другачије речено, узимамо скуп $\mathbb{R}$ реалних бројева. На овом договору засновани су задаци који се често могу срести на пријемним испитима.

1. Дате су функције

$$f_1(x) = e^{\ln x}, \quad f_2(x) = \ln e^x, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2}, \quad f_4(x) = \frac{x^2}{x}.$$

Тачан је исказ
А) $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$; **Б)** међу датим функцијама нема једнаких; **В)** $f_1 \neq f_2 = f_3 = f_4$; **Г)** $f_1 = f_4 \neq f_2 = f_3$; **Д)** $f_2 = f_4 \neq f_1 = f_3$.

Решење. Тачан одговор је **Б)**. До овог одговора долазимо ако узмемо у обзир услове које мора задовољавати x да би се могла израчунати вредност функције. Имајући у виду дефиниције самих функција прво што уочавамо је да су вредности датих функција једнаке, али једино ако је x позитиван број. Овим је састављач задатка вероватно хтео да решаваче навуче на танак лед. Прво, пошто домени датих функција нису експлицитно наведени, морамо их сами одредити по усвојеном договору: домен функције дефинисане изразом $f(x)$ је највећи подскуп од $\mathbb{R}$ кога чине бројеви за које је израз дефинисан. Тако добијамо да је $D_1 = \mathbb{R}^+$, $D_2 = \mathbb{R}$, $D_3 = \mathbb{R}$ и $D_4 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, при чему је D_i домен функције f_i, $i \in \{1,2,3,4\}$. Даље, „сређивањем" израза који дефинишу дате функције добијамо:

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ \text{није дефинисано}, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = x,$$

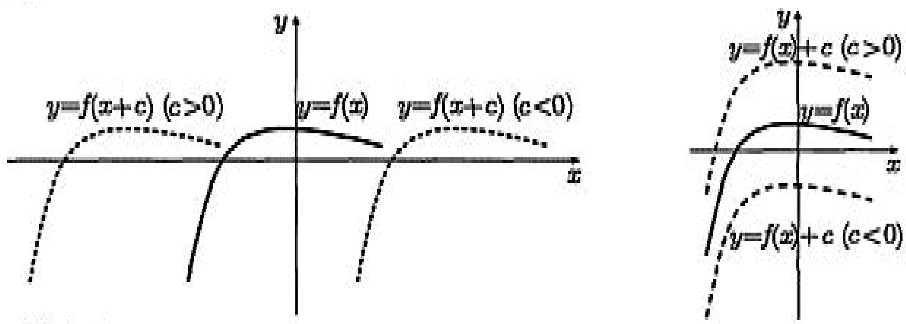
$$f_3(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ \text{није дефинисано}, & x = 0. \end{cases}$$

Сада је лако наћи „сведоке" који ће потврдити различитост сваке две функције. □

Вратимо се најављеним сложенијим случајевима. Ако нам је познат график $y = f(x)$ тада се лако могу нацртати графици $y = f(x+c)$, $y = f(x) + c$ (c је неки фиксирани број), $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.

$y = f(x+c)$

Ако је $c > 0$, график $y = f(x+c)$ добијамо транслацијом графика G_f улево дуж $x-$осе за дужину c.
Ако је $c < 0$, график $y = f(x+c)$ добијамо транслацијом графика G_f удесно дуж $x-$осе за дужину $-c$.

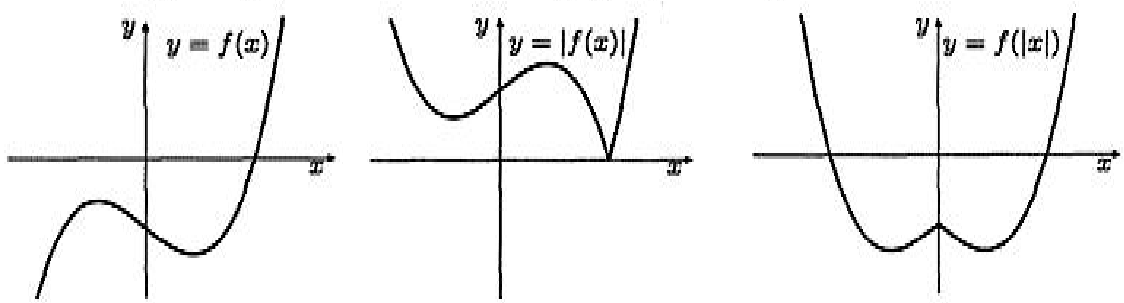


$y = f(x) + c$

Ако је $c > 0$, график $y = f(x) + c$ добијамо транслацијом графика G_f „на горе" дуж $y-$осе за дужину c.
Ако је $c < 0$, график $y = f(x) + c$ добијамо транслацијом графика G_f „на доле" дуж $y-$осе за дужину $-c$.

