БРАНКО ТРПЕНОВСКИ
НАУМ ЦЕЛАКОСКИ
ЃОРЃИ ЧУПОНА

ВИША МАТЕМАТИКА

КНИГА IV

ОДБРАНИ ДЕЛОВИ

УНИВЕРЗИТЕТСКИ
УЧЕБНИК

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ, 1994

Уредник:
Кирил Милчев

Рецензенти:
д-р **Пано Кржовски,** редовен професор на Машинскиот факултет – Скопје
д-р **Кирил Стојменовски,** редовен професор на Технолошко-металуршкиот факултет – Скопје

Со одлука на Наставно-научниот совет на Машинскиот факултет во Скопје под број 08-1440/1 од 04.07.1994 година се одобрува употребата на оваа книга како основен универзитетски учебник.

ПРЕДГОВОР

Книгава е четврта во низата книги под наслов "Виша математика". Тие се резултат на преработка на учебникот "Предавања по виша математика" од истите автори, којшто (во три тома) излезе од печат во 1970-71 година. Првите три книги се посветени, главно, на диференцијалното и интегралното сметање кај реалните функции од една и повеќе реални променливи, и битно се разликуваат од учебникот "Предавања по виша математика". За разлика од нив, четвртава книга содржи разновиден материјал, а имено, секоја од нејзините четири глави VII - X обработува посебна област од математиката. Поголемиот дел од материјалот во првите три глави VII - IX е преземен од споменатиот учебник "Предавања по виша математика", а нови се разделите VII.1.5 (Обопштени инверзии на матрици), VII.3.5 (Простори со скаларен производ), VII.3.5 (Ортогонални системи вектори), параграфот IX.9 (Комплексни матрици) и извесен број задачи во вежбите. Последната глава X претставува преработен и проширен материјал од §§ 42, 43, 44 во "Предавања по виша математика". Задачите гледани како целина, имаат вежбовен карактер, но еден дел од нив се користи за докажување својства што се само формулирани во работниот дел, а за изнесување нови својства.

И оваа книга (како претходните три) им е наменета, пред сè, на студентите од Машинскиот факултет во Скопје, а се надеваме дека ќе ја користат и студентите од другите технички факултети, како и студенти од некои групи на Природно-математичкиот факултет. Авторите ќе сметаат дека успешно ја извршиле својата задача, ако студентите почувствуваат потреба да ја консултираат книгава и откако ќе ги положат предвидените испити по математика, а и како дипломирани инженери.

Скопје, јули 1994 *Авторите*

СОДРЖИНА

Предговор iii

Гл. VII. ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

VII. 1. МАТРИЦИ
1. 1. Правоаголни матрици. 1
1. 2. Множење на матрици. 3
1. 3. Квадратни матрици. 5
1. 4. Системи линеарни равенки. 7
1. 5. Обопштени инверзии на матрици. 8
1. 6. Вежби. 10
VII. 2. ДЕТЕРМИНАНТИ
2. 1. Детерминанти од n-ти ред. 18
2. 2. Својства на детерминантите 21
2. 3. Симетрија меѓу редиците и колоните 24
2. 4. Минори и алгебарски комплементи 27
2. 5. Инверзни матрици 29
2. 6. Крамерово правило 32
2. 7. Вежби. 35
VII. 3. ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ
3. 1. Дефиниција и примери. 40
3. 2. Неколку општи својства 42
3. 3. Потпростори. 44
3. 4. Линеарни пресликувања 45
3. 5. Простори со скаларен производ. 47
3. 6. Вежби 48
VII. 4. КОНЕЧНОДИМЕНЗИОНАЛНИ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ
4. 1. Линеарна зависност 52
4. 2. Конечнодимензионални векторски простори 55
4. 3. Линеарни пресликувања и матрици. 58
4. 4. Координатни системи и нивни трансформации 61
4. 5. Ортогонални системи вектори 64
4. 6. Вежби 66
VII. 5. ТЕОРЕМА НА КРОНЕКЕР-КАПЕЛИ
5. 1. Ранг на систем вектори. 79
5. 2. Ранг на матрици. 81
5. 3. Теорема на Кронекер-Капели 84
5. 4. Вежби. 88
VII. 6. СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ И СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ
6. 1. Полиноми од матрици 98
6. 2. Теорема на Хамилтон-Кели 99
6. 3. Трага на матрица. 101
6. 4. Сопствени вредности и сопствени вектори на матрица 102
6. 5. Вежби. 105

Гл. VIII. РЕДОВИ

VIII. 1. КОНВЕРГЕНТНИ РЕДОВИ
1. 1. Дефиниција и општи својства 111
1. 2. Редови со позитивни членови 114
1. 3. Неколку критериуми за конвергенција 116
1. 4. Вежби 118
VIII. 2. РЕДОВИ ЧИИ ЧЛЕНОВИ ИМААТ ПРОИЗВОЛНИ ЗНАЦИ
2. 1. Наизменични редови 121
2. 2. Апсолутно конвергентни редови 122
2. 3. Неколку својства на апсолутно конвергентни редови 123
2. 4. Производ на апсолутно конвергентни редови 125
2. 5. Вежби 127
VIII. 3. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ
3. 1. Функционални низи. Рамномерна конвергенција 128
3. 2. Функционални редови 131
3. 3. Вежби 133
VIII. 4. СТЕПЕНИ РЕДОВИ
4. 1. Радиус на конвергенција 136
4. 2. Интегрирање и диференцирање на степените редови 137
4. 3. Развивање на функции во степени редови 140
4. 4. Вежби 142
VIII. 5. ПРИМЕНА НА СТЕПЕНИТЕ РЕДОВИ ЗА РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ
5. 1. Метод на степени редови 144
5. 2. Лежандрова диференцијална равенка 148
5. 3. Метод на Фробениус 150
5. 4. Беселова диференцијална равенка 153
5. 5. Вежби 155
VIII. 6. ФУРЈЕОВИ РЕДОВИ
6. 1. Тригонометриски редови 159
6. 2. Развивање на функции во фурјеови редови 161
6. 3. Вежби 167
VIII. 7. ФУРЈЕОВ МЕТОД ЗА РЕШАВАЊЕ ПАРЦИЈАЛНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ
7. 1. Методот на Фурје 170
7. 2. Бранова равенка 170
7. 3. Равенка на топлоспроводливост 173
7. 4. Вежби 175

Гл. IX. КОМПЛЕКСНИ ФУНКЦИИ

IX. 1. ПОЛЕ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ
1. 1. Конструкција на комплексните броеви 179
1. 2. Поле на комплексните броеви 180
1. 3. Геометриска интерпретација на комплексните броеви 182
1. 4. Моаврова формула 183
1. 5. Коренување 184
1. 6. Вежби 186

IX. 2. АЛГЕБАРСКИ РАВЕНКИ
2. 1. Поим за алгебарска равенка. Биномни и триномни равенки 190
2. 2. Равенка од трет степен 191
2. 3. Равенка од четврти степен 193
2. 4. Забелешка за алгебарските равенки 194
2. 5. Вежби 194
IX. 3. КОМПЛЕКСНИ ФУНКЦИИ
3. 1. Комплексна функција од еден реален аргумент 195
3. 2. Експоненцијална функција 197
3. 3. Линеарни диференцијални равенки од втор ред со константни коефициенти 199
3. 4. Комплексна функција од комплексна променлива 201
3. 5. Вежби 204
IX. 4. ИЗВОДИ
4. 1. Граници и непрекинатост 208
4. 2. Извод на комплексна функција 209
4. 3. Коши-Риманови услови 212
4. 4. Конформни пресликувања 217
4. 5. Вежби 219
IX. 5. ИНТЕГРАЛИ
5. 1. Линиски интеграли: својства и примери 224
5. 2. Основна теорема на Коши 227
5. 3. Кошиева интегрална формула 230
5. 4. Вежби 233
IX. 6. РЕДОВИ
6. 1. Низи и редови од комплексни броеви 236
6. 2. Функционални низи и редови 238
6. 3. Степени редови. Тејлоров ред на функција 241
6. 4. Лоранов ред 244
6. 5. Вежби 247
IX. 7. ОСТАТОЦИ
7. 1. Изолирани сингуларни точки 249
7. 2. Остатоци 250
7. 3. Пресметување на реални несвојствени интеграли 253
7. 4. Вежби 256
IX. 8. ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА
8. 1. Дефиниција, својства и примери 258
8. 2. Инверзна лапласова трансформација 263
8. 3. Примена за решавање диференцијални равенки 266
8. 4. Хомогена диференцијална равенка со константни коефициенти 268
8. 5. Фурјеов интеграл и фурјеова трансформација 270
8. 6. Вежби 273
IX. 9. КОМПЛЕКСНИ МАТРИЦИ
9. 1. Комплексни векторски простори 278
9. 2. Комплексни матрици 282
9. 3. Функции од матрици 288
9. 4. Вежби 296

Гл. X. МЕТРИЧНИ ПРОСТОРИ

X. 1. ОТВОРЕНИ И ЗАТВОРЕНИ МНОЖЕСТВА ВО МЕТРИЧНИ ПРОСТОРИ
1. 1. Метрички простори 301
1. 2. Отворени множества 305
1. 3. Затворени множества 307
1. 4. Тополошки простори 310
1. 5. Вежби 311
X. 2. КОМПЛЕТНИ И КОМПАКТНИ ПРОСТОРИ
2. 1. Конвергентни низи во метричен простор 316
2. 2. Комплетни простори 319
2. 3. Компактни простори 321
2. 4. Конвергентни низи и редови во нормирани векторски простори 323
2. 5. Вежби 325
X. 3. НЕПРЕКИНАТИ ПРЕСЛИКУВАЊА
3. 1. Непрекинати пресликувања на метрични простори 327
3. 2. Непрекинати реални функции со компактен домен 330
3. 3. Вежби 334
X. 4. ТЕОРЕМА ЗА НЕПОДВИЖНА ТОЧКА И ПРИМЕНА
4. 1. Теорема за неподвижна точка 337
4. 2. Примена кај системите линеарни равенки 340
4. 3. Локална теорема за неподвижна точка 342
4. 4. Егзистенција и единственост на решението на диференцијална равенка од прв ред 345
4. 5. Егзистенција на имплицитни функции 347
4. 6. Вежби 350

Литература 353
Показател на поими и имиња 354

VII. ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

Во оваа глава се врши натамошна анализа на поимите вектор, детерминанта и систем линеарни равенки, што се разгледувани и порано, главно во Гл. IV. Скоро во целата глава, основна улога имаат матриците.

VII. 1. Матрици

Во овој параграф ќе се запознаеме со почетните елементи од теоријата на матриците и детерминантите.

1. 1. Правоаголни матрици

Нека се дадени mn реални броеви (при што некои од нив може да се еднакви), распоредени во следнава правоаголна шема:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Шемата (1) се вика ***матрица од облик*** $m \times n$, или $m \times n$***-матрица***, а броевите $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ - ***елементи*** на матрицата. Матриците обично ги означуваме со големите букви од латиницата: **A,B,...** Хоризонталните низи во матрицата (1) ги викаме ***редици***, а вертикалните низи ***колони*** (или ***столпци***) на матрицата. За пократко, матрицата (1) ја означуваме со $[a_{ij}]_{m \times n}$ или само со $[a_{ij}]$, ако е јасно за каков вид матрици се работи.

Матрица што има само една редица (т.е. има форма $1 \times n$):

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

се вика ***редична матрица*** или ***вектор-редица***. Матрица пак што има само една колона (т.е. има форма $m \times 1$): $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

се вика ***колонична*** (т.е. ***столбична***) матрица или ***вектор-колона***. (Но, за $m = n = 1$, натаму нема да правиме разлика меѓу 1×1-матрицата $A = [a]$ и реалниот број a.)

За две матрици $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ се вели дека се ***еднакви*** акко имаат иста форма $(m \times n)$ и соодветните елементи им се еднакви, т.е.

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ за сите } i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ќе дефинираме две операции: ***множење на матрица со број*** и ***собирање на две матрици***:

$$a[a_{ij}] = [aa_{ij}]; \tag{2}$$

$$[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}. \tag{3}$$

Да забележиме дека *се собирааш машрици само од исш облик*, а собирањето се врши така што се собираат соодветните елементи.

Да разгледаме еден пример:

1) Ако $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, тогаш

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3/2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

но ни **A** и **C**, ни **B** и **C** не можат да се соберат, зашто немаат ист облик.

Да го означиме со $M_{m,n}$ множеството од сите матрици од облик $m \times n$. Ќе докажеме две својства во врска со погоре дефинираните операции:

1°. *$M_{m,n}(+)$ е комушашивна груџа.*

2°. *За секоја двојка реални броеви $a, b \in \mathbb{R}$ и кои било машрици $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{m,n}$ шочни се равенсшваша:*

$$(a+b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}, \quad (ab)\mathbf{A} = a(b\mathbf{A}), \quad a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}.$$

Д о к а з. Дека збирот на две матрици $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{m,n}$ е пак матрица од облик $m \times n$ следува од (3). Нека $[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}] \in M_{m,n}$. Имајќи предвид дека собирањето на реалните броеви е комутативно и асоцијативно, добиваме:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}],$$

$$([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] =$$

$$[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]),$$

што значи дека собирањето на матрици е комутативна и асоцијативна операција.

Матрицата $\mathbf{O}_{m,n}$ со форма $m\times n$ при која сите елементи се нула, т.е. $\mathbf{O}_{m,n}=[0]_{m\times n}$, се вика ***нулта*** $m\times n$***-матрица***. За неа и за која било $m\times n$-матрица $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ добиваме:

$$\mathbf{A}+\mathbf{O}_{m,n}=[a_{ij}]+[0]_{m\times n}=[a_{ij}+0]=[a_{ij}]=\mathbf{O}_{m,n}+\mathbf{A},$$

т.е. $\mathbf{O}_{m,n}$ е неутрален елемент во $M_{m,n}$.

Потоа, нека $\mathbf{A}=[a_{ij}]\in M_{m,n}$; да ја определиме матрицата $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ со $b_{ij}=-a_{ij}$. Тогаш имаме:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]=[0]_{m\times n}=\mathbf{O}_{m,n}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

па $\mathbf{B}$ е инверзен елемент на $\mathbf{A}$ во однос на операцијата собирање. Вака определената матрица $\mathbf{B}$ ќе ја означуваме со $-\mathbf{A}$ и ќе ја викаме ***спротивна*** на $\mathbf{A}$. Значи: $-[a_{ij}]=[-a_{ij}]=(-1)[a_{ij}]$.

Со тоа го докажавме својството 1°. На читателот нема да му биде тешко сам да го докаже својството 2°. □

1. 2. Множење на матрици

Нека $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{B}=[b_{ij}]_{n\times k}$. Под ***производ на матриците*** $\mathbf{A}$ ***и*** $\mathbf{B}$ ја подразбираме матрицата $\mathbf{C}=[c_{ij}]_{m\times k}$ определена со:

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C}=[c_{ij}]_{m\times k} \Leftrightarrow c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}. \tag{4}$$

Според тоа, *производот* $\mathbf{AB}$ *постои ако и само ако бројот на колоните на матрицата* $\mathbf{A}$ *е еднаков со бројот на редиците на матрицата* $\mathbf{B}$. Притоа, за да се добие елементот c_{ij} од матрицата $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$, потребно е да се помножат соодветните елементи од редицата i на $\mathbf{A}$ и колоната j на $\mathbf{B}$, а потоа тие производи да се соберат. Нагледно тоа може да се претстави на следниов начин:

$$\begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots b_{1j}\cdots \\ \cdots b_{2j}\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots b_{nj}\cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\ c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

2) На пример:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot1+0\cdot2+(-1)\cdot3 & 1\cdot(-2)+0\cdot0+(-1)\cdot1 \\ 3\cdot1+2\cdot2+(-2)\cdot3 & 3\cdot(-2)+2\cdot0+(-2)\cdot1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Ќе докажеме неколку својства за производот на матрици:

3°. *Нека* $\mathbf{A}=[a_{ij}]$, $\mathbf{A}'=[a'_{ij}]$, $\mathbf{A}''=[a''_{ij}]$ *се матрици од облик* $m\times n$, $\mathbf{B}=[b_{ij}]$, $\mathbf{B}'=[b'_{ij}]$, $\mathbf{B}''=[b''_{ij}]$ *матрици од облик* $n\times k$ *и* $\mathbf{C}=[c_{ij}]$ *матрица од облик* $k\times s$. *Тогаш*

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C},\quad \mathbf{A}(\mathbf{B}'+\mathbf{B}'')=\mathbf{AB}'+\mathbf{AB}'',\quad (\mathbf{A}'+\mathbf{A}'')\mathbf{B}=\mathbf{A}'\mathbf{B}+\mathbf{A}''\mathbf{B},$$

т.е. множењето на матрици е асоцијативна операција и дистрибутивна спрема собирањето.

Д о к а з. Ако ставиме $[d_{ij}]=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, $[d'_{ij}]=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ добиваме:

$$d_{ij}=a_{i1}(b_{11}c_{1j}+\cdots+b_{1k}c_{kj})+a_{i2}(b_{21}c_{1j}+\cdots+b_{2k}c_{kj})+\cdots+a_{in}(b_{n1}c_{1j}+\cdots+b_{nk}c_{kj})=$$
$$=(a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{in}b_{n1})c_{1j}+\cdots+(a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{1k}+\cdots+a_{in}b_{nk})c_{kj}=d'_{ij}$$

значи $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

На ист начин се докажуваат и другите две равенства. □

Матрицата $\mathbf{E_n}=[e_{ij}]$ со форма $n\times n$, таква што $e_{ii}=1$ и $e_{ij}=0$ за $i\neq j$, т.е.

$$\mathbf{E}_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n},$$

се вика ***единична матрица од*** n***-ти ред.***

4°. *Нека* $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ *е произволна* $m\times n$*-матрица,* $\mathbf{O}_{k,s}$ *е нултата* $k\times s$*-матрица и* $\mathbf{E}_k=[e_{ij}]$ *е единичната матрица од* k *-ти ред. Тогаш:*

$$\mathbf{E}_m\mathbf{A}=\mathbf{A}=\mathbf{AE}_n,\quad \mathbf{O}_{r,m}\mathbf{A}=\mathbf{O}_{r,n},\quad \mathbf{AO}_{n,r}=\mathbf{O}_{m,r}.$$

Д о к а з. Ако ставиме $\mathbf{E}_m\mathbf{A}=\mathbf{B}=[b_{ij}]$ и $\mathbf{O}_{r,m}\mathbf{A}=\mathbf{C}=[c_{ij}]$, ќе имаме:

$$b_{ij}=e_{i1}a_{1j}+\cdots+e_{ii}a_{ij}+\cdots+e_{im}a_{mj}=a_{ij},$$
$$c_{ij}=0\cdot a_{1j}+0\cdot a_{2j}+\cdots+0\cdot a_{mj}=0$$

т.е. $\mathbf{B}=\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}=\mathbf{O}_{r,n}$.

Другите две равенства се докажуваат на ист начин. □

5°. *Ако* $\mathbf{A}$ *е матрица од облик* $m\times n$, $\mathbf{B}$ *од облик* $n\times k$ *и* a *произволен реален број, тогаш*

$$a(\mathbf{AB})=(a\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(a\mathbf{B})$$

Доказот му го препуштаме на читателот. □

Друга, често користена (унарна) операција е *транспонирање на матрица*. Имено, нека $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ е $m\times n$-матрица. Ставајќи $a^{\mathrm{T}}_{ij}=a_{ji}$, добиваме $n\times m$-матрица $[a^{\mathrm{T}}_{ij}]=[a_{ji}]$ којашто ја викаме ***транспонирана матрица*** на $\mathbf{A}$ и ја означуваме со $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Значи, транспонираната матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ се добива кога редиците од $\mathbf{A}$ ги поставиме како (соодветни) колони а колоните - како (соодветни) редици. На пример, ако

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 3 & 2 & -5\end{bmatrix}, \text{ тогаш } \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -4 & -5\end{bmatrix}.$$

Лесно се докажува дека:

6°. *Ако* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *се* $m\times n$*-матрици,* $\mathbf{C}$ *е* $n\times p$*-матрица и* a *е реален број, тогаш:*

а) $(a\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=a\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$; б) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$; в) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$; г) $(\mathbf{BC})^{\mathrm{T}}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. □

1. 3. Квадратни матрици

Секоја матрица $\mathbf{A}$ од облик $n\times n$ ќе ја викаме ***квадратна матрица*** од n-ти ред, а множеството од сите такви матрици ќе го означуваме со M_n. Од својствата 1°, 3° и 4° (ако се има предвид и забелешката од I.5.1) се добива дека:

7°. *$M_n(+,\cdot)$ е прстен со единица. Единицата на прстенот е* $\mathbf{E}=\mathbf{E}_n$, *а нулата* $\mathbf{O}=\mathbf{O}_{n,n}$. □

За $n\ge 2$ *прстенот* $M_n(+,\cdot)$ *е некомутативен. Уште повеќе, постојат ненулти матрици* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *чиј производ е нула.* На пример:

3) За

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

имаме

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0 & n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\ne\mathbf{O}, \quad \text{но} \quad \mathbf{BA}=\mathbf{O}.$$

За квадратната матрица $\mathbf{A}$ велиме дека е ***несингуларна***, ако постои матрица $\mathbf{B}$, таква што

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}.$$

Ваквата матрица $\mathbf{B}$ ја викаме ***инверзна*** за $\mathbf{A}$.

Да претпоставиме дека за квадратната матрица $\mathbf{A}$, покрај $\mathbf{B}$, постои матрица $\mathbf{C}$ со својството $\mathbf{AC}=\mathbf{CA}=\mathbf{E}$. Тогаш, користејќи ја асоцијативноста на производот на матрици, добиваме

$$\mathbf{C}=\mathbf{EC}=(\mathbf{BA})\mathbf{C}=\mathbf{B}(\mathbf{AC})=\mathbf{BE}=\mathbf{B}.$$

Според тоа:

8°. *Инверзната матрица за една несингуларна матрица* **A** *е еднозначно определена.* □

Инверзната матрица за **A** ќе ја означуваме со $\mathbf{A}^{-1}$. Да докажеме уште едно својство за несингуларните матрици.

9°. *Ако* **A** *и* **B** *се несингуларни матрици, тогаш* $\mathbf{A}^{-1}$ *и* **AB** *се исто така, несингуларни матрици при што*

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}; \qquad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Д о к а з. Првото равенство следува од дефиницијата за инверзна матрица, а второто од следните равенства:

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AEA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E},$$

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{EB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E}. \ \square$$

За една матрица **A** којашто не е несингуларна велиме дека е ***сингуларна***. Значи, матрицата **A** е сингуларна ако за неа не постои инверзна матрица. Пример за сингуларна матрица е нултата матрица **O**, додека пак единичната матрица **E** е несингуларна, зашто $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$.

Во следниот параграф ќе изнесеме еден критериум за распознавање дали дадена матрица е несингуларна, а потоа и начин за одредување на инверзната матрица за секоја несингуларна матрица. Овде ќе се задржиме на специјалниот случај кога квадратните матрици се од втор ред.

Да забележиме дека:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Од изнесеното следува дека:

10°. *Матрицата* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *е несингуларна ако, и само ако* $\Delta = ad - bc \neq 0$. *Во тој случај инверзната матрица се пресметува по формулата:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

На пример:

4) а) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Да забележиме дека матриците што го исполнуваат условот $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, наречени ***симетрични матрици*** (таква е матрицата под б) во претходниот пример), имаат специјална улога меѓу квадратните матрици.

1. 4. Системи линеарни равенки

Ќе изнесеме една примена на операцијата множење на матрици и на инверзната матрица. Имено, ќе го разгледаме следниот ***систем од n линеарни равенки со n непознати***:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Од системот (5) можеме да ги формираме матриците:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Системот (5) сега можеме да го претставиме во облик на една ***линеарна матрична равенка*** со непозната матрица $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}. \tag{6}$$

Ако матрицата $\mathbf{A}$ е несингуларна, тогаш равенката (6) е еквивалентна со следнава равенка:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \tag{6'}$$

зашто $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{EX} = \mathbf{X}$. Според тоа, *ако ја знаеме инверзната матрица на матрицата* $\mathbf{A}$, *тогаш со помош на* (6') *можеме да ги определиме решенијата на системот* (5).

5) Да го решиме системот линеарни равенки:

$$2x + 3y = 8,$$
$$4x + 7y = 18.$$

Овој систем е еквивалентен со следнава матрична равенка:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix},$$

од каде што се добива:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

т.е. $x = 1, y = 2$.

1. 5.* Обопштени инверзии на матрици

Овде ќе го обопштиме поимот инверзија на квадратна матрица, при што ќе допуштаме соодветните матрици и да не се квадратни.

Ако $\mathbf{A},\mathbf{B}$ се матрици од обликот $m\times n$, $n\times m$ соодветно, такви што

$$\mathbf{AB}=\mathbf{E}_m \tag{7}$$

тогаш велиме дека $\mathbf{A}$ е ***лева инверзија*** на $\mathbf{B}$, а $\mathbf{B}$ ***десна инверзија*** на $\mathbf{A}$.

Подолу ќе формулираме неколку својства чии докази ќе бидат скицирани во наведените вежби. Притоа ќе претпоставуваме дека $\mathbf{A}$ е матрица од облик $m\times n$.

11°. *Ако* $\mathbf{A}$ *има десна* (односно *лева*) *инверзија, тогаш* $m\leq n$ (односно $n\leq m$). (Вежба 29 во 4.6.) □

12°. *Ако* $\mathbf{A}$ *има и лева и десна инверзија, тогаш* $m=n$ *и* $\mathbf{A}$ *е несингуларна.* (Вежба 29 во 4.6.) □

13°. *Ако* $m=n$, *тогаш следните три тврдења за матрицата* $\mathbf{A}$ *се еквивалентни:*

i) $\mathbf{A}$ *е несингуларна.* *ii)* $\mathbf{A}$ *има десна инверзија.*

iii) $\mathbf{A}$ *има лева инверзија.*

Во тој случај $\mathbf{A}^{-1}$ *е единствена лева и единствена десна инверзија на* $\mathbf{A}$. (Вежба 15 во 2.7.) □

Од формулираните својства, покрај другото, следува дека, за квадратни матрици, овде воведените поими за инверзии се совпаѓаат со соодветниот поим дефиниран во 1.3.

Со цел да покажеме дека една правоаголна матрица може да има лева (односно десна) инверзија, ќе го разгледаме следниов едноставен пример.

5) Лесно се проверува дека за кои било броеви a и b, се точни равенствата:

$$\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\a&b\end{bmatrix},$$

од што следува дека една матрица може да има бесконечно многу леви (односно десни) инверзии.

Секое од својствата 11°, 12° имплицира дека матрицата $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ нема лева инверзија, а ќе се увериме во тоа и со директна проверка. Навистина, каква и да е матрицата $\mathbf{C}$ (од облик 3×2), сите елементи на третата колона од матрицата $\mathbf{C}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ се нули, што значи дека таа матрица не е единичната.

Ќе се задржиме сега уште на еден вид инверзии на матрици, што (последните триесетина години) наоѓаат значителна примена во статистиката.[1]

Ако матриците $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ го задоволуваат равенството

$$\mathbf{ABA} = \mathbf{A}, \tag{8}$$

тогаш велиме дека $\mathbf{B}$ е ***обопштена инверзија*** (скратено: ***обинв***) на $\mathbf{A}$.

(Значи, ако $\mathbf{A}^-$ е која било обинв на $\mathbf{A}$, тогаш $\mathbf{AA}^-\mathbf{A} = \mathbf{A}$.)

Точноста на следните пет својства е евидентна.

14°. *Ако* $\mathbf{A}$ *е од облик* $m \times n$ *и ако* $\mathbf{B}$ *е обинв на* $\mathbf{A}$, *тогаш* $\mathbf{B}$ *е од облик* $n \times m$. □

15°. *Секоја матрица од облик* $n \times m$ *е обинв на нултата матрица* $\mathbf{O}_{m,n}$, *но ниедна нулта матрица не може да биде обинв на ненулта матрица.* □

16°. *Ако* $\mathbf{B}$ *е обинв на* $\mathbf{A}$, *тогаш* $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ *е обинв на* $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. □

17°. *Ако* $\mathbf{A}$ *е квадратна несингуларна матрица, тогаш* $\mathbf{A}^{-1}$ *е нејзината единствена обинв.* □

18°. *Ако* $\mathbf{A}$ *е лева инверзија на* $\mathbf{B}$ (*т.е.* $\mathbf{B}$ *е десна инверзија на* $\mathbf{A}$), *тогаш* $\mathbf{B}$ *е обинв на* $\mathbf{A}$, *и* $\mathbf{A}$ *е обинв на* $\mathbf{B}$. □

Во 5.4, ќе покажеме дека:

19°. *Секоја матрица има барем една обинв.* (Вежба 24 во 5.4.) □

Според 13°, една сингуларна квадратна матрица нема лева ни десна инверзија, но според 19°, таа има обинв. Да го илустрираме ова со еден пример.

6) Ако $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, тогаш $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cdot \frac{1}{4}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, од што следува дека $\mathbf{B} = (1/4)\mathbf{A}$ е обинв на $\mathbf{A}$. Исто така, $\mathbf{C} = (1/2)\mathbf{E}$ е обинв на $\mathbf{A}$.

Да го определиме множеството од сите обинв на $\mathbf{A}$. Имено, лесно се покажува дека матрицата $\mathbf{B}$ е обинв на $\mathbf{A}$ акко:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{a+b+c+d}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{9}$$

каде што $a+b+c+d \neq 0$.

Следното својство нè доведува до специјален вид обопштени инверзии, при што се претпоставува дека се работи за матрици над полето од реалните броеви.

20°. *За секоја матрица* $\mathbf{A}$ *постои, еднозначно определена матрица* $\mathbf{A}^+$ *со следниве својства:*

i) $\mathbf{A}^+$ *е обинв на* $\mathbf{A}$; *ii)* $\mathbf{A}$ *е обинв на* $\mathbf{A}^+$;

iii) $(\mathbf{AA}^+)^{\mathrm{T}} = \mathbf{AA}^+$; *iv)* $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$. (вежба 35 од VII.5.4.) □

1) Да се види, на пример, Рао стр. 39-40.

(За $\mathbf{A}^+$ велиме дека е ***псевдоинверз*** [2] на $\mathbf{A}$.)

Како последица од 20° добиваме дека:

21°. *За секоја матрица* $\mathbf{A}$, *точни се равенствата*:

i) $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$; *ii*) $(\mathbf{A}^\top)^+ = (\mathbf{A}^+)^\top$. □

Ако $\mathbf{A}$ е матрицата од примерот 6, лесно се проверува дека $\mathbf{A}^+ = (1/4)\mathbf{A}$ ги задоволува условите *i*), *ii*), *iii*), *iv*), но раководејќи се од фактот што тврдењето 20° не го докажавме, во вежбата 27 ќе покажеме дека таа е единствената матрица со тоа својство.

1. 6. Вежби

1. Да се најдат матриците $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $2\mathbf{A}$ и $-3\mathbf{B}$ ако:

а) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

О д г о в о р. а) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

$2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$; $-3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -12 & -6 & -3 \\ 3 & -3 & -9 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

2. Да се најдат матриците $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ ако:

а) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

в) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

О д г о в о р. а) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$; $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 23 \end{bmatrix}$;

б) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ в) $\mathbf{A} = [1]$, $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Да се покаже дека $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ за матриците:

а) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

2) Да се види, на пример, Рао стр. 40, 71.

4. Да се покаже дека $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ за следниве матрици: а) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&2&3\\0&0&4\\0&0&-1\end{bmatrix}$,
$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&2&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. б) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&5\\0&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&-3&-3\\0&-1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$; в) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&4\\-2&3&-5\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&4\\3&6\\1&2\end{bmatrix}$.

5. Да се покаже дека за матриците:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&0\\-1&4&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

важи равенството $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$. Од ова да се заклучи дека *законот за кратење*: $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}\Rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{C}$, *за матрици не важи.*

6. Ако $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{AA}^T=\mathbf{E}$, тогаш матрицата $\mathbf{A}$ се вика ***ортогонална***. Да се покаже дека се ортогонални матриците:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix};\qquad \mathbf{B}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}\sqrt2&1&-\sqrt3\\\sqrt2&-2&0\\\sqrt2&1&\sqrt3\end{bmatrix}.$$

7. Да се покаже дека $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ за секоја од следниве матрици:

а) $\begin{bmatrix}25&-20\\30&-24\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}2&1\\-2&-1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$.

Матриците со ова својство се викаат ***идемпотентни***.

8. Една квадратна матрица А се вика ***инволуторна*** ако $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$.

Да се провери дали се инволуторни следниве матрици:

а) $\begin{bmatrix}4&3&3\\-1&0&-1\\-4&-4&-3\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; в) $\frac12\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$.

Одговор. а) и б) Да. в) Не.

9. Квадратната матрица А, за која $\mathbf{A}^p=\mathbf{O}$, каде што p е природен број, се вика ***нилпотентна***. Ако p е најмалиот природен број за кој $\mathbf{A}^p=\mathbf{O}$, тогаш велиме дека $\mathbf{A}$ е нилпотентна со ***индекс*** p.

Да се покаже дека матрицата

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}$$

е нилпотентна со индекс 3.

Решение. Имаме:

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix};\qquad \mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{A}=\mathbf{O}.$$

10. Во 1.3 спомнавме дека една матрица А која е еднаква со својата транспонирана, т.е. $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$, се вика ***симетрична***. Ако $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$, тогаш матрицата А се вика ***кососиметрична***. Да се покаже дека:

а) Секоја симетрична (кососиметрична) матрица е квадратна.

б) За секоја матрица $\mathbf{A}$, матриците $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ се симетрични.

в) Секоја квадратна матрица $\mathbf{A}$ може да се напише како сума од една симетрична и една кососиметрична матрица.

г) Ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ се симетрични $n\times n$ матрици, тогаш $\mathbf{AB}$ е симетрична ако и само ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ комутираат.

Р е ш е н и е. в) Матрицата $\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)/2$ е симетрична, а $\mathbf{D}=(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)/2$ е кососиметрична. Бидејќи $\mathbf{A}=\mathbf{C}+\mathbf{D}$, тврдењето е докажано.

г) Да претпоставиме дека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ комутираат, $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$. тогаш $(\mathbf{AB})^T=$ $=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$, па значи матрицата $\mathbf{AB}$ е симетрична.

Обратно, нека е $\mathbf{AB}$ симетрична, $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{AB}$; бидејќи $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{BA}$, имаме $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ т.е. $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ комутираат.

11. Да се најде инверзната матрица за секоја од матриците:

а) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

О д г о в о р. а) $\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$. б) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$. в) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

За да се добие одговорот под в), треба да се решат следните системи равенки:

$$\begin{aligned} x_1+2y_1-3z_1&=1, & x_2+2y_2-3z_2&=0, & x_3+2y_3-3z_3&=0,\\ y_1+2z_1&=0, & y_2+2z_2&=1, & y_3+2z_3&=0,\\ z_1&=0, & z_2&=0. & z_3&=1, \end{aligned}$$

кои се добиваат од матричната равенка

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

12. Да се решат матричните равенки:

а) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{bmatrix}5\\ 6\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$; в) $\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

О д г о в о р. а) $\mathbf{X}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-8\\ 9\end{bmatrix}$. б) $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}a & b\\ 2(1-a) & 1-2b\end{bmatrix}$, каде што a и b се произволни реални броеви. в) Нема решение.

13. Да се најдат сите матрици $\mathbf{X}$ што комутираат со матрицата $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, т.е. такви што $\mathbf{AX}=\mathbf{XA}$.

Р е ш е н и е. За да имаат смисла и двата производа $\mathbf{XA}$ и $\mathbf{AX}$, матрицата $\mathbf{X}$ мора да биде квадратна со ред 2; нека $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$. Тогаш од

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

се добива системот од 4 равенки:

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-2x_4&=0,\\ x_1+x_3-x_4&=0,\\ 3x_2-2x_3&=0,\\ 3x_2-2x_3&=0, \end{aligned}$$

Ставајќи $x_1=a$, $x_2=2b$, добиваме дека $x_3=3b$ и $x_4=a+3b$; $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b\end{bmatrix}$.

14. Да се најдат сите квадратни матрици **X** од трет ред кои го имаат својството:

а) $\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}$. б) $\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}$.

О д г о в о р. а) $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{bmatrix}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$.

15. Да се изврши степенувањето:

а) $\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}^n$; б) $\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}^n$; в) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^n$.

Р е ш е н и е. а) Имаме: $\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{bmatrix}$.

Да претпоставиме дека $\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}a^k&ka^{k-1}\\0&a^k\end{bmatrix}$. Тогаш

$$\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^k&ka^{k-1}\\0&a^k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^{k+1}&(k+1)a^k\\0&a^{k+1}\end{bmatrix},$$

па според принципот на математичката индукција имаме:

$$\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{bmatrix}, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

б) $\begin{bmatrix}\cos n\alpha&\sin n\alpha\\-\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{bmatrix}$. в) $3^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

16. Да се најде квадратната 3×3 матрица **X**, таква што

$$\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

О д г о в о р. $\mathbf{X}=\dfrac{1}{20}\begin{bmatrix}-4&12&0\\7&-6&-5\\-4&12&0\end{bmatrix}$.

17. Да се покаже дека: ако **A** е несингуларна матрица со ред n, а **B** произволна матрица со ред n, тогаш е точно равенството:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^k=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^k\mathbf{A}.$$

Р е ш е н и е. Ако $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^k = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^k\mathbf{A}$, тогаш

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^{k+1} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^k(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^k\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{k+1}\mathbf{A},$$

а бидејќи равенството е точно и за $k = 1$, тоа е точно за секој природен број k.

18. Да се покаже дека: ако $\mathbf{A}$ е квадратна матрица со својстовото $\mathbf{A}^k = 0$, тогаш матрицата $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ е инверзибилна и дека $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}$.

Р е ш е н и е. Бидејќи $(\mathbf{E}-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^{k-1}) = \mathbf{E} = (\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+ +\cdots+\mathbf{A}^{k-1})\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{A})$ следува дека тврдењето е точно.

19. Ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ се несингуларни квадратни матрици, да се покаже дека

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Leftrightarrow \mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$; тогаш $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{A}$, па $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AB}^{-1}$. Одовде, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$, па $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Од последново пак следува $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

20. Да се покаже дека множеството M матрици од облик

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \mathbf{X} \quad (x, y \in I\!R) \tag{*}$$

е поле во однос на операциите собирање и множење на матрици.

Р е ш е н и е. Нека

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Бидејќи

$$\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ -y_1-y_2 & x_1+x_2 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}\right),$$

т.е. за секој пар матрици од M и нивниот збир е во M, следува дека $M(+)$ е групоид. Матрицата

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

е нулти елемент во M, а матрицата

$$\begin{bmatrix} (-x) & (-y) \\ -(-y) & (-x) \end{bmatrix},$$

којашто е спротивна на $\mathbf{X}$, исто така му припаѓа на M. Асоцијативноста и комутативноста при собирањето на матрици важат во општ случај, па и за матриците од M. Според тоа, $M(+)$ е комутативна група.

Бидејќи

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ -y_1x_2 - x_1y_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{bmatrix} \quad (= \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1),$$

т.е. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in M \Rightarrow \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \in M$, следува дека $M(\cdot)$ е групоид (и тоа комутативен), а поради асоцијативноста на множењето на матрици, $M(\cdot)$ е полугрупа. Матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

е од обликот (*) и е неутрален елемент во $M(\cdot)$. За произволна матрица

$\mathbf{X}(\neq \mathbf{O})$ со облик (*), матрицата

$$\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = \mathbf{X}^{-1}$$

му припаѓа на M и е инверзна на $\mathbf{X}$, т.е. $\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{E}$. Значи и $M(\cdot)$ е комутативна група. Јасно е дека важи и дистрибутивниот закон, па од сето тоа следува дека $M(+,\cdot)$ е поле. (Да се види I.1.6.)

21. Да се решат следниве системи линеарни равенки со помош на матрици:

а) $\begin{aligned} 2x+3y &= 1, \\ x-2y &= -1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x+3y &= 1, \\ x-2y &= 4; \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} 3x-2y+ &= 0, \\ 6x-4y+3 &= 0; \end{aligned}$ г) $\begin{aligned} ax+y+ &= 0, \\ x-y+a &= 0. \end{aligned}$

Одговор. а) $x=-1/7$, $y=3/7$. б) $x=2$, $y=-1$. в) Системот е еквивалентен со системот

$$\mathbf{A}\cdot\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y \\ 2y \end{bmatrix}, \text{ каде што } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Според тоа:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \frac{2y}{3}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2y}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

од што следува дека множеството решенија е определено со: $x=2t$, $y=3t$, $z=0$, при што $t\in\mathbb{R}$ е произволен.

г) Ако $a\neq -1$, тогаш со $x=-t$, $y=(a-1)t$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$, е исцрпено множеството решенија на системот. За $a=-1$, решение е секоја тројка $x=-u-v$, $y=u$, $z=v$ $(u,v\in\mathbb{R})$.

22. Во овој параграф работевме само во полето од реалните броеви.

а) Да се воочи дека истите резултати се добиваат кога полето на реалните броеви се замени со произволно поле P.

б) Да се разгледа специјалниот случај кога $P=\{0,1\}$ е полето со два елемента и да се докаже дека постојат точно 16 матрици од втор ред над P.

в) Да се најдат сите несингуларни матрици меѓу нив, а и нивните инверзни матрици.

Одговор. в) Несингуларни се: $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Притоа: $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_4$, $\mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{B}_3$.

23. Без да се користат својствата 12°, 13°, да се покаже дека: ако $\mathbf{B}$ е десна, а $\mathbf{C}$ лева инверзија на $m\times n$-матрицата $\mathbf{A}$, тогаш $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.

Решение. Од $\mathbf{E}_m = \mathbf{AB}$, $\mathbf{E}_n = \mathbf{CA}$, следува дека $\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{E}_m = \mathbf{CAB} = \mathbf{E}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

24. Да се провери дали матрицата **A** има десна инверзија, а во потврден случај да се определат сите десни инверзии на **A**.

а) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&2&0\end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. а) За кои било броеви x, y, матрицата $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}x&y\\1-x&-y\\x-1&1+y\end{bmatrix}$ е десна инверзија на **A**, а и, уште повеќе, секоја десна инверзија на **A** е од наведениот облик.

б) **A** нема десна инверзија.

25. Да се покаже дека **B** е десна инверзија на **A** акко [3] $\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ е лева инверзија на $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

26. Нека **B** е десна инверзија на **A**, и нека $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ се матрици од облик $n\times m$, а **U**, **V** од облик $m\times n$. Да се докажат следниве ***закони за кратење***:

а) $\mathbf{XA}=\mathbf{YA}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{Y}$; б) $\mathbf{BU}=\mathbf{BV}\Rightarrow\mathbf{U}=\mathbf{V}$.

27. Да се покаже дека, ако **A** е матрицата од примерот 6), тогаш $\mathbf{A}^+=(1/4)\mathbf{A}$ е единствената матрица што ги задоволува условите $i)$-$iv)$ од **20°**.

Р е ш е н и е. Прво, од дискусијата во 6) следува дека $\mathbf{A}^+=(1/4)\mathbf{A}$ ги задоволува споменатите услови, како и дека секоја обинв **B** на **A** е од обликот (9). Потоа од равенствата:

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\a+c&b+d\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&a+b\\c+d&c+d\end{bmatrix}$$

следува дека условите $iii)$ и $iv)$ ќе бидат исполнето акко се точни равенствата

$$a+c=b+d,\quad a+b=c+d,\ \text{т.е. } a=d, b=c.$$

Според тоа:

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2(a+b)}\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix},$$

од што следува дека:

$$\mathbf{BAB}=\frac{1}{4(a+b)^2}\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},$$

па значи **A** е обинв на **B** акко $a=b=1$, т.е.

$$\mathbf{B}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\mathbf{A}^+,$$

што и сакавме да покажеме.

28. Да се покаже дека псевдоинверзот на:

а) нулта матрица е нулта матрица;

б) симетрична идемпотентна матрица **A** е **A**.

---

3) Терминот ***акко*** е кратенка за изразот "ако и само ако"

29. Ако $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ над полето $P=\{0,1\}$ (види вежба 22), да се определи множеството од сите матрици **B**, такви што **B** е обинв на **A**.

Р е ш е н и е. Поради $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=(a+b+c+d)\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}$ е обинв на **A** акко $a+b+c+d=1$, од што следува дека **B** е обинв на **A** акко:

$$\mathbf{B}\in\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}.$$

30. Да се покаже дека ако **A** е како во претходната вежба, тогаш не постои матрица $\mathbf{A}^+$ што ги задоволува сите услови *i*) - *iv*) од својството **20°**. (Овој резултат не е во спротивност со својството **20°**, бидејќи таму се претпоставува дека се работи за матрици над полето од реалните броеви.)

31. Да се определи псевдоинверзот $\mathbf{A}^+$ на матрицата $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$, при што (за разлика од претходните две вежби) се работи над полето од реалните броеви.

Р е ш е н и е. Прво, лесно се проверува дека $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ е обинв на **A** акко $a+b=1$. Потоа, $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}a&b\\a&b\end{bmatrix}$ е симетрична акко $b=a$, а $\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}a+b&0\\c+d&0\end{bmatrix}$ е симетрична акко $d=-c$. Според тоа, $\mathbf{A}^+=\mathbf{B}$ ги задоволува условите *i*), *iii*) и *iv*) акко **B** има облик $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1/2&1/2\\c&-c\end{bmatrix}$, каде што c е кој било реален број. И, на крајот, равенството **BAB=B** имплицира $c=0$. Од сето тоа следува дека $\mathbf{A}^+=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$.

32. Да се покаже дека, ако a е број различен од нулата, тогаш:

а) $(a\mathbf{A})^+=(1/a)\mathbf{A}^+$; б) $\mathbf{A}^2=a\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{A}^+=(1/a^2)\mathbf{A}$.

33. Нека **A**, **B** и **C** се матрици такви што **AC=B**, и нека $\mathbf{A}^-$ е обинв на **A**, т.е. $\mathbf{AA^-A}=\mathbf{A}$. Да се покаже дека ако $\mathbf{X}_0=\mathbf{A}^-\mathbf{B}$, тогаш $\mathbf{AX}_0=\mathbf{B}$.

Р е ш е н и е. Имаме $\mathbf{B}=\mathbf{AC}=\mathbf{AA^-AC}=\mathbf{AA^-B}=\mathbf{AX}_0$.

34. Да се покаже дека за секоја матрица **A** (над $\mathbb{R}$) се точни равенствата:

а) $(\mathbf{A}^+)^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{A}$; б) $\mathbf{AA}^T(\mathbf{A}^+)^T=\mathbf{A}$.

