Jedan teorem u vezi s pravokutnim trokutom

Šefket Arslanagić, Sarajevo

Još u VII. razredu osnovne škole upoznali smo poznati **Pitagorin**[1] **poučak** koji glasi: *Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta tj.* $c^2 = a^2 + b^2$.

Dokazat ćemo sljedeći

Teorem. Trokut ABC je pravokutan ako i smo ako vrijedi relacija

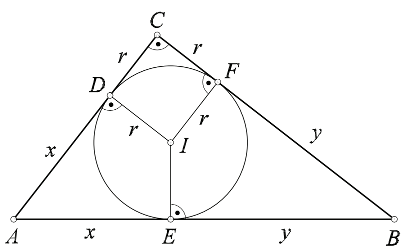
$$a + b + c = 4R + 2r, \tag{1}$$

gdje su a, b, c, duljine stranica trokuta, a R i r polumjeri opisane i upisane mu kružnice.

Dokaz. 1° Jedan smjer se lako dokaže. Ako je trokut pravokutan, dokazat ćemo da vrijedi relacija (1).

Kako su stranice trokuta, tangente upisane mu kružnice vrijedi:

$$|AE| = |AD| = x, \quad |BE| = |BF| = y, \quad |CF| = |CD| = |ID| = |IF| = r.$$



Sada je

$$r + x = b, \quad r + y = a, \quad x + y = c,$$

a odavde

$$a + b + c = 2r + 2(x + y). \tag{2}$$

U pravokutnom trokutu imamo $c = 2R$, tj. $x + y = 2R$, pa iz (2) dobijemo relaciju (1), što je i trebalo dokazati.

2° Dokažimo sada obrat ove tvrdnje. Pretpostavimo da vrijedi relacija (1). Treba dokazati da je trokut ABC pravokutan.

Iz poučka o sinusima

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

za naš trokut dobivamo

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma.$$

[1] Pitagora je starogrčki matematičar iz VI. stoljeća prije nove ere.

Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2 + \frac{r}{R}. \qquad (3)$$

Dokazat ćemo da za svaki trokut vrijedi jednakost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}. \qquad (4)$$

Najprije ćemo dokazati da za svaki trokut vrijedi jednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}. \qquad (5)$$

Koristit ćemo poznatu relaciju $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Prema kosinusovom poučku imamo

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

a odavde

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\\ &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\\ s &= \frac{a+b+c}{2}.\end{aligned}$$

Analogno se dobiva

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Odavde, koristeći formule za površinu P trokuta:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{(Heronova formula)},$$

$$R = \frac{abc}{4P}, \qquad r = \frac{P}{s},$$

dobivamo

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{P^2}{sabc} = P\cdot\frac{P}{sabc} = \frac{abc}{4R}\cdot\frac{rs}{sabc} = \frac{r}{4R},$$

tj. vrijedi jednakost (5).

Sada imamo

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 &= \cos\alpha + \cos\beta - (1-\cos\gamma)\\ &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\ &= 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\\ &= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

odakle zbog (5) slijedi jednakost (4).

Nadalje, iz (3) i (4) dobivamo

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma. \qquad (6)$$

Imamo ove jednakosti

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{te}$$

$$\cos\beta+\cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \quad \text{i} \quad \sin\beta+\sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

te, radi $\beta+\gamma = 180^\circ-\alpha$,

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad \sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Iz (6) sada dobijemo

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \text{tj.}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 0,$$

te

$$\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = 0,$$

a odavde

$$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{ili} \quad \cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \text{ili} \quad -2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{4} = 0,$$

$$\frac{\alpha}{2} = 45^\circ \quad \text{ili} \quad \alpha+\beta = \gamma \quad \text{ili} \quad \alpha+\gamma = \beta.$$

Napokon, iz $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ slijedi

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{ili} \quad \gamma = 90^\circ \quad \text{ili} \quad \beta = 90^\circ,$$

što je trebalo dokazati.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Neke nejednakosti u pravouglom trouglu*, Triangle (Serija B), Vol. **4**(2000), 157–163.

[2] Š. Arslanagić, *Neke nejednakosti u vezi trougla*, Triangle, Vol. **2**(1998), 169–175.

[3] O. Bottema, and others, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] A. Marić, *Planimetrija – zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.

[5] S. Mintaković, M. Franić, Trigonometrija, Element, Zagreb, 1999.