$y = |f(x)|$

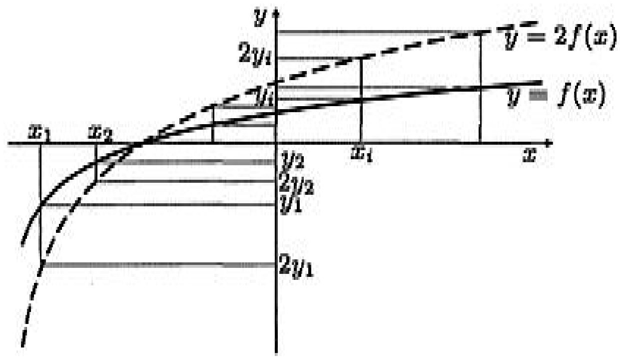
График $y = |f(x)|$ добијамо тако што део графика G_f који се налази испод $x-$осе (има негативне ординате) пресликамо симетрично у односу на $x-$осу.



$y = f(|x|)$

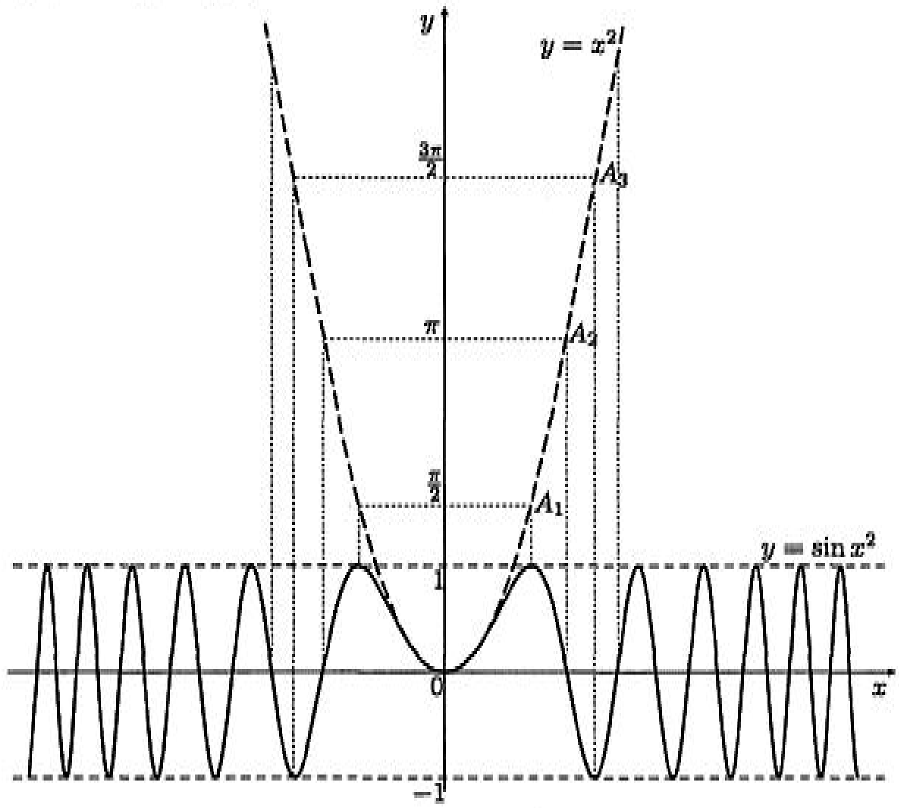
График $y = f(|x|)$ добијамо тако што део графика G_f који се налази десно од $y-$осе (има позитивне апсцисе) пресликамо симетрично у односу на $y-$осу.

Представу о томе како изгледа график неке функције можемо добити и цртањем одређеног броја тачака жељеног графика. Ова метода није баш поуздана, али може да послужи за грубе процене. Такође, физичари су откривали разне формуле (законитости) препознајући графике елементарних функција након представљања екперименталних података („тачка по тачка") у координатном систему. Тако, на пример, ако нам је познат график $y = f(x)$, график функције $g(x) = cf(x)$ (c је неки фиксирани број) ће имати исти облик и можемо га скицирати тако што на графику $y = f(x)$ изаберемо неколико тачака (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5),... затим у истом координатном систему конструишемо тачке (x_1, ay_1), (x_2, ay_2), (x_3, ay_3), (x_4, ay_4), (x_5, ay_5),... и спојимо их.