Р е ш е н и е. Да воочиме прво дека условите *iii*) и *iv*) од **20°** можат да се претстават и вака:

iii') $(\mathbf{A}^+)^T\mathbf{A}^T=\mathbf{AA}^+$, *iv'*) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^+)^T=\mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

Множејќи го *iii'*) оддесно со **A**, добиваме: $(\mathbf{A}^+)^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{AA}^+\mathbf{A}=\mathbf{A}$, т.е. а). Слично, од *iv'*) се добива б).

35. Да се покаже дека за секоја матрица A, ако $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-}$ е обинв на $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, тогаш се точни равенствата:

а) $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}$; б) $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Р е ш е н и е. Множејќи го равенството $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, одлево со $(\mathbf{A}^{+})^{\mathrm{T}}$, според вежбата 34, добиваме

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{+})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{+})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A},$$

т.е. точноста на а).

Според 16°, и $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-\mathrm{T}}$ е обинв на $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, па, според а), имаме: $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}$. Ставајќи во последното равенство $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ наместо A, добиваме: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, од што, со транспонирање, се добива б).

VII. 2. Детерминанти

Во **IV**. 2 ги дефиниравме детерминантите од втор и трет ред. Овде ќе го обопштиме овој поим и ќе дефинираме детерминанти од n-ти ред за произволен природен број n.

2. 1. Детерминанти од n-ти ред

Да ја разгледаме квадратната матрица од трет ред:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

каде што a_{ij} се реални броеви. Според дефиницијата на детерминантите од трет ред (IV.2.2), имаме:

$$det\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{matrix} \qquad (**)$$

Да го анализираме збирот на шесте производи со помош на кои е дефинирана оваа детерминанта. Воочуваме дека кај сите тие производи првите индекси се во природен распоред 1 2 3, додека вторите индекси го менуваат распоредот. Според тоа, имаме

$$det\,\mathbf{A} = \sum \pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3}.$$

Да видиме што е заедничко кај оние производи што се земени со знак "+", а што кај оние со знак "−". Гледаме дека со знак "+" се земени производите чии втори индекси имаат една од следниве пермутации: 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2. Првата од нив е во природен распоред, а во втората тој распоред се нарушува двапати, бидејќи 2 и 3 се пред 1; и во 3 1 2 имаме двапати нарушување на природниот распоред, бидејќи 1 и 2 се после 3. Секое нарушување на природниот распоред го викаме ***инверзија***. Според тоа, во сите тие три пермутации имаме *парен број инверзии*. Пермутациите на вторите индекси од производите што се земени со знак "$-$" се: 3 2 1, 2 1 3 и 1 3 2. Во првата од нив има три инверзии, а во втората и третата по една. Значи, во сите три имаме *непарен број инверзии*. Од изнесеното следува дека, ако со I_α го означиме бројот на инверзиите од пермутацијата $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$, тогаш ќе имаме:

$$det\,\mathbf{A} = \sum_{\alpha}(-1)^{I_\alpha}\, a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, a_{3\alpha_3}\,. \qquad (**')$$

Притоа, $\sum\limits_{\alpha}$ означува дека пермутацијата α треба да се менува во множеството од сите 6 пермутации од три елементи, и да се соберат сите производи $(-1)^{I_\alpha}\, a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, a_{3\alpha_3}$.

Јасно е сега како треба равенството $(**')$ да се искористи за дефинирање детерминанта од n-ти ред.

Пред да ја изнесеме дефиницијата на детерминанта од n-ти ред, ќе го обопштиме поимот за инверзија при пермутациите од n елементи. Нека α: $\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n$ е пермутација од броевите $1,2,3,\ \ldots,n$. Ако $\alpha_i>\alpha_j$ за $i<j$, тогаш за двојката (α_i,α_j) велиме дека образува ***инверзија*** во пермутацијата α. Со I_α ќе го означиме бројот на сите инверзии на пермутацијата α. На пример, ако е α: 4 5 1 2 3 6 8 7, имаме $I_\alpha=7$.

Да ја разгледаме сега квадратната матрица од n-ти ред:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Ако α е дадена пермутација на множеството $\{1,2,\ldots,n\}$, го формираме производот

$$(-1)^{I_\alpha}\, a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}, \qquad (2)$$

каде што I_α е бројот на инверзиите на пермутацијата α. Ако α се менува во множеството од сите пермутации на $\{1,2,\ldots,n\}$, ќе добиеме $n!$

производи од обликот (2). Збирот од сите такви производи го викаме ***детерминанта на матрицата*** **A** и го означуваме со $\det \mathbf{A}$. Според тоа:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\alpha} (-1)^{I_\alpha} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}, \tag{3}$$

при што знакот $\sum\limits_{\alpha}$ означува дека треба да се соберат сите можни $n!$ производи што им одговараат на сите можни пермутации од $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Производот (2) го викаме ***член на детерминантата*** $\det \mathbf{A}$.

И во општ случај детерминантата на матрицата **A** се означува со:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Погоре видовме дека овде дадената дефиниција за детерминантата, за $n = 3$, е во согласност со дефиницијата во IV.2.2. Истото важи и за $n = 2$; имено, според (3) имаме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^{-1} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

а тоа значи - како во IV.2.1.

Според тоа точно е следново тврдење:

1°. *Дефинициите за детерминанти од втор и трет ред дадени во IV.2 се согласни со дефиницијата за детерминанта од n-ти ред.* □

Според 1°, детерминанти од втор и трет ред се пресметуваат како и порано, а тоа е (како што знаеме) релативно лесно. Но за $n \geq 4$ (засега) можеме да ја користиме само формулата (3), а таа за практични цели, речиси е неупотреблива. До крајот на овој параграф ќе ги обопштиме скоро сите својства од IV.2, со што ќе добиеме повеќе начини за пресметување на детерминанти од произволен ред. Прво ќе разгледаме три примери.

1) За $n = 1$, нема да правиме разлика меѓу матрицата $\mathbf{A} = [a]$ и $\det \mathbf{A} = a$. (Но, за $n \geq 2$ секогаш важи $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{A}$.)

2) Квадратната матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ велиме дека е ***горно триаголна*** ако $a_{ij} = 0$ за $i > j$ т.е. **A** има облик:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Да ја пресметаме детерминантата од оваа матрица. Го воочуваме членот

$$(-1)^{I_\alpha} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n-1\alpha_{n-1}} a_{n\alpha_n}.$$

За да не биде тој производ нула, потребно е $\alpha_n = n$; потоа α_{n-1k} може да не биде нула само за $k = n-1$ и $k = n$, па значи мора да биде $\alpha_{n-1} = n-1$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека може да не биде нула само членот $(-1)^0 a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, од што следува дека

$$det\,\mathbf{A} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

т.е. дека *детерминантата на една горно триаголна матрица е еднаква на производот од елементите што се наоѓаат на главната дијагонала.*

3) Да го определиме знакот со кој при пресметувањето на $det\,\mathbf{A}$ треба да се земе производот $a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$ од елементите на "споредната дијагонала". Пермутацијата $n\,n-1 \ldots 3\,2\,1$ има:

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

инверзии, од што следува дека ќе имаме $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2\,n-1} \cdots a_{n1}$.

2. 2. Својства на детерминантите

Овде ќе докажеме неколку својства за детерминантите, кои, меѓу другото, ќе ни го олеснат нивното пресметување. Ќе почнеме со едно својство за пермутациите.

За една пермутација $\alpha: \alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ велиме дека е ***парна пермутација***, ако е парен бројот на инверзиите во таа пермутација, а ***непарна*** - во спротивниот случај. Нека е дадена пермутацијата

$$\alpha: \alpha_1 \cdots \alpha_i \cdots \alpha_j \cdots \alpha_n$$

и со нејзина помош нека ја формираме пермутацијата

$$\alpha': \alpha_1 \cdots \alpha_j \cdots \alpha_i \cdots \alpha_n.$$

Велиме дека α' е добиена од α со помош на една ***транспозиција***. Значи, транспозиција се врши на тој начин што во дадена пермутација си ги разменуваат местата два елемента (во случајот α_i и α_j), додека другите елементи остануваат на своите места. Да докажеме сега дека:

2°. *Со извршување на една транспозиција се менува парноста на пермутацијата.*

Д о к а з. Ќе претпоставиме прво дека $j = i+1$; тогаш добиената пермутација ќе има облик $\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\, \alpha_{i+1}\, \alpha_i\, \alpha_{i+2} \ldots \alpha_n$. Според тоа, во неа сите членови имаат ист меѓусебен однос како и во првобитната, освен парот (α_i, α_{i+1}). Ако (α_i, α_{i+1}) не прави инверзија, т.е. ако $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, тогаш (α_{i+1},α_i) ќе биде инверзија; значи, во овој случај новата пермутација ќе има една инверзија повеќе. Обратно, ако $\alpha_{i+1}<\alpha_i$, тогаш новата пермутација ќе има една инверзија помалку. Во секој случај парноста на дадената пермутација е спротивна од парноста на добиената.

Да го разгледаме случајот кога $j>i+1$. Ако членот α_i го разменува последователно местото со $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2},\ldots,\alpha_{j-1},\alpha_j$ ќе ја добиеме пермутацијата $\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_{j-1}\alpha_j\alpha_i\alpha_{j+1}\ldots\alpha_n$. Притоа, $j-i$ пати е променета парноста на почетната пермутација. Понатаму, α_j нека го размени местото последователно со $\alpha_{j-1},\ldots,\alpha_{i+1}$; така ќе се добие пермутацијата $\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_j\alpha_{i+1}\ldots\alpha_{j-1}\alpha_i\alpha_{j+1}\ldots\alpha_n$, која би се добила и директно ако α_i и α_j ги разменеа местата. При доведувањето на α_j на местото на α_i се извршени уште $j-i-1$ промени на парноста, така што за да се добие парноста на последната пермутација, потребно е $j-i+(j-i-1)$ $=2(j-i)-1$ пати да се промени парноста на првобитната пермутација. Од тоа следува дека првобитната и добиената пермутација имаат спротивна парност, што и сакавме да докажеме. □

3°. *Ако сите елементи од една редица на една детерминанта се помножат со еден ист број k, тогаш добиената детерминанта е еднаква на првобитната, помножена со k.*

Д о к а з. Нека $a_{ij}=b_{ij}$ за $i\neq\nu$, а $b_{\nu j}=k\cdot a_{\nu j}$, т.е. нека матрицата $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ е добиена од $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ на тој начин што сите елементи од редицата ν се помножени со k, а другите редици остануваат исти. Тогаш имаме:

$$\det\mathbf{B}=\sum_{\alpha}(-1)^{I_\alpha}b_{1\alpha_1}\cdots b_{\nu\alpha_\nu}\cdots b_{n\alpha_n}=$$
$$=k\cdot\sum_{\alpha}(-1)^{I_\alpha}a_{1\alpha_1}\cdots a_{\nu\alpha_\nu}\cdots a_{n\alpha_n}=k\cdot\det\mathbf{A}.\ \square$$

Како последица од оваа теорема, добиваме:

4°. *Ако сите елементи од една редица на матрицата* $\mathbf{A}$ *се нули, тогаш* $\det\mathbf{A}=0$. □

На ист начин како теоремата 3° се докажува и следнава теорема:

5°. *Нека секој елемент a_{ij} од редицата i на матрицата* $\mathbf{A}$ *има облик*

$$a_{ij}=a'_{ij}+a''_{ij}.$$

Нека $\mathbf{A}'$ *и* $\mathbf{A}''$ *се матрици коишто се совпаѓаат со* $\mathbf{A}$ *во сите редици освен во редицата i, којашто во матрицата* $\mathbf{A}'$ *ја образуваат елементите a'_{ij}, а во матрицата* $\mathbf{A}''$ *елементите a''_{ij}. Тогаш*

$$\det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}'+\det\mathbf{A}''.\ \square$$

6°. *Ако во една детерминанта ги разменат заемно местата две различни редици, тогаш детерминантата го менува знакот.*

Д о к а з. Нека $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ и нека

$$a_{ij}=b_{ij} \text{ за } i\neq r,s;\ a_{rj}=b_{sj},\ a_{sj}=b_{rj}. \tag{5'}$$

Според тоа, матрицата $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ се добива од $\mathbf{A}$ кога соодветните елементи од редиците r и s заемно ги разменат местата. Да воочиме еден член $(-1)^{I_\alpha} b_{1\alpha_1}\cdots b_{r\alpha_r}\cdots b_{s\alpha_s}\cdots b_{n\alpha_n}$ од $\det\mathbf{B}$. Ако се има предвид (5'), ќе се добие дека тој производ е еднаков со:

$$(-1)^{I_\alpha} a_{1\alpha_1}\cdots a_{s\alpha_r}\cdots a_{r\alpha_s}\cdots a_{n\alpha_n}=(-1)^{I_\alpha} a_{1\alpha_1}\cdots a_{r\alpha_s}\cdots a_{s\alpha_r}\cdots a_{n\alpha_n}.$$

Притоа, претпоставуваме дека I_α е бројот на инверзии на пермутацијата $\alpha_1\ldots\alpha_r\ldots\alpha_s\ldots\alpha_n$. Ако I_α^* е бројот на инверзиите на пермутацијата $\alpha_1\ldots\alpha_s\ldots\alpha_r\ldots\alpha_n$, според 2° ќе имаме

$$(-1)^{I_\alpha}=-1\cdot(-1)^{I_\alpha^*}.$$

Од тоа следува точноста на равенството:

$$(-1)^{I_\alpha} b_{1\alpha_1}\cdots b_{r\alpha_r}\cdots b_{s\alpha_s}\cdots b_{n\alpha_n}=(-1)^{I_\alpha^*} a_{1\alpha_1}\cdots a_{r\alpha_s}\cdots a_{s\alpha_r}\cdots a_{n\alpha_n},$$

па значи секој од членовите на $\det\mathbf{B}$ е член и на $\det\mathbf{A}$, но со спротивен знак. Значи: $\det\mathbf{B}=-\det\mathbf{A}$, што и сакавме да докажеме. □

7°. *Ако соодветните елементи од две различни редици се еднакви, тогаш вредноста на детерминантата е нула.*

Д о к а з. Нека соодветните елементи на редиците r и s од детерминантата Δ се еднакви, и нека при размена на нивната меѓусебна положба се добие детерминанта Δ^*. Според 6° имаме $\Delta^*=-\Delta$, а јасно е и дека $\Delta=\Delta^*$ (бидејќи местата ги разменаа еднакви елементи), па значи имаме $\Delta=-\Delta$, т.е. $\Delta=0$. □

8°. *Ако сите елементи од една редица се помножат со еден ист број и добиените производи се додадат на соодветните елементи од некоја друга редица, тогаш детерминантата нема да се промени.*

Д о к а з. Нека елементите од редицата r се помножат со еден ист број a и се додадат на соодветните елементи од редицата s. По извршеното додавање ќе ја добиеме детерминантата Δ^*, за која елементите од редицата s имаат облик $a\cdot a_{rj}+a_{sj}$, а сите други редици се исти како и при почетната детерминанта. Според теоремата 5° ќе имаме

$$\Delta^*=\Delta+\Delta^{**},$$

каде што елементите од редицата s на Δ^{**} имаат облик $a\cdot a_{rj}$, а сите други се исти како и во Δ. Користејќи ја теоремата 3°, можеме од елементите на редицата s (во Δ^{**}) да го извлечеме заедничкиот фактор a пред знакот за детерминантата, со што ќе добиеме детерминанта чии редици r и s се еднакви, па според 7°, добиваме $\Delta^{**}=0$, т.е. $\Delta^{*}=\Delta$, а тоа и сакавме да докажеме. □

2. 3. Симетрија меѓу редиците и колоните

Со дефиницијата на детерминантите, на редиците им е дадена посебна улога, а и сите својства што ги изнесовме погоре се однесуваат до редиците. Овде ќе покажеме дека иста улога имаат и колоните. За таа цел ќе разгледаме еден ист производ од обликот:

$$(-1)^{I_\beta+I_\gamma} a_{\beta_1\gamma_1} a_{\beta_2\gamma_2}\cdots a_{\beta_n\gamma_n}, \tag{6}$$

каде што $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ и $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ се две пермутации на множеството $\{1,2,\ldots n\}$, а I_β и I_γ бројот на нивните инверзии. Во пермутациите β и γ ќе извршиме по една транспозиција, така што ќе им ги замениме местата на членовите со индекси i и j. Така ќе ги добиеме пермутациите $\beta_1\ldots\beta_j\ldots\beta_i\ldots\beta_n$ и $\gamma_1\ldots\gamma_j\ldots\gamma_i\ldots\gamma_n$, со број на инверзии I_β^* и I_γ^* соодветно. Според теоремата 2°, I_β^* има спротивна парност од I_β, а I_γ^* од I_γ. Од ова следува дека $(-1)^{I_\beta+I_\gamma}=(-1)^{I_\beta^*+I_\gamma^*}$.

Да го разгледаме сега збирот:

$$\sum_\beta (-1)^{I_\beta+I_\gamma} a_{\beta_1\gamma_1} a_{\beta_2\gamma_2}\cdots a_{\beta_n\gamma_n}, \tag{7}$$

што се добива кога β се менува во множеството од сите $n!$ пермутации, а γ е фиксна пермутација. Во производот (6) има по еден множител од секоја редица и секоја колона, што значи дека во збирот (7) се јавуваат како собироци истите производи како и во $\det\mathbf{A}$, каде што $\mathbf{A}=[a_{ij}]$. Ќе докажеме дека секој од тие собироци учествува со ист знак во (7) како и во $\det\mathbf{A}$. За таа цел во производот (6) да го доведеме на прво место факторот $a_{\beta_k\gamma_k}$, каде што $\beta_k=1$. Според погоре извршената дискусија имаме:

$$(-1)^{I_\beta+I_\gamma} a_{\beta_1\gamma_1}\cdots a_{\beta_n\gamma_n}=$$

$$=(-1)^{I_\beta^*+I_\gamma^*} a_{1\gamma_k} a_{\beta_2\gamma_2}\cdots a_{\beta_{k-1}\gamma_{k-1}} a_{\beta_1\gamma_1} a_{\beta_{k+1}\gamma_{k+1}}\cdots a_{\beta_n\gamma_n},$$

каде што I_β^* е бројот на инверзиите од $1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_1\beta_{k+1}\ldots\beta_n$, а I_γ^* од $\gamma_k\gamma_2\cdots\gamma_{k-1}\gamma_1\gamma_{k+1}\cdots\gamma_n$. Работејќи на ист начин, можеме како втор фактор да го доведеме $a_{2\gamma_s}$ итн. додека не се добие

$$(-1)^{I_\beta+I_\gamma} a_{\beta_1\gamma_1}\cdots a_{\beta_n\gamma_n} = (-1)^{I_\delta+I_\alpha} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n},$$

при што I_α е бројот на инверзии на пермутацијата $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, а I_δ на $12\ldots n$, т.е. $I_\delta = 0$. Со тоа докажавме дека збирот (7) е еднаков на $\det \mathbf{A}$.

На сосема ист начин се докажува дека $\det \mathbf{A}$ е еднаква и со следниот збир:

$$\sum_\gamma (-1)^{I_\beta+I_\gamma} a_{\gamma_1\beta_1} a_{\gamma_2\beta_2}\cdots a_{\gamma_n\beta_n}. \tag{8}$$

Точна е, значи, следнава теорема:

9°. *Нека $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ е квадратна матрица со ред n. Секој од збировите (7) и (8) е еднаков со* $\det \mathbf{A}$. □

Ако во (7) земеме $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$ да се совпадне со идентичната пермутација $12\ldots n$, тогаш како специјален случај од 9° ја добиваме следнава теорема:

10°. $\det \mathbf{A} = \sum_\beta (-1)^{I_\beta} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2}\cdots a_{\beta_n n}$. □

Порано забележавме дека сите својства што се однесуваат до редиците важат и за колоните на детерминантите. Точноста на таа забелешка следува од следнава теорема:

11°. *Една детерминанта не се менува ако редиците и колоните ги заменат местата, т.е. точно е равенството:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Д о к а з. Нека $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, каде што $b_{ij} = a_{ji}$. Користејќи ја последната теорема, добиваме дека

$$\det \mathbf{B} = \sum_\alpha (-1)^{I_\alpha} b_{1\alpha_1} b_{2\alpha_2}\cdots b_{n\alpha_n} = \sum_\alpha (-1)^{I_\alpha} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2}\cdots a_{\alpha_n n} = \det \mathbf{A}. \ \square$$

Теоремата 11° можеме да ја искажеме и вака:

11'. *Ако $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ е $n \times n$-матрица, тогаш*

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}). \ \square$$

Ќе изнесеме уште една важна теорема:

12°. *Ако* **A** *и* **B** *се квадратни матрици од ист ред n, тогаш*

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

Д о к а з. Ако редот на матриците е 2, проверката се спроведува директно. Ќе дадеме целосен доказ за $n=3$, напоменувајќи дека ништо битно не би се променило и во случајот да се работи со произволно n. Нека $\mathbf{A}=[a_{ij}]$, $\mathbf{B}=[b_{ij}]$, $\mathbf{C}=\mathbf{AB}=[c_{ij}]$. Секој елемент c_{1j}, од првата редица на $\mathbf{C}$, да го напишеме во обликот

$$c_{1j}=a_{11}b_{1j}+a_{12}b_{2j}+a_{13}b_{3j}$$

и на $\det \mathbf{C}$ да ја примениме теоремата 5°; ќе добиеме:

$$det\,\mathbf{C}=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{13}b_{31} & a_{13}b_{32} & a_{13}b_{33} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Потоа, работејќи со втората редица, секоја од тие три детерминанти можеме да ја претставиме како збир од по три детерминанти и, на крајот, со помош на третата редица, детерминантата на **C** ќе ја претставиме како збир од $27(=3^3)$ детерминанти од обликот

$$a_{1\alpha_1}\,a_{2\alpha_2}\,a_{3\alpha_3}\begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & b_{\alpha_1 2} & b_{\alpha_1 3} \\ b_{\alpha_2 1} & b_{\alpha_2 2} & b_{\alpha_2 3} \\ b_{\alpha_3 1} & b_{\alpha_3 2} & b_{\alpha_3 3} \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Притоа, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ е некоја тројка формирана од 1, 2, 3.

Ако два елемента од таа тројка се еднакви, детерминантата ќе биде нула, зашто две нејзини редици се еднакви. Според тоа, преостануваат 6 (=3!) детерминанти од облик $(*)$, каде што $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, е пермутација од 1 2 3. Земајќи дека I_α е бројот на инверзиите на $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, со I_α пати разместување редици во детерминантата од десната страна на $(*)$ ќе добиеме:

$$(-1)^{I_\alpha}a_{1\alpha_1}\,a_{2\alpha_2}\,a_{3\alpha_3}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \qquad (*')$$

Збирот на сите 6 изрази од обликот $(*')$ ќе биде $det\,C$, па значи

$$det(\mathbf{AB})=det\,\mathbf{C}=\left(\sum_\alpha(-1)^{I_\alpha}a_{1\alpha_1}\,a_{2\alpha_2}\,a_{3\alpha_3}\right)det\,\mathbf{B}=$$

$$=(det\,\mathbf{A})(det\,\mathbf{B}). \ \square$$

2. 4. Минори и алгебарски комплементи

Нека $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ е квадратна матрица од n-ти ред, и нека со $\mathbf{A}_{ij}$ е означена квадратна матрица со ред $n-1$, што се добива кога од $\mathbf{A}$ се изостават редицата i и колоната j. Тогаш за детерминантата $\det\mathbf{A}_{ij} = \Delta_{ij}$ ќе велиме дека е ***минор*** [1] на $\mathbf{A}$ (или на $\det\mathbf{A}$) што одговара на елементот a_{ij}. Според тоа имаме, на пример,

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n3}\dots a_{nn}\end{vmatrix}$$

Поставуваме сега задача да го определиме збирот од сите членови на $\det\mathbf{A}$, во кои се јавува како фактор фиксниот елемент a_{rs}.

За таа цел, детерминатата $\det\mathbf{A}$ ќе ја напишеме во обликот

$$det\,\mathbf{A}=\sum_{\alpha}(-1)^{I_\alpha+I_\beta}a_{r\beta_1}a_{1\beta_2}\cdots a_{r-1\beta_r}\,a_{r+1\beta_{r+1}}\cdots a_{n\beta_n}, \tag{9}$$

каде што I_β е бројот на инверзиите на $\beta_1\beta_2\dots\beta_n$, а I_α на $r\,1\,2\dots r-1$ $r+1\dots n$; според тоа, имаме $I_\alpha=r-1$, бидејќи r е во инверзија со $1,2$ $\dots,r-1$, а во α нема други инверзии. Нас нé интересираат оние членови за кои $\beta_1=s$, а нивниот збир ќе има облик

$$a_{rs}\sum_{\beta^*}(-1)^{I_\alpha+I_\beta}a_{1\beta_2}\cdots a_{r-1\beta_r}\,a_{r+1\beta_{r+1}}\cdots a_{n\beta_n}, \tag{10}$$

каде што β^* е пермутацијата $\beta_2\beta_3\dots\beta_n$ од $1\,2\dots s-1\; s+1\dots n$. Означувајќи го со I^*_β бројот на инверзиите на β^*: $\beta_2\beta_3\dots\beta_n$, ќе добиеме дека $I_\beta=I^*_\beta+s-1$, бидејќи во β: $\beta_1\beta_2\dots\beta_n$, $\beta_1=s$ е во инверзија со $1,2,\dots,$ $s-1$, а тие инверзии ги нема во β^*. Имајќи го тоа предвид и фактот што $(-1)^{r+s}=(-1)^{r+s-2}$, добиваме дека збирот (10) е еднаков со

$$(-1)^{r+s}a_{rs}\sum_{\beta^*}(-1)^{I^*_\beta}a_{1\beta_2}\cdots a_{r-1\beta_r}\,a_{r+1\beta_{r+1}}\cdots a_{n\beta_n}. \tag{11}$$

---

1) За $n=3$, овој поим е согласен со поимот минор воведен во IV.2.2. За $n=2$, минорите се детерминанти од прв ред, а тоа се соодветни елементи на $\mathbf{A}$, т.е. на $\det\mathbf{A}$.

Да ставиме: $b_{ij} = a_{ij}$, за $i < r$, $j < s$; $b_{ij} = a_{i-1,j}$ за $i > r$, $j < s$; $b_{ij} = a_{i,j-1}$ за $i < r$, $j > s$; $b_{ij} = a_{i-1,j-1}$ за $i > r$, $j > s$. Исто така, нека $\gamma_\nu = \beta_{\nu+1}$ за $\beta_{\nu+1} < s$, а $\gamma_\nu = \beta_{\nu+1} - 1$ за $\beta_{\nu+1} > s$. Тогаш добиваме дека γ е пермутација од $1\,2 \ldots n-1$, а јасно е дека таа има толку инверзии колку и β^*, т.е. имаме $I^*_\beta = I_\gamma$. Имајќи го тоа предвид, можеме да напишеме

$$\sum_{\beta^*} (-1)^{I^*_\beta} a_{1\beta_2} \cdots a_{r-1\beta_r}\, a_{r+1\beta_{r+1}} \cdots a_{n\beta_n} = \sum_{\gamma} (-1)^{I_\gamma} b_{1\gamma_1}\, b_{2\gamma_2} \cdots b_{n-1\gamma_{n-1}}.$$

Од начинот на кој е определена матрицата $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ се гледа дека таа се добива кога од $\mathbf{A}$ се изостават редицата r и колоната s, т.е. дека $\det \mathbf{B} = \Delta_{rs}$. Од тоа следува дека (11) може да се претвори во облик:

$$(-1)^{r+s} a_{rs} \Delta_{rs} = a_{rs} a^*_{rs},$$

каде што

$$a^*_{rs} = (-1)^{r+s} \Delta_{rs};$$

a^*_{rs} се вика ***алгебарски комплемент*** [2] на елементот a_{rs} во матрицата $\mathbf{A}$ (или во детерминантата $\Delta = \det \mathbf{A}$).

Ако еден од броевите r, s го фиксираме, а другиот се менува од 1 до n, ќе ја добиеме вредноста на детерминантата, т.е. имаме:

$$\det \mathbf{A} = a_{r1} \cdot a^*_{r1} + a_{r2} \cdot a^*_{r2} + \cdots + a_{rn} \cdot a^*_{rn} \tag{12}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{1s} \cdot a^*_{1s} + a_{2s} \cdot a^*_{2s} + \cdots + a_{ns} \cdot a^*_{ns}. \tag{12'}$$

При ова е искористен фактот што членовите на детерминантата содржат по еден, и само по еден множител од секоја редица и секоја колона.

Добиениот резултат ќе го формулираме во една теорема.

13°. *Нека* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *е квадратна матрица од n-ти ред и нека* Δ_{rs} *е минорот на елементот* a_{rs} *во таа матрица. Ако* $a^*_{rs} = (-1)^{r+s} \Delta_{rs}$ *(т.е. ако* a^*_{rs} *е алгебарскиот комплемент на* a_{rs}*), тогаш се точни равенствата* (12) *и* (12′). □

Притоа велиме дека во (12) ***детерминантата е развиена по редицата*** r, ***а во*** (12') ***по колоната*** s.

Земајќи предвид дека алгебарскиот комплемент a^*_{rs} е еднаков на минорот Δ_{rs} (или се разликува од него само во знак), докажаната теорема ни овозможува пресметувањето на една детерминанта од n-ти ред да го сведиме на пресметувањето на n детерминанти со ред n-1. Ќе разгледаме два примера.

2) Види и IV.2.2.

4) Развивајќи ја приложенава детерминанта по првата редица, добиваме:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 11 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 11 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -142$$

Истата детерминанта би се пресметала многу побргу ако претходно од втората, третата и четвртата колона се одземеше првата. Така би се добило дека дадената детерминанта е еднаква со:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & -3 & -7 \\ -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -142.$$

5) Детерминантата со облик

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

е позната под името ***вандермондова***[3] ***детерминанта.***

Ако во Δ_n секоја редица се помножи со $-a_n$ и се додаде на наредната, ќе се добие детерминанта при која сите елементи од n-тата колона, освен првиот, се нули. По развивањето по n-тата колона и извлекувањето на заедничките фактори од секоја редица пред знакот за детерминантата, ќе добиеме:

$$\Delta_n = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})\Delta_{n-1}, \tag{13}$$

каде што Δ_{n-1} е од ист облик како и Δ_n. Ако се има предвид и равенството:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

од (13) добиваме:

$$\Delta_n = \prod_{i>j} (a_i - a_j).$$

2. 5. Инверзни матрици

Ќе докажеме уште две теореми за детерминантите, а како нивна последица ќе ја добиеме формулата за пресметување на инверзна матрица од една несингуларна матрица.

Нека е дадена квадратна матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ од n-ти ред, и нека во неа фиксираме две различни редици i и k. Потоа, нека секој елемент од редицата k го замениме со соодветниот елемент од редицата i; така ја добиваме детерминантата:

3) Александар Вандермонд (*Alexandre Théophile Vandermonde*, 1735-1796)

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{редица } i \\ \\ \text{редица } k \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Вредноста на детерминантата Δ^* е нула, зашто две нејзини редици се еднакви. Од друга страна, минорите на елементите од редицата k во Δ^* се еднакви со минорите од соодветните елементи на редицата k во Δ; тоа е точно бидејќи Δ и Δ^* се разликуваат само во редицата k, а при определувањето на минорите што одговараат на елементите од таа редица, неа ја прецртуваме. Ако ја развиеме детерминантата Δ^* по редицата k, добиваме

$$0 = \Delta^* = a_{i1}a_{k1}^* + a_{i2}a_{k2}^* + \cdots + a_{in}a_{kn}^*.$$

Заменувајќи ги елементите од колоната s со соодветните елементи од колоната j, на ист начин како погоре, го добиваме равенството:

$$0 = a_{1j}a_{1s}^* + a_{2j}a_{2s}^* + \cdots + a_{nj}a_{ns}^*.$$

Добиените резултати, заедно со теоремата 13°, можат да се формулираат на следниов начин:

14°. *Нека* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *е квадратна матрица од n-ти ред, и нека* a_{ij}^* *е алгебарскиот комплемент на* a_{ij}. *Тогаш*

$$a_{i1}a_{k1}^* + a_{i2}a_{k2}^* + \cdots + a_{in}a_{kn}^* = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{за } i = k, \\ 0 & \text{за } i \neq k, \end{cases}$$

$$a_{1j}a_{1s}^* + a_{2j}a_{2s}^* + \cdots + a_{nj}a_{ns}^* = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{за } j = s, \\ 0 & \text{за } j \neq s. \end{cases} \square$$

За матрицата $\mathbf{A}^* = [a^*_{ij}]$ велиме дека е ***реципрочна матрица*** на $\mathbf{A}$; притоа, како и досега, a^*_{ij} е алгебарскиот комплемент на a_{ij} во $\mathbf{A}$. Матрицата $(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}$ се вика ***адјунгирана*** на $\mathbf{A}$, а се означува и со $\mathrm{adj}\mathbf{A}$.

Ќе ја докажеме сега точноста на следнава теорема:

15°. *За секоја квадратна матрица* $\mathbf{A}$ *со ред n се точни равенствата*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = (\det \mathbf{A})\mathbf{E} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{A},$$

каде што $\mathbf{E}$ *е единичната матрица со ред n.*

Доказ. Да ставиме $(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B} = [b_{ij}]$ и $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [c_{ij}]$. Според тоа имаме $b_{ij} = (a^*_{ij})^{\mathrm{T}} = a^*_{ji}$ и

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = a_{i1}a^*_{j1} + a_{i2}a^*_{j2} + \cdots + a_{in}a^*_{jn} = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j. \end{cases}$$

Од тоа следува дека:

$$A(A^*)^T = C = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = (\det A)\cdot E. \ \square$$

Сега лесно се добива ***критериум за несингуларност*** на една квадратна матрица, како и ***формула за пресметување инверзна матрица*** од несингуларна квадратна матрица:

16°. *Квадратната матрица* A *е несингуларна ако, и само ако* $\det A \neq 0$. *Во тој случај:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^*)^T = \frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj} A. \tag{14}$$

Д о к а з. Нека е $\det A \neq 0$. Тогаш според 15° добиваме:

$$A\cdot\left(\frac{1}{\det A}(A^*)^T\right) = \frac{1}{\det A}\cdot\left(A(A^*)^T\right) = \frac{1}{\det A}(\det A)E = E,$$

и слично: $\left(\frac{1}{\det A}(A^*)^T\right)A = E$. Од тоа следува дека A е несингуларна матрица чијашто инверзна матрица е матрицата A^{-1} определена со (14).

Обратно, нека постои матрица B таква што $AB = E$. Тогаш, според 12° и 2,

$$1 = \det E = (\det A)(\det B),$$

од каде што следува дека $\det A \neq 0$. Теоремата е докажана. $\square$

Да разгледаме два примера.

6) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\det A = -2$, $A^* = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $(A^*)^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det A = 3$, $A^* = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$(A^*)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(Добро е да се проверува добиениот резултат, со тоа што ќе се пресмета производот $A^{-1}A$.)

8) Ако A и B се дадени квадратни матрици, при што A е несингуларна, лесно се определуваат матриците X и Y кои се решенија на равенките

$$AX = B, \quad YA = B.$$

Имено, имаме

$$X = A^{-1}B, \quad Y = BA^{-1}.$$

(Поради некомутативноста на множењето, X и Y можат да бидат и различни.)

2. 6. Крамерово правило

Добиената формула за пресметување на инверзна матрица ќе ја искористиме при докажувањето на Крамеровото правило, чии специјални случаи за $n=2$ и $n=3$ се разгледани во IV. 2. 1 и IV. 2. 3.

Како што споменавме и во 1. 4, ако е даден системот

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{aligned} \tag{15}$$

и ако ставиме

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots}\\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots}\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix},$$

тогаш тој се сведува на матричната равенка

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}, \tag{15'}$$

каде што $\mathbf{X}$ е непозната матрица.

Ако матрицата $\mathbf{A}$ е несингуларна, множејќи ја равенката (15′) одлево со $\mathbf{A}^{-1}$, добиваме

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\left(\frac{1}{\det\mathbf{A}}\operatorname{adj}\mathbf{A}\right)\mathbf{B}.$$

За детерминантата $\Delta=\det\mathbf{A}$ ќе велиме дека е ***детерминанта на системот*** (15). Ако матрицата $(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ ја означиме со $\mathbf{C}=[c_i]_{n\cdot 1}$, добиваме

$$x_j=\frac{c_j}{\Delta}.$$

Ќе го определиме обликот на c_j. Имаме:

$$\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{bmatrix}=(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{21}\cdots a^*_{n1}\\ a^*_{12} & a^*_{22}\cdots a^*_{n2}\\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots}\\ a^*_{1n} & a^*_{2n}\cdots a^*_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^*_{11}b_1+a^*_{21}b_2+\cdots+a^*_{n1}b_n\\ a^*_{12}b_1+a^*_{22}b_2+\cdots+a^*_{n2}b_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a^*_{1n}b_1+a^*_{2n}b_2+\cdots+a^*_{nn}b_n \end{bmatrix},$$

од што следува $c_j=b_1a^*_{1j}+b_2a^*_{2j}+\cdots+b_na^*_{nj}$. Ако со Δ_j ја означиме детерминантата што се добива кога во детерминантата на системот наместо колоната j ја ставиме колоната на слободните членови, т.е.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

тогаш развивајќи ја оваа детерминанта по колоната j, добиваме

$$\Delta_j = b_1 a_{1j}^* + b_2 a_{2j}^* + \cdots + b_n a_{nj}^* = c_j$$

Со тоа ја докажавме точноста на следнава теорема:

17°. ***(Крамерово[4] правило).*** *Ако детерминантата Δ на системот (15) не е нула, тогаш тој систем има една и само една n-ка решенија $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена со:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \ \square$$

За $n = 2, 3$ ова правило беше докажано порано (IV. 2. 1, IV. 2. 3).

Ако сите слободни членови во системот (15) се нули го добиваме следниов ***систем од n хомогени линеарни равенки:***

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Јасно е дека $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ е едно решение на овој систем. Тоа решение го викаме ***тривијално***, или ***нулто***. Ако детерминантата на системот не е нула, $\Delta \neq 0$, поради тоа што $\Delta_i = 0$ за секој $i = 1, 2, \ldots, n$, според правилото на Крамер добиваме дека системот (16) има единствено решение, имено тривијалното. Често пати, меѓутоа, од интерес е да се најдат и други решенија, ако такви постојат. Според горните забелешки, го добиваме следниов потребен услов за нетривијални решенија:

18°. *Ако еден систем од n хомогени линеарни равенки има и нетривијални решенија, тогаш детерминантата на тој систем е еднаква на нула.*

(Подоцна, во 8° од 5. 3, ќе видиме дека овој услов е и доволен.) □

Со помош на 18° се докажува и следнава теорема:

19°. *Ако системот од $n+1$ линеарни равенки со n непознати*

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n+11} x_1 + a_{n+12} x_2 + \cdots + a_{n+1n} x_n &= b_{n+1}, \end{aligned} \tag{17}$$

4) Габриел Крамер (*Gabriel Cramer*, 1704-1752)

има решенија, тогаш е исполнето равенството:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+11} & a_{n+12} & a_{n+1n} & b_{n+1} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Д о к а з. Да претпоставиме дека системот (17) има решение $(x^0{}_1,\dots,x^0{}_n)$. Тогаш $(n+1)$-ката $(x^0{}_1,\dots,x^0{}_n,-1)$ ќе биде решение на хомогениот систем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 x_{n+1} &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 x_{n+1} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n+11}x_1 + a_{n+12}x_2 + \cdots + a_{n+1n}x_n + b_{n+1}x_{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

па, според претходната теорема, детерминантата на овој систем е еднаква со 0. Да забележиме дека условот (18) не е доволен за системот (17) да има решенија. □

Да разгледаме неколку примери.

9) Ќе го решиме системот

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 38. \end{aligned}$$

Лесно се добива: $\Delta = -68$, $\Delta_1 = -68$, $\Delta_2 = -136$, $\Delta_3 = -204$, $\Delta_4 = -272$, а од тоа следува: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$.

10) Да го определиме бројот k така што системот

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 0, \\ x + ky - z &= 0, \\ 2x - y + z &= 0, \end{aligned}$$

да има нетривијални решенија.

Ако ја пресметаме детерминантата на системот, ќе добиеме

$$\Delta = (k+1)(k-4),$$

па значи за да има нетривијални решенија треба да биде $k = -1$ или $k = 4$. Ќе покажеме дека во конкретниот случај навистина постојат такви ненулти решенија.

За $k = -1$ ги добиваме равенките:

$$-x + y + z = 0, \quad x - y - z = 0, \quad 2x - y + z = 0.$$

Од првата и третата равенка добиваме: $x + 2z = 0$, т.е $x = -2z$ и $y = -3z$. Ако овие вредности за x и y ги замениме во втората, добиваме $-2z + 3z - z = 0$. Значи секоја тројка броеви $x = -2t$, $y = -3t$, $z = t$, го задоволува дадениот систем, од што следува дека постојат ненулти решенија.

На ист начин се проверува дека тоа важи и за $k = 4$.

11) Да го разгледаме системот од три равенки со две непознати:

$$2x - 2y = 3, \quad x - y = 1, \quad 5x - 5y = 1.$$

Нужниот услов за егзистенција на решение е исполнет бидејќи имаме:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Сепак решение не постои, бидејќи кој било потсистем со по две равенки, што може да се формира од тој систем, нема решение.

2. 7. Вежби

1. Сметајќи дека 1 2 3 4 5 6 7 8 9 е почетна положба, да се определат j и k така што пермутацијата

а) 1 2 7 4 j 5 6 k 9 да е парна; б) 1 2 j 5 k 4 8 9 7 да е непарна.

Одговор. а) $j=8,\ k=3$. б) $j=6,\ k=3$.

2. Да се најде бројот на инверзиите во пермутацијата

а) 1 2 7 8 9 10 3 4 6 5; б) 1 3 5 . . . $2n$-1 2 4 . . . $2n$;

в) 3 6 . . . $3n$ 1 4 . . . $3n$-2 2 5 . . . $3n$-3.

Одговор. а) 17. б) $n(n-1)/2$. в) $n(3n+1)/2$.

3. Елементите $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ ја чинат главната дијагонала на детерминантата (4), а $a_{1n}, a_{2n-1}, \cdots, a_{n1}$ споредната.

а) Да се определат знаците на производите

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \text{и} \quad a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

б) Да се покаже дека вредноста на детерминантата е $a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$ ако $a_{ij}=0$ за $i<j$. (Детерминантите со ваков облик се викаат *долно триаголни*, в. и пример 2).)

Одговор. а) Знакот на првиот производ е + (плус), а знакот на вториот е еднаков со знакот на изразот $(-1)^{n(n-1)/2}$.

4. Да се покаже дека:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 0\ldots0 & 0 & 1 \\ 0 & 0\ldots0 & 2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 0\ldots0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}n!$; б) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\det \mathbf{A} = (n-1)!$, каде што $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ е квадратна матрица од n-ти ред определена со $a_{ii} = i, a_{ij} = 1$, за $i \neq j$.

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = 12$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 120$;

ѓ) броевите $x=-a+b+c$, $x=a-b+c$, $x=a+b-c$, $x=-a-b-c$, се корени на равенката

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{е)} \begin{vmatrix} 1 & a & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 & n \end{vmatrix} = n!$$

П о м о ш. в) Првата редица да се одземе од преостанатите и да се искористи резултатот од вежбата 3 б).

г) Секоја од редиците да се помножи со -2 и да се додаде на наредната; потоа втората редица да се помножи со -3 и да се додаде на третата, а третата редица помножена со -3 да се додаде на четвртата; на крај, третата редица да се помножи со -4 и да се додаде на четвртата; по сета извршена работа ќе се добие триаголна детерминанта. д) Како и в).

ѓ) На првата редица да и се додаде втората, а исто така третата и четвртата редица да се помножат со -1 и да се додадат на првата, ако во добиената детерминанта ставиме $x=-a+b+c$, сите елементи од првата редица ќе бидат еднакви на нула; слично и за другите три вредности.

е) Да се искористи вежбата 3 б).

5. Да се пресметаат детерминантите:

$$\text{а)}\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a+x \\ a & a & \dots & a+x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+x & a & \dots & a & a \end{vmatrix}; \qquad \text{б)}\ \Delta = \begin{vmatrix} x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & \dots & x & 2 & x \\ x & x & \dots & 3 & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & n & \dots & x & x & x \\ x & x & \dots & x & x & x \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. а) Ако на првата колона и ги додадеме сите други, добиваме:

$$\begin{vmatrix} na+x & a & \dots & a & a+x \\ na+x & a & \dots & a+x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na+x & a & \dots & a & a \end{vmatrix} = (na+x) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a & a+x \\ 1 & a & \dots & a+x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & \dots & a & a \end{vmatrix}.$$

Множејќи ја сега првата колона со $-a$ и додавајќи ја на сите други, добиваме триаголна детерминанта (сите членови под споредната дијагонала се нули), па

$$\Delta_n = (-1)^{n(n-1)/2}(na+x)x^{n-1}.$$

б) Ако ја помножиме првата колона со -1 и ја додадеме на сите други, добиваме триаголна детерминанта (со нули под споредната дијагонала) па

$$\Delta = (-1)^{n(n-1)/2}x(1-x)\dots(n-x).$$

6. Да се пресметаат следниве детерминанти:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}; \qquad \text{в)} \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix}$; д) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 x & 1 \end{vmatrix}$; ѓ) $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & a & b \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots a & b \\ b & 0 & 0 \ldots 0 & a \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1}+x & & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-1} & a_n+x \end{vmatrix}$; ж) $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+1 & a & 0 \ldots 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 1 & a+1 & a \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$.

Одговор. а) 30. б) $(a+b+c+d)\cdot(a+b-c-d)\cdot(a-b+c-d)\cdot(a-b-c+d)$. в) $(be-cd)^2$. г) $abcd-abc+ab-a+1$. д) $(-1)^{n+1}(x-1)^{n-1}$. ѓ) $a^n+(-1)^{n+1}b^n$. е) $(a_1+$ $+a_2+\ldots+a_n+x)x^{n-1}$. ж) $(a^{n+1}-1)/(a-1)$ за $a\neq 1$, а $n+1$ за $a=1$. (Во последнава, прво да се покаже точноста на равенството $\Delta_n=(a+1)\Delta_{n-1}-a\Delta_{n-2}$ каде што Δ_k е детерминанта од истиот вид како дадената со ред k. Потоа да се покаже дека $\Delta_3=a\Delta_2+1,\ldots,\Delta_n=a\Delta_{n-1}+1$.)