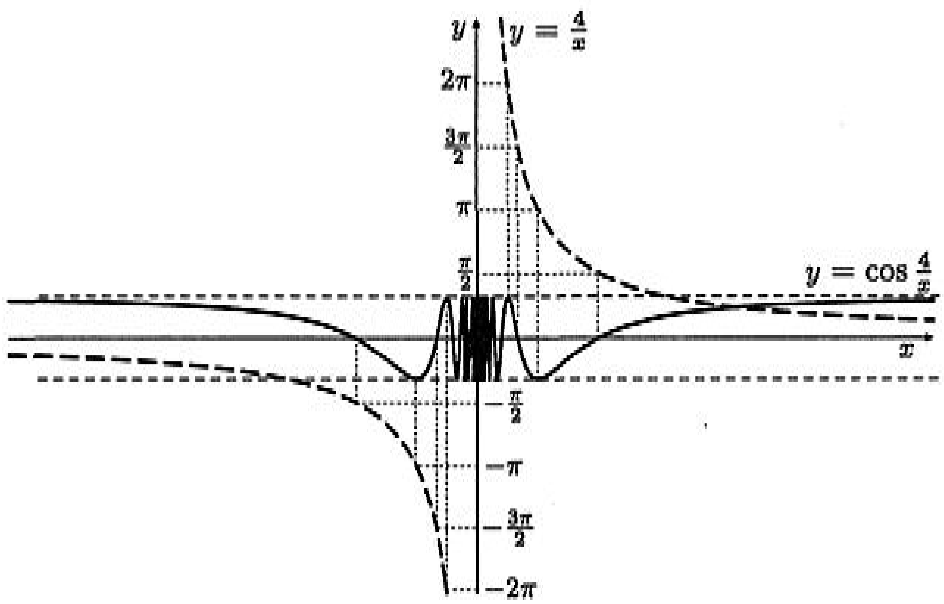
На сличан начин можемо скицирати графике и много сложенијих функција.

Пример 1. Нацртајмо график функције $y = \sin x^2$. Полазимо од графика функције $y = x^2$. На $y-$оси узимамо редом ординате $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots$, и кроз тачке које одговарају овим ординатама конструишемо праве паралелне $x-$оси. Нека те праве секу график функције $y = x^2$ у тачкама $A_0 = 0, A_1, A_2, A_3, \dots$ и њима симетричним тачкама у односу на $y-$осу. За апсцију тачке A_1 ордината функције $y = \sin x^2$ биће једнака $\sin(\pi/2) = 1$, за апсцису тачке A_2 ордината функције $y = \sin x^2$ биће једнака $\sin \pi = 0$ итд.



Дакле, карактеристичне тачке криве $y = \sin x^2$ се налазе у пресецима: праве $y = 1$ и правих паралелних $y-$оси конструисаних кроз оне тачке криве $y = x^2$ чије су ординате $2k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$; праве $y = 0$ и правих паралелних $y-$оси конструисаних кроз оне тачке криве $y = x^2$ чије су ординате $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; праве $y = -1$ и правих паралелних $y-$оси конструисаних кроз оне тачке криве $y = x^2$ чије су ординате $2k\pi - \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

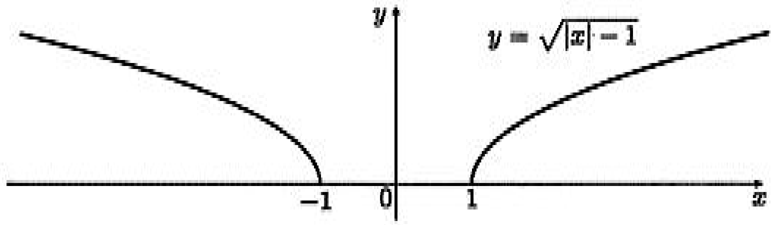
Пример 2. Полазећи од графика функције $y = \frac{4}{x}$ можемо конструисати график функције $y = \cos\frac{4}{x}$. Карактеристичне тачке криве $y = \cos\frac{4}{x}$ се налазе у пресецима: праве $y = 1$ и права паралелних $y-$оси конструисаних кроз оне тачке криве $y = \frac{4}{x}$ чије су ординате $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; праве $y = 0$ и права паралелних $y-$оси конструисаних кроз оне тачке криве $y = \frac{4}{x}$ чије су ординате $k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$; праве $y = -1$ и права паралелних $y-$оси конструисаних кроз оне тачке криве $y = \frac{4}{x}$ чије су ординате $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



2. Испитати особине и нацртати графике следећих функција:

1) $y = x|x|$; 2) $y = |x^2 - 3|x| + 2|$; 3) $y = |x|^3 - 1$;
4) $y = \sqrt{|x| - 1}$; 5) $y = 2^{-|x|}$; 6) $y = 1 - 2^{-x}$
7) $y = \log_2 \frac{1}{|x|}$; 8) $y = \log_2(|x| + 1)$; 9) $y = \log_2 |x + 1|$;
10) $y = \frac{1}{x-1}$; 11) $y = \frac{1}{|x-1|}$; 12) $y = \frac{x-1}{x}$;
13) $y = \sin(|x| - 1)$; 14) $y = 1 + \cos|x + 1|$; 15) $y = |\operatorname{tg}|x||$;
16) $y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & 4 < x \end{cases}$ 17) $y = \log_2 \sqrt{|x - 2|}$;
18) $y = 2 + |\log_2(|x| + 2)|$.

Решење. 4) Транслацијом графика функције $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, удесно за 1, добијамо график функције $x \mapsto \sqrt{x-1}$, $x \geqslant 1$, који даље треба пресликати у односу на y осу. Ове две „полупараболе“, симетричне у односу на y осу, представљају график функције $x \mapsto \sqrt{|x| - 1}$, $x \in (\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.



Са графика једноставно „читамо“ особине функције $f\ :\ (\infty,-1]\cup[1,+\infty)\ \rightarrow\ \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x|-1}$.

Функција f није 1-1-функција и пресликава $(\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ на скуп свих ненегативних бројева $\mathbb{R}_0^+$.

– Функција f је парна: $f(-x)=\sqrt{|-x|-1}=\sqrt{|x|-1}=f(x)$.

– Функција f је ограничена одоздо са 0 (или било којим негативним бројем): $0\leqslant f(x)$. Није ограничена одоздо (па није ни ограничена).

– Функција f није периодична.

– Нуле функције f су -1 и 1. Функција f је позитивна на $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

– Функција f је строго растућа на $[1,+\infty)$: $1\leqslant x_1<x_2\Rightarrow\sqrt{|x_1|-1}<\sqrt{|x_2|-1}$. Функција f је строго опадајућа на $(-\infty,-1]$: $x_1<x_2\leqslant-1\Rightarrow\sqrt{|x_1|-1}>\sqrt{|x_2|-1}$.

– Функција f је строго конкавна на $(\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$. □

Данас, у ери рачунара, најједноставнији начин да се дође до графика неке функције јесте употреба неког од многобројних софтверских пакета. Један од најпознатијих је програмски пакет MATHEMATICA, који је развијен у софтверској компанији Wolfram Research[2]. Прва верзија појавила се 1988. године, а данас је актуелна верзија 7.0. MATHEMATICA је математички софтвер (програмски језик и пакет) за симболичко и нумеричко решавање проблема из разних области математике, физике и других наука, технологије, финансија, медицине, истраживања, образовања итд. MATHEMATICA има и одличан систем за графичко приказивање података и функција. Ми нећемо причати о могућностима пакета MATHEMATICA када је графика у питању, јер су оне заиста огромне, већ ћемо дати само најједноставнији облик функције за цртање графика функције $y=f(x)$, $x\in(xmin,xmax)$: `Plot[f,{x,xmin,xmax}]`. На пример, `Plot[Sin[x^2],{x,-10,10}]` даје график функције $\sin x^2$ на интервалу $(-10,10)$.

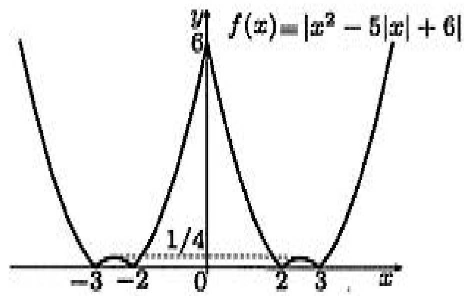
Велики број најразличитијих задатака једноставније је решавати ако се имају у виду графици одговарајућих функција. Међу наредним задацима има и оних који су последњих година постали типични за пријемне испите на факултетима на којима се полаже математика.

3. Једначина $|x^2-5|x|+6|=a$, $a\in\mathbb{R}$ има максималан број решења ако је:

А) $a=\dfrac{1}{4}$; **Б)** $a\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$; **В)** $a=0$; **Г)** $a\in(6,+\infty)$; **Д)** $a\in\left[\dfrac{1}{4},6\right)$.