7. Да се провери дали дадените матрици се несингуларни и, во потврден случај, да се најдат нивните инверзни матрици:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; г) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Одговор.

а) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. б) $-\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$. в) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. г) $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}\mathbf{A}$.

8. Да се реши матричната равенка $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, ако:

а) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; б) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

в) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Одговор. а) $\mathbf{X}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$. б) $\mathbf{X}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -7 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$. в) $\mathbf{X}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 9 & 7 & 9 \\ 13 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

9. Да се покаже дека множеството од сите несингуларни квадратни матрици со ред n е група во однос на операцијата множење на матрици.

10. Да се покаже дека множеството матрици од облик

$$t\mathbf{E}+x\mathbf{I}+y\mathbf{J}+z\mathbf{K}, \quad (t,x,y,z\in\mathbb{R}),$$

каде што $\mathbf{E}$ е единичната матрица од четврти ред, а

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{J}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

е тело [5], но не п о л е, во однос на операциите собирање и множење на матрици.

П о м о ш. Прво да се увиди дека

$$\mathbf{I}^2=\mathbf{J}^2=\mathbf{K}^2=-\mathbf{E};\quad \mathbf{IJ}=\mathbf{K},\ \mathbf{JK}=\mathbf{I},\ \mathbf{KI}=\mathbf{J};\quad \mathbf{JI}=-\mathbf{K},\ \mathbf{KJ}=-\mathbf{I},\ \mathbf{IK}=-\mathbf{J}.$$

Потоа да се изврши проверка на сите својства (освен комутативноста) на множењето како и вежбата 20 од 1. 6.

Дека не е поле, се гледа од следниов пример: $\mathbf{IJ}=\mathbf{K}$, но $\mathbf{JI}=-\mathbf{K}$.

11. Да се решат следниве системи линеарни равенки:

а) $\begin{aligned}x+2y+z&=4,\\3x-5y+3z&=1,\\2x+7y-z&=8;\end{aligned}$ б) $\begin{aligned}2x+y&=5,\\x+3z&=16,\\5y-z&=10;\end{aligned}$ в) $\begin{aligned}x+2y-4z&=1,\\2x+y-5z&=-1,\\x-y-z&=-2;\end{aligned}$

г) $\begin{aligned}2x-y+z&=-2,\\x+2y+3z&=-1,\\x-3y-2z&=3;\end{aligned}$ д) $\begin{aligned}x+y+z&=1,\\2x+2y+2z&=3,\\3x+3y+3z&=4;\end{aligned}$ ѓ) $\begin{aligned}ax+y+z&=1,\\x+ay+z&=a,\\x+y+az&=a^2.\end{aligned}$

Р е ш е н и е. а) $x=1, y=1, z=1$. б) $x=1, y=3, z=5$.

в) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$; детерминантата од втор ред составена од коефициентите пред x и y во првите две равенки е $\delta=-3\neq 0$, па сметајќи го z за познато од системот $x+2y=1+4z$, $2x+y=5z-1$ го определуваме $x=2z-1$ и $y=z+1$; така, за произволно z, тројката $x=2z-1$, $y=z+1$, z, ги задоволува првите две равенки од дадениот систем од трите линеарни равенки. Со проверка се уверуваме дека оваа тројка ја задоволува и третата равенка од системот, т.е. системот има бескрајно многу решенија кои се добиваат од $x=2z-1$, $y=z+1$, z, за произволни вредности на z.

г) $\Delta=0$, но $\Delta_x=12\ (\neq 0)$, па системот нема решение (зашто во спротивниот случај би постоел x_0, таков што $\Delta x_0=\Delta_x$); значи системот е противречен.

д) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, но системот е противречен (не постои ниедна тројка броеви x_0, y_0, z_0 што би ги задоволувала, на пример, првите две равенки).

ѓ) $\Delta=a^2-3a+2=(a-1)^2(a+2)$, $\Delta_x=-a^3+a^2+a-1=-(a-1)^2\cdot(a+1)$, $\Delta_y=$ $=a-2a+1=(a-1)^2$, $\Delta_z=a^4-2a^2+1=(a-1)^2\cdot(a+1)^2$. Според тоа: за $a\neq 1,-2$ системот има единствено решение

$$x=-\frac{a+1}{a+2},\quad y=\frac{1}{a+2},\quad z=\frac{(a+1)^2}{a+2};$$

за $a=1$ системот има безброј многу решенија; за $a=-2$ системот е противречен.

12. Да се најдат сите решенија на системот:

а) $\begin{aligned}2x+y-z&=0,\\x+2y+z&=0,\\2x-y+3z&=0;\end{aligned}$ б) $\begin{aligned}x-y-z&=0,\\x+4y+2z&=0,\\3x+7y+3z&=0.\end{aligned}$

---

5) Ако од аксиомите на поле се изостави аксиомата за комутативност на множењето, се добива системот аксиоми на *тело*. Значи, *поле е комутативно тело.*

Р е ш е н и е. а) Поради $\Delta = 18 \neq 0$ системот нема ненулти решенија.

б) $\Delta = 0$, па системот има бескрајно многу решенија; бидејќи детерминантата од втор ред составена од коефициентите пред x и y во првите две равенки е $\delta = 5$, сметајќи го z за познато, од тие равенки добивме $x = 2z/5$, $y = -3z/5$; ставајќи $z = 5t$, за произволни вредности на t тројката $x = 2t$, $y = -3t$, $z = 5t$ претставува решение на системот.

13. Да се решат системите:

$$\text{а)}\ \begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 - \ \ x_4 &= 3,\\ 2x_1 - \ x_2 \qquad + \ 3x_4 &= 4,\\ x_1 + \ x_2 + 3x_3 - \ 6x_4 &= 5,\\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \ 9x_4 &= -1,\\ 2x_2 \qquad + 4x_3 - 10x_4 &= 8; \end{aligned} \qquad \text{б)}\ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 13,\\ 2x_1 + \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 10,\\ 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 11,\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ x_4 + 2x_5 &= 6,\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \ x_5 &= 3. \end{aligned}$$

О д г о в о р. а) Системот е противречен и покрај тоа што

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & -6 & 5\\ 1 & -2 & -3 & 9 & -1\\ 0 & 2 & 4 & -10 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

(спореди со 19°). б) $x_1 = 0 = x_4$, $x_2 = 2 = -x_3$, $x_5 = 3$.

14. Да се најде равенката на кружницата што минува низ трите дадени точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$.

Р е ш е н и е. Равенката на кружница има облик $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Ако M_1, M_2, M_3 не лежат на една права, постои кружница што минува низ нив, па системот

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0,\\ x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c &= 0,\\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c &= 0,\\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c &= 0, \end{aligned}$$

има решение по a, b, c. Според теоремата 19°, мора да е

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1\\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

а тоа е бараната равенка.

15. Да се докаже својството 13° од 1. 5.

Р е ш е н и е. Ако $\mathbf{A}$ е несингуларна матрица, тогаш $\mathbf{A}^{-1}$ е и лева и десна инверзија на $\mathbf{A}$. Да претпоставиме дека $\mathbf{B}$ е десна инверзија на $\mathbf{A}$, т.е. $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Тогаш, според 12°, имаме $1 = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$ т.е. $\det \mathbf{A} \neq 0$ и $\det \mathbf{B} = (\det \mathbf{A})^{-1}$. Според тоа, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ се несингуларни.

16. Да се образложи тврдењето дека својствата 1°, 3°-19° важат и во случај кога $\mathbb{R}$ се замени со кое било поле P.

О б р а з л о ж е н и е. Прво, дефиницијата на $\det \mathbf{A}$, (кога $a_{ij} \in P$, за секои $i, j = 1, 2, \ldots, n$) е осмислена, бидејќи ако $k \in \mathbb{N}$, $x \in P$, тогаш kx е збирот на k собироци секој од кои е x; $0x=0$, а $(-k)x=-(kx)$. Постои поле P со својството

$$2x=x+x=0, \text{ за секој } x\in P.$$

Секое поле со ова својство се вика ***поле со карактеристика два***. (Такво е полето $P=\{0,1\}$ (в. вежба 22 од 1.6), а и поопшто, секое поле со 2^m елементи, каде што $m\geq 1$.) Ако се погледне доказот на 7°, ќе се воочи дека заклучокот $\Delta=0$ е добиен како последица на $2\Delta=0$, па значи доказот е добар само ако полето P не е со карактеристика два. Затоа ќе скицираме нов доказ на 7°. За поедноставно, ќе претпоставуваме дека $a_{1j}=a_{2j}$, т.е. дека соодветните елементи од првите две редици се еднакви. Производот (2) го има следниов облик:

$$(-1)^{I_\alpha}a_{1\alpha_1}a_{1\alpha_2}a_{3\alpha_3}\cdots a_{n\alpha_n}$$

Ако во (2') ја замениме пермутацијата α: $\alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_n$ со β: $\alpha_2\ \alpha_1\ldots\alpha_n$, ќе добиеме дека

$$(-1)^{I_\beta}a_{1\alpha_2}a_{2\alpha_1}\cdots a_{n\alpha_n}=(-1)^{I_\alpha}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}.$$

Од ова следува дека на десната страна од (3) на секој собирок u му кореспондира нему спротивен собирок $-u$, што повлекува дека $\det\mathbf{A}=0$. (При докажувањето на (2") го користевме својството (2) и фактот дека $a_{1\alpha_2}=a_{2\alpha_2}$, $a_{2\alpha_1}=a_{1\alpha_1}$.)

Докажите на сите други својства важат и во случај на кое било поле P.

VII. 3. Векторски простори

И покрај тоа што ќе ги разгледуваме конечнодимензионалните вектори, ќе го дефинираме прво поопштиот поим за вектор и ќе извршиме кратка анализа на тој поим.

3. 1. Дефиниција и примери

Нека V е непразно множество чиишто елементи се означени со $\mathbf{a}$, $\mathbf{b},\ldots,\mathbf{x},\mathbf{y},\ldots$ и нека во V е определена операција собирање + (т.е. на секоја двојка елементи $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ им е придружен еднозначно определен елемент $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$), со следниве својства:

(*i*) *за секои* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V$, *точни се равенствата*

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a},\quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}),\tag{1}$$

т.е. операцијата собирање е комутативна и асоцијативна;

(*ii*) *постои елемент* $\mathbf{o}\in V$ *таков што*

$$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{o}+\mathbf{a}=\mathbf{a},\tag{2}$$

за секој елемент $\mathbf{a}\in V$ *(векторот* $\mathbf{o}$ *се вика* ***нулти елемент*** *на* V*);*

(*iii*) за секој елемент $\mathbf{a}$ постои, нему спротивен елемент $-\mathbf{a}$, таков што

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{o}.\tag{3}$$

Ако се потсетиме на поимот група (да се види I.1.5), тогаш својствата (*i*) - (*iii*) можат да се искажат на следниов начин:

1°. *V е комутативна група во однос на операцијата собирање.* □

На секој реален број x и секој $\mathbf{a} \in V$ нека им е придружен еднозначно определен елемент од V, означен со $x\mathbf{a}$, така што се исполнети следниве својства:

2°. *За секоја двојка реални броеви x, y и секоја двојка елементи $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ се точни равенствата*

$$x(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = x\mathbf{a}+x\mathbf{b}, \tag{4}$$

$$(x+y)\mathbf{a} = x\mathbf{a}+y\mathbf{a}, \tag{5}$$

$$(xy)\mathbf{a} = x(y\mathbf{a}), \tag{6}$$

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}. \tag{7}$$

За множеството V, во кое се определени операциите собирање на елементи од V и множење на реални броеви со елементи од V за кои се исполнети својствата 1° и 2°, велиме дека е ***векторски простор над полето од реалните броеви***, или само ***реален векторски простор***. Елементите од V ќе ги викаме ***вектори***, а реалните броеви - ***скалари***.

Да напомниме дека, наместо реалните броеви, за множество скалари може да се земе кое било поле (в. I.1.6), на пример, полето на рационалните броеви.

Да изнесеме неколку примери за векторски простори.

1) Множеството (обични) тридимензионални вектори образуваат векторски простор во однос на обичното собирање на вектори и множење на вектор со реален број. Тоа се гледа, имено, од особините во IV.1.2 и IV.1.3.

Поопшто, множеството $\mathbb{R}^n$ е векторски простор за секој $n \geq 1$ во однос на операциите "собирање на вектори" и "множење на вектор со скалар" дефинирани на обичен начин, т.е. со:

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n), \tag{8}$$

$$x(x_1,\ldots,x_n) = (xx_1,\ldots,xx_n). \tag{9}$$

2) Множеството $M_{m,n}$ матрици со облик $m \times n$ е векторски простор, при што собирање на вектори е обичното собирање на матрици, а множење на број со вектор е множењето на број со матрица.

3) Според примерот 2), секое од множествата $M_{1,n}$, $M_{n,1}$ е векторски простор во однос на обичните операции собирање на матрици и множење на матрица со број. (Елементите од $M_{1,n}$ ги нарековме ***вектор-редици***, а од $M_{n,1}$ - ***вектор-колони***; в. 1.1.)

4) Нека $\mathbb{R}^{\infty}$ е множеството бесконечни низи $(a_1, a_2, \ldots)$ од реални броеви и нека собирањето на низи, како и множењето на низа со број, се дефинира на вообичаениот начин, т.е. со:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots) \\ x(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) &= (xa_1, xa_2, \ldots, xa_n, \ldots). \end{aligned} \tag{10}$$

Лесно се проверува дека $\mathbb{R}^{\infty}$ е векторски простор во однос на така дефинираните операции.

5) Нека $C[0,1]$ е множеството од сите функции, непрекинати во сегментот $[0, 1]$. Ова множество е векторски простор, при што собирање на вектори и множење на скалар со вектор се дефинира со:

$$\begin{aligned} f + g = h \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) + g(x) = h(x) \\ a f = k \quad &\Leftrightarrow \quad a f(x) = k(x), \end{aligned} \tag{11}$$

за секој реален број a и $x \in [0,1]$.

6) Нека $\mathcal{D}$ е множеството од сите функции што се решенија на диференцијалната равенка

$$x^2 y'' + xy' + 2y = 0.$$

Лесно се увидува дека ако y_1 и y_2 се решенија на таа равенка, тогаш и $y_1 + y_2$, а исто така и cy_1, за секој реален број c, се решенија на равенката. Другите барања изнесени во 1° и 2° се очигледно исполнети, па значи $\mathcal{D}$ е векторски простор.

Изнесените примери за векторски простори ни укажуваат на тоа дека постојат различни видови вектори, па затоа овој нов поим за вектор не треба да се идентифицира со поимот за тридимензионален вектор, бидејќи тој е само специјален случај од општиот поим.

3. 2. Неколку општи својства

Ако имаме предвид дека секој векторски простор е комутативна група во однос на операцијата собирање на вектори, можеме да заклучиме дека:

3°. *Ако V е векторски простор, тогаш:*

а) *нултиот вектор* $\mathbf{o}$ *е еднозначно определен;*

б) *за секој вектор* $\mathbf{a}$ *нему спротивниот вектор* $-\mathbf{a}$ *е еднозначно определен;*

в) *од* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ *следува* $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Оваа теорема следува од соодветните теореми на групите (да се видат 1°, 2°, (1) - (3) од I.1.5), но на читателот му препорачуваме да ја докаже директно. □

Како што е вообичаено, при секоја комутативна група наместо $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$, ќе пишуваме $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Ќе ја докажеме следнава теорема:

4°. *Нека V е векторски простор. За секој пар реални броеви x, y и вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, точни се равенствата:*

$$0\mathbf{a} = x\mathbf{o} = \mathbf{o}, \tag{12}$$

$$(-x)\mathbf{a} = x(-\mathbf{a}) = -(x\mathbf{a}), \tag{13}$$

$$(-x)(-\mathbf{a}) = x\mathbf{a}, \tag{14}$$

$$(x-y)\mathbf{a} = (x\mathbf{a})-(y\mathbf{a}), \tag{15}$$

$$x(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (x\mathbf{a})-(x\mathbf{b}). \tag{16}$$

Д о к а з. Од (2) и (5) следува:

$$0\mathbf{a}+\mathbf{o} = 0\mathbf{a} = (0+0)\mathbf{a} = 0\mathbf{a}+0\mathbf{a}.$$

Според 3°, може да се крати со $0\mathbf{a}$ и се добива $0\mathbf{a}=\mathbf{o}$. Слично, ако наместо (5) се искористи (4), се добива $x\mathbf{o}=\mathbf{o}$, т.е. точноста на (12). Од (5) и (12) следува:

$$x\mathbf{a}+(-x)\mathbf{a} = [x+(-x)]\mathbf{a} = 0\mathbf{a}, \quad \text{т.е.} \quad (-x)\mathbf{a} = -(x\mathbf{a});$$

слично се добива дека $x(-\mathbf{a}) = -(x\mathbf{a})$, т.е. точноста на (13); (14) се добива применувајќи го (13) два пати.

За докажување на (15) ги користиме (5) и (13):

$$(x-y)\mathbf{a} = [x+(-y)]\mathbf{a} = x\mathbf{a}+(-y)\mathbf{a} = x\mathbf{a}+[-(y\mathbf{a})] = (x\mathbf{a})-(y\mathbf{a}).$$

Слично се докажува и (16). □

Од докажаната теорема следува дека и при векторите важат познатите правила за знаците. За натаму во изрази какви што се $-(x\mathbf{a})$, $(x\mathbf{a})-(y\mathbf{b})$ нема да пишуваме загради, бидејќи не постои опасност од недоразбирање.

Овој дел ќе го завршиме со докажување на таканаречените ***закони за кратење***.

5°. *Ако V е векторски простор, тогаш:*

$$x\mathbf{a}=\mathbf{o} \;\Rightarrow\; x=0 \;\text{ или }\; \mathbf{a}=\mathbf{o}, \tag{17}$$

$$x\neq 0 \;\text{ и }\; x\mathbf{a}=x\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{a}=\mathbf{b}, \tag{18}$$

$$\mathbf{a}\neq \mathbf{o} \;\text{ и }\; x\mathbf{a}=y\mathbf{a} \;\Rightarrow\; x=y. \tag{19}$$

Д о к а з. Ако $x\neq 0$ и $x\mathbf{a}=\mathbf{o}$, тогаш добиваме

$$\mathbf{a} = 1\cdot\mathbf{a} = (x^{-1}x)\mathbf{a} = x^{-1}(x\mathbf{a}) = x^{-1}\mathbf{o} = \mathbf{o},$$

т.е. точноста на (17). Со помош на (17), лесно се докажуваат (18) и (19). □

Да направиме уште неколку забелешки. Поради асоцијативноста на собирањето на вектори, при збир на повеќе вектори нема потреба да се пишуваат загради. Како последица од (4) и (5) се добиваат лесно и следниве нивни обопштенија:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\mathbf{a}=x_1\mathbf{a}+x_2\mathbf{a}+\cdots+x_n\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{a},\tag{20}$$

$$x(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_m)=x\mathbf{a}_1+x\mathbf{a}_2+\cdots+x\mathbf{a}_m=\sum_{j=1}^{m}x\mathbf{a}_j;\tag{21}$$

поопшто:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\mathbf{a}_j\right)=\sum_{i=1,j=1}^{n,m}x_i\mathbf{a}_j;\tag{22}$$

3. 3. Потпростори.

За непразното подмножество W од векторскиот простор V велиме дека е ***потпростор*** ако е исполнет следниов услов:

$$x\in I\!R,\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in W\ \Rightarrow\ x\mathbf{a},\ \mathbf{a}+\mathbf{b}\in W.\tag{23}$$

Следнава теорема дава уште една карактеристика на поимот потпростор.

6°. *Подмножеството W од векторскиот простор V е и потпростор од V акко W е векторски простор во однос на операциите на V.*

Д о к а з. Нека W е потпростор од V, т.е. нека е исполнет условот (23). Од тоа следува прво, дека за секои $\mathbf{a},\mathbf{b}\in W$, и нивниот збир $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ му припаѓа на W, т.е. во W е определена операцијата собирање. Оваа операција е комутативна и асоцијативна во поширокото множество V, па значи и во W. Нула вектор $\mathbf{o}$ му припаѓа на W, бидејќи ако $\mathbf{a}$ е кој било вектор од W (а таков постои по услов бидејќи W е непразно множество), тогаш $\mathbf{o}=0\mathbf{a}\in W$. Ако $\mathbf{a}\in W$, тогаш $-\mathbf{a}=-(1\mathbf{a})=(-1)\mathbf{a}\in W$. Со тоа покажавме дека се задоволени сите барања од 1°. Потоа, од (23) се гледа дека, за секој вектор $\mathbf{a}\in W$ и секој скалар $x\in I\!R$, и векторот $x\mathbf{a}$ му припаѓа на W. Равенствата (4) - (7) се точни во W, бидејќи се точни во поширокото множество V. Според тоа, W е векторски простор.

Обратно, ако претпоставиме дека W е векторски простор (во однос на операциите од V), јасно е дека ќе биде исполнет и условот (23).

Со тоа го комплетираме доказот на теоремата 6°. □

Да разгледаме неколку примери.

7) Нека $I\!R^n$ е векторски простор од n-димензионални вектори (пример 1) и нека: A се состои од сите вектори $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ на $I\!R^n$ чија прва компонента a_1 е нула ($a_1=0$), а B од оние вектори $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ чија прва компонента е 1 ($b_1=1$); потоа, нека C е множество од сите вектори $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ такви што $c_1+c_2+\cdots+c_n=0$. Ако се има предвид условот (23), лесно се заклучува дека A и C се потпростори од $I\!R^n$, но дека B не е.

8) Нека $I\!R^{\infty}$ е просторот од сите бесконечни низи $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ од реални броеви (пр. 4)) и нека: $I\!R_1^{\infty}$ се состои од сите низи од облик $(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ ($n \in I\!N$ фиксен), т.е. $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$, а $I\!R_2^{\infty}$ од сите низи, што имаат конечно многу членови различни од нула. Јасно е дека $I\!R_1^{\infty}$ и $I\!R_2^{\infty}$ се два потпростора од $I\!R^{\infty}$.

Да дадеме уште два примера на потпростори од $I\!R^{\infty}$. Имено, ако A се состои од сите конвергентни низи, а B од сите ограничени низи, тогаш A и B се потпростори од $I\!R^{\infty}$.

На крајот од оваа точка ќе изнесеме еден начин за формирање потпростор со помош на зададено непразно подмножество од еден векторски простор.

Нека е A подмножество од векторскиот простор V и нека $L(A)$ се состои од сите вектори од облик

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n, \tag{24}$$

каде што $\mathbf{a}_i \in A$, $x_i \in I\!R$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ако $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се вектори со облик (24), тогаш и векторите $x\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ го имаат истиот вид (24). Според тоа, $L(A)$ е потпростор од V, наречен ***линеарна обвивка на*** A.

Бидејќи секој вектор $\mathbf{a} \in A$ може да се претстави како $\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a}$, т.е. во обликот (24), заклучуваме дека A е подмножество од потпросторот $L(A)$. Ако пак U е кој било потпростор од V во кој се содржат сите елементи од A, тогаш од дефиницијата за потпростор следува дека на U му припаѓа секој вектор со облик (24), т.е. U го содржи $L(A)$ како свој потпростор.

Значи, потпросторот $L(A)$ го содржи A, а самиот се содржи во секој потпросторот на V што го содржи A. Затоа можеме да кажеме дека $L(A)$ *е "најмалиот" потпростор од V што го содржи A*. За $L(A)$ ќе видиме дека е ***потпростор генериран од множеството*** A.

3. 4. Линеарни пресликувања.

Нека U и V се векторски простори. За пресликувањето f од U во V велиме дека е ***линеарно*** ако се исполнети равенствата

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}), \quad f(x\mathbf{a}) = x f(\mathbf{a}) \tag{25}$$

за секои $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ и секој скалар $x \in I\!R$.

Збир на линеарни пресликувања, како и ***производ*** на скалар со линеарно пресликување се определуваат со:

$$(f+g)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a}), \quad (xf)(\mathbf{a}) = x f(\mathbf{a}). \tag{26}$$

Ќе ја докажеме следнава теорема:

7°. *Ако* f *и* g *се линеарни пресликувања од* U *и* V, *тогаш се линеарни и пресликувањата* $f+g$ *и* xf, *за секој* $x \in \mathbb{R}$.

Д о к а з. Нека е $h_1 = xf, h_2 = f+g$. Тогаш имаме:

$$h_1(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = xf(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = x[f(\mathbf{a})+f(\mathbf{b})] = xf(\mathbf{a})+xf(\mathbf{b}) = h_1(\mathbf{a})+h_1(\mathbf{b}),$$
$$h_1(y\mathbf{b}) = xf(y\mathbf{b}) = xyf(\mathbf{b}) = yxf(\mathbf{b}) = yh_1(\mathbf{b}),$$
$$h_2(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}+\mathbf{b})+g(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})+f(\mathbf{b})+g(\mathbf{a})+g(\mathbf{b}) = h_2(\mathbf{a})+h_2(\mathbf{b}),$$
$$h_2(x\mathbf{a}) = f(x\mathbf{a})+g(x\mathbf{a}) = xf(\mathbf{a})+xg(\mathbf{a}) = xh_2(\mathbf{a}).$$

Значи, h_1 и h_2 се навистина линеарни пресликувања. □

Да го означиме со $L(U,V)$ множеството од сите линеарни пресликувања од U во V. Од (26) се гледа дека во $L(U,V)$ е определена операцијата собирање, а исто така и производ на скалар со елемент од $L(U,V)$.

Користејќи го тоа што операцијата собирање во V е комутативна и асоцијативна, лесно се добива дека истите својства ги има и операцијата собирање на линеарни пресликувања. Ако ставиме

$$\theta(\mathbf{a}) = \mathbf{o} \text{ за секој } \mathbf{a} \in U,$$

добиваме пресликување од U во V, кое е линеарно бидејќи:

$$\theta(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{o} = \theta(\mathbf{a})+\theta(\mathbf{b}), \quad \theta(x\mathbf{a}) = \mathbf{o} = x\theta(\mathbf{a})$$

Освен тоа, имаме

$$(f+\theta)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})+\theta(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}), \quad \text{т.е. } f+\theta = f,$$

за секој $f \in L(U,V)$. Поради

$$[f+(-1)f](\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})+(-1)f(\mathbf{a}) = \mathbf{o},$$

добиваме дека $f+(-1)f = \theta$, т.е. $(-1)f = -f$.

Со тоа покажавме дека: *множеството линеарни пресликувања* $L(U,V)$ *претставува комутативна група во однос на операцијата собирање на пресликувања.* Лесно се добива и дека се точни равенствата:

$$1\cdot f = f, \quad (xy)f = x(yf), \quad (x+y)f = xf+yf, \quad x(f+g) = xf+xg,$$

а со тоа би се комплетирал доказот на следнава теорема:

8°. *Множеството* $L(U,V)$ *на сите линеарни пресликувања од* U *во* V *е векторски простор.* □

Ќе ја докажеме и следнава теорема:

9°. *Состав на две линеарни пресликувања пак е линеарно пресликување, или, попрецизно:*

$$f \in L(U,V),\ g \in L(U,W) \Rightarrow gf \in L(U,W).$$

Д о к а з. Ако ставиме $h = gf$, ќе имаме

$$h(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = g[f(\mathbf{a}+\mathbf{b})] = g[f(\mathbf{a})+f(\mathbf{b})] = gf(\mathbf{a})+gf(\mathbf{b}) = h(\mathbf{a})+h(\mathbf{b}),$$

$$h(x\mathbf{a}) = g[f(x\mathbf{a})] = g(xf(\mathbf{a})) = xgf(\mathbf{a}) = xh(\mathbf{a}).$$

Од тоа следува дека h е линеарно пресликување, т.е. точноста на теоремата. □

Слично се докажува точноста и на следнава теорема:

10°. *Ако f_1 и f_2 се линеарни пресликувања од U во V, а g_1 и g_2 од V во W, тогаш се точни следниве равенства:*

$$\begin{aligned} &g_1(f_1+f_2) = g_1f_1+g_1f_2, \quad (g_1+g_2)f_1 = g_1f_1+g_2f_1, \\ &(xg_1)f_1 = g_1(xf_1) = x(g_1f_1), \quad \text{за секој скалар } x \in \mathbb{R}. \ \square \end{aligned} \tag{27}$$

Секое линеарно пресликување f од просторот V во V се наречува ***линеарна трансформација*** на V. Ако се имаат предвид теоремите 7°, 8°, 9° и 10° како и фактот дека производот на пресликувања е асоцијативен, ја добиваме точноста на следнава теорема:

11°. *Множеството од сите линеарни трансформации на еден векторски простор е прстен.* (да се види I. 1. 5.) □

За едно линеарно пресликување f од V во V' велиме дека е ***изоморфизам*** ако за секој елемент $x' \in V'$ постои само еден елемент $x \in V$, таков што $f(x) = x'$ (со други зборови, f е биекција од V на V').

Ако постои барем еден изоморфизам од V во V', тогаш велиме дека векторските простори V и V' се ***изоморфни***.

Забелешка. Во дефиницијата на поимот векторски простор претпоставивме дека скаларите се реални броеви. Но, како што споменавме во 3.1, ништо не би се изменило, ако за множеството скалари се земе кое било поле P. Така, ако во примерите 1) - 4) $\mathbb{R}$ се замени со произволно поле P, тогаш ќе се добијат примери за ***векторски простори над полето*** P. Истото се однесува и за преостанатиот материјал од овој параграф, а и за материјалот од следните параграфи, којшто не е поврзан со поимот скаларен производ (од следниот раздел, 3.5).

3. 5. Простори со скаларен производ

Скаларен производ во векторскиот простор V е пресликување $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a}\circ\mathbf{b}$ од V^2 во $\mathbb{R}$, такво што, за секои $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V$ и $x \in \mathbb{R}$, се точни следниве услови:

(i) $\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = \mathbf{b}\circ\mathbf{a}$; (ii) $(x\mathbf{a})\circ\mathbf{b} = x(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})$;

(iii) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\circ\mathbf{c} = \mathbf{a}\circ\mathbf{b}+\mathbf{b}\circ\mathbf{c}$; (iv) $\mathbf{a} \neq \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a}\circ\mathbf{a} > 0$.

Според тоа, до општиот поим скаларен производ дојдовме со издвојување на неколку својства на скаларниот производ кај обичниот простор, т.е. просторот од пример 1), дефиниран во IV.3.1.

Ако се има предвид (i), од (ii) и (iii) се добиваат следниве обопштувања:

(ii') $(x\mathbf{a})\circ(y\mathbf{b})=(xy)(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})$,

(iii') $(x\mathbf{a}+y\mathbf{b})\circ(u\mathbf{c}+v\mathbf{d})=(xu)(\mathbf{a}\circ\mathbf{c})+(xv)(\mathbf{a}\circ\mathbf{d})+(yu)(\mathbf{b}\circ\mathbf{c})+(yv)(\mathbf{b}\circ\mathbf{d})$,

а исто така "обичното" својство на векторот нула:

(v) $\mathbf{o}\circ\mathbf{a}=\mathbf{a}\circ\mathbf{o}=0$.

Според (iv) и (v), $\mathbf{a}\circ\mathbf{a}\geq 0$, за секој вектор $\mathbf{a}$, така што постои коренот $\sqrt{\mathbf{a}\circ\mathbf{a}}=\|\mathbf{a}\|$, за кој велиме дека е ***должина*** на а. Од (iv) следува дека *должината на секој ненулти вектор е позитивна, додека нултиот вектор има должина нула.*

Формулата за скаларен производ на обични вектори, т.е. од примерот 1), докажана во **IV.3.2**, може да се искористи за дефинирање на ***скаларен производ*** во векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ од примерот 1). Имено, ако $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, тогаш $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$ се дефинира со:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \tag{28}$$

Лесно се проверува дека се исполнети условите (i) - (iv), т.е. дека со (28) е дефиниран скаларен производ во $\mathbb{R}^n$.

Ќе го покажеме следното обопштување на Т.3 од **V.1.1**.

12°. (***Теорема на Коши-Буњаковски***). *За кои било вектори* **a**, **b** *од еден векторски простор со скаларен производ е точно неравенството:*

$$|\mathbf{a}\circ\mathbf{b}|\leq\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|. \tag{29}$$

Д о к а з. Ако еден од векторите **a**, **b** е нула тогаш и двете страни од (29) се нула, па затоа ќе претпоставуваме дека $\mathbf{a}\neq 0$ и $\mathbf{b}\neq 0$.

Ако $x\in\mathbb{R}$, тогаш имаме $(\mathbf{a}-x\mathbf{b})\circ(\mathbf{a}-x\mathbf{b})\geq 0$, од што, според ($iii'$), добиваме:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{a}-2x\,\mathbf{a}\mathbf{b}+x^2\,\mathbf{b}\circ\mathbf{b}\geq 0. \tag{30}$$

Ставајќи $x=(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})(\mathbf{b}\circ\mathbf{b})^{-1}$, по средувањето ќе добиеме:

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})^2\leq(\mathbf{a}\circ\mathbf{a})(\mathbf{b}\circ\mathbf{b}),$$

а со коренување и (29). □

За два вектори **a** и **b** велиме дека се ***заемно нормални*** ако нивниот скаларен производ е нула. Со неколку својства сврзани со поимот скаларен производ ќе се сретнеме во вежбите од овој параграф (а и во следните параграфи, како во работниот текст, така и во вежбите).

3. 6. Вежби

1. Да се образложат подетално тврдењата во примерите 4) - 8) дека разгледаните множества и операции се векторски простори.

2. Нека V е множеството двојки (x, y) реални броеви и нека во V се дефинира собирање на вообичаениот начин, т.е. со:

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v),$$

а множење на број со "вектор" со:

а) $a\cdot(x,y)=(ax,y)$; б) $a(x,y)=(ax,0)$.

Дали се добива векторски простор?

Р е ш е н и е. И во двата случаја одговорот е негативен, бидејќи не се задоволени некои барања од 2°. Имено, во а) не е точно равенството (5), а во б) равенството (7).

3. Да се покаже дека множеството $\mathbb{R}[x]$ од сите полиноми

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{31}$$

е векторски простор, во однос на обичната операција собирање на полиноми и множење на реален број со полином. Потоа, да се покаже дека $\mathbb{R}[x]$ е изоморфен со векторскиот простор $\mathbb{R}_2^{\infty}$ од примерот 8).

Р е ш е н и е. Дека $\mathbb{R}[x]$ е векторски простор се покажува лесно со директна проверка. Ако полиномот $p(x)$ од (31) се преслика во низата

$$(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots,0,\ldots),$$

се добива бараниот изоморфизам.

4. Нека V е векторскиот простор од претходната вежба и нека V_1, V_2, V_3 и V_4 се подмножества од V определени со:

$p(x)\in V_1 \Leftrightarrow 2p(0)=p(1)$;

$p(x)\in V_2 \Leftrightarrow p(x)$ има степен n (n е фиксен природен број);

$p(x)\in V_3 \Leftrightarrow p(x)=p(1-x)$ за секој реален x;

$p(x)\in V_4 \Leftrightarrow p(x)\geq 0$ за секој $x: 0\leq x\leq 1$.

Да се провери кои од подмножествата V_1, V_2, V_3 и V_4 се потпростори од V.

Р е ш е н и е. V_1 и V_3 се потпростори, но V_2 и V_4 - не; на пример, ако $p(x)=x^n-1$, $q(x)=-x^n+x$, имаме $p(x), q(x)\in V_2$, но $p(x)+q(x)\notin V_2$; ако $p(x)=x$ имаме $p(x)\in V_4$, но $q(x)=-p(x)=-x\notin V_4$.

5. Нека V_1 и V_2 се векторски простори над исто поле P; во множеството $V=V_1\times V_2$ од сите парови $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ каде што $\mathbf{a}_1\in V_1$ и $\mathbf{a}_2\in V_2$, ќе определиме собирање со $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)+(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)=(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1,\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_2)$ и множење на скалар со вектор со $x(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=(x\mathbf{a}_1,x\mathbf{a}_2)$. Да се покаже дека V е векторски простор над P.

Р е ш е н и е. Комутативноста и асоцијативноста на собирањето во V се добива лесно од соодветните својства на оваа операција во V_1 и V_2.

Ако $\mathbf{o}_1$ е нулата во V_1, а $\mathbf{o}_2$ во V_2, имаме:

$$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)+(\mathbf{o}_1,\mathbf{o}_2)=(\mathbf{a}_1+\mathbf{o}_1,\mathbf{a}_2+\mathbf{o}_2)=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2),$$

од што следува дека $(\mathbf{o}_1,\mathbf{o}_1)$ е нулата во V. На ист начин се добива дека $-(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=(-\mathbf{a}_1,-\mathbf{a}_2)$. Лесно се проверува дека се точни и равенствата (4) - (7).

6. Да се покаже дека ако V_1 и V_2 се потпростори од векторскиот простор V, тогаш и $V_1 \cap V_2$ е потпростор од V.

Р е ш е н и е. Ако $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V_1 \cap V_2$, и ако x е реален број, тогаш $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V_1$ и $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V_2$, од што, бидејќи V_1, V_2 се потпростори, следува: $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in V_1$, $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in V_2$ и $x\mathbf{a} \in V_1$, $x\mathbf{a} \in V_2$. Според тоа, $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in V_1 \cap V_2$, $x\mathbf{a} \in V_1 \cap V_2$, т.е. добиваме дека $V_1 \cap V_2$ е навистина простор. ($V_1 \cap V_2$ е непразен, бидејќи $\mathbf{o} \in V_1$ и $\mathbf{o} \in V_2$.)

7. Нека $V = \mathbb{R}^3$ е просторот од тридимензионални вектори. Да се определи потпросторот W генериран од A ако:

а) $A = \{(0,0,1)\}$; б) $A = \{(0,0,1),(0,1,0)\}$;

в) $A = \{(1,0,1),(1,-1,0),(2,-1,1)\}$;

г) $A = \{(1,2,1),(2,1,0),(0,0,1)\}$.

Р е ш е н и е. а) $W = \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$. б) $W = \{(0,x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$.

в) $W = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}, x+y-z=0\}$. г) W се совпаѓа со целиот простор.

Ако се служиме со геометриската терминологија од **IV.4** можеме да речеме дека W се состои од сите вектори што лежат на: а) оската Oz; б) рамнината Oxy; в) рамнината $x+y-z=0$.

8. Нека U и V се векторски простори и нека f е линеарно пресликување од U во V, а U_f множеството од сите вектори $\mathbf{a} \in U$, такви што $f(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, т.е.

$$U_f = \{\mathbf{a} \in U \mid f(\mathbf{a}) = \mathbf{o}\}.$$

Да се докаже дека U_f е потпростор од U.

За U_f велиме дека е ***јадро на пресликувањето*** f.

Р е ш е н и е. Поради: $f(\mathbf{o})+\mathbf{o} = f(\mathbf{o}) = f(\mathbf{o}+\mathbf{o}) = f(\mathbf{o})+f(\mathbf{o})$, имаме $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{o} \in U_f$. Ако $\mathbf{a},\mathbf{b} \in U_f$, а x е кој било реален број, тогаш

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a})+f(\mathbf{b}) = \mathbf{o}+\mathbf{o}, \text{ т.е. } \mathbf{a}+\mathbf{b} \in U_f \text{ и}$$
$$f(x\mathbf{a}) = xf(\mathbf{a}) = x\mathbf{o} = \mathbf{o}, \text{ т.е. } x\mathbf{a} \in U_f.$$

Од сето тоа следува дека навистина U_f е потпростор.

9. Нека f и g се пресликувања од $\mathbb{R}^3$ во $\mathbb{R}^2$ определени со:

$$f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1, x_2+x_3), \quad g((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_2).$$

Да се покаже дека f и g се линеарни пресликувања и да се одредат нивните јадра, во смисла на претходната вежба.

Р е ш е н и е. Дека f и g се линеарни пресликувања се утврдува со директна проверка. Потоа, $(x_1,x_2,x_3) \in U_f \Leftrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -x_3$, т.е. U_f се состои од векторите што лежат на правата $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $x_3 = -t$. Јадрото U_g на g се состои од векторите што лежат на апликатната оска.

10. Нека $\mathcal{D}$ е множество од сите реални функции $f(x)$ диференцијабилни во сегментот $[0,1]$. Да се покаже дека $\mathcal{D}$ е векторски простор во однос на обичните операции собирање на функции и множење на функција со број. Дали пресликувањето $f(x) \mapsto f'(x)$ е линеарна трансформација?

Р е ш е н и е. Дека $\mathcal{D}$ е простор следува од фактот што збир од две диференцијабилни функции е диференцијабилна, а исто така и производ на реален број со диференцијабилна функција е пак диференцијабилна функција.

Пресликувањето $f(x) \mapsto f'(x)$ не е линеарна трансформација на $\mathcal{D}$, зошто на пример, ако $f(x) = (x - 1/2)|x - 1/2|$, имаме $f(x) \in \mathcal{D}$, но $f'(x) = |2x - 1| \notin \mathcal{D}$.

11. За два вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ велиме дека се ***неколинеарни*** акко:

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{o} \ \Rightarrow \ x = y = 0.$$

Да се покаже дека во (29) важи равенство акко $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се ***колинеарни***, т.е. не се неколинеарни.

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни, ненулти вектори. Тогаш, постои $x(\neq 0)$, таков што $\mathbf{b} = x\mathbf{a}$, па $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = x(\mathbf{a} \circ \mathbf{a})$, т.е. $|\mathbf{a} \circ \mathbf{b}| = |x| \cdot \|\mathbf{a}\|^2$. Исто така:

$$\|\mathbf{b}\| = ((x\mathbf{a}) \circ (x\mathbf{a}))^{1/2} = \left(x^2(\mathbf{a} \circ \mathbf{a})\right)^{1/2} = \left(x^2 \|\mathbf{a}\|^2\right)^{1/2} = |x| \cdot \|\mathbf{a}\|,$$

од што следува дека во (29) важи равенство.

Да претпоставиме дека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни. Тогаш $\mathbf{a} - x\mathbf{b} \neq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$, од што следува дека $(\mathbf{a} - x\mathbf{b}) \circ (\mathbf{a} - x\mathbf{b}) > 0$, па значи во (30) важи стриктно неравенство. Потоа, до заклучокот се доаѓа на ист начин како и во доказот на 12°.

12. Да се покаже дека ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се ненулти заемно нормални вектори, тогаш тие се неколинеарни.

Р е ш е н и е. Ако $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{o}$, тогаш:

$$0 = \mathbf{a} \circ \mathbf{o} = \mathbf{a} \circ (x\mathbf{a} + y\mathbf{b}) = x(\mathbf{a} \circ \mathbf{a}) + y(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = x(\mathbf{a} \circ \mathbf{a}),$$

од што следува дека $x = 0$. Аналогно се добива $y = 0$.

13. Нека $\mathbf{a} \in V$ е даден вектор, а U множеството од сите вектори нормални со $\mathbf{a}$. Да се докаже дека U е потпростор на V.

14. Да се покаже дека операцијата $\circ$ дефинирана во векторскиот простор $M_{1,n}$ со: $A \circ B = A \cdot B^1$ ги задоволува сите аксиоми на скаларен производ.

Р е ш е н и е. Ако се има предвид фактот што не правиме разлика меѓу матрицата $[a] \in M_{1,1}$ и бројот a, добиваме дека $A \circ B \in \mathbb{R}$, за секои $A, B \in M_{1,n}$. Потоа, својствата (i) - (iii) на скаларен производ се непосредни последици од својствата на операции со матрици, а евидентно е и својството (iv).

15. Да се дефинира скаларен производ во $M_{n,1}$, слично како во претходната вежба.

Р е ш е н и е. $A \circ B$ се дефинира со $A \circ B = A^1 B$.

16. Нека $V = C[0,1]$ е просторот од сите реални непрекинати функции на сегментот $[0,1]$ (в. пр. 5) во 3.1). Да се покаже дека со:

$$f \circ g = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

е дефиниран скаларен производ во V.

П о м о ш. Со непосредна проверка на (i) - (iv) од 3.5, врз основа на својствата на определениот интеграл.

17. Нека P е поле и нека $V = P^n$ е векторскиот простор над P дефиниран како по примерот 1), со (8) и (9), т.е.

$$(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$$
$$a(a_1,\dots,a_n)=(aa_1,\dots,aa_n),$$

за кои било $a_i, b_j, a \in P$. Потоа, да дефинираме "скаларен производ" во V со (28), т.е. со:

$$(a_1,\dots,a_n)\circ(b_1,\dots,b_n)=a_1b_1+\cdots+a_nb_n. \tag{32}$$

Кои од условите (i) - (iv) од 3. 5 за скаларен производ се задоволени?

О д г о в о р. Сите освен (iv). Имено, полето P не мора да биде подредено, така што тврдењето "поголем од нула" не мора да биде осмислено.

18. Да се покаже дека, при истите претпоставки како и во претходната вежба, "скаларен производ" дефиниран со (32) не мора да го задоволува ни условот:

(iv') $\mathbf{a} \neq \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{a}\circ\mathbf{a} \neq 0.$

Р е ш е н и е. На пример, ако $n=2$, а $P=\{0,1\}$ е полето од вежбата 12 во I **1. 6** (т.е. од примерот 1 во I.1.5), тогаш

$$(1,1)\circ(1,1)=1\cdot1+1\cdot1=1+1=0.$$

VII. 4. Конечнодимензионални векторски простори

Насекаде во овој дел, без тоа да го истакнуваме посебно, ќе претпоставуваме дека $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, се елементи од даден векторски простор, а $x, y, \dots$ реални броеви.

4. 1. Линеарна зависност

За системот вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ велиме дека е ***линеарно зависен*** ако постојат скалари (т.е. реални броеви), $x_1, x_2, \dots, x_m$ такви што

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_m\mathbf{a}_m=0, \tag{$*$}$$

а притоа барем еден од скаларите x_ν да е различен од нула. Во спротивниот случај, дадениот систем вектори го викаме ***линеарно независен.***

Го употребуваме терминот *систем вектори*, а не *множество вектори*, бидејќи допуштаме два (или повеќе) вектори од тој систем да бидат еднакви.