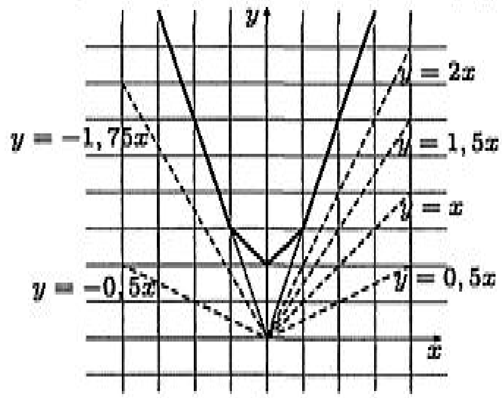
Решење. Ако нацртамо график функције $f(x)=|x^2-5|x|+6|$ моћи ћемо одмах да прочитамо решење. График функције f можемо нацртати тако што најпре нацртамо график функције $f_1(x)=x^2-5x+6$, затим из њега одмах добијамо график за $f_2(x)=f_1(|x|)=|x|^2-5|x|+6=x^2-5|x|+6$, и најзад цртамо $f(x)=|f_2(x)|=|x^2-5|x|+6|$. □

[2] http://www.wolfram.com/



4. Одредити скуп свих вредности реалног параметра a за које једначина $|x-1|+|x|+|x+1|=ax$ нема решења.

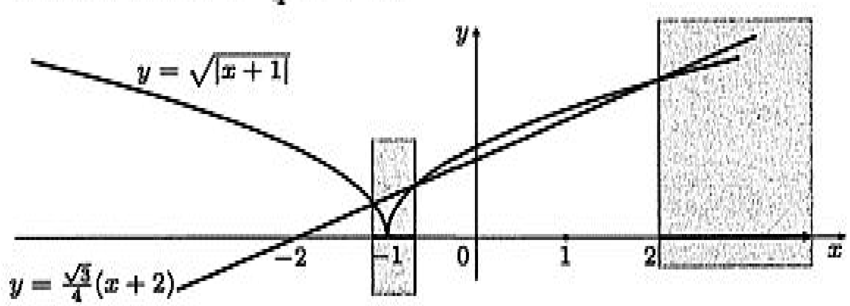
Решење. График функције $f(x)=|x-1|+|x|+|x+1|$, приказан на слици испод, нема заједничких тачака са правама $y=ax$ ако и само ако $a\in(-3,3)$. □



5. Колико реалних решења има једначина $100\sin x=x$?

6. Решити неједначину $\sqrt{3}(x+2)\geqslant 4\sqrt{|x+1|}$.

Решење. Ако у истом координатном систему нацртамо график функције $y=\sqrt{|x+1|}$ и праву $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x+2)$, на добијеној слици ћемо одмах уочити интервале који представљају решења неједначине. Једино што треба да урадимо јесте да уочимо „зоне“ у којима је крива $y=\sqrt{|x+1|}$ испод праве $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x+2)$.



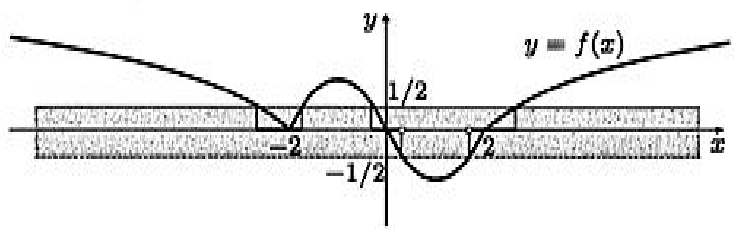
Одговарајуће интервале прецизно одређујемо налажењем тачака пресека криве и праве. Решавањем једначине $\sqrt{3}(x+2)=4\sqrt{x+1}$ у скупу $[-1,+\infty)$ и једначине $\sqrt{3}(x+2)=4\sqrt{-x-1}$ у скупу $[-2,-1]$ (када је $x+2<0$ неједначина сигурно нема решења) добијамо да унија $\left[\frac{-14+4\sqrt{7}}{3}, -\frac{2}{3}\right] \cup [2, +\infty)$ представља решење дате неједначине. $\square$

7. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана је на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(|x|-1), & |x| \geqslant 2, \\ x(|x|-2), & |x| < 2. \end{cases}$$

1) Испитати особине и нацртати график дате функције.
2) Одредити број решења једначине $f(x) = a$, ако је a реалан параметар.
3) Решити неједначину $-\frac{1}{2} < f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
4) Решити једначине: а) $f(x) = -x$; б) $f(x) = x$; ; в) $f(x) = x^3$.

Решење. 3) Уочавањем дела графика $y = f(x)$ који се налази унутар „траке" $-\frac{1}{2} < y \leqslant \frac{1}{2}$ једноставно долазимо до решења.



Границе интервала који садрже решења неједначине одређујемо решавањем одговарајућих једначина.