Од $(*)$, поради комутативноста на собирањето, следува дека:

1°. *За зависноста на еден систем вектори не е битен нивниот распоред.* □

Ќе докажеме уште неколку својства во врска со зависноста на систем вектори, формулирани во следнава теорема:

2°. *Ако некој йотсистем од некој систем вектори е зависен, тогаш и целиот систем е зависен. Ако некој член од еден систем е* $\mathbf{o}$, *или пак ако два члена се еднакви тогаш системот е зависен.*

Д о к а з. Да претпоставиме дека некој потсистем од системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ е зависен. Според 1°, можеме да претпоставиме дека тој потсистем е $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ $(k \le m)$. Според тоа, $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o}$, каде што на пример, x_1 не е нула. Тогаш,

$$x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_k\mathbf{a}_k + 0\,\mathbf{a}_{k+1} + \dots + 0\,\mathbf{a}_m = 0,$$

од што следува дека системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ е зависен. Поради $1 \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ системот $\mathbf{o}$ е зависен, а поради $1 \cdot \mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = \mathbf{o}$ и системот $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ е зависен. Со тоа ја добиваме точноста и на вториот дел од теоремата. □

За векторот $\mathbf{b}$ ќе велиме дека е ***линеарна комбинација*** од $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ ако постојат скалари $x_1, x_2, \dots, x_m$, такви што

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_m\mathbf{a}_m. \tag{1}$$

Со помош на поимот за линеарна комбинација, ќе докажеме уште еден критериум за линеарната зависност.

3°. *Еден систем вектори е линеарно зависен ако и само ако некој вектор од тој систем може да се изрази како линеарна комбинација од преостанатите.*

Д о к а з. Ако $\mathbf{a}_1 = x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \dots + x_m\mathbf{a}_m$, тогаш

$$(-1)\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \dots + \dots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{o},$$

од каде што следува дека системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ е зависен.

Да претпоставиме сега дека системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ е линеарно зависен, т.е. дека е точно равенството од облик $y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_m\mathbf{a}_m = \mathbf{o}$, каде што $y_\nu \ne 0$ за некој ν. Ако биде на пример $y_1 \ne 0$, ќе имаме $\mathbf{a}_1 = x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \dots + x_m\mathbf{a}_m$, каде што $x_\nu = -y_\nu / y_1$. Со тоа точноста на теоремата е докажана. (Фактот што на векторот $\mathbf{a}_1$ му дадовме специјална улога не е битен, бидејќи, како што спомнавме во 1°, за зависноста не е битен распоредот по кој се напишани векторите во системот.) □

Во спроведениот доказ, не споменувајќи го тоа посебно, претпоставуваме дека во дадениот систем има барем два члена. Да забележиме дека, ако во еден систем постои само еден член $\mathbf{a}$, тогаш тој е зависен акко $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, бидејќи при $x \ne 0$, од $x\mathbf{a} = 0$ имаме $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

На крајот, во врска со линеарната зависност, ќе ја докажеме следнава теорема:

4°. *Нека* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ *и* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ *се два система вектори, и притоа секој вектор од вториот систем може да се изрази како линеарна* *комбинација на векторите од првиот систем. Ако $m<k$ тогаш системот* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ *е линеарно зависен.*

Д о к а з. Ако некој од векторите $\mathbf{b}_\nu$ е нулти, или пак ако два од нив се еднакви, тогаш според теоремата $2°$, системот $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ е зависен. Да претпоставиме дека $\mathbf{b}_\nu \neq \mathbf{o}$ за секој $\nu = 1, 2, \ldots k$. За $m=1$, точноста на теоремата е јасна, зашто тогаш ќе имаме $\mathbf{b}_1 = x_1\mathbf{a}, \mathbf{b}_2 = x_2\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{b}_n = x_n\mathbf{a}$, па значи

$$\mathbf{b}_1 + (-x_1 x_2^{-1})\mathbf{b}_2 + 0\cdot\mathbf{b}_3 + \cdots + 0\cdot\mathbf{b}_n = \mathbf{o}.$$

Да претпоставиме точност за $m=s$ и да го разгледаме случајот кога $m=s+1$ Да ги претставиме векторите $\mathbf{b}_\nu$ со помош на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= x_{11}\mathbf{a}_1 + x_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{1m}\mathbf{a}_m \\ \mathbf{b}_2 &= x_{21}\mathbf{a}_1 + x_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{2m}\mathbf{a}_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{b}_k &= x_{k1}\mathbf{a}_1 + x_{k2}\mathbf{a}_2 + \cdots + x_{km}\mathbf{a}_m, \end{aligned} \tag{2}$$

каде што $m=s+1<k$. Ако $x_{1m} = x_{2m} = \cdots = x_{km} = 0$, тогаш векторите $\mathbf{b}_\nu$ ќе можат да се изразат како линеарна комбинација на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$, а од тоа, според индуктивната претпоставка, следува дека системот вектори $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ е зависен.

Преостанува случајот кога некој од скаларите $x_{\nu m}$ не е нула. Во тој случај, според теоремата $1°$, можеме да претпоставиме дека $x_{km} \neq 0$. Последното равенство од (2) ќе го помножиме со скаларот $-x_{km}^{-1}x_{\nu m}$ и ќе го додадеме на ν-тото равенство. Ако ставиме $\mathbf{c}_\nu = \mathbf{b}_\nu - x_{km}^{-1}x_{\nu m}\mathbf{b}_k$, $y_{\nu j} = x_{\nu j} - x_{km}^{-1}\cdot x_{\nu j}$, добиваме систем равенства:

$$\mathbf{c}_\nu = y_{\nu 1}\mathbf{a}_1 + y_{\nu 2}\mathbf{a}_2 + \cdots + y_{\nu s}\mathbf{a}_s, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{3}$$

Притоа, поради $m=s+1<k$, имаме $s<k-1$, од што повторно, според направената индуктивна претпоставка, добиваме дека системот $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{k-1}$ е зависен. Според тоа, постојат скалари $z_1, z_2, \ldots z_{k-1}$, од кои барем еден не е нула, такви што $z_1\mathbf{c}_1 + z_2\mathbf{c}_2 + \cdots + z_{k-1}\mathbf{c}_{k-1} = \mathbf{o}$. Заменувајќи во ова равенство $\mathbf{c}_\nu = \mathbf{b}_\nu - x_{km}^{-1}x_{\nu m}\mathbf{b}_k$ добиваме:

$$z_1\mathbf{b}_1 + z_2\mathbf{b}_2 + \cdots + z_{k-1}\mathbf{b}_{k-1} + z_k\mathbf{b}_k = \mathbf{o}, \tag{4}$$

каде што е

$$z_k = -x_{km}^{-1}(x_{1m}z_1 + x_{2m}z_2 + \cdots + x_{k-1\,m}z_{k-1}).$$

Од (4) добиваме дека векторите $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ се линеарно зависни.

Со тоа, доказот на теоремата е комплетиран. □

4. 2. Конечнодимензионални векторски простори

Ќе се задржиме на векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ од n-димензионалните вектори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а специјално, ќе го разгледаме системот вектори:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1) \qquad (5)$$

Јасно е дека:

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (6)$$

од што следува дека секој вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ може да се изрази како линеарна комбинација на $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и тоа на единствен начин. Исто така, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ е и линеарно независен систем. Поради ова својство, велиме дека системот $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ е база на $\mathbb{R}^n$.

Поопшто, ако V е векторски простор, тогаш за едно множество [1] вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ од V велиме дека е ***база на*** V ако секој вектор $\mathbf{a}$ од V може на еден, и само на еден начин да се претстави како линеарна комбинација:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k. \qquad (7)$$

Базата (5) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ на $\mathbb{R}^n$, се вика ***стандардна база*** на $\mathbb{R}^n$.

Еве уште една карактеристика на поимот база.

5°. *Множеството вектори* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *е база на векторскиот простор* V *ако и само ако тој е линеарно независен систем со својство да е линеарно зависен секој систем од облик* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$.

(*Со други зборови, даденото множество* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *е максимален линеарно независен систем.*)

Доказ. Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ е база на V. Тогаш, по услов, нултиот вектор $\mathbf{o}$ може на единствен начин да се изрази како линеарна комбинација на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, па значи

$$\mathbf{o} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0,$$

т.е. дадениот систем е линеарно независен. Ако $\mathbf{a} \in V$, тогаш $\mathbf{a}$ е линеарна комбинација од $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ па од тоа (според 3°) системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$ е зависен.

Да го претпоставиме сега обратното, т.е. дека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ е линеарно независен систем таков што, за секој вектор $\mathbf{a} \in V$, системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$ е зависен. Тогаш постојат скалари $x_1, x_2, \ldots, x_k, x$ од кои барем еден не е нула, такви што:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k + x\mathbf{a} = \mathbf{o}. \qquad (8)$$

1) Натаму ќе сметаме дека базата е подредено множество

Не може да биде $x=0$, бидејки во тој случај од (8) би следувало:

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_k\mathbf{a}_k=\mathbf{o}, \tag{8'}$$

а од тоа, поради независноста на $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$, би следувало и $x_1=x_2=\cdots=x_k=\mathbf{o}$. Според тоа имаме $x\neq 0$. Од тоа следува:

$$\mathbf{a}=y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{a}_2+\cdots+y_k\mathbf{a}_k, \tag{8''}$$

каде што е $y_\nu=-x_\nu/x$. Добиваме, значи, дека секој вектор $\mathbf{a}\in V$ е линеарна комбинација од $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$. Ако покрај (8″) е точно и равенството

$$\mathbf{a}=z_1\mathbf{a}_1+z_2\mathbf{a}_2+\cdots+z_k\mathbf{a}_k,$$

ќе имаме

$$(z_1-y_1)\mathbf{a}_1+(z_2-y_2)\mathbf{a}_2+\cdots+(z_k-y_k)\mathbf{a}_k=\mathbf{o},$$

а од тоа, поради независноста на $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$, следува: $y_1=z_1$, $y_2=z_2,\ldots,y_k=z_k$ т.е. дека секој вектор $\mathbf{a}$ може на единствен начин да се претстави како линеарна комбинација од $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$. Од сето тоа следува дека $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$ е навистина база, а тоа сакавме да го докажеме. □

Од наредната теорема, според **4°**, следува дека *бројот на елементите од една база е* *инваријантен за еден векторски простор*. **Имено:**

6°. *Ако векторскиот простор V има една база $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$, тогаш секоја база на V има k елементи.*

Д о к а з. Нека $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_m$ се две бази на V. Ако $k<m$, тогаш според теоремата 4, системот $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_m$, би бил зависен. Од исти причини, неравенството $m<k$ би ја повлекло зависноста на $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$. Преостанува значи можноста $m=k$ што и сакавме да докажеме. □

Бројот на елементите од една база (ако таква постои) се вика ***димензија*** на векторскиот простор V. (Докажаната теорема **6°** укажува на тоа дека не е важно за која база се работи.)

Од **6°** и **4°** се добива точноста и на следнава теорема:

7°. *Ако векторскиот простор V има димензија k, тогаш секој систем од $k+1$ вектори од V е линеарно зависен.*

Д о к а з. Ако $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$ е една база на V и ако $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_k$, $\mathbf{b}_{k+1}$ е произволен систем со $k+1$ член, тогаш тој е зависен според теоремата 4°. □

Од дискусијата што ја направивме во почетокот на овој дел следува дека $\mathbb{R}^n$ има димезија n, па значи тукушто воведениот поим за димензија е во согласност со тоа што и досега векторите од $\mathbb{R}^n$ ги викаме n-димезионални. Врската меѓу $\mathbb{R}^n$ и n-димензионалните простори е уште подлабока, како што се гледа и од следнава теорема:

8°. *Секој n-димензионален простор V е изоморфен со $\mathbb{R}^n$.*

Д о к а з. Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ е една база на V. Тогаш секој вектор $\mathbf{x} \in V$ може на единствен начин да се претстави во обликот:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n \tag{9}$$

Од тоа следува дека со

$$f(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{10}$$

е определена биекцијата од V на $\mathbb{R}^n$. Ако $\mathbf{y} \in V$ е претставен во обликот

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n, \quad \text{т.е.} \quad f(\mathbf{y}) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{11}$$

и ако c е некој реален број, тогаш, ќе имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (x_n + y_n)\mathbf{a}_n \\ c\mathbf{x} &= (cx_1)\mathbf{a}_1 + (cx_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (cx_n)\mathbf{a}_n, \quad \text{т.е.} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ f(c\mathbf{x}) &= (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) = cf(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{12'}$$

од што следува дека f е навистина изоморфизам. □

З а б е л е ш к а. Според теоремата 8°, векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ може да се смета за претставник на кој било n-димезионален простор.

Природно е да се постави прашањето: *дали секој векторски простор има (конечна) база? Одговорот е негативен.*

1) На пример, ако го разгледаме просторот $\mathbb{R}^\infty$ (од сите бесконечни низи) и ако ставиме:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\dots,0,\dots), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0,\dots), \dots, \mathbf{e}_{n+1} = (\underbrace{0,\dots,0}_{n},1,0,\dots), \dots, \tag{13}$$

добиваме бесконечно множество вектори, и притоа $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ е линеарно независен систем за секој број n. Од ова, ако се има предвид и теоремата 7°, следува дека $\mathbb{R}^\infty$ нема димензија n, ни за еден природен број n. Затоа велиме дека $\mathbb{R}^\infty$ има бесконечна димензија.

Поопшто, за еден векторски простор велиме дека има ***бесконечна димензија*** ако нема конечна база. Инаку, поимот за база може да се воведе и за овие видови простори. Прво, за едно подмножество B од векторскиот простор V велиме дека е ***линеарно независно***, ако секое конечно подмножество од B е линеарно независно. Ако, освен тоа, секој вектор $\mathbf{a} \in V$ може да се изрази како линеарна комбинација од конечно многу елементи од B, велиме дека B е ***база на*** V. Доказот на наредната теорема не е така едноставен, па затоа нема да го дадеме [2].

9°. *Секој векторски простор има база.* □

2) Да се види, на пример, Курош, стр. 245.

4. 3. Линеарни пресликувања и матрици

Поимот матрица го дефиниравме непосредно во 1.1. Честопати, меѓутоа, тој поим се воведува преку анализата на поимот линеарно пресликување, бидејќи (при конечнодимензионалните векторски простори) тие се во органска врска. Ќе го докажеме прво следното карактеристично својство на линеарните пресликувања.

10°. *Нека V е произволен (реален) векторски простор. Пресликувањето f од $\mathbb{R}^n$ во V е линеарно ако и само ако постојат вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in V$, такви што:*

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n, \tag{14}$$

за секој вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Д о к а з. Нека f е линеарно пресликување на $\mathbb{R}^n$ во V и нека $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ако ставиме

$$\mathbf{e}_r = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r-1}, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{a}_r \in V,$$

тогаш ќе добиеме:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = f(x_1\mathbf{e}_1) + \dots + f(x_n\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$

од што следува дека е задоволено равенството (14).

Обратно, ако $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ е дадена n-ка вектори од V, и ако пресликувањето f е определено со (14), ќе имаме:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (x_1+y_1)\mathbf{a}_1 + \dots + (x_n+y_n)\mathbf{a}_n = \\ &= (x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n) + (y_1\mathbf{a}_1 + \dots + y_n\mathbf{a}_n) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \\ f(c\mathbf{x}) &= cx_1\mathbf{a}_1 + \dots + cx_n\mathbf{a}_n = c(x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n) = cf(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{15}$$

каде што е $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ а c е скалар, т.е. $c \in \mathbb{R}$. Според (25) од 3.5, следува дека f е линеарно пресликување, т.е. точноста на 10°. □

Да забележиме дека наместо со $\mathbb{R}^n$ можеме да работиме со кој било n-димензионален векторски простор U, со тоа што во U би избрале една фиксна база $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, а $x_1, \dots, x_n$ би биле координатите на векторот $\mathbf{x}$ во однос на таа база.

Користејќи ја докажаната теорема, ќе дојдеме до бараната врска меѓу линеарните пресликувања и матриците.

Нека f е линеарно пресликување на $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$ определено со

(14). Векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ му припаѓаат на $\mathbb{R}^m$, па значи

$$\mathbf{a}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{m\nu}), \tag{16}$$

за $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Ако ставиме

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m), \tag{16'}$$

тогаш добиваме:

$$\begin{aligned}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = x_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, \ldots, a_{m2}) + \\ + \cdots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}),\end{aligned} \tag{17}$$

т.е.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n . \end{aligned} \tag{18}$$

За матрицата

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \cdots a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \cdot n}, \tag{19}$$

велиме дека е ***матрица на линеарното пресликување*** f, па поради тоа ја означуваме и со $\mathbf{A}_f$.

Да претпоставиме сега обратно: дека е дадена матрица $\mathbf{A}$ со (19) и да го определиме пресликувањето

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_m) \tag{20}$$

така што да се точни равенствата (18). Тогаш ќе биде исполнето равенството (17), па значи и (14), каде што $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ се определени со (16). Според тоа f е линеарно пресликување од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$.

Да воочиме, исто така, дека за $\mathbf{e}_\nu = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\nu-1}, 1, 0, \ldots, 0)$,

$$f(\mathbf{e}_\nu) = \mathbf{a}_\nu, \tag{21}$$

при што $\mathbf{a}_\nu$ е векторот добиен од ν-тата колона на матрицата $\mathbf{A}$.

Со спроведената дискусија докажавме дека е точна следнава теорема:

11°. *Постои обратноеднозначна коресподенција $f \mapsto \mathbf{A}_f = \mathbf{A}$ меѓу линеарните пресликувања од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$ и матриците (со реални членови) од облик $m \times n$. Таа коресподенција е определена со* (17) *и* (21). □

Да се вратиме на системот равенства (18).

Векторите $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_m)$ можеме да ги сметаме за матрици $\mathbf{x}=[x_1\dots x_n]$, $\mathbf{y}=[y_1\dots y_m]$ од облик $1\times n$, $1\times m$ соодветно (т.е. за редични матрици или за вектор-редици; в. 1.1). Ако ги означиме со $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ вектор-колоните $\mathbf{x}^\top$, $\mathbf{y}^\top$ соодветно, т.е. ако ставиме

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}, \tag{22}$$

тогаш системот (18) можеме да го претставиме со една матрична равенка:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{AX}. \tag{18'}$$

Користејќи соодветни својства на матриците (или директно), лесно се докажува точноста на следнава теорема:

12°. *Кореспонденцијата $h\mapsto \mathbf{A}_h$ меѓу линеарните пресликувања од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$ и матриците од облик $m\times n$ определена со 11°, ги има следниве својства:*

$$\mathbf{A}_{cf}=c\mathbf{A}_f,\quad \mathbf{A}_{f+g}=\mathbf{A}_f+\mathbf{A}_g, \tag{23}$$

каде што c е реален број.

Ако f е линеарно пресликување од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^k$, а g од $\mathbb{R}^k$ во $\mathbb{R}^m$, тогаш gf е линеарно пресликување од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$ и притоа

$$\mathbf{A}_{gf}=\mathbf{A}_g\mathbf{A}_f.\ \square \tag{24}$$

Првиот дел на 12° може да се формулира и на следниов начин:

13°. *Векторскиот простор на сите линеарни пресликувања од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$ е изоморфен со векторскиот простор на сите матрици од облик $m\times n$.* $\square$

Да разгледаме неколку примери.

1) Ако ставиме $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1,x_2)$, добиваме линеарно пресликување од $\mathbb{R}^3$ во $\mathbb{R}^2$. Тоа е, имено, ортогонално проектирање на рамнината Ox_1x_2. Поради $(1,0,0)\mapsto(1,0)$, $(0,1,0)\mapsto(0,1)$, $(0,0,1)\mapsto(0,0)$, матрицата на ова пресликување е

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

2) Ставајќи $(x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto(0,0,\dots,0)$ го добиваме таканареченото ***нулто линеарно пресликување.*** На ова пресликување му кореспондира нултата матрица:

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}_{m\times n}$$

3) Квадратните матрици со ред n им кореспондираат на ***линеарните трансформации*** на $\mathbb{R}^n$ (т.е. на линеарните пресликувања од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^n$). Така, на идентичната линеарна трансформација $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ ѝ кореспондира единичната матрица со ред n:

$$\mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 \; 0 \; 0 \ldots 0 \\ 0 \; 1 \; 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \; 0 \; 0 \ldots 1 \end{bmatrix}.$$

Забелешката што ја направивме по докажувањето на својството 10° се однесува и на другите својства. Имено, теоремите 11° и 12° се точни за кои било конечнодимензионални простори, со тоа што во секој простор (што е предмет на разгледувањата) се претпоставува дека е избрана фиксна база.

4. 4. Координатни системи и нивни трансформации

Нека V е n-димензионален векторски простор и нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ една база на V. Ако $\mathbf{x}$ е вектор од V, тогаш како што видовме во 8°, постојат еднозначно определени реални броеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такви што:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_1\,\mathbf{a}_2 + \ldots + x_1\mathbf{a}_n.$$

За да го истакнеме тоа, пишуваме:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_a, \tag{25}$$

или само

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{25'}$$

ако базата ја сметаме за фиксна. Во тој случај велиме дека x_ν е ***ν-та координата*** на $\mathbf{x}$. Како што гледаме, во овој случај, просторот V просто го заменуваме со $\mathbb{R}^n$, со тоа што сега $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ имаат облик

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{a}_n = (0, \ldots, 0, 1), \tag{26}$$

т.е. $\mathbf{a}_\nu$ ја има улогата на $\mathbf{e}_\nu$. За самата база велиме дека е ***координатен систем***, при што во овој случај е битен и распоредот по кој се земени векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ во базата. (Оваа е една од причините за барањето во фуснотата 1).)

Ќе видиме сега како се менуваат координатите на векторите при промена на координатните системи.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n$ се две бази (т.е. два координатни системи) на n-димензионалниот простор V. Секој од векторите на едната база има определени координати во другата база и нека

$$\mathbf{a}'_\nu = (\alpha_{1\nu}, \ldots, \alpha_{n\nu})_a, \quad \mathbf{a}_\nu = (\alpha'_{1\nu}, \alpha'_{2\nu}, \ldots, \alpha'_{n\nu})_{a'}. \tag{27}$$

Ако ги формираме матриците

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}'=\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \dots a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} \dots a'_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} \dots a'_{nn} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

гледаме дека со колоните на матрицата $\mathbf{A}$ се определени координатите на новите координатни вектори во однос на стариот систем, а со колоните на $\mathbf{A}'$ координатите на старите координатни вектори во однос на новиот систем. (Притоа за системот $\mathbf{a}_\nu$ велиме дека е *"стар"*, а за $\mathbf{a}'_\nu$ дека е *"нов"*.) За $\mathbf{A}$ велиме дека е ***матрица за премин*** од системот од $\mathbf{a}_\nu$ во $\mathbf{a}'_\nu$, а во иста смисла $\mathbf{A}'$ е матрица за премин од $\mathbf{a}'_\nu$ во $\mathbf{a}_\nu$.

Теоремите што ќе ги докажеме сега го појаснуваат прашањето за премин од еден координатен систем во друг.

14°. *Матриците* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}'$ *се несингуларни и заемно инверзни, т.е.*

$$\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{E}. \tag{29}$$

Д о к а з. Според (27), имаме

$$\mathbf{a}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,\mathbf{a}'_i=\sum_{i=1}^{n}a'_{ij}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\,\mathbf{a}_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\,a'_{ij}\right)\mathbf{a}_k$$

од што следува

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\,a'_{ij}=1, \qquad \sum_{i=1}^{n}a_{ki}\,a'_{ij}=0, \quad \text{за } j\neq k,$$

т.е. ја добиваме точноста на (29). □

15°. *Нека* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{a}_\nu$, $\mathbf{a}'_\nu$, *се како и погоре, и нека векторот* $\mathbf{x}$ *има координати* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *во однос на стариот систем, а* $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ *во однос на новиот, т.е.*

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)_a=(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)_{a'}. \tag{30}$$

Врската меѓу старите и новите координати е дадена со равенствата:

$$\begin{aligned} x_1&=a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+\dots+a_{1n}x'_n\\ x_2&=a_{21}x'_1+a_{22}x'_2+\dots+a_{2n}x'_n\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n&=a_{n1}x'_1+a_{n2}x'_2+\dots+a_{nn}x'_n, \end{aligned} \tag{31}$$

односно

$$\begin{aligned} x'_1&=a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\dots+a'_{1n}x_n\\ x'_2&=a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\dots+a'_{2n}x_n\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x'_n&=a'_{n1}x_1+a'_{n2}x_2+\dots+a'_{nn}x_n \end{aligned} \tag{31'}$$

Д о к а з. Како и при доказот на претходната теорема добиваме

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}'_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x'_i \right) \mathbf{a}_j,$$

од што следува:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x'_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

т.е. точноста на (31).

Од причини на симетрија, точни се и равенствата (31′). □

Ако употребиме матрична ознака:

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{X}' = [x'_1 \quad x'_2 \quad \cdots \quad x'_n]^{\mathrm{T}}, \tag{32}$$

тогаш равенствата (31) и (31′) добиваат облик:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}', \quad \mathbf{X}' = \mathbf{A}'\mathbf{X}. \tag{33}$$

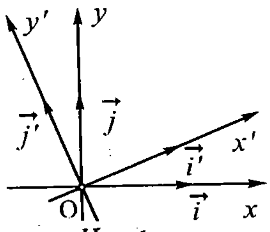
Ако ги погледнеме докажаните трансформациони формули, воочуваме дека во (31) старите координати на $\mathbf{x}$ се изразени со помош на старите координати од новите координатни вектори, како и со новите координати на $\mathbf{x}$. Аналогна положба имаме и во (31′), со тоа што овде новиот и стариот координатен систем ги заменија улогите.

5) Како илустрација на изнесеното ќе ги докажеме формулите за трансформација на координатите при ротација на рамнински правоаголни систем. Имаме (црт. 1): $\mathbf{i} = (\cos\varphi, \sin\varphi)_{Oxy}$, $\mathbf{j} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)_{Oxy}$, т.е.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Ако (x, y) се старите координати на M, а (x', y') новите, тогаш според (31) добиваме

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$



Црт. 1

Да видиме како се пренесува промената на координатните системи кај линеарните пресликувања.

Нека f е линеарно пресликување од n-димензионалниот векторскиот простор V во m-димензионалниот простор W, при што во V е избрана база $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, а во W $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$. За така избраните бази, нека на f му кореспондира матрицата $\mathbf{C} = [c_{ij}]$. Да претпоставиме сега дека во V е избрана друга база $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$, а во W база $\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_m$, со матрици на премин $\mathbf{A}$, односно $\mathbf{B}$. Ќе покажеме дека:

16°. *Матрицата* $\mathbf{C}'$ *што одговара на линеарното пресликување* f *при координатните системи* $\mathbf{a}'_\nu$, $\mathbf{b}'_\lambda$ *е определена со:*

$$\mathbf{C}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}. \tag{34}$$

Д о к а з. Нека $\mathbf{x} \in V$ и нека со $\mathbf{X}$ ја означиме матрицата од координатите на $\mathbf{x}$ во однос на стариот систем $\mathbf{a}_\nu$, а со $\mathbf{X}'$ во однос на новиот систем $\mathbf{a}'_\nu$. Во иста смисла со $\mathbf{Y}$ односно $\mathbf{Y}'$ се означуваат матриците од координатите на $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Според (33) и (18′) имаме:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{B}'\mathbf{Y} = \mathbf{B}'\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{B}'\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{X}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{X}',$$

т.е. $\mathbf{C}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}$, со што е докажана теоремата. □

6) Да разгледаме еден пример. Нека f е линеарно пресликување од $\mathbb{R}^4$ во $\mathbb{R}^3$ со соодветна матрица

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

при што за координатни ги сметаме векторите

$$(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0) \text{ и } (0,0,0,1) \text{ во } \mathbb{R}^4$$
$$\text{а } (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \text{ во } \mathbb{R}^3$$

Да ги избереме сега во $\mathbb{R}^4$ за координатни векторите

$$(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0),$$

а во $\mathbb{R}^3$ нека останат исти. Ако се има предвид дека:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

добиваме дека при новиот координатен систем на f ќе му одговара матрицата:

$$\mathbf{C}' = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

И, на крајот, да се задржиме на специјалниот случај кога f е линеарно пресликување од V во V, така што при избрана база $\mathbf{a}_\nu$, нему му одговара матрицата $\mathbf{C}$. Ако од $\mathbf{a}_\nu$ прејдеме во друга база $\mathbf{a}'_\nu$ со помош на трансформирачката матрица $\mathbf{A}$, тогаш, според (34), на f во новиот координатен систем $\mathbf{a}'_\nu$ ќе му одговара матрицата:

$$\mathbf{C}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A} \tag{34′}$$

4. 5. Ортогонални системи вектори

Овде ќе претпоставуваме дека V е векторски простор со скаларен производ.

За системот вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ велиме дека е ***ортогонален*** ако $\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j = \mathbf{o}$ за секој пар различни броеви i, j. Притоа, секој систем што се состои само од еден вектор ќе го сметаме за ортогонален. Следните својства ќе нè доведат до поим за ортогонална база на конечнодимензионален векторски простор.

16°. *Секој ортогонален систем од ненулти вектори е линеарно независен.*

Д о к а з. Нека $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$ е ортогонален систем, а $x_1,\dots,x_m \in \mathbb{R}$ се такви броеви што: $x_1\mathbf{a}_1+\dots+x_m\mathbf{a}_m=\mathbf{o}$. Тогаш: $0=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{o}=\mathbf{a}_1(x_1\mathbf{a}_1+\dots+x_m\mathbf{a}_m)=x_1(\mathbf{a}_1\circ\mathbf{a}_1)$, т.е. $x_1=0$. Слично се добива и $x_2=\dots=x_m=0$. □

17°. *Ако* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$ *е ортогонален систем од ненулти вектори што не е база, тогаш постои вектор* $\mathbf{a}$, *таков што и системот* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$, $\mathbf{a}$ *е ортогонален.*

Д о к а з. По претпоставка, постои вектор $\mathbf{b}$ што не е линеарна комбинација од векторите на дадениот систем. Да ја дефинираме низата скалари: $y_1,y_2,\dots,y_m$ со:

$$y_k=\frac{\mathbf{a}_k\circ\mathbf{b}}{\mathbf{a}_k\circ\mathbf{a}_k},\quad \text{за } k=1,2,\dots,m.$$

Ако ставиме:

$$\mathbf{a}=y_1\mathbf{a}_1+\dots+y_m\mathbf{a}_m-\mathbf{b},$$

тогаш:

$$\mathbf{a}_1\circ\mathbf{a}=y_1(\mathbf{a}_1\circ\mathbf{a}_1)-\mathbf{a}_1\circ\mathbf{b}=\mathbf{a}_1\circ\mathbf{b}-\mathbf{a}_1\circ\mathbf{b}=\mathbf{o}$$

Слично: $\mathbf{a}_i\mathbf{a}=\mathbf{o}$, за секој $i=2,\dots,m$. Векторот $\mathbf{a}$ не е нула, бидејќи $\mathbf{b}\neq$ $\neq y_1\mathbf{a}_1+\dots+y_m\mathbf{a}_m$. □

Како последица ја добиваме следната ***теорема за егзистенција на ортогонална база.***

18°. *Ако* V *има димензија* n, *тогаш секој ненулти вектор* $\mathbf{a}\in V$ *припаѓа на ортогонален систем* $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ *што е база на* V.

Д о к а з. Да ставиме $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1$. За $n=1$ нема што да се докаже, па затоа да претпоставиме дека $n\geq 2$. Со последователна примена на 17° се доаѓа до бараната ортогонална база. □

За еден систем вектори $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m\in V$ велиме дека е ***ортонормиран***, ако е ортогонален и $\|\mathbf{a}_k\|=1$, за секој $k=1,2,\dots,m$. Како последица од 16° се добива:

19°. *Секој ортонормиран систем вектори е линеарно независен.* □

Исто така, јасно е дека:

20°. *Ако* $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ *е ортогонална база на* V *и ако* $\|\mathbf{a}_k\|\cdot\mathbf{b}_k=\mathbf{a}_k$, *за* $k=1,2,\dots,n$, *тогаш* $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots,\mathbf{b}_n$ *е ортонормирана база на* V. □

З а б е л е ш к а. Во обичај е реалните векторски простори со скаларен производ да се викаат ***евклидски простори***, што во случај на конечнодимензионални простори се совпаѓа со порано дадената дефиниција во V.1.1. Да напомниме дека постојат и бесконечнодимензионални реални простори со скаларен производ (таков е просторот од вежбата 16 во 3.6), но сепак терминот евклидски простори ќе го употребуваме само за конечнодимензионалните простори со скаларен производ.

4. 6. Вежби

1. Да се провери дали дадените системи вектори се линеарно зависни:

а) $\mathbf{a}=(4,-2,6)$, $\mathbf{b}=(6,-3,9)$;

б) $\mathbf{a}=(5,4,3)$, $\mathbf{b}=(3,3,2)$, $\mathbf{c}=(8,1,3)$;

в) $\mathbf{a}=(1,0,0,2,5)$, $\mathbf{b}=(0,1,0,3,4)$, $\mathbf{c}=(0,0,1,4,7)$, $\mathbf{d}=(2,-3,4,11,12)$.

Решение. а) Линеарно зависен: $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}=\mathbf{o}$.

б) Линеарно зависен: $\mathbf{c}=7\mathbf{a}-9\mathbf{b}$. в) Линеарно независен.

2. Нека $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $d(x)$ се вектори од $\mathbb{R}[x]$ (види вежба 3 од 3.6) определени со: $a(x)=1$, $b(x)=x$, $c(x)=x^2$, $d(x)=1+x+x^2$. Да се покаже дека a, b, c и d се линеарно зависни, но било кои три од нив се линеарно независни.

Решение. Бидејќи е $d(x)=a(x)+b(x)+c(x)$, следува дека векторите a, b, c и d се линеарно зависни. Да покажеме дека, на пример, векторите a, b, d се линеарно независни. Нека α, β, δ се три скалари, такви што $\alpha a+\beta b+ +\delta d=0$; тоа значи дека $\alpha+\beta x+\delta+\delta x+\delta x^2=0$, т.е. $(\alpha+\delta)+(\beta+\delta)x+\delta x^2$ е нулти полином. Тоа е можно само ако $\alpha+\delta=0$, $\beta+\delta=0$, $\delta=0$, т.е. $\alpha=\beta=\delta=0$, па значи a, b, и d се линеарно независни. Слично се покажува линеарната независност и на другите комбинации од a, b, c, d (по три елементи).

3. Кои услови треба да ги задоволуваат скаларите $x,y,\ldots,z$ за да бидат линеарно зависни векторите:

а) $(0,1,x)$, $(1,x,1)$, $(x,1,0)$ од $\mathbb{R}^3$;

б) $(1,x,\ldots,x^n)$, $(1,y,\ldots,y^n),\ldots,(1,z,\ldots,z^n)$, од $\mathbb{R}^n$?

Решение. а) $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$.

б) Кога барем два од броевите $x,y,\ldots,z$ се еднакви.

4. Нека $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m$ е систем линеарно зависни n-димензионални вектори, и нека $\mathbf{b}$ е нивна линеарна комбинација. Да се покаже дека постојат безброј многу m-ки $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ (т.е. m-димензионални вектори), такви што $\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+ +x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_m\mathbf{a}_m$.

Решение. Нека $\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_m\mathbf{a}_m=\mathbf{o}$, каде што $\alpha_i\neq 0$, за некој $i=1,2,\ldots,m$, и $\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_m\mathbf{a}_m$. Ако $r\neq 0$ е реален број, тогаш имаме

$$\mathbf{b}=x_1'\mathbf{a}_1+\cdots+x_m'\mathbf{a}_m, \tag{35}$$

каде што $x_i'=x_i+r\,\alpha_i$. Бидејќи r може да биде кој било реален број, постојат безброј многу записи на $\mathbf{b}$ од облик (35).

5. Да го разгледаме системот од n линеарни равенки со n непознати:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

и да ставиме $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_1)$. Да се покаже дека: а) ако системот вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ е независен, тогаш дадениот систем равенки има една и само една n-ка решенија $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; б) ако системот вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ е зависен, тогаш тој систем равенки има безброј многу решенија или ниедно.

Р е ш е н и е. Ставајќи $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$, $j = 1,2,\ldots,n$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, наместо системот равенки

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{36}$$

можеме да ја разгледаме равенката

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}. \tag{37}$$

а) Ако $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ се линеарно независни, тогаш со $\mathbf{b}$ се еднозначно определени скаларите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е. постои само една n-ка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, таква што важи (37), а од тоа и (36).

б) Ако $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ се линеарно зависни и $\mathbf{b}$ е нивна линеарна комбинација, според вежбата 4, постојат безброј многу n-ки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ што ја задоволуваат (37), а поради тоа и (36). Ако $\mathbf{b}$ не е нивна линеарна комбинација, не постои n-ка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за која важи (37) па значи системот (36) нема решение.

6. Нека $n < k$ и

$$\mathbf{a}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{1k}), \ldots, \mathbf{a}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}, \ldots, x_{mk})$$

$$\mathbf{b}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \ldots, \mathbf{b}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}).$$

Да се покаже дека од независноста на $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ следува независноста на $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, а од зависноста на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ следува зависноста и на $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$. На еден конкретен пример да се воочи дека може да се случи системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ да е независен, а $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ зависен.

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ се линеарно независни вектори; тогаш од

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{o} \quad \text{следува} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{b}_i = \mathbf{o},$$

од каде што $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, па значи системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ е линеарно независен.

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ се линеарно зависни; тогаш постојат скалари $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ од кои барем еден е различен од нула, така што

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{a}_i = \mathbf{o},$$

од каде што е и $\sum_{i=1}^{m}\beta_i\mathbf{b}_i=\mathbf{o}$, па $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_m$ се линеарно зависни.

Примерот $\mathbf{a}_1=(1,2,3)$, $\mathbf{a}_2=(2,4,5)$, $\mathbf{b}_1=(1,2)$, $\mathbf{b}_2=(2,4)$ покажува дека векторите $\mathbf{a}_i$ можат да бидат линеарно независни, додека векторите $\mathbf{b}_i$ се линеарно зависни.

7. Нека $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ се n линеарно зависни вектори од еден векторски простор V и нека S е множеството од сите n-ки $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, каде што $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{o}$. Да се покаже дека S е потпростор од $\mathbb{R}^n$.

Р е ш е н и е. Ако $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in S$ лесно се покажува дека $\alpha\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y}\in S$ од што следува дека S е потпростор.

8. Да се покаже дека векторскиот простор на матрици од облик $m\times n$ има димензија mn.

Р е ш е н и е. Да ја означиме со $\mathbf{E}_{ij}$ матрицата (од облик $m\times n$) во која сите елементи се нули, освен оној што се наоѓа во i-тата редица и j-тата колона чија вредност е 1. На пример, за $m=3$, $n=4$:

$$\mathbf{E}_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

Ако $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, тогаш јасно е дека:

$$\mathbf{A}=a_{11}\mathbf{E}_{11}+a_{12}\mathbf{E}_{12}+\cdots+a_{1n}\mathbf{E}_{1n}+a_{21}\mathbf{E}_{21}+\cdots+a_{mn}\mathbf{E}_{mn},$$

од што следува бараниот заклучок.

9. Да се покаже дека во еден бесконечнодимензионален векторски простор, за секој природен број n постои n-димензионален потпростор.

Р е ш е н и е. Од тоа што V има бесконечна димензија следува дека постои бесконечно множество вектори $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n,\ldots$, меѓу себе линеарно независни. Потпросторот генериран од кои било n вектори од множеството $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_n,\ldots,\}$ е n-димензионален.

10. Нека U и V се изоморфни векторски простори. Да се покаже дека ако еден од овие простори е конечнодимензионален, тогаш и другиот е таков и дека, во тој случај, и двата имаат иста димензија.

Р е ш е н и е. Нека f е изоморфизам од U на V, т.е. f е сурјективно линеарно пресликување, такво што $f(\mathbf{u}_1)=f(\mathbf{u}_2)\Rightarrow\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$. Специјално, имаме $f(\mathbf{u})=\mathbf{o}\Leftrightarrow\mathbf{u}=\mathbf{o}$. Ако $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\in U$ и ако е $f(\mathbf{u}_\nu)=\mathbf{v}_\nu$, тогаш имаме:

$$x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+\cdots+x_k\mathbf{u}_k=\mathbf{o}\Leftrightarrow x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\cdots+x_k\mathbf{v}_k=\mathbf{o},$$

од што лесно се добива заклучокот изнесен во формулацијата на вежбата.

11. Нека $A=\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_r\}$ е множество од r линеарно независни вектори од еден n-димензионален векторски простор V. Да се покаже дека A е подмножество од некоја база B.

Р е ш е н и е. Пред сè, мора да биде $r \leq n$, зашто во спротивен случај A би било зависно. За $r=n$ самото множество A е база. За $r<n$, A може да се прошири со додавање на еден вектор, така што пак да се добие линеарно независно множество. Ова проширување се врши сè додека е можно; нека B е множество што се добива на тој начин, при што ново проширување да не биде можно. Сега лесно се покажува дека B ќе биде база.

12. Нека $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ е база на векторскиот простор V и нека секој вектор $\mathbf{a}_\nu$ од таа база може да се претстави како линеарна комбинација од $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n$. Да се покаже дека и $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n$ е база.

Р е ш е н и е. Да претпоставиме дека системот $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n$ е зависен и дека, на пример, $\mathbf{b}_1 = x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$. Тогаш и секој вектор од системот $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ е линеарна комбинација од $\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\ldots,\mathbf{b}_n$, од што (според својството 4°) би следувал заклучокот дека $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ е зависен систем, а тоа противречи на фактот што тој систем е база. Според тоа $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n$ е независен систем. Потоа, лесно се добива дека тој систем е и база.

13. Кои услови треба да ги задоволува скаларот x за да образуваат база во $\mathbb{R}^3$ векторите $(0,1,x)$, $(0,x,1)$ и $(x,1,x+1)$?

Р е ш е н и е. Дадениве три вектори се линеарно независни (па чинат база во $\mathbb{R}^3$) за секој $x \neq 0, \pm 1$.

14. Даден е системот S од векторите (1, 2, 1), (2, 1, 1), (−2, 2, −1) при вообичаената база $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$. Да се покаже дека тие образуваат база на $\mathbb{R}^3$ и да се определат координатите на векторот:

а) $\mathbf{a} = (1,2,2)_e$; б) $\mathbf{b} = (-1,4,3)_e$ спрема базата S.

Р е ш е н и е. Дадениот систем S е линеарно независен. Според 5°, тој е база на $\mathbb{R}^3$. Ако за произволен вектор $\mathbf{v}$ координатите спрема базата S се x,y,z по ред, а x',y',z' при базата $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ тогаш

$$\mathbf{v} = x(1,2,1)+y(2,1,1)+z(-2,2,-1) =$$
$$= (x+2y-2z)\mathbf{e}_1 + (2x+y+2z)\mathbf{e}_2 + (x+y-z)\mathbf{e}_3, \text{ т.е.}$$
$$x+2y-2z = x'; \quad 2x+y+2z = y'; \quad x+y-z = z'.$$

Според тоа, имаме:

а) $x+2y-2z=1$; $2x+y+2z=2$; $x+y-z=2$, од каде што се добива $x=3, y=-2, z=-1$, т.е. $\mathbf{a} = (3,-2,-1)_s$.

б) $\mathbf{b} = (7,-6,-2)_s$.

15. Нека $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$ и $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$, е "стандардната" база на $\mathbb{R}^4$.

а) Да се покаже дека $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ е исто така база на $\mathbb{R}^4$.

б) Да се определат координатите на векторите на секоја од тие бази во однос на другата база.

в) Ако $\mathbf{x}$ е кој било вектор од $\mathbb{R}^4$, да се определи врската меѓу координатите на тој вектор во однос на двете бази.

Р е ш е н и е. а) Имаме: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{e}_4 = \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_3$ а од ова, според вежбата 12, следува дека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ навистина е база на $\mathbb{R}^4$.

б) Имаме: $\mathbf{a}_1 = (1,0,0,0)_e$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,0,0)_e$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,1,0)_e$ и $\mathbf{a}_4 = (1,1,1,1)_e$; $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)_a$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,0,0)_a$, $\mathbf{e}_3 = (0,-1,1,0)_a$ и $\mathbf{e}_4 = (0,0,-1,1)_a$.

в) Ако $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)_e = (x_1', x_2', x_3', x_4')_a$, тогаш имаме:

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4 = x_1'\mathbf{a}_1 + x_2'\mathbf{a}_2 + x_3'\mathbf{a}_3 + x_4'\mathbf{a}_4 =$$
$$= (x_1' + x_2' + x_3' + x_4')\mathbf{e}_1 + (x_2' + x_3' + x_4')\mathbf{e}_2 + (x_3' + x_4')\mathbf{e}_3 + x_4'\mathbf{e}_4,$$

од што следува:

$$x_1 = x_1' + x_2' + x_3' + x_4', \quad x_2 = x_2' + x_3' + x_4', \quad x_3 = x_3' + x_4', \quad x_4 = x_4'. \tag{38}$$

На ист начин, или пак користејќи го системот равенства (38), се добива:

$$x_1' = x_1 - x_2, \quad x_2' = x_2 - x_3, \quad x_3' = x_3 - x_4, \quad x_4' = x_4.$$

16. Нека координатите на векторот $\mathbf{v}$ спрема базата $A: (1,-1,2), (2,1,-1), (1,2,3)$ се x, y, z. Да се определат координатите на истиот вектор $\mathbf{v}$ спрема базата $B: (4,2,4), (3,-3,0), (4,-1,-3)$.

Р е ш е н и е. Имаме:

$$\mathbf{v} = (x,y,z)_a = x(1,-1,2) + y(2,1,-1) + z(1,2,3) =$$
$$= (x+2y+z)\mathbf{e}_1 + (-x+y+2z)\mathbf{e}_2 + (2x-y+3z)\mathbf{e}_3,$$

а ако x', y', z' се координатите на $\mathbf{v}$ при базата B, тогаш

$$\mathbf{v} = (x', y', z')_b = x'(4,2,4) + y'(3,-3,0) + z'(4,-1,3) =$$
$$= (4x' + 3y' + 4z')\mathbf{e}_1 + (2x' - 3y' - z')\mathbf{e}_2 + (4x' - 3z')\mathbf{e}_3,$$

па значи

$$\begin{aligned} 4x' + 3y' + 4z' &= x + 2y + z \\ 2x' - 3y' - z' &= -x + y + 2z \\ 4x' - 3z' &= 2x - y + 3z. \end{aligned}$$

Собирајќи ги првите две равенства добиваме $6x' + 3z' = 3y + 3z$, а од ова и од третото равенство добиваме $10x' = 2x + 2y + 6z$, т.е. $x' = (x + y + 3z)/5$. Потоа лесно се добиваат $y' = (3x - 2y - z)/5$ и $z' = (-2x + 3y - z)/5$.

17. Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ е база на векторскиот простор V и нека $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$ е систем од n вектори определени со $\mathbf{b}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{n\nu})_a$. Да се покаже дека $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n$ е база, ако и само ако

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{39}$$

Р е ш е н и е. Ако $\mathbf{a}_v$ и $\mathbf{b}_v$ се бази, тогаш (39) следува од 14°, бидејќи матрицата **A** е несингуларна како матрица на премин од системот $\mathbf{a}_v$ во $\mathbf{b}_v$. Обратно, ако е (39) точно, тогаш равенството $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{o}$ е еквивалентно со хомоген систем од n линеарни равенки со n непознати $x_1, x_2, \ldots, x_n$ чија детерминанта не е нула, па значи тој систем има само тривијално решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (18° од **2.6**) т.е. системот $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n$ е независен.

18. Користејќи го резултатот од претходната вежба, да се пререшат вежбите 1б), в), 3, 13, 15а).

19. Да се покаже дека една квадратна матрица **A** е трансформациона матрица за премин од еден во друг координатен систем, ако и само ако $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Р е ш е н и е. Ова е непосредна последица од резултатот на вежбата 17.

20. Нека $\mathbf{a}_v$, $\mathbf{b}_v$ и $\mathbf{c}_v$ се три координатни системи во $\mathbb{R}^n$, при што **B** е матрица за премин од $\mathbf{a}_v$ во $\mathbf{b}_v$, а **C** за премин од $\mathbf{a}_v$ во $\mathbf{c}_v$. Да се определи матрицата за премин од $\mathbf{c}_v$ во $\mathbf{b}_v$.

Р е ш е н и е. $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}$.

21. Да се решат задачите од **14** а) б), **15** б) в) и **16** со помош на резултатите изнесени во **4.4**.

Р е ш е н и е. 14 а) Ако е $\mathbf{a} = (x, y, z)$ во S, тогаш, според (33), имаме:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\2 & 1 & 2\\1 & 1 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, \text{ т.е. } \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix}-3 & 0 & 6\\4 & 1 & -6\\1 & 1 & -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}.$$

15б) **A** за премин од e во a и **A′** за премин од a во e:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}.$$

15в) Ако е $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)_e = (x_1', x_2', x_3', x_4')_a$, тогаш,

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}.$$

16. Да ставиме $\mathbf{a}_1 = (1,-1,2), \mathbf{a}_2 = (2,1,-1), \mathbf{a}_3 = (1,2,3), \mathbf{b}_1 = (4,2,4), \mathbf{b}_2 = (3,-3,0)$, $\mathbf{b}_3 = (4,-1,-3)$, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ се стандардните координатни вектори. Тогаш:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 2\\2 & -1 & 3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}4 & 3 & 4\\2 & -3 & -1\\4 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

се матриците за премин од e во a, односно од e во b. Од тоа, според вежба **20**, добиваме дека $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ е матрица за премин од a во b, а $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ од b во a.

22. Да се определат матриците што им кореспондирааат на линеарните пресликувања од вежбата 9 од **3.5**.

Р е ш е н и е. $\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

23. Матрицата на линеарната трансформација f спрема базата $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ е

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Во кои вектори се трансформираат векторите $\mathbf{a}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,3)$, $\mathbf{a}_3 = (2,1-1)$ при трансформацијата f?

Р е ш е н и е. Ако $\mathbf{A}$ е матрицата на пресликувањето $f((x_1,x_2,x_3)) = (y_1,y_2,y_3)$ од $I\!R^2$ во $I\!R^3$, тогаш е

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_3 &= 2x_1 + 3x_2 - x_3, \end{aligned}$$

па за $\mathbf{a}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,3)$, $\mathbf{a}_3 = (2,1-1)$ ќе имаме $y_1 = -3$, $y_2 = -1$, $y_3 = -5$, т.е. $\mathbf{a}_1 = (1,-2,1) \mapsto (-3,-1,-5)$. Слично, $\mathbf{a}_2 = (1,2,3) \mapsto (-3,7,5)$ и $\mathbf{a}_3 = (2,1-1) \mapsto$ $\mapsto (5,-3,8)$.

24. При базата $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,1)$ линеарното пресликување f ги трансформира векторите (1, 2, 1), (2, 0, 1), (1, 0, 1) по ред во векторите (4, 2, 5), (1, 1, 0), (0, 0, 1). Да се најде матрицата на пресликувањето f.

Р е ш е н и е. Ако $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ е бараната матрица на пресликувањето $f((x_1,x_2,x_3)) = (y_1,y_2,y_3)$, тогаш е

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{31}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}$$

Бидејќи $(1,2,1) \to (4,2,5)$, $(2,0,1) \to (1,1,0)$, $(1,0,1) \to (0,0,1)$, добиваме

$$\begin{array}{lll} a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 4 & 2a_{11} + a_{13} = 1 & a_{11} + a_{13} = 0 \\ a_{21} + 2a_{22} + a_{23} = 2 & 2a_{21} + a_{23} = 1 & a_{21} + a_{23} = 0 \\ a_{31} + 2a_{31} + a_{33} = 5 & 2a_{31} + a_{33} = 0 & a_{31} + a_{33} = 1, \end{array}$$

од каде што е $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = -1, a_{21} = 1, a_{22} = 1, a_{23} = -1, a_{31} = -1, a_{32} = 2,$ $a_{33} = 2$, т.е.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

25. Нека f е линеарно пресликување од $I\!R^4$ во $I\!R^4$ чија соодветна матрица е

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

при стандардната база e_1, e_2, e_3, e_4. Да се определи матрицата на ова пресликување ако за база се земе:

а) e_1, e_2, e_3, e_4; б) $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4$.

Р е ш е н и е. а) Матрицата за премин од дадената база во новата е:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\2&3&5&1\\3&-1&0&2\\1&1&2&3\end{bmatrix}$$

б) $$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2&0&1&0\\1&-4&-8&-7\\1&4&6&4\\1&3&4&7\end{bmatrix}$$

26. Нека $\mathbb{R}^n$ е множеството n-димензионални вектори. Ако $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ е дадена квадратна матрица од n-ти ред, тогаш секоја редица од оваа матрица е елемент на $\mathbb{R}^n$; векторот што одговара на i-тата редица да го означиме со $\mathbf{a}_i$. Ако ставиме

$$F(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)=\det\mathbf{A}, \tag{40}$$

добиваме "функција" со n независнопроменливи кои припаѓаат на $\mathbb{R}^n$, а вредностите на функцијата се реални броеви. Да се покаже дека F ги има следниве својства:

а) $F(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n)=-F(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)$;

б) $F(\mathbf{a}_1'+\mathbf{a}_1'',\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)=F(\mathbf{a}_1',\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)+F(\mathbf{a}_1'',\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)$;

в) $F(x\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)=xF(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)$;

г) $F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n)=1$,

каде што $\mathbf{e}_1=(1,0,\dots,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,\mathbf{e}_n=(0,0,\dots,0,1)$.

У п а т с т в о. Ова е непосредна последица од својствата на детерминантите (в. 2.2).

27. Да се покаже дека ако F е функција од n независнопроменливи $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ (коишто се менуваат во $\mathbb{R}^n$) што прима вредности во $\mathbb{R}$ и ги задоволува условите а), б), в) и г) од претходната вежба, тогаш

$$F(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)=\det\mathbf{A}.$$

Притоа $\mathbf{A}$ е матрицата чија i-та редица (за $i=1,2,3,\dots,n$) е векторот $\mathbf{a}_i$.

Р е ш е н и е. Да претпоставиме дека два члена $\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j (i\neq j)$ од низата $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ се еднакви. Ако тие членови ги разменат местата, низата нема да се промени, а од друга страна, според а), $F(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$ треба да го промени знакот; тоа е можно само ако $F(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)=0$. Добиваме, значи, дека

(i) $F(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)=0$

секогаш кога два члена од низата $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ се еднакви. Ако се искористат а) и в), исто така се добива

(ii) $F(\mathbf{a}_1,\dots,x\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)=xF(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)$.

за секој $i=1,2,\dots,n$. Со индукција се добива и следново воопштато својство, ако притоа се искористи и б):

$$(iii)\quad F(\mathbf{a}_1,\dots,\sum_{i=1}^{m} x\mathbf{a}_{ij},\dots,\mathbf{a}_n) = \sum_{j=1}^{m} x_j F(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{a}_{ij}\mathbf{a}_{i+1},\dots,\mathbf{a}_n)$$

Ако се има предвид (iii), и фактот дека $\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{in}\mathbf{e}_n$, се добива:

$$(iv)\quad F(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n) =$$

$$= F(a_{11}\mathbf{e}_1+\dots+a_{1n}\mathbf{e}_n, a_{21}\mathbf{e}_1+\dots+a_{2n}\mathbf{e}_n,\dots,a_{n1}\mathbf{e}_1+\dots+a_{nn}\mathbf{e}_n) =$$

$$= \sum_{j_1,j_2,\dots,j_n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} F(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots,\mathbf{e}_{j_n}),$$

каде што $(j_1,j_2,\dots,j_n)$ може да биде која било од $n\cdot n\cdots = n^n$ n-ки формирани од $1,2,\dots,n$. Ако имаме $j_\upsilon = j_\lambda$ за $\upsilon \neq \lambda$, тогаш, според (i), $F(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots,\mathbf{e}_{j_n})=0$. Затоа можеме да претпоставиме дека во (iv) $j_1,j_2,\dots,j_n$ е пермутација на $1,2,\dots,n$; да го означиме со $I(j_1,j_2,\dots,j_n)$ бројот на инверзиите од таа пермутација. Со конечен број примени на а) се добива:

$$(v)\quad F(\mathbf{e}_{j_1},\mathbf{e}_{j_2},\dots,\mathbf{e}_{j_n}) = (-1)^{I(j_1,\dots,j_n)} F(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n) = (-1)^{I(j_1,\dots,j_n)} \text{ т.е.}$$

$$(vi)\quad F(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_1) = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_n} (-1)^{I(j_1,\dots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = \det \mathbf{A},$$

што и сакавме да добиеме.

(Резултатот од оваа вежба покажува како може уште на еден начин да се воведе поимот детерминанта; да се види и "Алгебра I", VI. 2, стр. 213 од В. Перић.)

28. Нека $\mathbf{B}$ е матрица од облик $n\times m$, а $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ соодветното линеарно пресликување, т.е. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_f$, во смисла на 11°. Да се покаже дека:

а) f е инјективно акко $\mathbf{B}$ има лева инверзија.

б) f е сурјективно акко $\mathbf{B}$ има десна инверзија.

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{B}$ има лева инверзија $\mathbf{A}$, т.е. $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_m$ и нека $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ е такво што $\mathbf{A} = \mathbf{A}_g$. Тогаш, според (24) имаме $g\cdot f = e$, каде што e е единичното линеарно пресликување на $\mathbb{R}^m$. (Потсетуваме дека елементите од $\mathbb{R}^m$ овде ги сметаме за вектор-колони, т.е. матрици од облик $m\times 1$.) Ако $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ се такви што $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, тогаш: $\mathbf{u} = e(\mathbf{u}) = gf(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) = g(f(\mathbf{v})) = e(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, од што следува дека f е инјективно пресликување. Потоа, ако $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ и ако ставиме $\mathbf{x} = f(\mathbf{y})$, добиваме: $\mathbf{y} = e(\mathbf{y}) = g(f(\mathbf{y})) = g(\mathbf{x})$. Од тоа следува дека g е сурјективно пресликување.

Да претпоставиме сега дека f е инјективно и дека $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$, каде што $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n$ е стандардната база на $\mathbb{R}^m$ спомената во 4.2. Според резултатот од вежбата 11, постојат вектори $\mathbf{e}'_{m+1},\dots,\mathbf{e}'_n$ такви што $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\dots,\mathbf{e}'_n$ е база на $\mathbb{R}^n$. Нека g е кое било линеарно пресликување од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$, такво што $g(\mathbf{e}_i') = \mathbf{e}_i$, за $i = 1, 2, \ldots, m$. (Ако ставиме, на пример, $g(\mathbf{e}_{m+j}') = \mathbf{e}_1$, добиваме едно фиксно линеарно пресликување од споменатиот вид.) Ако $\mathbf{A}$ е матрицата таква што $\mathbf{A} = \mathbf{A}_g$, тогаш ќе имаме $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_m$, т.е. $\mathbf{A}$ е лева инверзија на дадената матрица $\mathbf{B}$.

Нека $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е сурјективно линеарно пресликување, и нека $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ е стандардната база на $\mathbb{R}^n$. Според тоа, постојат вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$, такви што $f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{e}_i$. Ако h е линеарно пресликување од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^m$, такво што $h(\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}_i$, тогаш fh е единично пресликување на $\mathbb{R}^n$, од што следува дека $\mathbf{BC} = \mathbf{E}_n$, каде што $\mathbf{C} = \mathbf{C}_h$.

29. Да се докажат својствата 11° и 12° од 1.5.

Р е ш е н и е. Прво, 11° е последица од претходната вежба, а 12° е очигледна последица од 11°.

30. а) Да се покаже дека линеарното пресликување $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е биективно акко неговата матрица $\mathbf{A}_f$ е несингуларна и дека, во тој случај,

$$\mathbf{A}_{f^{-1}} = (\mathbf{A}_f)^{-1}.$$

б) Користејќи го добиениот резултат, да се формулира алгоритам за проверка дали дадена квадратна матрица $\mathbf{A}$ е несингуларна, а во потврден случај, и за наоѓање на $\mathbf{A}^{-1}$.

в) Да се примени добиениот резултат за добивање на $\mathbf{A}^{-1}$ кога $\mathbf{A}$ е матрицата

$$\text{в.1)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{в.2)}\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

($\mathbf{A}$ во в.1) е матрицата од вежбата 7 в) во 2.7.)

Р е ш е н и е. а) f е биективно акко системот (18) (при што, сега $m = n$), при дадени $y_1, y_2, \ldots, y_n$, има единствено решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Според теоремата на Крамер, тоа е точно акко матрицата $\mathbf{A} = \mathbf{A}_f$ (определена со (19), при што $m = n$) е несингуларна. Ако е тоа исполнето, сведувајќи го системот (18) по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, нека се добие систем равенки

$$x_i = \sum_j b_{ij} y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогаш

$$\mathbf{B} = [b_{ij}] = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_{f^{-1}}.$$

б) За да провериме дали дадена (квадратна) матрица $\mathbf{A}$ е несингуларна, треба да го формираме системот равенки (18) и да провериме дали тој систем е еднозначно решлив по непознатите x_k. Ако одговорот е позитивен, по решавањето ќе се добие матрицата $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

в) Системот (18) за дадената матрица $\mathbf{A}$ е:

в.1) $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_2 - x_3$, $y_3 = x_1 - x_2 + x_3$.

Од тоа следува дека

$$2x_1 = y_2 + y_3,\ 2x_2 = y_1 - y_3,\ 2x_3 = y_1 - y_2$$

т.е. дека

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

в.2) $y_1 = x_1 + 2x_2$, $y_2 = x_1 + 2x_2$, од што следува дека $0 = y_1 - 2y_2$, па значи системот не е решлив по x_1, x_2. Следствено, **A** е сингуларна.

31. Да се определи ортогонална база $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ на $\mathbb{R}^3$ таква што $\mathbf{a}_1 = (1,1,1)$.

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{b} = (3,0,0)$ и нека $(\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{a}_1)y = \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}$, т.е. $y = 1$. Тогаш $\mathbf{a}_2 = y\mathbf{a}_1 - \mathbf{b} = (-2,1,1)$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ е ортогонален систем. Потоа, нека $\mathbf{c} = (0,0,12)$ и нека z_1 и z_2 се определени со:

$$z_1 = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} = \frac{12}{3} = 4, \qquad z_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2} = \frac{12}{6} = 2.$$

Тогаш, бараниот трет вектор има облик:

$$\mathbf{a}_3 = z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{c} = (0,6,-6).$$

32. Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ е ортонормирана база на $\mathbb{R}^n$, при што елементите од $\mathbb{R}^n$ ги сметаме за вектор-колони, т.е. матрици од облик $n \times 1$. Да се покаже дека

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_n. \tag{41}$$

Р е ш е н и е. Прво, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$ е квадратна матрица од n-ти ред, од што следува дека е таква и матрицата **A** од левата страна на (41). Да го пресметаме производот $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_1$. Имаме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1.$$

Слично, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i$, за секој i. Нека **b** е кој било вектор од $\mathbb{R}^n$. Постојат, еднозначно определени, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, такви што $\mathbf{b} = b_1\mathbf{a}_1 + \cdots + b_n\mathbf{a}_n$, од што следува дека:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \sum_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} \cdot \sum_j b_j \mathbf{a}_j =$$

$$\sum_j b_j \sum_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_j = \sum_j b_j (\mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{a}_j) = \sum_j b_j \mathbf{a}_j = \mathbf{b}$$

Од тоа (поради произволноста на **b**) следува дека **A** е единичната матрица.

33. Нека $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ е ортонормирана база на V и нека $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \circ \mathbf{a}_i = \lambda_i$. Да се покаже дека:

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n \quad \text{и} \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2.$$

Р е ш е н и е. Од дадените услови следува дека постојат еднозначно определени броеви $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ такви што $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n$, од што следува: $\lambda_1 = \mathbf{x}\circ\mathbf{a}_1=\alpha_1$; слично: $\lambda_i=\alpha_i$, за секој $i=2,\ldots,n$. Од тоа следува дека:

$$\|\mathbf{x}\|^2=\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2.$$

34. Нека $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ е ортонормиран систем вектори од просторот V и $\mathbf{x}\in V$. Да се покаже дека ако $\mathbf{x}\circ\mathbf{a}_i=\alpha_i$ за $i=1,\ldots,m$, тогаш

$$\|\mathbf{x}\|^2\geq\alpha_1^2+\cdots+\alpha_m^2. \qquad (*)$$

Р е ш е н и е. Нека W е потпросторот од V генериран од $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$, $\mathbf{x}$. Ако $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ е база на W, тогаш, според претходната вежба, во (*) важи равенство. Во спротивен случај, W има димензија $m+1$, па постои ортонормирана база на W од облик $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m,\mathbf{a}$. Ставајќи $\alpha=\mathbf{x}\circ\mathbf{a}$, добиваме:

$$\|\mathbf{x}\|^2=\alpha_1^2+\cdots+\alpha_m^2+\alpha^2>\alpha_1^2+\cdots+\alpha_m^2.$$

35. Нека V е n-димензионален векторски простор со база $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$. Да се покаже дека постои еднозначно определен скаларен производ $*$ во V, таков што дадената база да биде ортонормирана.

Р е ш е н и е. За да биде дадена база ортонормирана, нужно (а и доволно) е да бидат исполнети равенствата:

$$\mathbf{a}_i*\mathbf{a}_j=\begin{cases}0 & \text{за } i\neq j\\ 1 & \text{за } i=j.\end{cases} \qquad (*)$$

Од тоа следува дека, ако $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ се такви што: $\mathbf{x}=\sum_i\alpha_i\mathbf{a}_i$, $\mathbf{y}=\sum_j\alpha_j\mathbf{a}_j$ тогаш:

$$\mathbf{x}*\mathbf{y}=\sum_i\alpha_i\beta_i. \qquad (**)$$

Од сето тоа следува дека постои најмногу еден скаларен производ во V со бараното својство. И обратно, ако $\mathbf{x}*\mathbf{y}$ се дефинира со (**), ќе се добие дека се точни сите услови за скаларен производ, како и (*), од што следува дека базата $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ е ортонормирана.

36. Да се дефинираат два различни скаларни производи во $\mathbb{R}^3$.

Р е ш е н и е. Еден е, секако, "обичниот" скаларен производ дефиниран со:

$$(x_1,x_2,x_3)\circ(y_1,y_2,y_3)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3. \qquad (*)$$

Векторите $\mathbf{a}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{a}_3=(1,1,1)$ се база на $\mathbb{R}^3$, при што:

$$\mathbf{e}_1=\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{e}_2=\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{e}_3=\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_2,$$

каде што $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ е стандардната база. Според резултатот од претходната вежба, постои скаларен производ $*$ во $\mathbb{R}^3$, таков што $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ е ортонормирана база. Притоа, ќе имаме и:

$$\mathbf{a}_2*\mathbf{a}_2=1, \text{ но } \mathbf{a}_2\circ\mathbf{a}_2=1^2+1^2=2,$$

од што следува дека скаларниот производ $*$ е различен од $\circ$.

Во вежбите 37-42 V е даден простор со скаларен производ.

37. Нека $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m \in V$ се линеарно независни вектори и нека $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_m$ се определени со

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \circ \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1, \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_m &= \mathbf{a}_m - \frac{\mathbf{a}_m \circ \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \cdots - \frac{\mathbf{a}_m \circ \mathbf{b}_{m-1}}{\mathbf{b}_{m-1} \circ \mathbf{b}_{m-1}}\mathbf{b}_{m-1}. \end{aligned} \tag{42}$$

Да се покаже дека $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_m$ е ортогонален систем од ненулти вектори, и дека ако $k \le m$, а W_k е потпросторот на V чија база е $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ тогаш $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k$ е ортогонална база на W_k.

(Постапката за конструкција на ортогоналниот систем $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_m$ (т.е. рекурентните формули (42)) е позната како ***Грам-Шмитов***[3] ***алгоритам за ортогонализација***.)

Р е ш е н и е. За $m=1$, нема што да се докажува, па затоа нека $m \ge 2$; $\mathbf{b}_2$ е добро дефиниран, бидејќи $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \ne \mathbf{o}$, па $\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 > 0$. Не може $\mathbf{b}_2$ да биде нула, бидејќи тогаш $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ би биле зависни; од исти причини, $\mathbf{b}_k \ne \mathbf{o}$, за секој $k \le m$. Лесно се проверува дека $\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_2 = 0$, а потоа и дека $\mathbf{b}_i \circ \mathbf{b}_j = 0$ за секои $i < j \le m$. Имајќи предвид дека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$ се линеарни комбинации на $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k$ добиваме дека $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k$ е база на W_k.

38. Да се примени Грам-Шмитовиот алгоритам во случајот:

а) $V=\mathbb{R}^3$: $\mathbf{a}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1)$;

б) V е просторот од вежба 16 во 3.6: $\mathbf{a}_1 = 1, \mathbf{a}_2 = x, \mathbf{a}_3 = x^2$.

Р е ш е н и е. а) $\mathbf{b}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \dfrac{\mathbf{a}_2 \circ \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1}\cdot\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 - \dfrac{1}{2}\mathbf{a}_1 = \dfrac{1}{2}(-1,1,2)$.

б) $\mathbf{b}_1 = 1$; $\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 = \int_0^1 dx = 1$; $\mathbf{a}_2 \circ \mathbf{b}_1 = \int_0^1 x dx = \dfrac{1}{2}$; $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 - \dfrac{1}{2}\mathbf{b}_1 = x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(2x-1)$;
$\mathbf{a}_3 \circ \mathbf{b}_1 = \int_0^1 x^2 dx = \dfrac{1}{3}$; $\mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 = \dfrac{1}{4}\int_0^1 (4x^2 - 4x + 1)dx = \dfrac{1}{12}$; $\mathbf{a}_3 \circ \mathbf{b}_1 = \dfrac{1}{2}\int_0^1 (2x^3 - x^3)dx = \dfrac{1}{12}$;
$\mathbf{b}_3 = x^2 - (1/3)\cdot 1 - 1\cdot(1/2)(2x-1) = x^2 - x + 1/6$.

39. Што ќе се добие ако се примени Грам-Шмитовиот алгоритам на системот вектори $\mathbf{a}_1 = (1,1,0), \mathbf{a}_2 = (0,1,1), \mathbf{a}_3 = (1,2,1)$?

Р е ш е н и е. $\mathbf{b}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{b}_2 = (-1,1,2)/2$;

$\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_1 = 2$, $\mathbf{a}_3 \circ \mathbf{b}_1 = 3$, $\mathbf{a}_3 \circ \mathbf{b}_2 = 3/2$, $\mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_2 = 3/2$

$\mathbf{b}_3 = (1,2,1) - \dfrac{3}{2}(1,1,0) - \dfrac{1}{2}(-1,1,2) = ((2,4,2) - (3,3,0) + (1,-1,-2))/2 = \mathbf{o}$

3) Јорген Грам (*Jörgen Pedersen Gram*, 1850-1916)
Ерхард Шмит (*Erhard Schmidt*, 1876-1959)

Овој одговор требаше и да се очекува, бидејќи од тоа што $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{o}$ и $\mathbf{b}_1 \circ \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_3 = 0$, не е можно да биде $\mathbf{b}_3 \neq \mathbf{o}$, зашто тогаш $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ би бил некомпланарен систем вектори.

40. Нека $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ се како во вежбата 37, и нека $\|\mathbf{b}_k\| \cdot \mathbf{c}_k = \mathbf{b}_k$ за $k = 1, 2, \ldots, m$. Да се покаже дека $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$ е ортонормиран систем (ненулти) вектори, и дека $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ е ортонормирана база на W_k за $k \geq 1$. Да се определи соодветниот ортонормиран систем за секој од примерите а), б) од вежбата 36.

Р е ш е н и е. Првиот дел од тврдењето е јасен.

а) $\mathbf{c}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\mathbf{c}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.

б) $\mathbf{c}_1 = 1$; $\|\mathbf{b}_2\|^2 = 1/12 \Rightarrow \mathbf{c}_2 = \sqrt{12}\,\mathbf{b}_2 = \sqrt{3}(2x-1)$;
$\|\mathbf{b}_3\|^2 = 1/180$; $\|\mathbf{b}_3\| = 1/6\sqrt{5} \Rightarrow \mathbf{c}_3 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$

41. Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ се како и во вежбата 37. Да се покаже дека ортонормираниот систем $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$, споменат во вежбата 40, може да се определи со следниов систем равенства:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{a}_1\|\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \circ \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1,\\
&\|\mathbf{b}_2\|\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \circ \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 - (\mathbf{a}_3 \circ \mathbf{c}_2)\mathbf{c}_2,\\
&\vdots\\
&\|\mathbf{b}_{m-1}\|\mathbf{c}_{m-1} = \mathbf{b}_{m-1},\ \mathbf{b}_m = \mathbf{a}_m - (\mathbf{a}_m \circ \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 - \cdots - (\mathbf{a}_{m-1} \circ \mathbf{c}_{m-1})\mathbf{c}_{m-1},\\
&\|\mathbf{b}_m\|\mathbf{c}_m = \mathbf{b}_m.
\end{aligned}$$

42. Да се провери тврдењето од претходната вежба на примерите а), б) од вежбите 38 и 40.

VII. 5. Теорема на Кронекер-Капели

Овде ќе го воведеме многу важниот поим за ранг на матрица, со чија помош ќе изнесеме еден критериум за решливост на систем линеарни равенки.

5. 1. Ранг на системи вектори

Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ е систем од m вектори. ***Ранг на системот вектори*** е максималниот можен број на линеарно независни вектори од тој систем. Според тоа, рангот на дадениот систем е m ако и само ако тој систем е линеарно независен. Ќе докажеме неколу теореми во врска со рангот на даден систем вектори.

1°. *Рангот на системот вектори* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *е* k *ако и само ако постои потсистем од* k *линеарно независни вектори, а секој вектор* $\mathbf{a}_\nu$ *од дадениот систем може да се изрази како линерна комбинација од нив.*

Д о к а з. Нека рангот на дадениот систем вектори е k. Тогаш постојат k линеарно независни вектори, додека секој потсистем со $k+1$ вектор е зависен. Според теоремата 1° од 4.1, можеме да претпоставиме дека системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ е линеарно независен. Системот пак $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ е линеарно зависен, од што следува дека постојат скалари $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ (од кои барем еден не е нула), такви што

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k + x_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{o}.$$

Не може да биде $x_{k+1} = 0$, зашто тогаш системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ би бил зависен. Според тоа, имаме

$$\mathbf{a}_{k+1} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_k\mathbf{a}_k,$$

каде што $y_\nu = -x_\nu / x_{k+1}$. Со тоа покажавме дека секој вектор $\mathbf{a}_\nu$ може да се изрази како линеарна комбинација од $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Да претпоставиме сега дека постојат k линеарно независни вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ такви што секој вектор $\mathbf{a}_\nu$ од дадениот систем може да се изрази како линеарна комбинација од нив. Според теоремата 4° од 4.1 не постои линеарно независен потсистем со повеќе од k членови, од што следува дека рангот на дадениот систем е k. □

Нека

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m \ (i \neq j) \tag{1}$$

е даден систем вектори; да ги формираме системите:

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m, \tag{1'}$$

$$\mathbf{a}_1, \ldots, x\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m, \tag{2}$$

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m, \tag{3}$$

каде што $x \neq 0$. За системите (1′), (2) и (3) велиме дека се добиени од (1) со помош на ***елементарни трансформации.***

Точна е следнава теорема:

2°. *Елементарните трансформации не го менуваат рангот на даден систем вектори.*

Д о к а з. Нека системот вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ има ранг k. Според теоремата 1°, постојат k линеарно независни вектори, со чија помош се изразуваат линеарно сите други. Можеме да претпоставиме дека $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ се тие k линеарно независни вектори. Го разгледуваме системот

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, x\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m$$

каде што $x \neq 0$. Ако $i > k$, тогаш системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ е потсистем и од новиот систем. Векторот $\mathbf{a}_i$ може да се претстави во облик

$$\mathbf{a}_i = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k,$$

од што следува дека

$$x\mathbf{a}_i = (xx_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (xx_k)\mathbf{a}_k$$

исто така е линеарна комбинација од $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Со тоа докажавме дека (за $i > k$) и вториот систем има ранг k.

Да претпоставиме дека $i \le k$. Системот вектори $\mathbf{a}_1, \ldots, x\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_k$ е линеарно независен, зашто

$$y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_i(x\mathbf{a}_i) + \cdots + y_k\mathbf{a}_k = \mathbf{o}$$

повлекува

$$y_1 = \cdots = y_i x = \cdots = y_k = 0, \text{ т.е.}$$

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_i = \cdots = y_k = 0,$$

бидејќи $x \ne 0$. Ако $s > k$, тогаш $\mathbf{a}_s$ може да се претстави во облик

$$\mathbf{a}_s = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_i\mathbf{a}_i + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + (x_i x^{-1})(x\mathbf{a}_i) + \cdots + x_k\mathbf{a}_k,$$

а од тоа, пак според 1°, следува дека $\mathbf{a}_1, \ldots, x\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m$ има ранг k.

Во суштина, на ист начин се покажува дека и системот (3) има ранг k, а за системот (1′) следува направо од 1° и од 1° во 4.1. □

5. 2. Ранг на матрици

Нека $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ е матрица од облик $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Секоја редица од оваа матрица може да се смета за n-димензионален вектор. Рангот на системот вектори формиран од сите редици на матрицата $\mathbf{A}$ ќе велиме дека е ***ранг на таа матрица***. Ќе дадеме и друга карактеристика на рангот, но претходно е потребно да го обопштиме поимот за минор на една матрица. Имено, ако во матрицата $\mathbf{A}$ воочиме k редици: $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и k колони $j_1, j_2, \ldots, j_k$, тогаш за детерминантата

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \tag{4}$$

ќе велиме дека е ***минор со ред*** k на матрицата $\mathbf{A}$.

Ќе ја докажеме следнава теорема.

3°. *Рангот на матрицата* $\mathbf{A}$ *е еднаков со максималниот можен природен број* k, *таков што постои минор* Δ_k *со ред* k *што е различен од нула.*

(Според тоа, секој минор со ред поголем од k е нула.)

Д о к а з. Да претпоставиме дека минорот Δ_k напишан во (4) е различен од нула, а секој минор со ред поголем од k е нула. Во тој случај, векторите формирани од редиците $i_1, i_2, \ldots, i_k$ претставуваат независен систем, зашто во спротивен случај би имале $\Delta_k = 0$. Останува да докажеме дека секоја друга редица може да се изрази како линеарна комбинација од овие k редици од што, според 3° од 4.1, ќе следува точноста на теоремата. Од технички причини ќе земеме да биде $i_\nu = j_\nu = \nu$, т.е. дека детерминантата Δ_k има облик:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \tag{4'}$$

а со тоа не се намалува општоста на дискусијата.

Ќе ја разгледаме детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Ако $j \le k$, две колони од ова детерминанта ќе бидат еднакви, па значи детерминантата ќе биде 0; за $i \le k$ ќе имаме $\Delta = 0$, зашто две редици ќе бидат еднакви. За $i > k$, $j > k$, Δ е минор со ред $k+1$, од што следува дека и во овој случај имаме $\Delta = 0$. Да ја развиеме детерминантата Δ по колоната j:

$$0 = a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \cdots + a_{kj}A_k + a_{ij}\Delta_k .$$

Лесно се воочува дека $A_1, A_2, \ldots, A_k, \Delta_k$ не зависат од j. Поради $\Delta_k \ne 0$, ставајќи $x = -A_\nu / \Delta_k$ добиваме:

$$a_{ij} = x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \cdots + x_k a_{kj} . \tag{5}$$

Ако со $\mathbf{a}_i$ го означиме векторот $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{in})$, според (5), имаме

$$\mathbf{a}_i = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k ,$$

од што следува дека секој вектор од системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ може да се изрази како линеарна комбинација од системот линеарно независни вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, што и сакавме да добиеме. □

Секој минор на транспонираната матрица $\mathbf{A}^\mathrm{T}$ од матрицата $\mathbf{A}$ се добива со транспонирање на соодветен минор од $\mathbf{A}$, а од тоа, според претходната теорема, добиваме дека рангот на $\mathbf{A}^\mathrm{T}$ е ист како и рангот на $\mathbf{A}$. Потоа, рангот на $\mathbf{A}^\mathrm{T}$ се совпаѓа со рангот на системот вектори формиран од редиците на $\mathbf{A}^\mathrm{T}$, а тоа се колоните на $\mathbf{A}$. Според тоа точна е следнава теорема:

4°. *Рангот на матрицата* **A** *е еднаков со рангот на системот вектори формиран од нејзините колони.* □

Да разгледаме еден пример:

1) Матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ може да има ранг најмногу 3. Лесно се утврдува дека сите минори од ред три

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

се еднакви со нула, а поради $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$, следува дека рангот на дадената матрица е 2. Од тоа добиваме, на пример, дека постојат броеви x и y, такви што

$$(0,1,1,3) = x(1,1,1,1) + y(2,1,1,-1).$$

Имено, лесно се утврдува дека такви се броевите $x = 2, y = -1$.

Погоре видовме (теорема 2°) дека рангот на еден систем вектори не се менува ако на тој систем се изврши елементарна трансформација. Според тоа, рангот на една матрица не се менува ако :

(*i*) две редици (односно колони) си ги разменат местата,

(*ii*) сите елементи на една редица (односно колона) се помножат со број $a \neq 0$,

(*iii*) елементите од една редица (колона) се помножат со еден број и производите се додадат на соодветните елементи од друга редица (односно колона).

За секоја трансформација од тој вид велиме дека е ***елементарна трансформација*** на матрицата. За две матрици **A** и **B** велиме дека се ***еквивалентни*** и пишуваме **A**~**B**, ако од матрицата **A** може да се дојде до **B** со конечно многу елементарни трансформации.

Од сето изнесено следува точноста на следнава теорема:

5°. *Ако матриците* **A** *и* **B** *се еквивалентни, тогаш тие имаат ист ранг.* □

Да ги искористиме елементарните трансформации за определување рангот на една конкретна матрица.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & -6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & -6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

од што следува дека рангот на **A** е два.

Со спроведување на постапка што е (во принцип) иста со овде извршената низа елементарни трансформации се докажува точноста и на следнава теорема:

6°. *Матрицата* **А** *има ранг* k, *ако и само ако е еквивалентна со матрица од облик*

$$\begin{array}{cc} k\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right. & \\ & \end{array}\begin{bmatrix} \overbrace{1 \;\; 0 \;\; 0 \cdots 0}^{k} & 0 \cdots 0 \\ 0 \;\; 1 \;\; 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 \;\; 0 \cdots 0 \;\; 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 \;\; 0 \cdots 0 \;\; 0 & 0 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 \;\; 0 \cdots 0 \;\; 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}. \ \square \qquad (6)$$

5. 3. Теорема на Кронекер-Капели

Во **2.6** видовме како може да се решава, со помош на детерминанти, систем од n линеарни равенки со n непознати. Овде ќе го разгледаме поопштиот случај. Имено, ќе го разгледаме ***системот од*** m ***линеарни равенки со*** n ***непознати.***

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \qquad (7)$$

Ги формираме матриците **А** и **В** со:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (8)$$

За **А** ќе велиме дека е ***матрица на системот*** (7), а за **В** ***проширена матрица*** на истиот систем.

Да претпоставиме дека системот (7) има барем една n-ка решенија $(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n)$. Да ги означиме со $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ векторите формирани од колоните на **А** и да ставиме $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$. Поради $b_i = a_{i1}x^0_1 + {}$ $+ a_{i2}x^0_2 + \cdots + a_{in}x^0_n$, добиваме дека

$$\mathbf{b} = x^0_1\mathbf{a}_1 + x^0_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x^0_n\mathbf{a}_n$$

е линеарна комбинација од $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Од тоа следува дека системите вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ имаат ист ранг, па значи матриците **А** и **В** имаат ист ранг k.

Да претпоставиме дека **А** и **В** имаат ист ранг k; векторите од редиците на **В** да ги означиме со $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ т.е.

$$\mathbf{c}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i),$$

а редиците на **A** со $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_m$ т.с.

$$\mathbf{d}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}).$$

Од тоа што рангот на **A** е k следува дека постојат k линеарно независни вектори $\mathbf{d}_{i_1}, \mathbf{d}_{i_2}, \ldots, \mathbf{d}_{i_k}$, такви што секој друг вектор $\mathbf{d}_v$ може да се изрази како линеарна комбинација од нив. Со евентуална размена на местата на равенките, може да се уреди тие k линеарно независни вектори да бидат $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_k$. Во тој случај, системот $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ е линеарно независен бидејќи векторот $\mathbf{c}_i$ се поклопува со $\mathbf{d}_i$ со сите n први компоненти, а има уште една компонента b_i. (Да се види вежбата 6 од 4.6.) Бидејќи, по претпоставка, рангот на $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ е k, секој вектор $\mathbf{c}_i$ може да се изрази како линеарна комбинација од нив.

Ќе го разгледаме сега системот што е формиран од првите k равенки на (7):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned} \tag{7'}$$

Поради независноста на $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_k$, матрицата

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdots \mathbf{d}_1 \\ \cdots \mathbf{d}_2 \\ \\ \cdots \mathbf{d}_k \end{array}$$

има ранг k, па значи некој нејзин минор со ред k е различен од нула. Со евентуална пренумерација на непознатите, може да се уреди тој минор да биде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Ќе разликуваме два случаја: 1) $k = n$; 2) $k < n$.

Во првиот случај, (7′) е систем од n равенки со n непознати, а освен тоа детерминантата (Δ) од тој систем не е нула. Според правилото на Крамер, системот (7′) има само една n-ка решенија.

Во вториот случај, системот (7′) е еквивалентен со системот:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k &= b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k &= b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k &= b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \cdots - a_{kn}x_n. \end{aligned} \tag{7''}$$

Да ги избереме непознатите $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ произволно. Тогаш, според правилото на Крамер, можеме да ги определиме $x_1, x_2, \ldots, x_k$ еднозначно со помош на $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. Од тоа следува дека постојат безброј многу n-ки решенија $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ каде што $x_{k+1}, \ldots, x_n$ може да се изберат произволно, а потоа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се изразуваат еднозначно со нивна помош.

Преостанува да покажеме дека системите (7) и (7′) се еквивалентни. Системот (7′) е потсистем од (6) па значи секое решение на (6) е решение и на (7′). Да претпоставиме сега дека $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ е едно решение на (7′), и да ја разгледаме i-тата равенка на (7) за $i > k$. Векторот $\mathbf{c}_i$ може да се изрази како линеарна комбинација од $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$, $\mathbf{c}_i = y_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2 + \cdots + y_k\mathbf{c}_k$, па значи ќе имаме:

$$\begin{aligned} b_i &= y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_kb_k = y_1(a_{11}x^0_1 + a_{12}x^0_2 + \cdots + a_{1n}x^0_n) + y_2(a_{21}x^0_1 + a_{22}x^0_2 + \cdots + \\ &+ a_{2n}x^0_n) + \cdots + y_k(a_{k1}x^0_1 + a_{k2}x^0_2 + \cdots + a_{kn}x^0_n) = (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \cdots + y_ka_{k1})x^0_1 + \\ &+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \cdots + y_ka_{k2})x^0_2 + \cdots + (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \cdots + y_ka_{kn})x^0_n = \\ &= a_{i1}x^0_1 + a_{i2}x^0_2 + \cdots + a_{in}x^0_n, \end{aligned}$$

што значи дека $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ е решение и на i-тата равенка за секој $i = k+1, k+2, \ldots, m$. Со тоа докажавме дека системите (7) и (7′) се еквивалентни.

Со извршената дискусија ја докажавме точноста на следнава теорема, позната под името ***теорема на Кронекер-Капели***: [1]

7°. *Системот (7) од m линеарни равенки со n непознати е решлив ако и само ако матрицата* **A** *на системот има ист ранг како и проширената матрица* **B** *на системот.*

Ако е тоа исполнето и ако k е рангот на матриците **A**, **B** *тогаш*

а) за $k = n$ системот има единствено решение,

б) за $k < n$ постојат безброј многу решенија. □

Да разгледаме неколку примери.

2) $x+y+z+u = 1,$
$x+y+2z+u = 2,$
$x+y-z+u = -1.$

Имаме:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Јасно е дека **A** има ранг 2; **B** има ист ранг како и матрицата формирана од нејзините први три колони, од што следува дека и **B** има ранг 2. Значи, систе-

1) Леополд Кронекер (*Leopold Kronecker*, 1823-1891), германски математичар

мот е решлив. Бидејќи (рангот) $2 < 4$ (= бројот на променливите), системот има безброј многу решенија, при што две од непознатите можат да се изберат произволно. Навистина, лесно се утврдува дека решение е секоја четворка реални броеви $(-y-u, y, -1, u)$, каде што y и u се произволни.

3) $$\begin{aligned} x-y+z &= 1, \\ x+y-z &= 1, \\ x-y-z &= -1, \\ x+y+z &= 0. \end{aligned} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Од ова следува дека матрицата **A** има ранг 3, а **B** четири, па значи системот нема решение.

Ако во (7) имаме $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, тогаш велиме дека (7) е ***хомоген линеарен систем*** од m равенки со n непознати. Тој систем, секако има едно решение $(0, 0, \ldots, 0)$ наречено ***нулто*** или ***тривијално.*** *Според теоремата на Кронекер-Капели ќе постојат и други решенија ако и само ако рангот на матрицата на системот е помал од n.* За $m<n$ тоа сигурно е исполнето, од што следува дека, *ако во еден хомоген систем има повеќе непознати отколку што има равенки, тогаш постојат нетривијални решенија.*

Ако $m=n$, тогаш рангот на матрицата **A** на системот ќе биде помал од n ако и само ако $\det \mathbf{A} = 0$. Според тоа:

8°. *Системот од n хомогени линеарни равенки со n непознати:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

има нетривијални решенија ако и само ако

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

(Дека (10) е потребен услов за постоење на нетривијални решенија покажавме во 18° од 2.6. Овде покажавме дека тој услов е доволен.) □

5. 4. Вежби

1. Да се најде рангот на системот вектори:

а) $\mathbf{a}=(4,-1,3,-2)$, $\mathbf{b}=(8,2,6,-4)$, $\mathbf{c}=(3,-1,4,-2)$, $\mathbf{d}=(6,-2,8,-4)$;

б) $\mathbf{a}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}=(2,3,4)$, $\mathbf{c}=(3,2,3)$, $\mathbf{d}=(4,3,4)$, $\mathbf{e}=(1,1,1)$.

Р е ш е н и е. а) Веднаш се воочува дека $\mathbf{b}=2\mathbf{a}, \mathbf{d}=2\mathbf{c}$. Бидејќи $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{c}=\mathbf{o} \Leftrightarrow \lambda=0=\mu$, следува дека $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ се линеарно независни. Значи, рангот на системот е 2.

б) Рангот на овој систем не може да биде поголем од 3. Бидејќи $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}=\mathbf{o} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$, векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се линеарно независни, па рангот на дадениот систем е 3.

2. Да се пресметаат ранговите на следниве матрици:

а) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -8 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Одговор. а) 3. б) 3. в) 2.

3. Да се решат системите:

а) $\begin{aligned} ax+y&=1, \\ x+y&=2, \\ x-y&=a; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} (a+b)(x+y)-cz&=a-b, \\ (b+c)(y+z)-ax&=b-c, \\ (c+a)(z+x)-by&=c-a. \end{aligned}$

Р е ш е н и е. а) Системот има решение само за $a=0$ $(x=y=1)$ и за $a=-1$ $(x=1/2, y=3/2)$.

б) Бидејќи

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+b & a+b & -c \\ -a & b+c & b+c \\ c+a & -b & c+a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b & 0 & -(a+b+c) \\ -a & a+b+c & a+b+c \\ c+a & -a-b-c & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} a+b & 0 & -1 \\ -a & 1 & 1 \\ c+a & -1 & 0 \end{vmatrix}=(a+b+c)^3,$$

за $a+b+c\neq 0$ системот има единствено решение

$$x=\frac{c-b}{a+b+c},\ y=\frac{a-c}{a+b+c},\ z=\frac{b-a}{a+b+c},$$

а за $a+b+c=0$ системот е неопределен, т.е. има безброј многу решенија.

4. Да се решат системите равенки:

а) $\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 \quad &= 1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5 &= -1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5 &= 3, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5 &= -1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-x_4&=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4&=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4&=1, \\ 5x_1+5x_2+2x_3 \quad &=2. \end{aligned}$

О д г о в о р. а) $x_1=1+a$, $x_2=a=x_4$, $x_3=0$, $x_5=-2(a+1)$;
б) $x_1=0=x_3$, $x_2=2/5$, $x_4=-1/5$.

5. Во кој случај n прави линии: $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = 1,2,\dots,n$ минуваат низ една точка? Да се одговори на аналогното прашање кога n рамнини минуваат низ: а) една точка; б) една права.

Р е ш е н и е. n-те прави линии $a_i x + b_i y + c_i = 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$ минуваат низ една точка ако рангот на матрицата на системот

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n x + b_n y + c_n &= 0 \end{aligned}$$

е 2 или 1; во вториот случај сите прави се исти.

n рамнини минуваат низ една точка, ако рангот на матрицата и проширената матрица на системот, формиран од равенките на рамнините, е 3, а низ две точки-ако рангот е 2 или 1.

6. Нека системот (9) има нетривијални решенија и нека S е множество од сите решенија $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на тој систем. Да се покаже дека S е векторски потпростор од $\mathbb{R}^n$. Ако $k = \operatorname{rang} \mathbf{A}$, да се покаже дека S има димензија $n-k$.

П о м о ш. Дека S е потпростор е јасно. Според теоремата на Кронекер-Капели во множеството n-ки $(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, $n-k$ од компонентите можат да се изберат произволно и од тоа лесно се добива дека S има димензија $n-k$.

7. Да се покаже дека ако на редиците од проширената матрица **B** на системот (7) се извршат низа елементарни трансформации, тогаш добиената матрица ќе биде проширена матрица на систем што е еквивалентен на дадениот.

Р е ш е н и е. Множењето на една редица со број $a \neq 0$ значи исто што и множење на соодветната равенка со тој број. Ако $f_i = b_i, g_j = b_j$ се i-тата, односно j-тата равенка на (7) и ако a е реален број, тогаш јасно е дека системите $f_i = b_i, g_j = b_j$ и $f_i + a g_j = b_i + a b_j, g_j = b_j$ се еквивалентни, а имено такви измени во системот (7) и се вршат ако една редица од **B** се помножи со број a и добиените производи се додадат на друга редица.

8. За системот (7) велиме дека има ***скалеста форма*** ако има облик:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ \dots\dots\dots \\ a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{11}$$

каде што $m \le n$, $a_{ii} \neq 0$. Да се покаже дека овој систем со скалеста форма е решлив и дека:

(i) за $m=n$ постои само едно решение;

(ii) за $m<n$ постојат безброј многу решенија.

Р е ш е н и е. Поради $a_{mn} \neq 0$, последната равенка може да се реши по x_m, а потоа претпоследната по x_{m-1} итн. додека не дојдеме до првата. За $m<n$, $x_{m+1}, \dots, x_n$ ќе бидат произволни, а за $m=n$, $x_1, \dots, x_n$ ќе бидат наполно определени броеви.

9. Да се покаже дека секој решлив линеарен систем (7) е еквивалентен со некој систем со скалеста форма.

Р е ш е н и е. Ако $a_{1j}=0$ за секој $j=1,\dots,n$, тогаш за $b_1=0$ првата равенка може да се изостави, а за $b_1\neq 0$ таа нема решение, па ни целиот систем не ќе има решение. Значи, $a_{1j}\neq 0$, за некој j, а можеме да претпоставиме и дека $a_{11}\neq 0$, бидејќи, во спротивност, можеме да им ги размениме местата на непознатите x_1 и x_j. Потоа, множејќи ја првата равенка со $-a_{21}/a_{11}$ и додавајќи го резултатот на втората, ќе се добие равенка од облик

$$a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_n$$

На ист начин се елиминира непознатата x_1 и од другите равенки. Ако некоја од добиените равенки има облик $0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=b\,(\neq 0)$ тогаш добиениот систем, којшто е еквивалентен со дадениот, нема решение, а во случај да добиеме $0\cdot x_2+\cdots+0\cdot x_n=0$, тогаш таа равенка може да се изостави. По оваа постапка, ако $a'_{22}\neq 0$, можеме од третата и преостанатите равенки да ја елиминираме непозната x_2. Продолжувајќи ја оваа постапка конечно многу пати ќе добиеме дека дадениот систем е еквивалентен со систем од скалест вид, или пак дека нема решение.

Да забележиме дека со изнесеното дадовме еден метод за решавање на системи линеарни равенки, познат под името ***Гаусов метод***. Воочуваме дека тој, во суштина, се состои во тоа што со елементарни трансформации на проширената матрица на дадениот систем се добива матрица чии елементи "под главната дијагонала" се нули.

10. Со помош на Гаусовиот метод, да се решат приложените системи линеарни равенки:

а) $\begin{aligned}x_1+x_2&=1,\\ x_1-x_2&=3;\end{aligned}$ б) $\begin{aligned}x_1+x_2&=1,\\ 2x_1+2x_2&=1;\end{aligned}$

в) $\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4&=1,\\ 3x_1+2x_2+4x_3-2x_4&=2,\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2;\end{aligned}$ г) $\begin{aligned}2x_1+x_2-5x_3+x_4&=8,\\ x_1-3x_2-6x_4&=9,\\ 2x_2-x_3+2x_4&=-5,\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4&=0.\end{aligned}$

Р е ш е н и е. Ќе работиме со проширените матрици на дадените системи.

а) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&2\end{bmatrix}$; постои само едно решение $(2,-1)$.

б) $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$; нема решение.

в) $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&4&-2&2\\2&2&2&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&1&-5&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$; системот има безброј многу решенија (x_1,x_2,x_3,x_4), каде што x_3 и x_4 се произволни, а x_1 и x_2 се определени со $x_2=1+x_3-5x_4$, $x_1=4x_4-2x_3$.

г) $\begin{bmatrix}2&1&-5&1&8\\1&-3&0&-6&9\\0&2&-1&2&-5\\1&4&-7&6&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1/2&-5/2&1/2&4\\1&-3&0&-6&9\\0&2&-1&2&-5\\1&4&-7&6&0\end{bmatrix}\sim$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -5/2 & 1/2 & 4\\ 0 & -7/2 & 5/2 & -13/2 & 5\\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 7/2 & -9/2 & 11/2 & -4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -5/2 & 1/2 & 4\\ 0 & 1 & -5/7 & 13/7 & -10/7\\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 7/2 & -9/2 & 11/2 & -4\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -5/2 & 1/2 & 4\\ 0 & 1 & 5/7 & 13/7 & -10/7\\ 0 & 0 & 3/7 & -12/7 & -15/7\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -5/2 & 1/2 & 4\\ 0 & 1 & -5/7 & 13/7 & -10/7\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -5/2 & 1/2 & 4\\ 0 & 1 & -5/7 & 13/7 & -10/7\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9\end{bmatrix}.$$

Од последното добиваме: $x_4 = 1, x_3 = -1, x_2 = -4, x_1 = 3$, т.е. дека $(3,-4,-1,1)$ е единствено решение на дадениот систем.

11. Да се покаже дека, ако две матрици имаат ист ранг, тогаш тие се еквивалентни.

Р е ш е н и е. Нека матриците **A** и **B** имаат ист ранг k. Според теоремата 6°, секоја од тие матрици е еквивалентна со матрица **C** од облик (6). Според тоа, со извршување на конечно многу елементарни трансформации можеме од **A** да дојдеме до **C**, а од **C** до **B**, па според тоа, **A** и **B** се еквивалентни.

12. Да се покаже дека ако **A** и **B** се несингуларни квадратни матрици со ист ред, тогаш тие се еквивалентни.

Р е ш е н и е. Ова е последица од вежбата 11.

13. За една матрица од n-ти ред велиме дека е *елементарна*, ако е добиена од единичната матрица $\mathbf{E}_n$, со извршување точно на една елементарна трансформација над $\mathbf{E}_n$. Притоа, за овие матрици ќе ги употребуваме следниве специјални ознаки:

i) $\mathbf{E}_{(n)i-k}$ - добиена од $\mathbf{E}_n$, со разменување на местата меѓу i-та и k-та редица;

ii) $\mathbf{E}_{(n)i;c}$ - кога i-та редица од $\mathbf{E}_n$ се помножи со реален број $c, c \neq 0$;

iii) $\mathbf{E}_{(n)ik;c}$ - кога k-та редица се помножи со број $c \in \mathbb{R}$, а потоа се дода де на i-та редица.

Ако нема опасност од недоразбирање, индексот (n) се изостава. На пример, за $n = 3$, имаме:

$$\mathbf{E}_{2-3} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_{2;3} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}_{23;3} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Нека **A** е матрица од облик $m \times n$. Да се покаже дека:

а) $\mathbf{E}_{i;c}^{-1} = \mathbf{E}_{i;c^{-1}}$ за $c \neq 0$; б) $\mathbf{E}_{ik;c}^{-1} = \mathbf{E}_{ik;-c}$;

в) $\mathbf{E}_{(m)i;c}\mathbf{A}$ (односно $\mathbf{AE}_{(n)i;c}$) е матрицата што се добива од $\mathbf{A}$ ако елементите од i-та редица (односно i-та колона) се помножат со c;

г) $\mathbf{E}_{(m)ik;c}\mathbf{A}$ (односно $\mathbf{AE}_{(n)ik;c}$) е матрицата што се добива од $\mathbf{A}$ кога k-та редица (односно k-та колона) се помножи со c и производите се додадат на i-та редица (односно i-та колона).

П о м о ш. Со директна проверка.

14. Да се покаже дека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имаат ист ранг, ако и само ако

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\cdots\mathbf{E}_k\mathbf{A}\mathbf{E}_{k+1}\cdots\mathbf{E}_s,$$

каде што $\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_s$ се елементарни матрици.

Р е ш е н и е. Ако е исполнето горното равенство, тогаш според 13 в) и г), $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ се еквивалентни, од што според 5° добиваме дека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имаат ист ранг. Обратно, ако $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имаат ист ранг k, тогаш секоја од нив може со елементарни трансформации да се сведе на облик (6), од што со помош на 13 в) и г) се добива горното равенство.

15. Да се покаже дека квадратната матрица $\mathbf{A}$ е несингуларна ако и само ако е производ од елементарни матрици.

Р е ш е н и е. Од 13 а) и б) следува дека секоја матрица што е производ на елементарни матрици е несингуларна. Од друга страна, ако $\mathbf{A}$ е несингуларна, тогаш, според 12, $\mathbf{A}$ е еквивалентна со единичната матрица $\mathbf{E}$, а според 14, тогаш добиваме дека $\mathbf{A}$ е производ на елементарни матрици.

16. Да се претстави како производ од елементарни матрици следнава матрица $\mathbf{A}$:

а) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 6\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$;

Р е ш е н и е. а) $\mathbf{E}_{21;-3}\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$; $\mathbf{E}_{21;-3}\mathbf{A}\mathbf{E}_{12;-2} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} = \mathbf{E}_{2;-2} \Rightarrow$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_{21;-3}^{-1}\,\mathbf{E}_{2;-2}\,\mathbf{E}_{12;-2}^{-1} = \mathbf{E}_{21;3}\,\mathbf{E}_{2;-2}\,\mathbf{E}_{12;2}$$

б) $\mathbf{E}_{21;-2}\,\mathbf{E}_{31;-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{E}_{12;-3}\mathbf{E}_{13;2} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 8\end{bmatrix} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{E}_{32;-2}\,\mathbf{B}\,\mathbf{E}_{23;2} = \mathbf{E}_{2;-1}\mathbf{E}_{3;4}$

Според тоа, имаме: $\mathbf{E}_{32;-2}\mathbf{E}_{21;-2}\mathbf{E}_{31;-1}\mathbf{A}\mathbf{E}_{12;-3}\mathbf{E}_{13;2}\mathbf{E}_{23;2} = \mathbf{E}_{2;-1}\mathbf{E}_{3;4}$, од што следува:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_{32;-1}^{-1}\mathbf{E}_{21;-2}^{-1}\mathbf{E}_{31;-2}^{-1}\mathbf{E}_{2;-1}\mathbf{E}_{3;4}\mathbf{E}_{23;2}^{-1}\mathbf{E}_{13;2}^{-1}\mathbf{E}_{12;-3}^{-1} =$$

$$= \mathbf{E}_{31;1}\mathbf{E}_{21;2}\mathbf{E}_{32;2}\mathbf{E}_{2;-1}\mathbf{E}_{3;4}\,\mathbf{E}_{23;-2}\,\mathbf{E}_{13;-2}\,\mathbf{E}_{12;3}.$$

в) $\mathbf{E}_{21;-1}\mathbf{E}_{31;-1}\mathbf{A}\mathbf{E}_{12;-1}\mathbf{E}_{13;1} = \mathbf{E}_{2;-2}\mathbf{E}_{3;2} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{E}_{31;1}\mathbf{E}_{21;1}\mathbf{E}_{2;-2}\mathbf{E}_{3;2}\mathbf{E}_{13;-1}\mathbf{E}_{12;1}.$

17. Да се определат инверзните матрици на матриците од претходната вежба.

Р е ш е н и е. а) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_{12;-2}\mathbf{E}_{2;-1/2}\mathbf{E}_{21;-3} =$

$$= \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix};$$

б) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_{12;-3}\mathbf{E}_{13;2}\mathbf{E}_{23;2}\mathbf{E}_{3;1/4}\mathbf{E}_{2;-1}\mathbf{E}_{32;-2}\mathbf{E}_{21;-2}\mathbf{E}_{31;-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -32 & 20 & -4 \\ 14 & -8 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Притоа, за да не се множат 8 матрици, добро е да се искористи резултатот од вежбата 13 в-г). На тој начин десната страна се пресметува последователно како што следува:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -9 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -8 & 5 & -1 \\ 7/2 & 2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

в) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_{12;-1}\mathbf{E}_{13;1}\mathbf{E}_{3;1/2}\mathbf{E}_{2;-1/2}\mathbf{E}_{21;-1}\mathbf{E}_{31;-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. Работејќи како и во претходните две вежби, да се покаже дека:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

19. Нека $k = \min\{m,n\}$, каде што **A** е матрица од облик $m \times n$. Да се покаже дека **A** има инверзија (лева или десна) акко k е рангот на **A**.

П о м о ш. Ако **A** има лева инверзија, тогаш според 11° од **1.5** имаме $n \leq m$, т.е. $k = n$. Потоа да се искористат резултатите од вежбата 28 во **4.6**, а и самото решение на таа вежба.

20. Нека **A** е матрицата на системот (7). Да се покаже дека:

а) Ако **A** има десна инверзија, тогаш системот има решение, за кои било $b_1, \dots, b_m$.

б) Ако **A** има лева инверзија, тогаш системот има најмногу едно решение.

П о м о ш. Да се искористи резултатот од вежбата 19.

21. Ако **A** е матрицата на системот (7), а **b** е вектор-колоната чиишто компоненти се слободните членови, системот е еквивалентен со следнава матрична равенка:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{12}$$

каде што **x** е вектор-колоната од непознатите на системот. Да се покаже дека ако равенката (12) има барем едно решение $\mathbf{x}_0$ и ако $\mathbf{A}^-$ е обинв на **A** (в. **1.5***), тогаш и $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^-\mathbf{b}$ е решение на таа равенка.

Р еш е н и е. По услов имаме $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$, од што следува:

$$\mathbf{Ax}^* = \mathbf{AA}^-\mathbf{b} = \mathbf{AA}^-\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}.$$

(Да забележиме дека овој резултат е специјален случај од резултатот на вежбата 33 во **1.6**.)

22. Нека $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{A}^-$ се како и во претходната вежба. (Елементите од $\mathbb{R}^n$ ги сметаме за вектор-колони.) Да се покаже дека $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ е решение на (12) акко постои $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, таков што:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^-\mathbf{b} + \mathbf{A}^-\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{z} \tag{13}$$

Р е ш е н и е. Да претпоставиме дека $\mathbf{u}$ има облик (13). Според претходната вежба имаме $\mathbf{A}^-\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{b}$, од што следува дека:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{A}^-\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b},$$

т.е. дека $\mathbf{u}$ е решение на (12).

Да претпоставиме дека $\mathbf{x}$ е кое било решение на (12). Ако во (13) ставиме $\mathbf{z} = -\mathbf{x}$, добиваме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^-\mathbf{b} + \mathbf{A}^-\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{z} = \mathbf{A}^-\mathbf{b} - \mathbf{A}^-\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{A}^-\mathbf{b} - \mathbf{A}^-\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

што и сакавме да докажеме.

23. Нека равенката (12) има барем едно решение, при што $\mathbf{b} = [b_1 \ldots b_m]^T$ е ненулти вектор. Да се покаже дека за секое решение $\mathbf{x}^*$ на (12) постои обинв $\mathbf{A}^*$ на $\mathbf{A}$, таков што $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{b}$.

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{x}^*$ е решение на (12) и нека $\mathbf{A}^-$ е кој било обинв на $\mathbf{A}$. Според претходната вежба, имаме:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^-\mathbf{b} - (\mathbf{A}^-\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x}^*. \tag{14}$$

Нека k е таков што $b_k \neq 0$, и нека $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ е матрица од облик $n \times m$, таква што $d_{ij} = 0$ за $j \neq k$, а $d_{ik} = x^*_i \cdot b_k^{-1}$, каде што $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ldots x_n^*]^T$. Лесно се проверува дека $\mathbf{D}\mathbf{b} = -\mathbf{x}^*$. Заменувајќи на десната страна од (14) $\mathbf{x}^* = -\mathbf{D}\mathbf{b}$, добиваме:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^-\mathbf{b} + (\mathbf{A}^-\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{D}\mathbf{b} = \mathbf{A}^*\mathbf{b}. \tag{15}$$

каде што $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^- + (\mathbf{A}^-\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{D}$. Преостанува да покажеме дека $\mathbf{A}^*$ е обинв на $\mathbf{A}$. Навистина, имаме:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^- + \mathbf{A}^-\mathbf{A}\mathbf{D} - \mathbf{D})\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

24. Да се покаже дека секоја матрица $\mathbf{A}$ има обинв.

Р е ш е н и е. Видовме порано дека секоја матрица од облик $n \times m$ е обинв на $\mathbf{O}_{m,n}$, па затоа да препоставиме дека $\mathbf{A}$ е ненулта матрица од облик $m \times n$. Според претходната вежба, доволно е да покажеме дека постои нехомоген решлив систем (7) чија матрица е $\mathbf{A}$. За таа цел доволно е векторот $\mathbf{b}$ од слободните членови на (7) да се избере да биде една ненулта колона од матрицата $\mathbf{A}$.

25. Да се покаже дека, ако $\mathbf{A}$ е ненулта матрица, тогаш и двете матрици $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ се ненулти.

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$. Ако $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = 0$, тогаш:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk},$$

за кои било $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. За $i = j$, добиваме $0 = \sum a_{ik}^2$, т.е. $a_{ik} = 0$, за кои било $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$; од тоа следува $\mathbf{A} = 0$.

26. Да се покаже дека, ако $\mathbf{A}$ е несингуларна квадратна матрица, тогаш и $\mathbf{A}^T$ е несингуларна, и притоа:

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Р е ш е н и е. Од $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, и тоа што $\mathbf{E}$ е симетрична, следува: $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$.

27. Да се покаже дека, за која било матрица $\mathbf{A}$, матриците $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ и $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ имаат ист ранг.

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{A}$ е од облик $m\times n$, и нека $\mathbf{x}$ е n-димензионален вектор-колона таков што: $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Множејќи одлево со $\mathbf{x}^T$, добиваме $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$, т.е. $(\mathbf{A}\mathbf{x})^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, од што, според резултатот од вежбата 25, добиваме $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Јасно е дека од $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ следува $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Според вежбата 6, матриците $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ имаат ист ранг. Матриците $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^T$ имаат ист ранг според 3°.

28. Да се покаже дека рангот на производот од две матрици не е поголем од рангот на која било од нив.

Р е ш е н и е. Ако $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, тогаш секоја колона на $\mathbf{C}$ е линеарна комбинација од колоните на $\mathbf{A}$.

29. Да се покаже дека ако $\mathbf{A}^-$ и $\mathbf{A}^*$ се обопштени инверзии на матрицата $\mathbf{A}$, такви што $\mathbf{A}^- = \mathbf{U}_1\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{V}_1$, $\mathbf{A}^* = \mathbf{U}_2\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{V}_2$, за некои матрици $\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{V}_2$, тогаш $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^-$.

Р е ш е н и е. Ако $\mathbf{D} = \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^-$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$, тогаш: $\mathbf{ADA} = \mathbf{O}$, $\mathbf{D} = \mathbf{U}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{V}$. Од последниве равенства следува дека

$$(\mathbf{DA})^T\mathbf{DA} = \mathbf{A}^T\mathbf{D}^T\mathbf{DA} = \mathbf{A}^T\mathbf{V}^T\mathbf{ADA} = \mathbf{O},$$

па (според вежбата 25) добиваме $\mathbf{DA} = \mathbf{O}$, а потоа и: $\mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathbf{DA}\mathbf{U}^T = \mathbf{O}$, од што (пак според вежбата 25) следува $\mathbf{D} = \mathbf{O}$, т.е. $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^-$.

30. Без да се користи 20° од 1.5, да се покаже дека, за дадена матрица $\mathbf{A}$, постои најмногу една матрица $\mathbf{A}^*$ таква што:

а) $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ б) $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ се симетрични.

Р е ш е н и е. Да претпоставиме дека $\mathbf{A}^+$ и $\mathbf{A}^*$ ги задоволуваат условите а), б). Тогаш имаме:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{+T}\mathbf{A}^+) = (\mathbf{A}^+\mathbf{A}^{+T})\mathbf{A}^T,$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{*T}\mathbf{A}^*) = (\mathbf{A}^*\mathbf{A}^{*T})\mathbf{A}^T.$$

Според претходната вежба, од последните равенства следува $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^*$.

31. Нека $\mathbf{A}$ е ненулта матрица од облик $m\times n$ и ранг r. Да се покаже дека постојат матрици $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, такви што $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$ и притоа $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ имаат облици $m\times r$, $r\times n$-соодветно. Во таков случај се вели дека $\mathbf{B}\mathbf{C}$ е ***скелетно разложување*** на $\mathbf{A}$. (Да се види Гантмахер Гл.I, §5, стр. 31.)

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ се вектор-редиците на матрицата $\mathbf{A}$ и нека $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ се линеарно независни вектор-редици на $\mathbf{A}$. За секој $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, постојат реални броеви $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ir}$, такви што:

$$\mathbf{a}_i = b_{i1}\mathbf{c}_1 + b_{i2}\mathbf{c}_2 + \cdots + b_{ir}\mathbf{c}_r.$$

Ако $\mathbf{B}=[b_{ij}]$, а $\mathbf{C}$ е матрицата чијашто i-та редица е $\mathbf{c}_i$, тогаш $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$.

Да забележиме дека би можеле да работиме и со колоните. Имено, се бира систем линеарно независни вектор-колони $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_r$ на $\mathbf{A}$ и се означува со $\mathbf{B}$ матрицата чијашто j-та колона е $\mathbf{b}_j$. Потоа, означувајќи ги вектор-колоните на $\mathbf{A}$ со: $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$, добиваме дека постои матрица $\mathbf{C}=[c_{ij}]$ од облик $r\times n$, таква што $\mathbf{a}_j=c_{1j}\mathbf{b}_1+\dots+c_{rj}\mathbf{b}_r$. Тогаш: $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$.

32. Да се најдат барем три различни скелетни разложувања на матрицата

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\-1&2&-3&1\\0&1&-1&1\end{bmatrix}.$$

Решение. Имајќи предвид дека третата редица е збир од првите две, добиваме дека $\mathbf{A}$ има ранг 2.

Да ставиме $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ и да ја избереме матрицата $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4\end{bmatrix}$, така што $\mathbf{BC}=\mathbf{A}$. Добиваме $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$.

За $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$, добиваме $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$.

Ако за $\mathbf{C}$ ја избереме матрицата $\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\-1&2&-3&1\end{bmatrix}$ добиваме $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$.

Според тоа:

$$\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2&0\\-1&2&-3&1\end{bmatrix}=\mathbf{A}$$

33. Ако $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$ е скелетно разложување на матрицата $\mathbf{A}$, да се покаже дека:

а) $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ имаат ист ранг r, како и $\mathbf{A}$.

б) Матриците $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ и $\mathbf{CC}^{\mathrm{T}}$ се несингуларни.

Решение. а) Според вежбата 28 имаме $r\le\operatorname{rang}\mathbf{B}$, а од друга страна имаме: $\operatorname{rang}\mathbf{B}\le\min\{r,m\}=r$.

б) Според а) и вежбата 27, $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ и $\mathbf{CC}^{\mathrm{T}}$ имаат ист ранг r, од што и следува заклучокот.

34. Ако $\mathbf{A}=\mathbf{BC}$ е скелетно разложување на ненултата матрица $\mathbf{A}$, да се покаже дека матрицата

$$\mathbf{A}^{*}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{CC}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

ги задоволува условите а) и б) од вежбата 30.

Решение. Равенствата во а) се добиваат заменувајќи го $\mathbf{A}$ во нив со $\mathbf{BC}$, а $\mathbf{A}^{*}$ со десната страна од (16). Со замена се добива

$$\mathbf{A}^{*}\mathbf{A}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{CC}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{C},\quad \mathbf{AA}^{*}=\mathbf{B}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}},$$

од што (имајќи го предвид и резултатот од вежбата 26) се добива б).

35. Да се докаже 20° од 1.5, т.е. теоремата за егзистенција и единственост на псевдоинверзот на дадена матрица $\mathbf{A}$.

Р е ш е н и е. Теоремата е јасна кога $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ (е нулта) матрица (имено, $\mathbf{O}^{+}=\mathbf{O}$ е единствениот псевдоинверз на $\mathbf{O}$), а за $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$, таа е последица на резултатите од вежбите 30 и 34.

36. Да се покаже дека:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{+} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Р е ш е н и е. Ако го искористиме, на пример, второто скелетно разложување на дадената матрица $\mathbf{A}$ (в. вежба 32), ќе добиеме

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},\ (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}=3\mathbf{E},\ (\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{3}\mathbf{E}.$$

Потоа се користи формулата (16), со тоа што на левата страна се пишува $\mathbf{A}^{+}$ наместо $\mathbf{A}^{*}$.

37. Кои од резултатите на овој параграф (формулирани во "работниот дел" или вежбите) се точни кога полето $\mathbb{R}$ се замени со кое било поле P?

О д г о в о р. Точни се сите својства 1°-8°, како и тврдењата од вежбите: 6-9, 11-15, 19-24, 26, 28, 31 и а) од 33.

Тврдењето од вежбата 25, во општ случај на важи, бидејќи, на пример, во полето $P=\{0,1\}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{O}$, за $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Овој пример покажува дека и 27 не мора да е точно. Потоа, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ е единственото скелетно разложување; притоа $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}=[1+1]=\mathbf{O}$, од што следува дека и б) од 33 не мора да биде точно. Дека теоремата за егзистенција и еднозначност на псевдоинверз не мора да важи покажавме во вежбата 30 од **1.6**.

38. Да се покаже дека, ако $\mathbf{A}$ е матрица од облик $m\times n$ со ранг m, тогаш

$$\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

Р е ш е н и е. Од претпоставките следува дека $\mathbf{A}=\mathbf{E}_m\mathbf{A}$ е скелетно разложување на $\mathbf{A}$, од што, со помош на (16), се добива резултатот.

39. Да се докаже дека за секоја матрица $\mathbf{A}$ е точно равенството

$$\mathbf{A}^{+}=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{+}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Р е ш е н и е. Ако $\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{C}$ е скелетно разложување на $\mathbf{A}$, тогаш

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=(\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})\mathbf{C}$$

е скелетно разложување на $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, од што следува:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{+} &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}= \\ &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{C}= \\ &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1};\end{aligned}$$

од тоа добиваме:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{+}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}= \\ &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}= \\ &= \mathbf{A}^{+}.\end{aligned}$$

VII. 6. Сопствени вредности и сопствени вектори

Сопствените вредности и сопствените вектори на матрица имаат важно место во линеарната алгебра, а специјално во нејзината примена. Во овој параграф ние само ќе ги воведеме овие поими и ќе разгледаме некои нивни својства.

6. 1. Полиноми од матрици

Нека $\mathbf{A}$ е дадена квадратна матрица со ред n, и нека

$$f(\lambda)=a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0 \tag{1}$$

е полином [1] со реални коефициенти. За изразот

$$a_k\mathbf{A}^k+a_{k-1}\mathbf{A}^{k-1}+\cdots+a_1\mathbf{A}+a_0\mathbf{E}$$

ќе велиме дека е ***матричен полином*** од $\mathbf{A}$, и ќе го означуваме со $f(\mathbf{A})$; јасно е дека $f(\mathbf{A})$ пак е матрица од n-ти ред. Имајќи ги предвид особините на операциите собирање и множење на матрици, заклучуваме дека матрични полиноми (од иста матрица $\mathbf{A}$) се собираат и множат како и обичните полиноми. Со други зборови, ако полиномите $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ се поврзани со равенствата:

$$f(\lambda)=p(\lambda)+q(\lambda),\quad g(\lambda)=p(\lambda)\cdot q(\lambda),$$

тогаш истите равенства важат и за матричните полиноми $f(\mathbf{A})$, $g(\mathbf{A})$, $p(\mathbf{A})$ и $q(\mathbf{A})$. Множењето на обичните полиноми е комутативно, па значи ќе имаме

$$p(\mathbf{A})\,q(\mathbf{A})=q(\mathbf{A})\,p(\mathbf{A}). \tag{2}$$

Последното равенство не е во спротивност со фактот што кај матриците не важи комутативниот закон за множење. Имено, поради асоцијативноста на множењето, имаме

$$\mathbf{A}^r\mathbf{A}^s=\mathbf{A}^{r+s}=\mathbf{A}^{s+r}=\mathbf{A}^s\mathbf{A}^r,$$

а како последица од ова равенство се добива точноста и на (2).

За матрицата $\mathbf{A}$ велиме дека е ***корен на полиномот*** $f(\lambda)$, ако

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{O}.$$

Може да се постави прашањето: дали за дадена матрица $\mathbf{A}$ постои ненулти полином чиј корен е $\mathbf{A}$? Ако се има предвид фактот што секоја матрица со ред n може да се смета за n^2-димензионален вектор, тогаш заклучуваме дека системот "вектори" $\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{A}^2,\ldots,\mathbf{A}^k$ е линеарно зависен, каде што $k=n^2$. Значи, постојат скалари (т.е. реални броеви) $a_0,a_1,\ldots,a_k$

---

1) Овде и натаму, променливата кај полиномот ќе ја означуваме со λ (наместо со x).

(од кои барем еден не е нула), такви што:

$$a_0\mathbf{E}+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+\cdots+a_k\mathbf{A}^k=\mathbf{O}. \tag{3}$$

Според тоа, матрицата **A** ќе биде корен на полиномот (1). Со тоа докажавме дека секоја квадратна матрица **A** е корен на еден ненулти полином $f(\lambda)$, од што пак следува дека истата матрица е корен и на безброј многу полиноми; имено, таков е секој полином од облик $q(\lambda)f(\lambda)$.

Да го означиме со m најмалиот природен број со својството: матрицата **A** да е корен на некој полином со степен m; нека $\psi(\lambda)$ е еден од таквите полиноми; при што претпоставуваме дека коефициентот пред λ^m е 1. Ако $f(\lambda)$ е произволен полином, тогаш делејќи го $f(\lambda)$ со $g(\lambda)$, ќе добиеме количник $q(\lambda)$ и остаток $r(\lambda)$:

$$f(\lambda)=q(\lambda)\psi(\lambda)+r(\lambda),$$

каде што $r(\lambda)$ има помал степен од m. Да претпоставиме дека **A** е корен и на $f(\lambda)$. Тогаш поради $\psi(\mathbf{A})=f(\mathbf{A})=\mathbf{O}$, добиваме $r(\mathbf{A})=\mathbf{O}$, што е можно само ако $r(\lambda)=0$, бидејќи $r(\lambda)$ има степен помал од m.

Со тоа покажавме дека: **A** е *корен на полиномот* $f(\lambda)$ *ако и само ако* $f(\lambda)$ се дели без остаток со $\psi(\lambda)$. Специјално, ако $\varphi(\lambda)$ е друг полином со степен m за кој **A** е корен, добиваме дека $\varphi(\lambda)=a\psi(\lambda)$, каде што a е константа. Сред тоа, *полиномот* $\psi(\lambda)$ *е еднозначно определен од* **A**, па за $\psi(\lambda)$ ќе велиме дека е ***минимален полином*** на **A**.

Така ја докажавме точноста на следнава теорема:

1 . а) *Секоја квадратна матрица* **A** *е корен на некој ненулти полином.*

б) *Минималниот полином* $\psi(\lambda)$ *на* **A** *е еднозначно определен.*

в) *Матрицата* **A** *е корен на полиномот* $f(\lambda)$ *ако и само ако* $\psi(\lambda)$ *е делител на* $f(\lambda)$. □

6. 2. Теорема на Хамилтон-Кели

Во претходниот раздел ја докажавме егзистенцијата на полином чиј корен е дадена матрица **A**, но не дадовме начин за ефективно определување барем на еден таков полином. Овде ќе покажеме како се добива еден полином со степен n за кого дадена квадратна матрица **A** од ред n е корен. Претходно ќе воведеме неколку поими.

Нека $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ е квадратна матрица со ред n, а λ произволен реален број. За матрицата $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$, т.е.

$$\begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

ќе велиме дека е ***карактеристична матрица*** за $\mathbf{A}$. Детерминантата што одговара на таа матрица е полином со степен n во однос на λ. Тој се вика ***карактеристичен полином*** за матрицата $\mathbf{A}$ и се означува со $\Delta(\lambda)$. Значи:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = d_n\lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0. \tag{5}$$

Јасно е дека $d_n = 1$, зашто λ^n се јавува само во производот на дијагоналните елементи. Ако во $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ставиме $\lambda = 0$, добиваме $d_0 = (-1)^n \det\mathbf{A}$.

Ќе ја докажеме сега следната теорема позната под името ***теорема на Хамилтон-Кели*** [2].

2°. *Секоја матрица е корен на својот карактеристичен полином.*

Д о к а з. Карактеристичната матрица на $\mathbf{A}$ ќе ја означиме со $\mathbf{B}$, т.е. $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$. Според теоремата 15° од 2.5 имаме $\mathbf{B}(\mathbf{B}^*)^{\mathrm{T}} = (\det\mathbf{B})\mathbf{E}$. Елементите на $(\mathbf{B}^*)^{\mathrm{T}}$ се минори на $\mathbf{B}$ со ред $n-1$, од што следува дека секој од нив е полином по λ со степен не поголем од $n-1$. Според тоа секој елемент $(\mathbf{b}_{ij}^*)^{\mathrm{T}}$ на матрицата $(\mathbf{B}^*)^{\mathrm{T}}$ има облик

$$e_{ij_1} + e_{ij_2}\lambda + \cdots + e_{ij_n}\lambda^{n-1},$$

од што следува дека постојат матрици $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{n-1}$ такви што

$$(\mathbf{B}^*)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}_0 + \lambda\mathbf{B}_1 + \lambda^2\mathbf{B}_2 + \cdots + \lambda^{n-1}\mathbf{B}_{n-1}.$$

Заменувајќи во равенството $\mathbf{B}(\mathbf{B}^*)^{\mathrm{T}} = (\det\mathbf{B})\mathbf{E}$, добиваме:

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{B}_0 + \lambda\mathbf{B}_1 + \cdots + \lambda^{n-1}\mathbf{B}_{n-1}) = (d_0 + d_1\lambda + \cdots + d_n\lambda^n)\mathbf{E}, \text{ т.е.}$$

$$-\mathbf{AB}_0 + \lambda(\mathbf{B}_0 - \mathbf{AB}_1) + \lambda^2(\mathbf{B}_1 - \mathbf{AB}_2) + \cdots + \lambda^{n-1}(\mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{AB}_{n-1}) + \lambda^n\mathbf{B}_{n-1} =$$
$$= d_0\mathbf{E} + \lambda d_1\mathbf{E} + \lambda^2 d_2\mathbf{E} + +\lambda^{n-1}d_{n-1}\mathbf{E} + \lambda^n d_n\mathbf{E}. \tag{6}$$

Равенството (6) е точно за секој λ, а тоа е можно само ако

$$\begin{aligned} -\mathbf{AB}_0 &= d_0\mathbf{E} \\ \mathbf{B}_0 - \mathbf{AB}_1 &= d_1\mathbf{E} \\ \mathbf{B}_1 - \mathbf{AB}_2 &= d_2\mathbf{E} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{B}_{n-2} - \mathbf{AB}_{n-1} &= d_{n-1}\mathbf{E} \\ \mathbf{B}_{n-1} &= d_n\mathbf{E}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ако второто равенство од (7) го помножиме (одлево) со $\mathbf{A}$, третото со $\mathbf{A}^2$ итн, $(n+1)$-то со $\mathbf{A}^n$ и ги собереме сите добиени равенства, ќе имаме:

$$d_n\mathbf{A}^n + d_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + d_1\mathbf{A} + d_0\mathbf{E} = \mathbf{O},$$

од што следува дека навистина $\mathbf{A}$ е корен на својот карактеристичен полином. □

2) Вилијам Хамилтон (*William Rowan Hamilton*, 1805-1865), ирски математичар
Артур Кели (*Arthur Cayley*, 1821-1895), англиски математичар

Да разгледаме еден пример.

1) Нека е дадена матрицата

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Карактеристичниот полином на оваа матрица го добиваме лесно:

$$\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+4.$$

Според тоа имаме: $\mathbf{A}^3-3\mathbf{A}^2+4\mathbf{E}=0$, од што следува

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}(3\mathbf{A}-\mathbf{A}^2)$$

Од овој пример се гледа како може теоремата на Хамилтон-Кели да се искористи за пресметување на инверзни матрици.

6. 3. Трага на матрица

Покрај примената за наоѓање на инверзната матрица за дадена матрица $\mathbf{A}$, карактеристичниот полином има и други примени. Затоа се наложува задача за неговото полесно одредување. За таа цел се користи и поимот трага на матрица.

Имено, ако $\mathbf{A}$ е квадратна матрица со ред n, тогаш збирот на дијагоналните елементи се вика *трага* на матрицата $\mathbf{A}$ и се означува со $\operatorname{tr}\mathbf{A}$. Значи,

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}. \tag{8}$$

Лесно се докажува следново својство:

3°. $\operatorname{tr}(a\mathbf{A})=a\cdot\operatorname{tr}(\mathbf{A})$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\operatorname{tr}\mathbf{A}+\operatorname{tr}\mathbf{B}$, $\operatorname{tr}(\mathbf{AB})=\operatorname{tr}(\mathbf{BA})$.

Д о к а з. Ќе го докажеме само последното од тие равенства. Ќе ставиме:

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C}=[c_{ij}],\quad \mathbf{BA}=\mathbf{D}[d_{ij}]\ .$$

Според тоа, имаме

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\mathbf{AB}&=c_{11}+c_{22}+\cdots+c_{nn}=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1})+\\ &+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2})+\cdots+(a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\cdots+a_{nn}b_{nn})=\\ &+(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\cdots+b_{1n}a_{n1})+\cdots+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\cdots+b_{2n}a_{n2})+\\ &+\cdots+(b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\cdots+b_{nn}a_{nn})=d_{11}+d_{22}+\cdots+d_{nn}=\operatorname{tr}\mathbf{BA}.\ \square\end{aligned}$$

Од наредната теорема (што нема да ја докажеме [3]) се гледа како може поимот трага да се искористи за определување на карактеристичниот полином.

---

3) Да се види, на пример, Гантмахер, Гл. IV §4, стр. 90-91

4° *Нека* **A** *е квадратна матрица со ред n и нека:*

$$s_1 = \operatorname{tr}\mathbf{A},\ s_2 = \operatorname{tr}\mathbf{A}^2,\ \ldots,\ s_n = \operatorname{tr}\mathbf{A}^n;$$
$$a_1 = -s_1,\ a_2 = -(a_1 s_1 + s_2)/2,\ a_3 = -(a_2 s_1 + a_1 s_2 + s_3)/3, \tag{9}$$
$$\ldots, a_n = -(a_{n-1}s_1 + a_{n-2}s_2 + \cdots + a_1 s_{n-1} + s_n)/n.$$

Тогаш:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

е карактеристичниот полином на **A**. □

6. 4. Сопствени вредности и сопствени вектори на матрици

Во 6.2 видовме дека карактеристичниот полином на една квадратна матрица **A** од n-ти ред има облик:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + d_1\lambda + d_0, \tag{10}$$

каде што $d_0 = (-1)^n \det\mathbf{A}$. Потоа, со својството 4° е дадена постапка за пресметување на коефициентите $d_0, d_1 \ldots$ со помош на трагите на матриците $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2 \ldots$, од која се гледа и дека

$$d_{n-1} = \operatorname{tr}\mathbf{A}.$$

И покрај тоа што сите коефициенти на карактеристичниот полином се реални, тој не мора да има реални корени. Но, како што споменавме во Т.9 од I.3.1, постојат комплесни броеви $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такви што карактеристичнот полином $\Delta(\lambda)$ добива облик

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n). \tag{10'}$$

За комплексните броеви $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ќе велиме дека се ***сопствени*** (или ***карактеристични***) ***вредности*** на матрицата **A**. (Притоа, некои од броевите $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ можат да бидат и еднакви.)

Да разгледаме неколку примери.

2) Ако $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, тогаш $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 1$, од што следува дека **A** нема реални сопствени вредности. Имено, сопствените вредности на **A** се i и $-i$, каде што i е комплексниот број, таков што $i^2 = -1$. (Да се види IX.1.1.)

3) За матрицата **A** од примерот 1) видовме дека $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$, па лесно се добива:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = \lambda^2(\lambda+1) - 4(\lambda^2 - 1) = (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2,$$

т.е. дека $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2 = \lambda_3$ се сопствените вредности на **A**.

Овде работиме само со реални матрици, односно со матрици чии елементи се реални броеви, па затоа натаму ќе нè интересираат само реалните сопствени вредности на една матрица **A**. Од следното својство се гледа дека постои широка класа матрици што имаат само реални сопствени вредности.

5°. *Ако A е симетрична матрица од n-ти ред, тогаш постојат реални броеви $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такви што важи равенството* (10′).

(Со други зборови, сите сопствени вредности на **A** *се реални.)* [4] □

За натаму, кога ќе велиме "*сопствена вредност на* **A**" ќе подразбираме "*реална сопствена вредност на* **A**".

Корисно е да се воочи следново својство:

6°. *Ако* **A** *е матрица со реални елементи, а λ реален број, тогаш следниве услови се еквивалентни.*

i) λ *е сопствена вредност на* **A**.

ii) $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$.

iii) $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ *е сингуларна матрица.*

iv) Постои ненулти вектор [5] **x** *таков што:*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{11}$$

Д о к а з. Еквивалентноста на првите три услови е јасна. Ако се има предвид дека равенката (11) е еквивалентна со:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{o}, \tag{11'}$$

добиваме дека таа има ненулто решение акко $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$. □

Секој *ненулти* вектор **x** што го задоволува равенството (11) се вика ***сопствен*** (или ***карактеристичен***) ***вектор*** на матрицата **A**, придружен на сопствената вредност λ.

Да разгледаме два примера.

4) Матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ има карактеристичен полином $\lambda^2 - 7\lambda$, од што следува дека $\lambda_1 = 7$ и $\lambda_2 = 0$ се нејзините сопствени вредности. (Од ова се гледа дека и за несиметрични матрици е можно сите сопствени вредности да се реални.) Да ги најдеме сопствените вектори: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ придружени на λ_1, λ_2 соодветно.

$$7 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 6x_1 - 2x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_2 = 0. \end{array}$$

значи, $\mathbf{x} = (a, 3a)^T = a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, каде што a е кој било ненулти реален број. На ист начин се добива дека $\mathbf{y} = (2b, -b)^T = b\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $b \neq 0$.

---

4) Доказот на ова тврдење може да се најде, на пример, во: А. И. Мальцев: Основы линейной алгебры, стр. 231-232

5) Овде, и натаму во овој параграф, "вектор" **x** значи "вектор-колона", којашто најчесто ќе ја запишуваме: $(x_1, \ldots, x_n)^T$ (в. и 1.1)

Да забележиме дека со формулата $\mathbf{x} = (a, 3a)^T$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ се определени безброј многу сопствени вектори што се придружени на сопствената вредност $\lambda_1 = 7$. Тоа множество вектори, заедно со нултиот вектор, образува потпростор од $\mathbb{R}^2$ (наречен *сопствен простор*, придружен на λ_1). (Да се види и вежбата 12.) Во овој случај, тој потпростор е еднодимензионален, т.е. сите сопствени вектори (придружени на λ_1) се колинеарни. (Да се види и забелешката по примерот 6).)

Од друга страна пак забележуваме дека сопствените вектори **x**, **y** (придружени на λ_1, λ_2 соодветно) се неколинеарни. Дека тоа не е случајно ќе видиме во вежбата 14.

5) Матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ има карактеристичен полином $\lambda^2 - 2\lambda$, па $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ се нејзините сопствени вредности. Како и во примерот 4), лесно се покажува дека $\mathbf{x} = a(1,1)^T$, $\mathbf{y} = b(1,-1)^T$ се сопствени вектори придружени на $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 0$ - соодветно.

И во овој пример **x** и **y** се неколинеарни. Но, уште повеќе, овде **x** и **y** се и ортогонални (за разлика од 4), каде што **x** и **y** не се ортогонални). Причината за тоа е фактот што матрицата во 5) е симетрична, а симетричните матрици го имаат следново својство:

7°. *Ако* **A** *е симетрична (реална) матрица од n-ти ред, тогаш постои ортогонална база* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *на* $\mathbb{R}^n$, *така што* $\mathbf{a}_i$ *е сопствен вектор на* **A**, *за секој* $i = 1, 2, \dots, n$.[6] □

Ќе го илустрираме ова својство уште со еден пример.

6) Во 3) видовме дека матрицата **A** од 1) има сопствени вредности $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Да определиме една ортогонална база на $\mathbb{R}^3$ што се состои од сопствени вектори на **A**. Имајќи предвид дека

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix},$$

добиваме дека:

$$\mathbf{a} = (a, -a, -a)^T, \quad \mathbf{b} = (b_2 + b_3, b_2, b_3)^T$$

за $a \neq 0$ и ($b_2 \neq 0$ или $b_3 \neq 0$ или $b_2 + b_3 \neq 0$) се сопствени вектори на **A**, придружени на сопствените вредности –1, 2 соодветно. Јасно е дека $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, за кои било a, b_2, b_3.

Покрај тоа, за $a = 1$ добиваме $\mathbf{a}_1 = (1, -1, -1)^T$, за $b_2 = 1$, $b_3 = -1$: $\mathbf{b}_1 = (0, 1, -1)^T$ и за $b_2 = b_3 = 1$: $\mathbf{c}_1 = (2, 1, 1)^T$. Така,

$$(1, -1, -1)^T, \quad (0, 1, -1)^T, \quad (2, 1, 1)^T$$

е ортогонална база на $\mathbb{R}^3$, а сите три члена на базата се сопствени вектори на **A**.

---

6) За доказ да се види, на пример, Мальцев, гл. V, §19 стр. 232-233

Да забележиме дека меѓу сопствените вектори, придружени на "двојната" сопствена вредност λ_2 $(=2=\lambda_3)$ има и неколинеарни. (Тоа значи дека сопствениот простор, придружен на λ_2, не е еднодимензионален.)

Како последица од 7°, имајќи го предвид и својството 20° од 4.5, добиваме:

8°. *Ако* **А** *е симетрична матрица од n-ти ред, тогаш постои ортонормирана база на* $\mathbb{R}^n$, *таква што секој нејзин член е сопствен вектор на* **А**. □

7) Според дискусијата направена во 6) добиваме дека

$$(1,-1,-1)^\mathrm{T}/\sqrt{3},\quad (0,1,-1)^\mathrm{T}/\sqrt{2},\quad (2,1,1)^\mathrm{T}/\sqrt{6}$$

е ортонормирана база на $\mathbb{R}^3$.