Решење једначине $\log_2(-x-1) = \frac{1}{2}$ у $(-\infty, -2]$ је $-\sqrt{2}-1$.

Решења једначине $-x^2 - 2x = \frac{1}{2}$ у $(-2, 0)$ су $\frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Решења једначине $x^2 - 2x = -\frac{1}{2}$ у $[0, 2)$ су $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Решење једначине $\log_2(x-1) = \frac{1}{2}$ у $[2, +\infty)$ је $\sqrt{2}+1$.

Дакле, скуп решења неједначине је

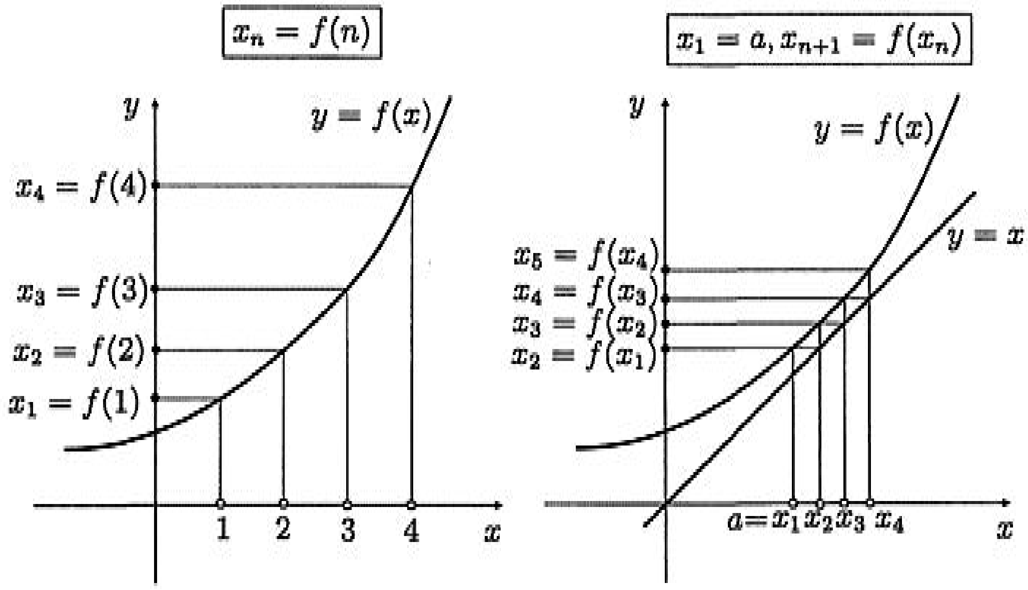
$$\left[-\sqrt{2}-1, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}+1\right]. \quad \square$$

Познавање својстава и графика функција о којима говоримо могу нам доста помоћи у раду са низовима реалних бројева. Тако, уколико је низ (x_n) задат на један од следећих начина:

1° $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, или

2° $x_1 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$,

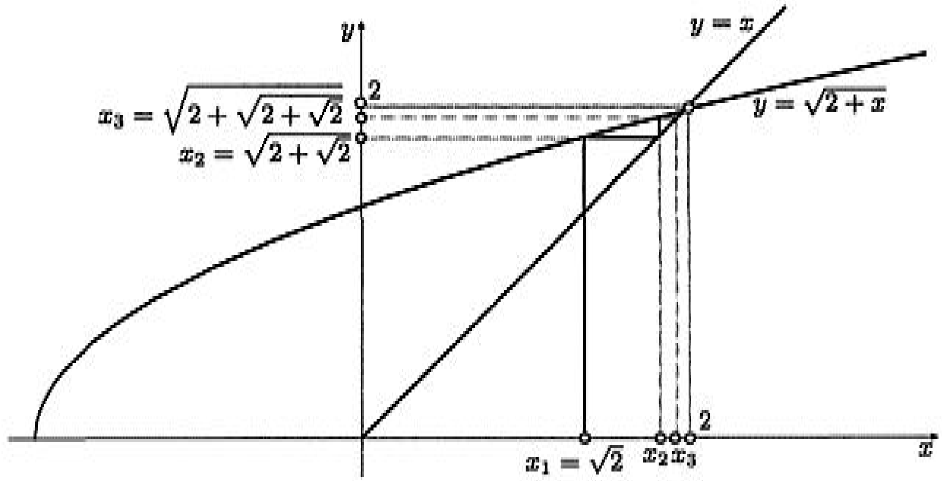
при чему је f нека дата функција, често је могуће наслутити разне особине низа (x_n) уз помоћ графика функције f. Другим речима, график функције f можемо искористити за геометријско представљање чланова датог низа.



8. Наћи, ако постоји, бар један број a такав да за сваки природан број n важи

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} < a.$$

Решење. Можемо ли некако да наслутимо да је решење било који број већи од 2? Можемо уколико „графички" размотримо постављени проблем. Није тешко видети да бројеве $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ генеришу једнакости: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n \in \mathbb{N}$ (тзв. рекурентне једнакости). Очигледно, у овом генерисању је главна функција $x \mapsto \sqrt{2+x}$, $x \geqslant -2$. Нацртајмо њен график и у истом координатном систему нацртајмо и праву $y = x$.



Налазећи чланове низа на x, односно y оси, наслућујемо да је 2 најмањи међу траженим бројевима.

Наравно, морамо и строго да докажемо да за сваки природан број n важи

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} < 2.$$

Индукцијом по n, доказаћемо да је $x_n < 2$, за сваки природан број n. Заиста, $x_1 = \sqrt{2} < 2$, а из $x_n < 2$, следи да је $x_{n+1} < \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$. □

Напомена. Са слике се наслућује и да је

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} = 2.$$

9. Дат је низ (x_n) на следећи начин: $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}$. Нађи, ако постоји, реалан број који је мањи од свих чланова датог низа са парним индексима $(x_2, x_4, x_6, \ldots)$ и већи од свих чланова са непарним индексима $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$.

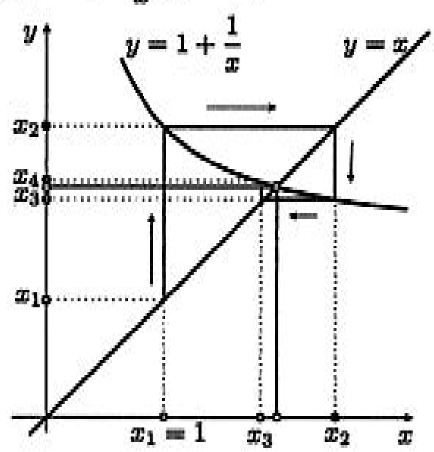
Решење. Ако експлицитно одредимо неколико првих чланова низа,

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\ldots$
1		$\frac{3}{2} = 1,5$		$\frac{8}{5} = 1,6$		$\frac{21}{13} = 1,615$	$\ldots$
	2		$\frac{5}{3} = 1,666\ldots$		$\frac{13}{8} = 1,625$		$\ldots$

добијамо представу о приближној вредности траженог броја, али га, овим путем не можемо одредити.

Нека је $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Чланови датог низа су редом: $1, f(1), f(f(1)), f(f(f(1))), \ldots$.

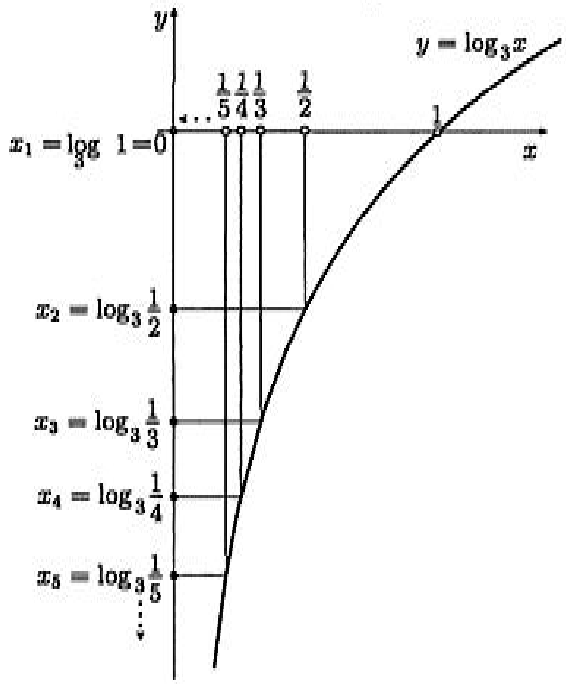
Одредимо ове чланове графички тако што најпре у истом координатном систему конструишемо график функције $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ и $y = x$.



Видимо да се све више „приближавамо" пресеку графика: $y = 1 + \frac{1}{x}, x > 0$, и $y = x$, тј. позитивном решењу једначине $x = 1 + \frac{1}{x}$ или $x^2 - x - 1 = 0$: $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} (\approx 1,61803)$. Број a је тражени број. Ако је $x_n < a$ (на пример $x_1 = 1$), тада је $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{a}$, па је $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} > 1 + \frac{1}{a} = a$. Уколико је $x_n > a$, тада је $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{a}$, па је $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} < 1 + \frac{1}{a} = a$. □

Поред познавања графика, познавање основних особина функција могу бити од пресудног значаја при решавању задатака.