Ќе формулираме уште едно важно својство.

9°. *Симетрична матрица од n-ти ред има ранг r акко има r ненулти сопствени вредности, а сите преостанати n−r се нула.* □

(Потсетуваме: 9° значи дека (по евентуално прераспоредување) во (10′) имаме $\lambda_i \neq 0$ за $i=1,\dots,r$, а $\lambda_i=0$ за $i>r$.)

Врската што постои меѓу матриците од n-ти ред и линерните пресликувања од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^n$ ни овозможува да дефинираме поим за сопствена вредност односно за сопствен вектор на линеарно пресликување.

Имено, според 11° од 4.3, постои биекција $f \mapsto \mathbf{A}_f$ од множеството линерни пресликувања од $\mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}^n$ во множеството квадратни матрици од n-ти ред. Реалниот број λ се вика ***сопствена вредност*** на f акко е сопствена вредност на матрицата $\mathbf{A}_f$. Ако се има предвид и својството 6° *iv*), добиваме:

10°. *Реалниот број* λ *е сопствена вредност на линеарното пресликување* f *акко постои ненулти вектор* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *таков што*:

$$f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}. \ \square \tag{12}$$

Секој ненулти вектор $\mathbf{x}$ што го задоволува равенството (12) се вика ***сопствен вектор*** на f *придружен на сопствената вредност* λ.

Својството 10° може да се искористи за дефинирање на поимот сопствена вредност односно сопствен вектор на линеарно пресликување $f: V \to V$ и во случај кога V е бесконечно димензионален векторски простор.

6. 5. Вежби.

1. Со помош на теоремата на Хамилтон-Кели, да се најдат матриците што се инверзни на матриците дадени во вежбите 17 и 18 од 5.4.

Р е ш е н и е. Да ја разгледаме, на пример, матрицата:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Лесно се проверува дека карактеристичниот полином на оваа матрица е $(\lambda-2)^3(\lambda+2)=\lambda^4-4\lambda^3+16\lambda-16$. Според теоремата на Хамилтон-Кели имаме: $\mathbf{A}^4-4\mathbf{A}^3+16\mathbf{A}-16\mathbf{E}=\mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{A}^{-1}=(1/16)(\mathbf{A}^3-4\mathbf{A}+16\mathbf{E})$. Пресметувајќи ги $\mathbf{A}^3,\mathbf{A}^2$ и средувајќи, добиваме $\mathbf{A}^{-1}=(1/4)\mathbf{A}$.

На ист начин се работи и при другите матрици.

2. Да се пресмета вредноста на полиномот $f(x)$ кога x се замени со матрицата $\mathbf{A}$:

а) $f(x)=3x^2-2x+5,\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{bmatrix}$;

б) $f(x)=x^3-7x^2+13x-5,\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

О д г о в о р. а) $f(\mathbf{A})=\begin{bmatrix}21 & -23 & 15\\ -13 & 34 & 10\\ -9 & 22 & 25\end{bmatrix}$; б) $f(\mathbf{A})=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

3. Да се покаже дека за матрицата $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ е исполнето равенството

$$\mathbf{A}^2-(a+d)\mathbf{A}+(\det\mathbf{A})\mathbf{E}=\mathbf{0}.$$

П о м о ш. Да се изврши директна проверка, или пак да се искористи теоремата на Хамилтон-Кели.

4. Нека $\mathbf{A}$ е квадратна матрица од втор ред и нека $\mathbf{A}^k=\mathbf{0}$ за некој $k\geq 1$. Да се покаже дека $\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$.

Р е ш е н и е. Нека $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Од $\mathbf{A}^k=\mathbf{0}$, имајќи предвид дека $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ (12° од 2.3) следува $\det\mathbf{A}=0$, па ако се искористи вежбата 3, се добива $\mathbf{A}^2=(a+d)\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3=(a+d)\mathbf{A}^2=(a+d)^2\mathbf{A}$ итн, $\mathbf{A}^k=(a+d)^{k-1}\mathbf{A}$. Според тоа, имаме $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ или пак $a+d=0$, а во секој од овие два случаја добиваме $\mathbf{A}^2=(a+d)\mathbf{A}=0$, што и сакавме да докажеме.

5. Да се најдат карактеристичните вредности на матрицата

а) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}0 & a & 0 & 0\\ a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & b & 0\end{bmatrix}$, $a\neq\pm b$

Р е ш е н и е. а) Карактеристичниот полином на $\mathbf{A}$ е $\lambda^2-7\lambda+6$, па карактеристичните вредности се $\lambda_1=6,\lambda_2=1$.

б) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$. в) $\lambda_1=a,\lambda_2=-a,\lambda_3=b,\lambda_4=b$.

6. Да се најде минималиот полином $\psi(\lambda)$ на матрицата:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. Го користиме фактот што минималниот полином е делител на карактеристичниот полином: $\psi(\lambda)|\Delta(\lambda)$.

а) $\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=\lambda^2-5\lambda-2=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$, $\lambda_{1,2}=(5\pm\sqrt{33})/2$.

Од ова се гледа дека минималниот полином е еднаков со карактеристичниот, т.е. дека тоа е $\lambda^2-5\lambda-2$.

б) $\lambda^2-\lambda$. в) λ^2-1.

7. Во кој случај минималниот полином на една матрица има степен 1?

Р е ш е н и е. Ако минималниот полином на $\mathbf{A}$ е $\lambda-a$, тогаш имаме $\mathbf{A}-a\mathbf{E}=\mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{A}=a\mathbf{E}$. И обратно, од $\mathbf{A}=a\mathbf{E}$, добиваме дека $\lambda-a$ е минимален полином на $\mathbf{A}$. (Матриците од овој вид се викаат ***скаларни***.)

8. Нека $\mathbf{A}$ е квадратна матрица со ред n и нека $\mathbf{A}^k=\mathbf{0}$ за некој природен број k. Да се покаже дека $\mathbf{A}^n=\mathbf{0}$.

Р е ш е н и е. Ако $\psi(\lambda)$ е минималниот полином на $\mathbf{A}$, тогаш тој е делител од карактеристичниот полином, па според тоа има степен $s\le n$. Од друга страна, поради $\mathbf{A}^k=\mathbf{0}$, $\mathbf{A}$ е корен на полиномот λ^k, па значи $\psi(\lambda)$ е делител на λ^k што е можно само ако $\psi(\lambda)=\lambda^s$. Имаме, значи, $\mathbf{A}^s=\mathbf{0}$, а потоа и $\mathbf{A}^n=\mathbf{A}^s\mathbf{A}^{n-s}=\mathbf{0}$.

9. Нека $\mathbf{C}$ е несингуларна матрица, и нека $\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Да се докаже дека $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имаат ист карактеристичен полином.

Р е ш е н и е. Нека $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}=\mathbf{D}$. Тогаш имаме: $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C}$ и

$$\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B})=\det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{C})=\det\mathbf{C}^{-1}\cdot\det\mathbf{D}\cdot\det\mathbf{C}=$$
$$=\det\mathbf{C}^{-1}\cdot\det\mathbf{C}\cdot\det\mathbf{D}=\det\mathbf{E}\cdot\det\mathbf{D}=\det\mathbf{D}.$$

10. Да се покаже дека не постојат квадратни матрици $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ такви што $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ да е единечна матрица $\mathbf{E}$.

Р е ш е н и е. Според теоремата 3° имаме: $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}-\mathbf{BA})=\operatorname{tr}(\mathbf{AB})-\operatorname{tr}(\mathbf{BA})=0$, но $\operatorname{tr}\mathbf{E}=n$.

11. Да се провери точноста на 5° и 7° за случај кога: а) $\mathbf{A}=\mathbf{0}$; б) $\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

Р е ш е н и е. а) $\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=\lambda^n=(\lambda-0)^n$; сите сопствени вредности се 0; секој ненулти вектор е сопствен.

б) $\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{E})=(\lambda-1)^n$; сите сопствени вредности се 1; секој ненулти вектор е сопствен.

12. Да се покаже дека, ако $\mathbf{A}$ е квадратна матрица од n-ти ред и $\lambda\in\mathbb{R}$, тогаш множеството U од сите вектори $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, такви што $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ е потпростор на $\mathbb{R}^n$. Што може да се рече за U во зависност од тоа дали λ е сопствена вредност на $\mathbf{A}$?

Р е ш е н и е. Пред сè $\mathbf{Ao}=\mathbf{o}=\lambda\mathbf{o}$, па $\mathbf{o}\in U$. Ако $\mathbf{x},\mathbf{y}\in U$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, тогаш лесно се проверува дека $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in U$, од што следува дека U е потпростор на $\mathbb{R}^n$. Притоа: $\dim U>0$ акко λ е сопствена вредност на $\mathbf{A}$; во тој случај секој ненулти вектор од U е сопствен вектор на $\mathbf{A}$.

13. Да се покаже дека ако λ е сопствена вредност на **A**, тогаш λ^n е сопствена вредност на $\mathbf{A}^n$ за секој природен број n. Ако освен тоа, **A** е несингуларна, и $\lambda \neq 0$, тогаш λ^{-1} е сопствена вредност на $\mathbf{A}^{-1}$.

Р е ш е н и е. Да претпоставиме дека λ^k е сопствена вредност на $\mathbf{A}^k$. Тогаш, постои ненулти вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, таков што $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, од што следува:

$$\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^k\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^k\mathbf{x}) = \lambda^k(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k+1}\mathbf{x},$$

т.е. λ^{k+1} е сопствена вредност на $\mathbf{A}^{k+1}$. Ако **A** е несингуларна, тогаш

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}),$$

па за $\lambda \neq 0$, добиваме: $\lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

14. Да се покаже дека два сопствени вектори **a**, **b**, придружени на различни сопствени вредности λ, μ од една матрица **A**, се неколинеарни.

Р е ш е н и е. Да претпоставиме дека $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, каде што $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогаш:

$$\mu\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\lambda\mathbf{a},$$

од што следува: $\mu\alpha\mathbf{a} = \alpha\lambda\mathbf{a}$, што не е можно поради $\lambda \neq \mu, \alpha \neq 0, \mathbf{a} \neq \mathbf{o}$.

15. Нека матрицата **A** од n-ти ред има n сопствени вредности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и ортонормирана база $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, при што $\mathbf{a}_i$ е сопствен вектор на **A** придружен на λ_i, т.е.

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_i = \lambda_i\mathbf{a}_i,$$

за секој $i = 1, 2, \ldots, n$. Да се покаже дека:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \tag{13}$$

Р е ш е н и е. Да ја означиме десната страна од (13) со **B**. Тогаш, за секој $j = 1, \ldots, n$, имаме

$$\mathbf{B}\mathbf{a}_j = \sum_i \lambda_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \lambda_j \mathbf{a}_j,$$

т.е. λ_j е сопствена вредност на **B**, со придружен сопствен вектор $\mathbf{a}_j$. Ако **x** е кој било вектор од $\mathbb{R}^n$, тогаш постојат единствени $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, такви што

$$\mathbf{x} = \sum_j \alpha_j \mathbf{a}_j.$$

Од тоа следува:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\mathbf{x} &= \left(\sum_i \lambda_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T\right)\cdot\left(\sum_j \alpha_j \mathbf{a}_j\right) = \sum_j\sum_i \lambda_i \alpha_j \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \\ &= \sum_j \alpha_j \lambda_j \mathbf{a}_j = \sum_j \alpha_j \mathbf{A}\mathbf{a}_j = \sum_j \mathbf{A}(\alpha_j \mathbf{a}_j) = \mathbf{A}\left(\sum_j \alpha_j \mathbf{a}_j\right) = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{14}$$

Имајќи предвид дека равенството (14) е точно за секој $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, добиваме $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

16. Да се покаже дека условите од претходната вежба се исполнети акко **A** е симетрична.

Р е ш е н и е. Ако **A** е симетрична, заклучокот следува од 7°. Од друга страна, јасно е дека десната страна од (13) е симетрична матрица.

17. Да се провери формулата (13) за ортонормираната база од примерот 7).

Р е ш е н и е.

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^T=\frac{1}{3}\cdot(-1)\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\cdot 2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\cdot 2\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}.$$

18. Нека се исполнети условите од вежбата 15, при што сите сопствени вредности $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ се различни од нула. Да се докаже дека **A** е несингуларна и дека:

$$\mathbf{A}^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^T. \tag{15}$$

Р е ш е н и е. Ако се искористи (13) и ако десната страна од (15) ја означиме со **C**, добиваме:

$$\mathbf{AC}=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^T\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{-1}\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^T\right)=\sum_i\sum_j\lambda_i\lambda_j^{-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j\mathbf{a}_j^T=\sum_i\sum_j\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^T=\mathbf{E}.$$

(При последното равенство е искористен резултатот од вежбата 32 од **4.6**.)

19. Нека се исполнети условите од вежбата 15, при што $\lambda_1,\dots,\lambda_m\neq 0,\lambda_{m+1}=\dots=\lambda_n=0$. Да се покаже дека:

$$\mathbf{A}^{+}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^T. \tag{16}$$

Р е ш е н и е. Означувајќи ја десната страна од (16) со **D**, и користејќи го (13) како и во претходната вежба, се добива:

$$\mathbf{ADA}=\mathbf{A},\quad \mathbf{DAD}=\mathbf{D},\quad \mathbf{AD}=\mathbf{DA}=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^T$$

од што следува: $(\mathbf{AD})^T=\mathbf{AD}$, $(\mathbf{DA})^T=\mathbf{DA}$. Според тоа: $\mathbf{D}=\mathbf{A}^{+}$.

20. Да се покаже дека ако **A** е симетрична квадратна матрица, тогаш $\mathbf{AA}^{+}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ и дека оваа матрица е симетрична.

П о м о ш. Да се искористи решението од претходната вежба.

21. Да се најде псевдоинверзот на матрицата $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. Поради $\mathbf{A}^2=3\mathbf{A}$, според вежбата 32 од **1.6**, имаме $\mathbf{A}^{+}=(1/9)\mathbf{A}$. На читателот му препорачуваме да дојде до истиот резултат со помош на резултатот од вежбата 19, при што претходно ќе треба да ги најде сопствените вредности на **A**, како и ортонормирана база од сопствени вектори.

22. Кои од својствата од овој параграф се точни, и кои дефиниции се осмислени, за матрици над произволно поле P?

О д г о в о р. **1°**, **2°**, **3°**, **4°**, **6°** и **10°**. Притоа, во **6°** и **10°** треба $\mathbb{R}$ да се замени со P. Осмислени се дефинициите за: полином од матрица, матричен корен на полином (притоа коефициентите на соодветниот полином се во P), трага на матрица, сопствени вредности и сопствени вектори на матрици; имено, $\lambda\in P$ е сопствена вредност на **A** акко λ е корен на карактеристичниот полином. Да забележиме дека (како и во $\mathbb{R}$) не мора $\Delta(\lambda)$ да може да се разложи на линеарни фактори во P.

23. Формулата (16) може да се искористи за пресметување на псевдоинверзот и на која било ненулта матрица $\mathbf{A}$. (Имено, според вежбата 39 од 5.4 имаме: $\mathbf{A}^{+}=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{+}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, а матрицата $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ е симетрична.)

24. Општите методи за пресметување псевдоинверзот на една матрица, изнесени во вежбата 34 од 5.4 и 19, 23, не се доволно ефикасни. Овде ќе го формулираме уште методот на Гревиј (в. Гантмахер, гл. I, §5, стр. 37-38).

Нека $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n,\ldots$ е низа m-димензионални вектор-колони. Ако $\mathbf{A}_n$ е матрицата чии колони се првите n членови од дадената низа, тогаш $\mathbf{A}_n^{+}$ се пресметува како што следува:

$$\mathbf{A}_n^{+}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_n\\ \mathbf{b}_n\end{bmatrix}, \tag{17}$$

каде што:

$$\mathbf{B}_n=\mathbf{A}_{n-1}^{+}-\mathbf{d}_n\mathbf{b}_n,\quad \mathbf{d}_n=\mathbf{A}_{n-1}^{+}\mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{b}_n=\mathbf{c}_n^{+},\ \text{за}\ \mathbf{c}_n=\mathbf{a}_n-\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{d}_n\neq\mathbf{o},$$

$$\mathbf{b}_n=(1+\mathbf{d}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_n)^{-1}\mathbf{d}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{n-1}^{+},\ \text{за}\ \mathbf{c}_n=\mathbf{o}.$$

Применувајќи го овој метод на матрицата од вежбата 21, добиваме:

$$\mathbf{A}_1^{+}=\mathbf{a}_1^{+}=\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{d}_2=-\frac{1}{2},\ \mathbf{c}_2=\frac{3}{2}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_2=-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2^{+}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_3=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix},\ \mathbf{c}_3=\mathbf{o},\ \mathbf{b}_3=\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3=\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix};\ \mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}_3^{+}=\frac{1}{9}\cdot\mathbf{A}.$$

25. Имајќи предвид дека за несингуларна матрица $\mathbf{A}$ важи $\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{-1}$, да се примени методот на Гревиј, на матриците од вежбите: 1.6.11 и 2.7.7. (Проверката на несингуларност на матрицата $\mathbf{A}$ се сведува на проверување на равенството $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}=\mathbf{E}$.)

VIII. РЕДОВИ

Во множеството на реалните броеви собирањето е една од најважните операции. Притоа, може да се зборува само за збир од конечно многу броеви. Но, често пати се работи со збирови, при кои бројот на собироците неограничено расте. Тоа го наложува воведувањето на поимот за бесконечен збир, т.е. за бесконечен ред. Овде ќе ги дефинираме таквите збирови и ќе испитаме некои нивни својства и примени за решавање на диференцијални равенки.

VIII. 1. Конвергентни редови

1. 1. Дефиниција и општи својства

Прво ќе се задржиме на еден пример.

1) Нека е дадена геометриска низа $a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots$ Познато е дека (за $q \neq 1$) збирот S_n на првите n членови од таа низа изнесува:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \ .$$

Да претпоставиме дека $|q| < 1$. Тогаш $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, па:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = s,$$

т.е. ја добиваме добро познатата формула за збир на бескрајна опаднувачка геометриска низа. Природно е да сметаме дека s *е збир на сите членови од дадената низа* и да напишеме:

$$s = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

Оваа постапка ќе ја обопштиме за случај на произволна бесконечна низа. Нека е дадена низата од реални броеви:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \qquad (1)$$

Ставајќи $A_1 = a_1, A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, добиваме нова низа

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots \tag{2}$$

Ако низата (2) е конвергентна и има граница A, тогаш велиме дека таа граница е збир на членовите од низата (1) и пишуваме:

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{или} \tag{3}$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\ ^{1} \tag{3'}$$

Самиот израз $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ (т.е. $\sum a_n$) се вика ***бесконечен ред*** или само ***ред***. Членовите на низата (2) ги викаме ***парцијални суми*** за тој ред. Редот е ***конвергентен*** ако таа низа е конвергентна и тогаш границата A се вика ***збир*** на конвергентниот ред (3). За редот $\sum a_n$ велиме дека е ***дивергентен*** ако не е конвергентен, т.е. ако низата од парцијални суми е дивергентна.

Како што гледаме, поимот за конвергентни редови е воведен со помош на соодветниот поим за низи. Имајќи ја предвид дефиницијата за конвергентност кај низите, можеме да речеме: *A е збир на редот $\sum a_n$ (т.е. $A = \sum a_n$) ако и само ако за секој реален број $\varepsilon > 0$, постои природен број n_0 таков што*:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |A - A_n| < \varepsilon \quad (\text{т.е. } |A - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)| < \varepsilon).$$

Исто така, имајќи го предвид Кошиевиот критериум за конвергенција на низи (I.4.9), имаме:

1°. (*Основен Кошиев критериум*). *Редот $\sum a_n$ е конвергентен ако и само ако за секој реален број $\varepsilon > 0$, постои природен број $n_0 = n_0(\varepsilon)$, таков што*

$$n > n_0, k > 0 \Rightarrow |A_{n+k} - A_n| < \varepsilon. \ \square$$

Да разгледаме уште неколку примери.

2) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

Имаме: $A_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$. Ако се има предвид равенството $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, лесно се добива $A_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, од што следува $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$, т.е. $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Со тоа покажавме дека дадениот ред е конвергентен и има збир 1.

3) $\sum \log\frac{n+1}{n}$. Овде е $A_n = \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{n}{n+1}$, т.е. $A_n = \log(n+1)$. Бидејќи $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$, редот е дивергентен.

---

1) Во понатамошниот текст, поради технички причини, наместо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обично ќе пишуваме $\sum a_n$, освен во случаи каде што може да дојде до недоразбирање.

4) $\Sigma(-1)^n$; имаме $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{(-1)^n - 1}{2}$. Од тоа следува: $A_{2k} = 0$, $A_{2k+1} = -1$, што повлекува дивергенција на низата A_n, па значи и на редот $\Sigma(-1)^n$.

За редот $\sum a_n$ велиме дека е *ограничен*, ако низата од неговите парцијални суми е ограничена, т.е. ако постои реален позитивен број M, таков што $|A_n| < M$, за секој n. Имајќи го предвид фактот дека секоја конвергентна низа е и ограничена, добиваме дека:

2°. *Секој конвергентен ред е ограничен.* □

Меѓутоа, обратното не важи; редот изнесен во 4) е пример на ограничен ред ($|A_n| < 2$) што не е конвергентен.

Да претпоставиме дека $\sum a_n$ е конвергентен ред со збир A. Тогаш имаме: $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, а исто така $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_{n-1}$. Од ова следува

$$0 = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Со тоа го докажавме следново својство:

3°. *Ако редот $\sum a_n$ е конвергентен, тогаш неговиот општ член a_n се стреми кон нула.* □

Дека обратното тврдење не е точно се гледа од примерот 3). Имено, поради $a_n = \log\frac{n+1}{n} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, имаме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, но сепак редот $\sum a_n$ е дивергентен.

Да споменеме уште неколку својства на конвергентните редови.

4°. *Ако редовите $\sum a_n$ и $\sum b_n$ се конвергентни, тогаш се конвергентни и редовите $\sum c\cdot a_n$ (с е даден број) и $\sum(a_n \pm b_n)$, при што се точни равенствата:*

$$\sum c\cdot a_n = c\cdot\sum a_n, \quad \sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n.$$

Д о к а з. Да ставиме $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $C_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$, $S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$. Тогаш имаме: $C_n = c\cdot A_n$, $S_n = A_n + B_n$, од што следува: $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n + \lim\limits_{n\to\infty} B_n$ што и требаше да се докаже. □

5°. *Природата на еден ред [2] не се менува со додавање (или изоставање) на конечен број членови.*

---

2) т.е. неговата конвергентност односно дивергентност

Д о к а з. Од редот $\sum a_n$ да ги изоставиме членовите a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3},... a_{i_k} $(i_\nu < i_{\nu+1})$ и новодобиениот ред да го означиме со $\sum b_n$. Да ставиме $a = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}$. Јасно е дека е точно следново равенство: $A_{n+k} = B_n + a$, каде што

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \quad n + k > i_k.$$

Од тоа се добива дека низата B_n е конвергентна ако и само ако е конвергентна низата A_n. Со тоа точноста на тврдењето е докажана. □

(Треба да се има предвид дека, за разлика од низите, каде што со додавање или изоставање на конечен број членови границата не се менува, оваа постапка може битно да го промени збирот на редот.)

1. 2. Редови со позитивни членови

За $\sum a_n$ ќе велиме дека е ***ред со позитивни членови***, ако $a_n > 0$ за секој n. Овие редови најлесно се испитуваат, а некои резултати добиени за нив можат да се применат и за испитување на редови со произволни членови.

6°. *Еден ред со позитивни членови е конвергентен ако и само ако е ограничен.*

Д о к а з. Ако редот $\sum a_n$ е конвергентен, тој е и ограничен, бидејќи секој ред е и ограничен (својство 2°).

Обратно, да претпоставиме дека $\sum a_n$ е ограничен ред со позитивни членови. Од $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$ и $a_{n+1} > 0$, следува $A_{n+1} > A_n$, т.е. добиваме дека низата A_n од парцијалните суми монотоно расте. Имајќи го предвид фактот дека секоја ограничена монотона низа е конвергентна, заклучуваме дека низата A_n е конвергентна, т.е. дека дадениот ред е конвергентен, а тоа и требаше да се докаже. □

Често пати, испитувањето на конвергенцијата на даден ред се врши со споредување во однос на друг ред, чија природа е однапред позната. Ќе изнесеме неколку ***теореми за споредување на редови.***

7°. *Нека $\sum a_n$ и $\sum b_n$ се два реда со позитивни членови и нека $a_n \le b_n$ за секој n. Ако редот $\sum b_n$ е конвергентен, тогаш е конвергентен и редот $\sum a_n$. Ако $\sum a_n$ е дивергентен, тогаш и $\sum b_n$ е дивергентен.*

Д о к а з. Нека $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Од $a_n \le b_n$, добиваме $A_n \le B_n$. Ако B е збирот на конвергентниот ред $\sum b_n$, тогаш имаме $B_n < B$, од што следува $A_n < B$, т.е. дека редот $\sum a_n$ е ограничен. Според својството 6°, добиваме дека и редот $\sum a_n$ е конвергентен.

Ако $\sum a_n$ е дивергентен ред, тогаш низата A_n е неограничена, па значи таква е и B_n (поради $A_n \le B_n$), а од тоа следува дека и $\sum b_n$ е дивергентен ред. □

8°. *Нека $\sum a_n$ и $\sum b_n$ се редови со позитивни членови и нека постојат позитивни броеви α и β такви што $\alpha \le a_n/b_n \le \beta$ за секој n. Тогаш и двата реда имаат иста природа.*

Д о к а з. Нека $\sum a_n$ е конвергентен ред. Поради $\alpha b_n \le a_n$, и редот $\sum \alpha b_n$ е конвергентен, па значи и $\sum b_n = (\sum \alpha b_n)/\alpha$ е конвергентен. Ако $\sum b_n$ е конвергентен ред, тогаш и $\sum \beta b_n$ е таков, а поради $a_n \le \beta b_n$ добиваме дека и $\sum b_n$ е конвергентен. Со тоа е докажана точноста на теоремата. □

З а б е л е ш к а. Заклучоците во последните две теореми се точни и во случај кога релациите $a_n \le b_n$ или $\alpha \le a_n/b_n \le \beta$ се исполнети не за секој n, туку за секој n поголем од некој фиксен природен број n_0. Во тој случај, изоставајќи ги членовите што не ја задоволуваат релацијата $a_n \le b_n$ (или $\alpha \le a_n/b_n \le \beta$), добиваме редови $\sum a'_n$ и $\sum b'_n$ кои ја задоволуваат таа релација и притоа $\sum a_n$ и $\sum a'_n$, како и $\sum b_n$ и $\sum b'_n$, имаат иста природа.

9°. *Ако $\sum a_n$ и $\sum b_n$ се редови со позитивни членови и ако $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lambda \ne 0$, тогаш овие редови имаат иста природа.*

Д о к а з. Поради $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lambda \ne 0$, за секој позитивен број ε постои n_0, таков што $\lambda - \varepsilon < a_n/b_n < \lambda + \varepsilon$, за $n \ge n_0$. Избирајќи го ε така што да биде $\alpha = \lambda - \varepsilon > 0$ и ставајќи $\beta = \lambda + \varepsilon$, добиваме $\alpha < a_n/b_n < \beta$ за $n \ge n_0$ од што, според претходната теорема и направената забелешка, следува дека дадените редови имаат иста природа. □

10°. *Ако $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$, тогаш од конвергенцијата на $\sum b_n$ следува конвергенцијата и на $\sum a_n$, а од дивергенцијата на $\sum a_n$ следува дека и $\sum b_n$ е дивергентен.*

Д о к а з. Поради $(a_n/b_n) \to 0$, имаме $(a_n/b_n) < 1$ за n поголем од некој број n_0, т.е. $a_n < b_n$. Од тоа, според теоремата 7°, следува точноста на теоремата. □

Да разгледаме неколку примери.

5) Знаеме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ е конвергентен; бидејќи имаме $\frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2}$, следува дека е конвергентен и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. (Овде се користи теоремата 7°.)

6) Редот $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$ е дивергентен (пр. 3). Бидејќи

$$\frac{1/n}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{\ln e} = 1, \quad n \to \infty$$

добиваме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е дивергентен (според теоремата 9°).

Да напоменеме дека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

е познат под името ***хармониски ред.***

7) Редот $\sum \sin\frac{\pi}{n}$ е дивергентен, бидејќи $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{1/n} = \pi$.

1. 3. Неколку критериуми за конвергентност на редови со позитивни членови

Изнесените четири теореми 7°- 10° овозможуваат испитување на даден ред преку неговото споредување со ред чија природа е позната. Наредните три теореми покажуваат како може самиот ред да се искористи за утврдување дали тој ред е конвергентен или е дивергентен.

11° (***Критериум на Даламбер***).[3] *Нека $\sum a_n$ е ред со позитивни членови и нека $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} / a_n) = \lambda$. Ако $\lambda < 1$, редот е конвергентен, а за $\lambda > 1$ дивергентен. За $\lambda = 1$ критериумот на Даламбер не дава одговор.*

Д о к а з. Од $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} / a_n) = \lambda$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$, постои природен број n_0, таков што $n \ge n_0 \Rightarrow \lambda - \varepsilon < a_{n+1} / a_n < \lambda + \varepsilon$. Ако $\lambda < 1$ ќе го избереме ε така да биде $\lambda + \varepsilon = \beta < 1$. Имаме: $a_{n_0+1} < \beta a_{n_0}$, $a_{n_0+2} < < \beta a_{n_0+1} < \beta^2 a_{n_0}$ итн., $a_{n_0+m} < \beta^m a_{n_0}$. Поради $0 < \beta < 1$, геометрискиот ред $\sum \beta^m a_{n_0}$ е конвергентен, а од тоа, според теоремата 7°, следува дека е конвергентен и редот $a_{n_0+1} + \cdots + a_{n+m} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0+m}$. Ако на последниов ред му ги додадеме $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$, го добиваме првобитниот ред $\sum a_n$, па значи и тој е конвергентен.

Да претпоставиме сега дека $\lambda > 1$ и да го избереме позитивниот реален број ε така да биде $\alpha = \lambda - \varepsilon > 1$. Тогаш ќе имаме: $a_{n_0+m} > a_{n_0} \alpha^m$, од што следува дека редот $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0+m}$ е дивергентен, бидејќи неговите членови се поголеми од дивергентниот геометриски ред $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0+m}\ \alpha^m$.

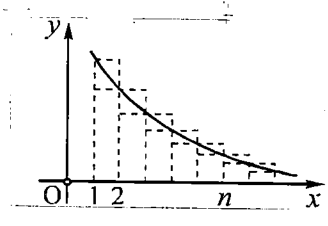
3) Жан Даламбер (*Jean le Rond D'Allembert*, 1717-1783), француски математичар

Како што знаеме, редот $\sum 1/n(n+1)$ е конвергентен, а $\sum 1/n$ е дивергентен. Во првиот случај имаме: $a_{n+1}/a_n = n/(n+2)$, а во вториот: $a_{n+1}/a_n = n/(n+1)$. Значи, и во двата случаја ќе имаме $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = 1$, и покрај тоа што едниот од тие редови е конвергентен, а другиот дивергентен. Со тоа теоремата е докажана. □

12° (***Кошиев критериум***). *Нека* $\sum a_n$ *е ред со позитивни членови и нека* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lambda$. *Важи истиот заклучок како и во теоремата* 11°, *т.е. за* $\lambda < 1$ *редот е конвергентен, за* $\lambda > 1$ *дивергентен, а за* $\lambda = 1$ *Кошиевиот критериум не дава одговор.*

Д о к а з. И доказот во суштина е ист како доказот на 11°. За секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $\lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \lambda + \varepsilon$ за $n \geq n_0$. Ако $\lambda < 1$, тогаш го избираме ε така што $\lambda + \varepsilon = \beta < 1$. Тогаш ќе имаме $a_n < \beta^n$, од каде што следува конвергенцијата на редот $\sum a_n$, бидејќи таков е и $\sum \beta^n$. За $\lambda > 1$, избирајќи го ε така што $\lambda - \varepsilon = \alpha > 1$, ќе добиеме $a_n > \alpha^n$, од што следува дека редот $\sum a_n$ е дивергентен. Имајќи го предвид тоа што $\sqrt[n]{n} \to 1$, при дивергентниот ред $\sum 1/n$ добиваме дека $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, но истото важи и за конвергентниот ред $\sum 1/n^2$. Со тоа доказот на теоремата 12° е комплетиран. □

13° (***Интегрален критериум***).[4] *Нека* $f(x)$ *е непрекината, позитивна и опаднувачка функција за* $x \geq 1$, *и нека* $a_n = f(n)$. *Тогаш редот* $\sum a_n$ *е конвергентен ако и само ако е конвергентен интегралот* $\int_1^\infty f(x)dx$.



Црт. 1

Д о к а з. За да биде доказот понагледен, функцијата $f(x)$ ќе ја претставиме графички (црт. 1). Јасно е дека

$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) > \int_1^\infty f(x)dx$

т.е. $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \int_1^\infty f(x)dx, \tag{4}$$

додека пак

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^\infty f(x)dx. \tag{5}$$

Ако редот $\sum a_n$ е конвергентен, според неравенството (4) добиваме дека интегралот $\int_1^n f(x)dx$ е ограничен, од што следува и неговата конвергентност. Ако интегралот $\int_1^\infty f(x)dx$ е конвергентен, тогаш имаме:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx + a_1 < \int_1^\infty f(x)dx + a_1,$$

од што следува дека редот $\sum a_n$ е ограничен, па затоа и конвергентен. □

4) се нарекува и: ***интегрален критериум на Маклорен-Коши.***

Да разгледаме еден пример.

8) Редот $\sum 1/n^p$ е познат под името ***хиперхармониски*** или ***риманов ред***. Јасно е дека функцијата $f(x)=1/x^p$ е непрекината, позитивна и монотоно опаднувачка, во $(0,+\infty)$ ако $p>0$. Притоа имаме:

$$\int_1^n \frac{1}{x^p}dx = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Bigg|_1^n = \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right) \quad (\text{за } p \neq 1).$$

Ако $p>1$, тогаш $n^{p-1}\to\infty$, т.е. $\int_1^\infty dx/x^p = 1/(p-1)$, од што следува дека римановиот ред е конвергентен за $p>1$. За $p<1$ имаме пак $\int_1^\infty dx/x^p=\infty$, па значи и $\sum a_n=+\infty$, т.е. овој ред е дивергентен. Преостанува уште случајот $p=1$. Тогаш го добиваме хармонискиот ред, а за него веќе знаеме дека е дивергентен.

Ако $\sum a_n$ е даден ред, тогаш за нас е важно да утврдиме дали тој ред е конвергентен и, во потврден случај, да го најдеме неговиот збир. Обично, решавањето на првиот дел од задачата се изведува полесно отколку вториот, т.е. често пати можеме да утврдиме дека даден ред $\sum a_n$ е конвергентен, а да не сме во состојба да го утврдиме неговиот збир. Во тој случај, збирот A на редот се заменува со n-тата парцијална сума A_n. Притоа се прави грешка

$$r_n = A - A_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}+\cdots$$

(r_n се вика ***остаток на редот***). Во овој случај, задачата се сведува на тоа, за даден $\varepsilon>0$, да се определи n_0 така што $|r_n|<\varepsilon$, при $n\ge n_0$. Тогаш може да се стави $A\approx A_n$, за секој $n\ge n_0$. Според тоа во теоријата на редовите можеме да сметаме дека е *најважна задачата да се установи неговата природа, т.е. дали даден ред е конвергентен или диверегентен.*

1. 4. Вежби

1. Да се испита конвергенцијата на следниве редови:

а) $\sum 1/(2n-1)(2n+1)$; б) $\sum 1/n(n+1)(n+2)$;

в) $\sum (3^n+2^n)/6^n$; г) $\sum \sin nx$ (за $x\in\mathbb{R}$).

Р е ш е н и е. а) Бидејќи $A_n=(1/2)-1/2(2n+1)$, имаме $A=1/2$, па значи редот е конвергентен.

б) Имаме: $A_n=(1/4)-(1/2(n+1))+1/2(n+2)$, па $A=1/4$.

в) Зададениот ред е конвергентен како збир на два конвергентни геометриски реда; $A=3/2$.

г) Редот е конвергентен само за $x=k\pi$, каде што k е цел број; тогаш $A=$.

2. Со помош на некоја од теоремите за споредување да се испита природата на редовите:

а) $\sum 1/(n^3+1)$; б) $\sum 1/\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$;

в) $\sum 1/n\sqrt{n+1}$; г) $\sum 1/(2n-1)2^{n-1}$;

д) $\sum 1/\ln(n+1)$; ѓ) $\sum \sqrt{n/(n^4+1)}$.

Р е ш е н и е. а) Редот е конвергентен бидејќи $1/(n^3+1) < 1/n^3$.

б) Дивергентен, бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1\big/\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = 2$.

в) Конвергентен, зашто $\dfrac{1/n^{3/2}}{1/n\sqrt{n+1}} \to 1$.

г) Конвергентен, бидејќи $1/(2n-1)2^{2n-1} \le 1/2^{2n-1}$.

д) Поради $1/\ln(n+1) > 1/(n+1)$, редот е дивергентен.

ѓ) Конвергентен, зашто $\dfrac{1/n^{3/2}}{\sqrt{n/(n^4+1)}} \to 1$.

3. Со помош на Даламберовиот, Кошиевиот или интегралниот критериум да се испита природата на редовите:

а) $\sum 1/n!$; б) $\sum 2^n n!/n^n$; в) $\sum (n/(2n+1))^n$.

г) $\sum 1\Big/\left[(n+1)\ln^2(n+1)\right]$; д) $\sum\left[(1+n)/(1+n^2)\right]^2$;

ѓ) $\sum 1/[n\cdot\ln n\cdot\ln(\ln n)]$.

Р е ш е н и е. а) Конвергентен; Даламберов критериум.

б) Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = (2/e) < 1$, редот е конвергентен.

в) Конвергентен; со Кошиевиот критериум.

г) Го применуваме интегралниот критериум; имаме:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{+\infty}\frac{d[\ln(x+1)]}{\ln^2(x+1)} = -\frac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

Според тоа редот е конвергентен.

д) Конвергентен; со интегралниот критериум.

ѓ) Дивергентен; со интегралниот критериум.

4. Да се покаже дека: ако е исполнето неравенството

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \tag{6}$$

почнувајќи од некое место (на пример од $n \ge n_0$), тогаш од конвергентноста на редот $\sum b_n$ следува конвергентност на редот $\sum a_n$, а од дивергентноста на $\sum a_n$ следува дивергентност и на $\sum b_n$. Притоа, $\sum a_n$ и $\sum b_n$ се редови со позитивни членови.

Р е ш е н и е. Можеме да сметаме, без да се намали општоста, дека (6) е исполнето за сите $n = 1, 2, 3, \ldots$ Во тој случај имаме:

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \qquad \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \qquad \ldots\ , \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Откако ќе ги помножиме меѓусебно овие неравенства, ќе добиеме:

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}, \text{ т.е. } a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Нека редот $\sum b_n$ конвергира; тогаш и редот $\sum \frac{a_1}{b_1} b_n$ конвергира, па според 7°, конвергира и редот $\sum a_n$. Слично за второто тврдење.

5. Да се докаже дека ако при сите доволно големи n е исполнето неравенството

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\geq r, \qquad (7)$$

каде што $r>1$, тогаш редот $\sum a_n$ конвергира; ако пак, почнувајќи од некое место,

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leq 1, \qquad (8)$$

тогаш редот $\sum a_n$ дивергира (***Рабеов*** [5] ***критериум***).

Р е ш е н и е. Нека за сите доволно големи n е исполнето неравенството (7), т.е. $(a_{n+1}/a_n)\leq 1-r/n$ и нека p е кој било број меѓу 1 и r: $1<p<r$. Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1-1/(n+1)]^p-1}{-1/(n+1)}=p$, тогаш за доволно големи n ќе биде $\dfrac{[1-1/(n+1)]^p-1}{-1/(n+1)}<r$, т.е. $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^p>1-\dfrac{r}{n+1}>1-\dfrac{r}{n}\geq\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, па значи $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{(n+1-1)^p}{(n+1)^p}=\dfrac{1/(n+1)^p}{1/n^p}$.

На десната страна имаме количник на два последователни члена од редот $\sum 1/n^p$, разгледан во примерот 8) при $p>1$. Применувајќи го резултатот од вежбата 4, заклучуваме дека редот $\sum a_n$ е конвергентен.

Ако пак, почнувајќи од некое место, е исполнето (8), тогаш

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{n-1}{n}=\frac{1/n}{1/(n-1)}\ ;$$

според вежбата 4, а поради дивергентноста на редот $\sum 1/(n-1)$ заклучуваме дека редот $\sum a_n$ е дивергентен.

Почесто се користи следнава последица:

Ако постои конечна или бесконечна граница $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-(a_{n+1}/a_n))=\lambda$, тогаш редот $\sum a_n$ при $\lambda>1$ конвергира, при $\lambda<1$ дивергира, а при $\lambda=1$ прашањето за природата на редот $\sum a_n$ останува нерешено.

6. Да се испита природата на редовите

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!/(c+1)(c+2)\cdots(c+n)$, $c>0$;

б) $F(\alpha,\beta,\gamma)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$;

в) $\sum[3+(-1)^n]/2^{n+1}$;

г) $\sum a_n$, каде што $a_{2k+1}=\left(\dfrac{k+1}{2k+1}\right)^{2k+1}$, $a_{2k}=\left(\dfrac{k}{2k+1}\right)^{2k}$, к=0, 1, …

Р е ш е н и е. а) Имаме $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{c+n+1}=1$, па Даламберовиот критериум не дава одговор. Според Рабеовиот критериум: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)=$

5) Јозеф Рабе (*Josef Ludwig Raabe*, 1801-1859), германски математичар

$=c\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1+c}=c$; за $c>1$ редот конвергира, за $c<1$ дивергира, а за $c=1$ се добива хармонискиот ред.

б) И овде Даламберовиот критериум не дава одговор зашто $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}=1$. Но, $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\gamma-\alpha-\beta+1$, па според Рабеовиот критериум, при $\gamma-\alpha-\beta>0$ редот конвергира, при $\gamma-\alpha-\beta<0$ дивергира, а при $\gamma-\alpha-\beta=0$, прашањето останува отворено.

Да забележиме дека овој ред е познат под името ***хипергеометриски*** или ***гаусов*** ред.

в) Имаме $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}1/4 & \text{при } n=2k\\ 1 & \text{при } n=2k+1\end{cases}$ $(k=0,1,2,\ldots)$, па значи Даламберовиот критериум не дава одговор.

Но, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\left(3+(-1)^n\right)/2}=\dfrac{1}{2}$, па според Кошиевиот критериум, заклучуваме дека редот е конвергентен.

г) Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1/2$, редот е конвергентен. При овој пример одговор не дава не само Даламберовиот туку и Рабеовиот критериум.

VIII. 2. Редови чии членови имаат произволни знаци

2. 1. Наизменични редови

Во претходниот дел разгледавме редови чии членови се стриктно позитивни, а истите резултати важат и за случај кога некои членови на редот се еднакви со нула. Потоа, ако $\sum a_n$ е даден ред таков што $a_n<0$, наместо него можеме да го разгледаме редот $\sum(-a_n)$ кој е со позитивни членови. Еден од најпростите видови редови чии членови не се позитивни (нити пак сите се негативни) се таканаречените наизменични или алтернативни редови. Имено,

$$a_1+(-a_2)+a_3+(-a_4)+\cdots+(-1)^{n+1}a_n+\cdots \tag{1}$$

или покусо $\sum(-1)^{n+1}a_n$, каде што $a_n>0$, се вика ***наизменичен*** или ***алтернативен ред***. Ќе докажеме една теорема во врска со конвергенцијата на овие редови.

1° (***Лајбницов критериум***). *Ако* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ *и ако низата* (a_n) *монотоно опаѓа, тогаш редот* (1) *е конвергентен. Ако ставиме* $A\approx A_n$, *правиме грешка, по апсолутна вредност, не поголема од* a_{n+1}.

Д о к а з. Да ја разгледаме прво парцијалната сума на парен број членови:

$$A_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2m-1} - a_{2m} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \geq A_{2m-2};$$

но исто така имаме:

$$A_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1.$$

Според тоа, низата $A_2, A_4, \dots, A_{2m}, \dots$ е монотоно растечка и ограничена, па значи е и конвергентна. Нека $\lim_{m\to\infty} A_{2m} = A$. Тогаш, поради $A_{2m+1} = A_{2m} + a_{2m+1}$ и $\lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$, добиваме $\lim_{m\to\infty} A_{2m+1} = A$. Со тоа докажавме дека редот (1) е конвергентен. Од $0 < A_{2m} < a_1$, следува и $0 \leq A \leq a_1$. Разликата

$$A - A_n = (-1)^n \{a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{k+1} a_{n+k} + \cdots\}$$

е ред од ист облик, од што следува дека $|A - A_n| \leq a_{n+1}$. Со тоа теоремата е докажана. □

Да разгледаме два примера.

1) Редот $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ е конвергентен, бидејќи $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Ако ставиме $A \approx \sum_{n=1}^{100} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, правиме грешка помала од 1/101.

2) Редот $\sum (-1)^{n+1} n/10^n$ е исто така конвергентен. Ако ставиме $A \approx 1/10 - 2/10^2 + 3/10^3$, правиме грешка помала од $4/10^4$.

2. 2. Апсолутно конвергентни редови

Ако е зададен редот

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2}$$

тогаш од апсолутните вредности на неговите членови го добиваме следниов ред со позитивни (или поточно: ненегативни) членови:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{3}$$

Редот (3) се испитува полесно одошто (2) па затоа е корисно да се најде врска меѓу конвергенцијата на тие редови. Таа врска е дадена со следнава теорема:

2°. *Ако редот (3) е конвергентен, тогаш е конвергентен и редот (2).*

(Во овој случај велиме дека редот (2) е ***апсолутно конвергентен.***)

Д о к а з. Нека редот од апсолутните вредности, $\sum |a_n|$, е конвергентен; да ставиме: $b_n = a_n + |a_n|$. Поради $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, $\sum b_n$ е ред со позитивни членови (некои од нив можат да бидат и нули); тој ред е конвергентен, бидејќи таков е и редот $2\sum |a_n| = \sum 2|a_n|$. Потоа, поради

$a_n = b_n - |a_n|$, добиваме дека и редот $\sum a_n$ е конвергентен, бидејќи е разлика на два конвергентни реда. Теоремата е докажана. □

Да напомниме дека *постојат редови што се конвергентни, но не апсолутно конвергентни.* На пример, редот во примерот 1) е конвергентен, но не и апсолутно конвергентен, бидејќи редот од неговите апсолутни вредности е хармонискиот ред $\sum(1/n)$, а тој, како што знаеме, е дивергентен. Честопати, редовите што се конвергентни но не апсолутно, се викаат ***условно конвергентни*** (или ***семиконвергентни***), но тој термин ние нема да го употребуваме.