На пример, велики број особина низа $x_n = \log_3 \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, можемо уочити са слике.



Низ (x_n) је ограничен одозго, али није одоздо, па није ограничен; низ (x_n) је строго опадајући.

10. Који број је већи

$$\frac{2,00000000004}{1,00000000004^2 + 2,00000000004}$$

или

$$\frac{2,00000000002}{1,00000000002^2 + 2,00000000002}?$$

Решење. Дати бројеви су вредности израза $\frac{1+x}{1+x+x^2}$, редом, за $x = 1,00000000004$, односно $x = 1,00000000002$. Према томе, довољно је да испитамо монотоност функције $x \mapsto \frac{1+x}{1+x+x^2}, x > 0$.

Ако је $a > b > 0$, тада је

$$\frac{1+a}{a^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b} = \frac{1+b}{b^2},$$

па је

$$\frac{a^2}{1+a} = \frac{1}{\frac{1+a}{a^2}} > \frac{1}{\frac{1+b}{b^2}} = \frac{b^2}{1+b}.$$

Из последње неједнакости следи да је

$$\frac{1+a+a^2}{1+a} = 1 + \frac{a^2}{1+a} > 1 + \frac{b^2}{1+b} = \frac{1+b+b^2}{1+b},$$

па је, најзад,

$$\frac{1+a}{1+a+a^2} = \frac{1}{\frac{1+a+a^2}{1+a}} < \frac{1}{\frac{1+b+b^2}{1+b}} = \frac{1+b}{1+b+b^2}. \qquad \square$$

11. Решити једначину $3^x + x = 3^3 + 3$.

Решење. Није тешко видети да је 3 једно решење постављене једначине. Но, да ли је то и једино решење? Да јесте потврђује нам строга монотоност функције $f(x) = 3^x + x$. Знамо да је експоненцијална функција $x \mapsto 3^x$ строго растућа.

Дакле, ако је $x > 3$, онда је $3^x > 3^3$, па је и $3^x + x > 3 + 3$.

Уколико је $x < 3$, онда је и $3^x < 3^3$, па је и $3^x + x < 3 + 3$. $\square$

Идеја примењена у претходном задатку је много општија. Наиме, важи следећа теорема.

Теорема. Ако је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго растућа функција и a ма који реалан број, онда једначина $f(x) = f(a)$ има јединствено решење a.

12. (Јангова неједнакост) Нека је $p > 0$, $q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказати да за свака два позитивна реална броја u и v важи неједнакост

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $u^p = v^q$.

Решење. Нека је $x_1 = \log_2 u^p$ и $x_2 = \log_2 v^q$. Тада је $u = 2^{\frac{x_1}{p}}$ и $v = 2^{\frac{x_2}{q}}$. Нека је $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ и $\lambda_2 = \frac{1}{q}$. Тада је $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Икористимо сада конвексност експоненцијалне функције $f(x) = 2^x$, тј. неједнакост

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

односно

$$2^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \leqslant \lambda_1 2^{x_1} + \lambda_2 2^{x_2}.$$

Из ове неједнакости директно следи тражена неједнакост:

$$uv = 2^{\lambda_1 x_1} \cdot 2^{\lambda_2 x_2} = 2^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \leqslant \lambda_1 2^{x_1} + \lambda_2 2^{x_2} = \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.$$

Јангова неједнакост је основа за доказивање многих важних неједнакости.

13. Доказати чувену Коши-Шварцову неједнакост: за произвољне позитивне реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ важи

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Решење. Нека је $X = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ и $Y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Примењујући Јангову неједнакост за $p = q = 2$ на бројеве u_i и v_i, при чему је $u_i = \dfrac{x_i}{X}$ и $y_i = \dfrac{y_i}{Y}$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$, добићемо $u_iv_i \leqslant \frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}y_i^2$, односно

$$\frac{x_i}{X} \cdot \frac{y_i}{Y} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2}{X^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i^2}{Y^2}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Сабирањем свих n неједнакости добијамо

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{X} \cdot \frac{y_1}{Y} + \cdots + \frac{x_n}{X} \cdot \frac{y_n}{Y} &\leqslant \frac{1}{2X^2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) + \frac{1}{2Y^2}\left(y_1^2 + \cdots + y_n^2\right) \\ &= \frac{1}{2X^2} \cdot X^2 + \frac{1}{2Y^2} \cdot Y^2 = 1.\end{aligned}$$

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2008/09 година