Критериумите на Даламбер, Коши и интегралниот, можат да се применат и на редовите чии членови имаат произволни знаци. Имено, *ако постои границата*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$$

и ако $\lambda < 1$, *тогаш редот* $\sum a_n$ *е апсолутно конвергентен.* За $\lambda > 1$ дадениот ред е дивергентен, бидејќи имаме $|a_{n+1}| > |a_n|$ за доволно голем n, од што ќе следува дека општиот член a_n не се стреми кон нула. Истиот заклучок важи и за случајот кога постои границата $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

2. 3. Неколку својства на апсолутно конвергентните редови

Поимот за бесконечен конвергентен ред го добивме со обопштување на соодветниот поим за конечен збир. Природно се наложува прашањето: дали сите својства на конечните збирови ги имаат и конвергентните редови? На еден конкретен пример ќе се увериме дека на ова прашање (во општ случај) му следува негативен одговор.

3) Како што знаеме, редот $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ е конвергентен; неговиот збир да го означиме со s. Членовите на тој ред да ги разместиме на следниов начин:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots$$

Ќе докажеме дека новодобиениот ред е конвергентен со збир $s/2$. Да го означиме со σ_n збирот на првите n членови од добиениот ред. Имаме:

$$\begin{aligned}\sigma_{3n} &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

Од тоа следува дека $\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n} = s/2$.

Поради
$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1}, \qquad \sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2},$$
добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{3n} = s/2$.

Од овој пример се гледа дека збирот на еден конвергентен ред може да се промени со разместување на неговите членови. Може да се докаже дека:

Ако $\sum a_n$ е даден конвергентен, но не апсолутно конвергентен ред, а s даден реален број, тогаш со разместување на членовите од дадениот ред може да се добие ред со збир s; исто така може со разместување на членовите од дадениот ред да се добие дивергентен ред.

(Овој резултат, познат под името ***теорема на Риман***, нема да го докажеме. [1])

Ситуацијата е поинаква при апсолутно конвергентните редови, како што се гледа и од наредната теорема.

3°. *Нека $\sum a_n$ е апсолутно конвергентен ред и нека $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$ е произволен распоред на природните броеви (т.е. $k \to i_k$ е биекција од множеството $\mathbb{N}$ на природните броеви во $\mathbb{N}$). Ако ставиме $b_k = a_{i_k}$ добиваме апсолутно конвергентен ред $\sum b_k$ со ист збир како и првобитниот ред.*

Д о к а з. Да претпоставиме прво дека $a_n \geq 0$; нека A е збирот на редот $\sum a_n$. Тогаш $b_1 + b_2 + \cdots + b_k = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} \leq A$, па значи редот $\sum b_k$ е ограничен од што следува дека е конвергентен и дека $B \leq A$, каде што $B = \sum b_k$. Но, имајќи предвид дека и редот $\sum a_n$ можеме да го добиеме од $\sum b_k$ (т.е. $a_1 = b_{j_1}, a_2 = b_{j_2}, \ldots, a_n = b_{j_n}, \ldots$), добиваме $A \leq B$, па значи $A = B$. Со тоа теоремата ја докажавме за редови со позитивни членови.

За да го комплетираме доказот на теоремата, ќе го искористиме следново тврдење:

4°. *Редот $\sum a_n$ е апсолутно конвергентен ако и само ако постојат конвергентни редови $\sum a_n'$ и $\sum a_n''$ со ненегативни членови такви што $a_n = a_n' - a_n''$.*

Д о к а з. Нека редовите $\sum a_n'$ и $\sum a_n''$ се конвергентни и $a_n = a_n' - a_n''$, $a_n' \geq 0$, $a_n'' \geq 0$. Тогаш $|a_n| \leq |a_n'| + |a_n''| = a_n' + a_n''$, од што следува дека е конвергентен и редот $\sum |a_n|$, бидејќи е таков $\sum (a_n' + a_n'') = \sum a_n' + \sum a_n''$.

Да го претпоставиме сега обратното, дека $\sum a_n$ е апсолутно конвергентен ред, и да ставиме $a_n' = a_n + |a_n|$ и $a_n'' = |a_n|$. Тогаш добиваме $a_n = a_n' - a_n''$ и уште повеќе, $\sum a_n'$ и $\sum a_n''$ се конвергентни и имаат ненегативни членови. Со тоа ја докажавме точноста на тврдењето 4°.

---

1) Да се види Фихтенгольц II, Гл. XI §4, стр. 317

Сега лесно ќе го комплетираме и доказот на теоремата 3°. Нека $\sum a_n$ е апсолутно конвергентен ред и нека $\sum b_k$ е редот добиен како што е споменато во формулацијата на 3°. Според 4°, постојат конвергентни редови $\sum a_n'$ и $\sum a_n''$ со позитивни членови, такви што $a_n = a_n' - a_n''$. Имајќи го предвид ова и фактот што $\sum b_k$ се добива со размена на местата на членовите во $\sum a_n$, добиваме дека постојат редови со позитивни членови, $\sum b_k'$, $\sum b_k''$, такви што $b_k = b_k' - b_k''$ и притоа $\sum a_n' = \sum b_k'$, $\sum a_n'' = \sum b_k''$. Од тоа следува дека $\sum b_k$ е апсолутно конвергентен ред, а и уште повеќе дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_k' - \sum_{n=1}^{\infty} b_k'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' - \sum_{n=1}^{\infty} a_n'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

со што го комплетиравме доказот и на теоремата 3°. □

Да докажеме уште една теорема.

5°. *Нека е даден редот* $\sum a_n$; *да ставиме* $b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}$, $b_2 = a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}, \ldots, b_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n}, \ldots$, *каде што* $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ *е монотоно растечка низа од природни броеви. Ако редот* $\sum a_n$ *е конвергентен тогаш е конвергентен и редот* $\sum b_n$ *и притоа имаме* $\sum a_n = \sum b_n$. *Ако* $\sum a_n$ *е апсолутно конвергентен, тогаш таков е и* $\sum b_n$.

Доказ. Од дефиницијата на b_n следува дека $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_n}$, т.е. $B_n = A_{k_n}$. По претпоставка имаме $\lim_{m\to\infty} A_m = A$, па значи и $\lim_{n\to\infty} A_{k_n} = A$, т.е. $\lim_{n\to\infty} B_n = A$, што и сакавме да докажеме. Поради $|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{k_n}|$, од апсолутната конвергентност на $\sum a_n$ следува апсолутна конвергентност и на $\sum b_n$. □

Да споменеме дека од конвергенцијата на редот $\sum b_n$ не мора да следува конвергенцијата и на $\sum a_n$. Тоа се гледа од следниов пример:

4) Редот $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$, како што знаеме, е дивергентен, но редот $(1-1) + (1-1) + \cdots = 0$ е конвергентен.

2. 4. Производ на апсолутно конвергентни редови

Овде ќе докажеме уште две тврдења, коишто укажуваат уште еднаш на блискоста што постои меѓу конечните збирови и бесконечните апсолутно конвергентни редови.

6°. *Нека* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *се апсолутно конвергентни редови со збирови* A *и* B *соодветно; да го формираме редот*

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + \cdots \tag{4}$$

Добиениот ред е исто така апсолутно конвергентен со збир $C = A \cdot B$.

Како се формира редот (4) може да се види нагледно од шемата:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\
a_1b_2 & \rightarrow a_2b_2 \ \uparrow & a_3b_2 & \dots \\
\hline
a_1b_3 & \rightarrow a_2b_3 \rightarrow & a_3b_3 \ \uparrow & \dots \\
\hline
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Д о к а з. Да воочиме прво дека, ако A_n и B_n се n-тите парцијални суми на редовите $\sum a_n$ и $\sum b_n$, тогаш имаме $C_{n^2}=A_nB_n$. Со $\tilde{A}_n$, $\tilde{B}_n$ ќе ги означиме парцијалните суми на редовите $\sum|a_n|$, $\sum|b_n|$, а со $\tilde{C}_n$ - парцијалните суми на редот од апсолутните вредности на (4), т.е. на редот

$$|a_1b_1|+|a_1b_2|+|a_2b_2|+|a_2b_1|+|a_1b_3|+|a_2b_3|+|a_3b_3|+|a_3b_2|+\cdots \qquad (5)$$

За секој n имаме: $\tilde{C}_n \le \tilde{C}_{n^2}=\tilde{A}_n\tilde{B}_n \le \tilde{A}\tilde{B}$. Значи, низата од парцијални суми на редот (5) е ограничена и монотоно растечка, од што следува дека тој ред е конвергентен. Со тоа докажавме дека редот (4) е апсолутно конвергентен. Потоа, од $C_{n^2}=A_nB_n$ следува $C=\lim C_{n^2}=AB$, со што го комплетиравме доказот на тврдењето. □

Ако $\sum a_n$ и $\sum b_n$ се дадени редови, тогаш редот $\sum c_n$, определен со

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

се вика ***производ*** на тие редови. Како последица од теоремите 5° и 6° ја добиваме следнава теорема:

7°. *Ако $\sum a_n$ и $\sum b_n$ се апсолутно конвергентни редови, тогаш и нивниот производ е апсолутно конвергентен ред, и притоа имаме*

$$\sum c_n=(\sum a_n)(\sum b_n).$$

Д о к а з. Според тврдењето 6°, од апсолутната конвергентност на $\sum a_n$ и $\sum b_n$ следува апсолутна конвергентност и на редот (4):

$$a_1b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1+\cdots,$$

при што неговиот збир е $\sum a_n\cdot\sum b_n$. Со разместување на членовите во (4), можеме да го добиеме редот:

$$a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+\cdots+a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1+\cdots,$$

кој е исто така апсолутно конвергентен и има збир $\sum a_n\cdot\sum b_n$. Ставајќи $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$, добиваме ред $\sum c_n$, кој, според теоремата 5°, исто така е апсолутно конвергентен и притоа имаме $\sum c_n=(\sum a_n)(\sum b_n)$. Со тоа точноста на теоремата е докажана. □

Претпоставката редовите $\sum a_n$ и $\sum b_n$ да се апсолутно конвергентни е битна. Тоа се гледа од следниов пример.

5) Ако ставиме $a_n = b_n = (-1)^{n+1} \cdot 1/\sqrt{n}$, добиваме конвергентни редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$, но нивниот производ $\sum c_n$ не е конвергентен ред. Навистина, од

$$c_n = a_1 b_n + \cdots + a_n b_1 = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right),$$

следува

$$|c_n| \ge \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \frac{n}{n} = 1,$$

па значи c_n не се стреми кон нула.

2. 5. Вежби

1. Да се испита дали се апсолутно конвергентни редовите:

а) $\sum (-1)^{n+1} (\cos nx)/2^n$; б) $\sum r^n \sin nx$;

в) $\sum (-1)^{n+1} x^n/(x+2)^n$; г) $\sum \left(\sin\frac{n\pi}{4}\right) / \left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

Р е ш е н и е. а) Поради $\left|(-1)^{n+1}(\cos nx)/2^n\right| \le 1/2^n$, редот е апсолутно конвергентен.

б) Ако $x = k\pi$, k - цел број, редот е апсолутно конвергентен за произволен r. Ако $x \ne k\pi$, редот е апсолутно конвергентен при $|r| < 1$, а дивергентен при $|r| \ge 1$.

в) Апсолутно конвергентен за $|x/(x+2)| > 1$, т.е. $x > -1$. За другите вредности на x е дивергентен.

г) Поради $\left|\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right) / \left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)\right| < 1/(n^p - 1)$, за $p > 1$, редот е апсолутно конвергентен.

2. Да се покаже дека производот на конвергентните редови $\sum[(-1)^{n+1}/\sqrt{n}]$, $\sum[(-1)^{n+1}/\sqrt[3]{n}]$ е дивергентен ред.

Р е ш е н и е. Дека дадените редови се конвергентни следува од критериумот на Лајбниц. Ако $\sum c_n$ е производ на тие редови имаме:

$$c_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}\cdot\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right).$$

Од тоа следува:

$$|c_n| \ge \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}} = n^{1/6} > 1,$$

па значи редот $\sum c_n$ е дивергентен.

3. Ако $\sum a_n$ е апсолутно конвергентен ред, да се покаже дека $|\sum a_n| \le \sum |a_n|$; ако $\sum |b_n|$ е конвергентен ред и ако $|a_n| \le |b_n|$, тогаш $\sum |a_n| \le \sum |b_n|$.

Р е ш е н и е. Првото неравенство следува од $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+$ $+\cdots+|a_n|$, а второто од $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\le|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|$.

4. Да се покаже дека условот за монотоно опаѓање на броевите a_n при Лајбницовиот критериум е битен.

Р е ш е н и е. Редот $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3}+\cdots$ го задоволува условот $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, но тој дивергира. Условот за монотоност се нарушува секогаш при премин од членот $-1/3^n$ кон членот $1/n$.

5. Ако редот $\sum a_n$ е конвергентен и ако $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n/a_n)=1$, дали можеме да тврдиме дека и редот $\sum b_n$ е конвергентен?

Р е ш е н и е: Не. На пример, ако $\sum a_n=\sum[(-1)^n/\sqrt{n}]$ и $\sum b_n=$ $=\sum\left[((-1)^n/\sqrt{n})+(1/n)\right]$, лесно се проверува дека $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n/a_n)=1$. Но, редот $\sum b_n$ е дивергентен иако $\sum a_n$ е конвергентен.

Значи, теоремата 9° од 1.2 за споредување на редови со позитивни членови не може да се применува при редовите чии членови имаат произволни знаци.

6. Да се покаже дека ако редовите $\sum a_n^2$ и $\sum b_n^2$ конвергираат, тогаш редот $\sum a_n b_n$ апсолутно конвергира.

У п а т с т в о. Да се искористи неравенството $(|a_n|-|b_n|)^2\ge 0$.

VIII. 3. Функционални низи и редови

Членовите на редовите што ги изучувавме во претходните два параграфа беа реални броеви, поради што нив ги викаме и ***бројни редови.*** (Во таа смисла, низите со кои се сретнавме во I.4 би можеле уште да ги викаме ***бројни низи.***) Овде ќе извршиме кратка анализа на функционалните низи и редови.

3. 1. Функционални низи. Рамномерна конвергенција

Нека е дадена низата функции од една реална променлива,

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,f_n(x),\ldots \tag{1}$$

(За (1) велиме дека е ***функционална низа.***) Ако секоја од тие функции е дефинирана за реалниот број $x=x_0$, тогаш можеме да ја формираме следнава низа од реални броеви:

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ldots,f_n(x_0),\ldots; \tag{1'}$$

таа ќе биде или конвергентна или дивергентна. За низата (1) велиме дека е конвергентна на множеството D (кое обично ќе го сметаме за интервал), ако низата (1') е конвергентна за секој $x_0\in D$. Во тој случај, за секој $x_0\in D$ ќе добиеме определена граница $y_0=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)$, па затоа границата можеме да ја сметаме за функција $y=f(x)$ дефинирана во D. За оваа функција велиме дека е граница на низата (1). Значи:

Функцијата $f(x)$ е ***граница на функционалната низа*** (1) во множеството D ако се исполнети следниве услови:

(i) $f(x)$ и сите членови на низата (1) се дефинирани за секој $x \in D$;

(ii) за секој позитивен реален број ε и секој $x \in D$ постои природен број $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, таков што: $n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Во тој случај пишуваме

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Да разгледаме неколку примери.

1) $f_n(x) = x^n$. Ако ставиме $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, добиваме дека $f(x) = 0$ за $x \in (-1,1)$ и $f(1) = 1$; $f(x)$ не е дефинирана за ниедна друга вредност на x.

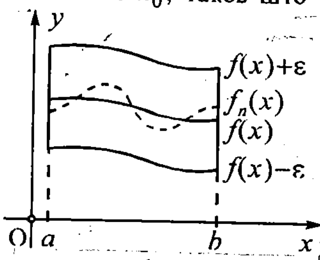
2) $f_n(x) = nx/(nx+1)$; функциите ги разгледуваме во сегментот $[0, 1]$, каде што се непрекинати. Имаме: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ за $x \neq 0$, а $f(0) = 0$; значи, границата е прекината функција во точката $x = 0$.

3) Низата $f_n(x) = nx^2/(1+nx)$ е конвергентна, со граница $f(x) = x$, која е непрекината функција, за секој $x \neq -1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Од изнесените примери се гледа дека границата на една низа од непрекинати функции може, но не мора да биде непрекината функција. Да ги разгледаме уште еднаш изнесените примери. Во 1), за секој $\varepsilon > 0$, ако $n > \log\varepsilon / \log|x|$ (за $x \in (0,1)$), имаме $|f_n(x)| = f_n(x) < \varepsilon$. Во 2) имаме $|1 - f_n(x)| = 1/(nx+1)$, па значи $|1 - f_n(x)| < \varepsilon$ кога $n > (1-\varepsilon)/\varepsilon x$ при $x \neq 0$. Во третиот пример: $x - (nx^2/(1+nx)) = x/(1+nx) < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon + nx\varepsilon$, $x - \varepsilon < nx\varepsilon \Leftrightarrow n > (x-\varepsilon)/x\varepsilon$. Можеме да забележиме дека во првите два примера n_0 стриктно зависи од x, (доколку x е поблизу до нулата, дотолку n_0 мора да се избере поголемо), т.е. ако $\varepsilon > 0$ е даден број, тогаш $n_0(\varepsilon)$ не може да се избере така да биде $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ за секој x од дадениот интервал. Во третиот случај, ако се стави $n > 1/\varepsilon$, се добива $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ за секој $x \in [0,1]$.

За низата $f_n(x)$ велиме дека е ***рамномерно*** (или ***униформно***) ***конвергентна*** во сегментот $[a,b]$ кон функцијата $f(x)$, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0, таков што

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ за секој } x \in [a,b].$$



Црт. 1

Геометриски ова означува дека за $n \geq n_0$, целиот график на функцијата $f_n(x)$ се наоѓа меѓу $f(x) - \varepsilon$ и $f(x) + \varepsilon$ (црт.1).

Низата од примерот 3) е рамномерно конвергентна, а низите од 1) и 2) се нерамномерно конвергентни.

Ќе докажеме две теореми од кои се гледа дека рамномерно конвергентните низи имаат многу добри својства.

1°. *Ако сите функции $f_n(x)$ од низата (1) се непрекинати во сегментот $[a,b]$ и ако таа низа рамномерно конвергира кон $f(x)$ на тој сегмент, тогаш и $f(x)$ е непрекината функција на тој сегмент. Притоа*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx$$

Д о к а з. Од рамномерната конвергенција следува дека за секој $\varepsilon>0$ постои n, таков што $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/3$, за секој x од $[a,b]$. Нека x_0 е некоја вредност на x од сегментот $[a,b]$. Поради непрекинатоста на $f_n(x)$, постои $\delta>0$, таков што

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon/3.$$

Тогаш имаме:

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)| \le$$
$$\le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Од тоа следува дека функцијата $f(x)$ е непрекината.

Преостанува да го докажеме вториот дел од теоремата. Прво, воочуваме дека $f_n(x)-f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$. Од тоа, имајќи ја предвид и теоремата за средна вредност при определените интеграли (Т.2 од III.5.3), добиваме

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| = |f_n(c)-f(c)|\cdot|b-a|,$$

за некој $c\in[a,b]$. Ако ε е даден позитивен реален број, поради рамномерната конвергенција на $(f_n(x))$, постои природен број n_0, таков што $|f_n(c)-f(c)|<\varepsilon/|b-a|$ за $n\ge n_0$. Од тоа следува дека

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon \text{ за } n\ge n_0, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

што и сакавме да докажеме. □

2°. *Нека низата (1) е конвергентна и сите нејзини членови се диференцијабилни функции на сегментот $[a,b]$. Ако сите членови од низата $f_1'(x), f_2'(x),\dots,f_n'(x),\dots$ се непрекинати функции на $[a,b]$ и ако таа низа е рамномерно конвергентна на $[a,b]$, тогаш лимесот $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ е диференцијабилна функција на $[a,b]$, при што важи равенството:*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'.$$

Д о к а з. Нека $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=g(x)$, а $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. Според претходната теорема, $g(x)$ е непрекината функција на дадениот сегмент, при што имаме: $\int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt$. Поради

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x)-f_n(a), \text{ имаме } \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt = f(x)-f(a)$$

Според тоа, $f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)dt$. Одовде добиваме дека $f'(x)=g(x)$, што и сакавме да докажеме. □

Ќе докажеме уште една теорема за рамномерно конвергентните низи.

3°. *Нека $(f_n(x))$ е функционална низа при што секоја функција $f_n(x)$ е дефинирана на сегментот $[a,b]$. Низата $(f_n(x))$ е рамномерно конвергентна на $[a,b]$ ако и само ако*

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\quad m,n\geq n_0 \Rightarrow |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon, \tag{2}$$

за секој $x\in[a,b]$.

Д о к а з. Нека $(f_n(x))$ рамномерно конвергира кон $f_n(x)$. Ако $\varepsilon>0$, од рамномерната конвергенција следува дека постои $n_0\in\mathbb{N}$, таков што

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ за } n\geq n_0,\quad |f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ за } m\geq n_0$$

Тогаш, за $m,n\geq n_0$ имаме

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

што значи, од рамномерната конвергенција, следува (2).

Обратно, нека е исполнет условот (2). Тогаш за с е к о ј $x_0\in[a,b]$ добиваме бројна низа $(f_n(x_0))$ којашто, според Кошиевиот критериум (I.4.9), е конвергентна, па значи функционалната низа $(f_n(x))$ е конвергентна. Нека $f(x)$ е нејзина граница. Ако во (2) пуштиме m да се стреми кон ∞, добиваме

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\quad n\geq n_0 \Rightarrow |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

т.е. дека $(f_n(x))$ рамномерно конвергира кон $f(x)$. □

3. 2. Функционални редови

Со помош на поимот за функционална низа се воведува и поимот за функционален ред. Имено, ако $f_1(x), f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$, е функционална низа, тогаш

$$f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) \tag{3}$$

се вика ***функционален ред***. Низата од парцијалните суми е функционалната низа $s_n(x)$. Ако таа е конвергентна за $x=x_0$ тогаш велиме дека и дадениот функционален ред е ***конвергентен*** за $x=x_0$. Збирот $s(x)=\sum f_n(x)$ е функција од x. За функционалниот ред $\sum f_n(x)$ велиме дека е ***рамномерно конвергентен*** на сегментот $[a,b]$, ако низата од неговите парцијални суми е рамномерно конвергентна на тој сегмент.

Значи: $\sum f_n(x)$ *е рамномерно конвергентен на сегментот* $[a,b]$, *ако за секој* $\varepsilon > 0$ *постои* n_0, *таков што*

$$n > n_0 \Rightarrow |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+k}(x) + \cdots| < \varepsilon \text{ за секој } x \in [a,b].$$

Теоремите што ги докажавме за функционалните низи се пренесуваат и на функционалните редови. Затоа нив само ќе ги формулираме.

4° (***Интегрирање на ред член по член***). *Ако членовите на функционалниот ред* $\sum f_n(x)$ *се непрекинати функции на сегментот* $[a,b]$ *и ако тој ред рамномерно конвергира на сегментот* $[a,b]$, *тогаш неговиот збир* $s(x)$ *е непрекината функција на* $[a,b]$ *и притоа имаме:*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right).$$

Со други зборови при зададените услови, *функционалниот ред* $\sum f_n(x)$ *може да се интегрира член по член.* □

5° (***Диференцирање на ред член по член***). *Нека функциите* $f_n(x)$ *се диференцијабилни на сегментот* $[a,b]$, *при што и нивните изводи се непрекинати на тој сегмент. Ако редот* $\sum f_n'(x)$ *е рамномерно конвергентен на сегментот* $[a,b]$, *а* $\sum f_n(x)$ *конвергентен на тој сегмент, тогаш имаме:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Со други зборови, при зададените услови, *редот* $\sum f_n(x)$ *може да се диференцира член по член* што всушност значи дека сумата на редот $\sum f_n'(x)$ е еднаква со изводот од сумата на редот $\sum f_n(x)$. □

Од изнесените теореми се гледа дека рамномерно конвергентните редови имаат својства исти како и конечните збирови.

6°. *Нека* $\sum f_n(x)$ *е функционален ред и секоја од функциите* $f_n(x)$ *е дефинирана на сегментот* $[a,b]$. *Редот* $\sum f_n(x)$ *е рамномерно конвергентен на* $[a,b]$ *ако и само ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad n > n_0, k \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

за секој $x \in [a,b]$. □

Да докажеме уште една теорема.

7° (***Критериум на Вајерштрас***). *Ако функциите* $f_n(x)$ *се определени на сегментот* $[a,b]$ *и ако постои конвергентен ред со позитивни членови,* $\sum c_n$, *таков што*

$$|f_n(x)| \le c_n, \text{ за секој } x \in [a,b].$$

тогаш редот $\sum f_n(x)$ *е рамномерно и апсолутно конвергентен на тој сегмент.*

Д о к а з. Апсолутната конвергентност следува од $|f_n(x)| \leq c_n$. Преостанува да докажеме дека конвергенцијата е рамномерна. Поради $|f_n(x)| \leq c_n$ за секој x од $[a,b]$ и секој n, имаме:

$$|f_n(x)|+|f_{n+1}(x)|+\dots+|f_{n+m}(x)|+\dots \leq c_n+c_{n+1}+\dots+c_{n+m}+\dots \tag{4}$$

Ако $s(x)$ е збирот на редот $\sum c_n$, имаме:

$$\begin{aligned}&|s(x)-s_n(x)|=|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\dots+f_{n+m}(x)+\dots| \leq \\ &\leq |f_n(x)|+|f_{n+1}(x)|+\dots+|f_{n+m}(x)|+\dots \leq c_n+c_{n+1}+\dots+c_{n+m}+\dots\end{aligned} \tag{5}$$

за секој x од $[a,b]$ и секој n. Од конвергенцијата на редот $\sum c_n$ следува дека за секој $\varepsilon>0$, постои n_0 таков што $c_{n+1}+c_{n+2}+\dots+c_{n+m}+\dots<\varepsilon$ за $n \geq n_0$. Според (4), ако $n \geq n_0$, за секој x од $[a,b]$ имаме: $|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon$, од што следува дека конвергенцијата е рамномерна, т.е. со тоа е комплетиран доказот на критериумот на Вајерштрас. □

(Да се воочи дека при докажувањето на неравенствата (4) и (5) е искористена вежбата 3 од 2.5.)

4) Со примена на критериумот на Вајерштрас, лесно се добива дека редот $\sum(\sin nx)/n^2$ е апсолутно и рамномерно конвергентен во секој сегмент $[a,b]$ бидејќи $|(\sin nx)/n^2| \leq 1/n^2$, а $\sum 1/n^2$ е конвергентен ред.

3. 3. Вежби

1. Да се испита за кои вредности на аргументот x се конвергентни следниве редови:

а) $\sum \frac{x^n}{n^n}$; б) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{x+4}\right)^n$; в) $\sum 10^n \cdot x^n$.

Р е ш е н и е. а) Според критериумот на Коши имаме: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x^n/n^n|}= \lim\limits_{n\to\infty}|x/n|=0$; од тоа следува дека редот е конвергентен за секој x и тоа апсолутно.

б) Според критериумот на Даламбер, имаме:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2x}{x+4}\right|=\left|\frac{2x}{x+4}\right|$$

Одовде ќе се добие дека редот е апсолутно конвергентен во интервалот $(-4/3,4)$; за $x=-4/3$ редот е неапсолутно конвергентен, а за $x=4$ редот е дивергентен.

в) За $x\in(-0,1;0,1)$ редот е апсолутно конвергентен, а за $x=\pm 0,1$ тој е дивергентен.

2. Да се покаже дека редот

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ е рамномерно конвергентен на сегментот $[0,1/2]$;

б) $\sum(nx/(1+n^5x^2))$ е рамномерно конвергентен за секој x;

в) $\sum(x^n/n\sqrt{n})$ е апсолутно и рамномерно конвергентен на сегментот $[-1,1]$.

Р е ш е н и е. а) $s(x)=1/(1-x)$ за $|x|<1$; за $0 \le x \le 1/2$ имаме $|x^n| = x^n \le 1/2^n$, па според критериумот на Вајерштрас, следува дека редот е униформно конвергентен во $[0,1/2]$.

б) За дадено n, лесно се покажува дека функцијата $|nx/(1+n^5x^2)|$ има максимум при $x^2=1/n^5$, а тој изнесува $1/2n^{3/2}$ значи имаме: $|nx/(1+n^5x^2)| \le 1/2n^{3/2}$, а од тоа следува рамномерната конвергенција на дадениот ред.

в) Тврдењето следува од $|x^n/n\sqrt{n}| \le 1/n^{3/2}$.

3. Да се покаже дека редот

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n}-x^{2n-2})$ е конвергентен во сегментот $[-1,1]$, но конвергенцијата не е рамномерна;

б) $\sum((-1)^{n+1}/(x^2+n))$ е рамномерно конвергентен во $(-\infty,+\infty)$, но не е апсолутно конвергентен за ниедна (конечна) вредност на x.

Р е ш е н и е. а) Имаме: $s_n(x)=x^{2n}-1$, од што следува дека $\lim_{n\to\infty} s(x) = s(x)$ каде што $s(x)=-1$ за $x\in(-1,1)$ и $s(-1)=0=s(1)$. Значи, збирот е прекината функција, а од тоа индиректно следува дека конвергенцијата не е рамномерна.

б) За кој било (фиксен) $x\in(-\infty,+\infty)$ редот конвергира бидејќи ги задоволува условите од Лајбницовата теорема (1° од 2.1). Остатокот на редот, по апсолутна вредност, се оценува со членот a_{n+1}:

$$|s-s_n| \le \frac{1}{x^2+n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Бидејќи за кој било $\varepsilon>0$ имаме $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ (доволно е да се земе $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$), следува дека постои n_0, таков што $n\ge n_0 \Rightarrow |s-s_n|<\varepsilon$ за секој $x\in(-\infty,+\infty)$, па значи редот конвергира рамномерно на целиот интервал $(-\infty,+\infty)$. Редот $\sum|f_n(x)| = \sum(1/(x^2+n))$ е дивергентен за секој $x\in\mathbb{R}$ што лесно се проверува ако се спореди со редот $\sum 1/n$.

4. Да се испита конвергенцијата (рамномерна) на функционалните низи:

а) $f_n(x)=x^n/(1+x^n)$ во сегментите $[0,1/2]$, $[1/2,3/2]$;

б) $f_n(x)=x^2/(x^2+(1-nx)^2)$ во сегментот $[0,1]$;

в) $f_n(x)=\begin{cases}1/n, & \text{за } x \text{ рационален}\\ 0, & \text{за } x \text{ ирационален}\end{cases}$

($n f_n(x)$ е Дирихлеовата функција - в. I.2.1).

Р е ш е н и е. а) Во $[0,1/2]$ имаме $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$. Од друга страна имаме

$$f(x)=1-\frac{1}{1+x^n} \le 1-\frac{1}{1+0,5^n},$$

а бидејќи десната страна се стреми кон нула, за секој реален број $\varepsilon>0$, постои $n_0\in\mathbb{N}$, таков што

$$n\ge n_0 \Rightarrow 1-\frac{1}{1+0,5^n}<\varepsilon,$$

а во тој случај ќе имаме дека $n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon$, што значи дека $f_n(x)$ во сегментот $[0,1/2]$ конвергира рамномерно. Во $[1/2, 3/2]$ ќе имаме

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1/2, & x = 1 \\ 1, & 1 < x \leq 3/2 \end{cases}$$

Од прекинатоста на границата следува дека конвергенцијата не е рамномерна.

б) Имаме: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. т.е. низата конвергира кон $f(x) = 0$. Но, конвергенцијата не е рамномерна, зашто колку и големо да се земе n, за функцијата $f_n(x)$ во сегментот $[0,1]$ секогаш ќе се најде точка x - точката $x = 1/n$, во која $f_n(x) = f_n(1/n) = 1$, па да се направи и изразот $|f_n(x) - f(x)| < 1$ за сите x од $[0,1]$ истовремено, не е можно. Со други зборови, веќе при $\varepsilon = 1$, не постои број n_0 што би служел за сите x од $[0,1]$ истовремено.

Да забележиме дека границата на оваа низа од непрекинати функции е непрекината функција, иако конвергенцијата е нерамномерна (спореди со теоремата 1°).

в) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ за $x \in (-\infty, +\infty)$ при што конвергенцијата е рамномерна. Значи, границата $f(x) = 0$ е непрекината функција, иако низата се состои од функции прекинати во секоја точка од дефиниционата област (спореди со 1°).

5. Со диференцирање или интегрирање на функционален ред со познат збир, да се најдат збировите на следниве редови:

а) $\sum (n/2^{n-1})$; б) $\sum (1/n \cdot 3^n)$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n / (2n+1)(\sqrt{3})^{2n+1} \right)$.

Р е ш е н и е. а) Од $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ следува $\sum n\, x^{n-1} = 1/(x-1)^2$, од што добиваме $\sum \left(n/2^{n-1} \right) = 4$

б) $\sum \left(x^n / n \right) = -\ln(1-x)$; $\sum \left(1/n \cdot 3^n \right) = -\ln(2/3) = \ln(3/2)$.

в) $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(\sqrt{3})^{2n+1}} = \dfrac{\pi}{6}$

VIII. 4. Степени редови

Наједноставниот вид функционални редови се редовите со облик:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \tag{1}$$

за нив велиме дека се ***степени редови***. Скоро секоја елементарна функција може да се претстави како збир на еден степенен ред, па значи е приближно еднаква со некоја полиномна функција. Овде ќе се задржиме на неколку важни својства на овој вид редови.

4. 1. Радиус на конвергенција

Ќе ја докажеме прво следнава теорема:

1° (**Теорема на Абел** [1]). *Ако редот* (1) *е конвергентен за* $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$, *тогаш тој ред е апсолутно конвергентен за секој* $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Д о к а з. По претпоставка, редот

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n \tag{1'}$$

е конвергентен, од што следува дека $\lim_{n\to\infty} a_nx_0^n = 0$, а потоа и дека постои позитивен број M таков што $|a_nx_0^n| < M$, за секој n. Го формираме редот од апсолутни вредности

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \cdots + |a_nx^n| + \cdots \tag{2}$$

и овој ред го претставуваме во облик

$$|a_0| + |a_1x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + |a_nx_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots \tag{2'}$$

Да претпоставиме дека $-|x_0| < x < |x_0|$, т.е. $q = |x/x_0| < 1$. Тогаш геометрискиот ред $M + Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n + \cdots$ е конвергентен, од што следува дека е конвергентен и редот (2'), бидејќи $|a_nx^n| = |a_nx_0^n||x/x_0|^n < Mq^n$. Со тоа теоремата е докажана. □

Како последица од 1°, добиваме:

2°. *Ако редот* (1) *е дивергентен за* $x = x'$, *тогаш тој ред е дивергентен за секој* x *таков што* $|x| > |x'|$.

Д о к а з. Ако би постоел x_0, таков што $|x_0| > |x'|$, а за кој редот (1) е конвергентен, тогаш, според теоремата на Абел, поради тоа што е $-|x_0| < x' < |x_0|$, би следувало дека редот е конвергентен и за $x = x'$. Од тоа заклучуваме дека редот (1) е дивергентен за $x = x_0$ ако $|x_0| > |x'|$, а тоа и требаше да се докаже. □

Докажаните две теореми овозможуваат да се добие појасна претстава за конвергенцијата на редот (1). Да воочиме прво дека за $x = 0$, тој ред е секако конвергентен. Понатаму, можат да настапат следниве три случаи: а) за секој $x \neq 0$ редот е дивергентен; б) за секој x редот е апсолутно конвергентен; и в) постојат вредности на x за кои редот е дивергентен, а и такви $(\neq 0)$ за кои тој ред е конвергентен.

Првите два случаја се јасни, па затоа ќе се задржиме на третиот. Да го разгледаме множеството P од сите позитивни реални броеви за кои дадениот ред (1) е конвергентен. Ако p е кој било елемент од P и

---

[1] Нилс Хенрик Абел (*Nils Henrik Abel*, 1802-1829), норвешки математичар

ако редот (1) е дивергентен за $x = x'$, според 2° имаме $p < |x'|$, од што следува дека P е ограничено множество. Да го означиме со R супремумот на P. Според тоа, редот ќе биде апсолутно конвергентен за секој $x:|x| < R$, а дивергентен за секој $x:|x| > R$. За $x = R$ и $x = -R$, ќе треба да се изврши дополнително испитување. Во тој случај велиме дека $(-R, R)$ е ***интервал на конвергенцијата***, а R е ***радиус на конвергенцијата*** на редот (1). Во случајот а) можеме да речеме дека радиусот на конвергенција е $R = 0$, а во б) $R = +\infty$.

За наоѓање на интервалот на конвергенцијата на еден степенен ред можат да се искористат критериумите на Даламбер и Коши. Имено, *ако постои границата*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$$

тогаш $R = 1/\lambda$ *е радиус на конвергенцијата.* Навистина, според критериумот на Даламбер, редот е конвергентен ако

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot\lambda < 1$$

т.е. за $|x| < 1/\lambda$, од што следува дека $(-1/\lambda, 1/\lambda)$ е интервалот на конвергенцијата. Од исти причини, ако $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|^n} = \mu$, радиусот на конвергенцијата ќе биде $1/\mu$. (Притоа овие тврдења се осмислени и за $\lambda = 0$ или $\lambda = +\infty$, со тоа што се пишува "$1/0 = +\infty$, $1/\infty = 0$".)

Да разгледаме неколку примери.

1) За редот $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \cdots$ имаме $a_{n+1}/a_n = 1$, па $R = 1$ и редот е конвергентен во интервалот $(-1, 1)$; јасно е дека за крајните точки на интервалот редот е дивергентен.

2) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \to 0$, $R = \infty$.

3) $1 + x + 2^2x^2 + \dots + n^n x^n + \cdots$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) \to \infty$; $R = 0$; редот е конвергентен само за $x = 0$.

4. 2. Интегрирање и диференцирање на степените редови

Сега ќе покажеме дека степените редови во интервалот на конвергенцијата можат да се интегрираат, а исто така и да се диференцираат член по член. Тоа се гледа од следнава теорема:

3°. *Нека сегментот* $[a, b]$ *се наоѓа во внатрешноста на интервалот* $(-R, R)$ *на конвергенцијата на редот* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, *чиј збир е* $f(x)$. *Тогаш*:

а) $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_a^b a_n x^n dx = a_0(b-a) + \frac{a_1}{2}(b^2 - a^2) + \dots + \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) + \cdots$

б) *за секој* x *од* $(-R,R)$, *функцијата* $f(x)$ *има извод и тој е определен со*:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots=\sum na_nx^{n-1}.$$

в) *редот* $\sum na_nx^{n-1}$ *има радиус на конвергенција* R.

Доказ. а) Да докажеме дека степениот ред $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ конвергира рамномерно на сегментот $[a,b]\subset(-R,R)$. Нека $x\in[a,b]$, т.е. $-R<a\le x\le b<R$. Од тоа следува дека постои $k:0<k<R$ таков што $|x|<k$. Од $k\in(-R,R)$ следува дека редот $|a_0|+|a_1k|+|a_2k^2|+\cdots$ е конвергентен. Освен тоа, имаме и

$$|a_nx^n|\le|a_nk^n| \quad \text{за секој} \quad n\in\mathbb{N},$$

од каде што, според критериумот на Вајерштрас, следува дека редот $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ е рамномерно конвергентен во сегментот $[a,b]$. Членовите на овој ред се непрекинати функции од што следува (според теоремата 4° од 3.2) дека и збирот $f(x)$ е непрекината функција и дека е точно равенството

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_nx^ndx\right)$$

Со тоа е докажан првиот дел од теоремата.

б) Да го разгледаме сега изводниот ред

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \tag{3}$$

Ќе покажеме дека редот (3) има ист радиус на конвергенција, R, како и дадениот ред $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$. Нека $-R<x<R$ и броевите x_1 и x_2 да ги избереме така што $|x|<x_1<x_2<R$. Ако ставиме $x_1/x_2=q$, тогаш $q<1$, а и за секој x меѓу $-x_1$ и x_1 имаме:

$$|na_nx^{n-1}|=|na_nx_2^{n-1}|\cdot\left|\frac{x}{x_2}\right|^{n-1}=\frac{n}{x_2}|a_nx_2^n|\cdot\left|\frac{x}{x_2}\right|^{n-1}\le\frac{n}{x_2}|a_nx_2^n|q^{n-1}.$$

Редот $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_2^n$ е конвергентен, бидејќи $x_2\in(-R,R)$, па значи имаме $\lim_{n\to\infty}a_nx_2^n$ $=0$, од што следува дека постои позитивен број M, таков што $|a_nx_2^n|<M$. Според тоа имаме и

$$|na_nx^{n-1}|<\frac{n}{x_2}Mq^{n-1}.$$

Ако ставиме $b_n=nMq^{n-1}/x_2$, добиваме конвергентен броен ред $\sum b_n$; навистина, според критериумот на Даламбер, имаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot q=q<1.$$

Поради $|na_nx^{n-1}|<b_n$, според критериумот на Вајерштрас, редот (3) е униформно конвергентен во сегментот $[-x_1,x_1]$. Според теоремата 5° од 3.2 добиваме $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)'=\sum na_nx^{n-1}$.

Преостанува да покажеме дека изводниот ред $\sum na_n x^{n-1}$ не е конвергентен за ниеден број x надвор од интервалот $(-R,R)$, каде што R е радиусот на конвергенцијата на редот $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$. Навистина, ако тој ред е конвергентен за некој $x': |x'| > R$, со интегрирање би го добиле редот $\sum a_n x^n$, кој треба да биде конвергентен за $x = x'$, но тоа не е можно, бидејќи $|x'| > R$. Со тоа теоремата целосно е докажана. □

Од докажаната теорема покрај другото, заклучуваме дека: *со диференцирање на еден степенен ред конечен број пати се добива степенен ред со ист радиус на конвергенција како и првобитно дадениот.*

Да разгледаме неколку примери.

4) Познато ни е дека $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ во $(-1,1)$. Од тоа се добива:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{\cdot 1}{(x-1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n / n = -\ln(1-x)$.

Исто така, од

$$1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \text{ во } (-1,1),$$

се добива:

в) $-2x/(1+x^2)^2 = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots + (-1)^n 2nx^{2n-1} + \cdots$ во $(-1,1)$;

г) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$ во $(-1,1)$.

5) Познато ни е дека $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ има збир e^x, но тоа да го докажеме на друг начин. Да ставиме $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Во примерот 2) видовме дека овој ред е конвергентен за секој x, од што следува дека тој може да се диференцира и интегрира член по член за секој x. Диференцирајќи, добиваме

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x);$$

од $f'(x) = f(x)$ следува дека $f(x) = ae^x$, каде што a е константа. За $x = 0$ имаме $\sum \frac{x^n}{n!} = 1$, па значи и $a = 1$, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Често пати, наместо со редови од облик $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, се покажува згодно да се работи со редови од облик $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Овие редови се сведуваат на разгледаните, ако се стави $x - x_0 = x^*$. Според тоа, овие редови имаат интервал на конвергенција од облик $(x_0 - R, x_0 + R)$. Во интервалот на конвергенцијата редот може да се интегрира и диференцира член по член.

4. 3. Развивање на функции во степени редови

Да претпоставиме дека функцијата $f(x)$ е збир на степениот ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ во некој интервал $(a-h, a+h)$, т.е.

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots, \tag{4}$$

за секој $x\in(a-h,a+h)$. Диференцирајќи го (4) k пати, добиваме

$$f^{(k)}(x)=k!a_k+(k+1)\cdot k\cdots 3\cdot 2\cdot a_{k+1}(x-a)+\cdots \tag{5}$$

Ставајќи во (5) $x=a$, добиваме

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}. \tag{6}$$

Редот (4) сега добива облик

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \tag{4'}$$

Овој ред се вика ***тејлоров ред*** за функцијата $f(x)$ во околината на точката $x=a$; за $a=0$ тој ред е познат под името ***маклоренов ред***. Ако функцијата $f(x)$ е однапред зададена, тогаш, за да може да се развие во тејлоров ред во околина на $x=a$, неопходно е во точката $x=a$ да биде безброј пати диференцијабилна. Но, тој услов не е доволен. Ако овој услов е исполнет, тогаш за $f(x)$ можеме да ја напишеме тејлоровата формула:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{7}$$

каде што $a-h<\xi<a+h$. Ако остаточниот член

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}=R_{n+1}$$

се стреми кон нула кога $n\to+\infty$, тогаш $f(x)$ може да се развие во тејлоров ред; во овој случај, ако радиусот на конвергенција на (4′) е $R>0$, за $f(x)$ велиме дека е ***аналитична функција*** во точката $x=a$.

Да разгледаме неколку примери.

6) Според примерот 5), $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ е маклоренов ред за функцијата $f(x)=e^x$.

7) Поради

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\cos\xi,$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\cos\eta,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}=0,$$

добиваме дека

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ .$$

8) Користејќи го развојот на функцијата e^x, можеме да го напишеме редот и за e^{x^2}. Имено, ќе добиеме:

$$e^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots\ .$$

На ист начин, користејќи го развојот на $\sin x$, добиваме:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots.$$

при што земаме да е $f(0)=1$.

9) Од $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n+1}x^n+\cdots$, за $x\in(-1,1)$, добиваме:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots\qquad \text{за } x\in(-1,1).$$

Редот од десната страна е дивергентен за $x=-1$, а конвергентен за $x=1$. Се поставува прашањето дали е точно равенството $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$. Лесно се добива позитивен одговор. Ако во маклореновата формула за $\ln(1+x)$ ставиме $x=1$, добиваме:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n(1+\xi)^n}$$

каде што $0<\xi<1$. Јасно е дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n(1+\xi)^n}=0$, од што следува дека $\ln 2=\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Точна е следнава теорема: 2

4°. *Ако* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, *при што редот има радиус на конвергенција* R *и ако редот е конвергентен за* $x=R$ *(или* $x=-R$*), тогаш тој е рамномерно конвергентен во* $[0,R]$ *(или* $[-R,0]$*). Според тоа,* $f(x)$ *е непрекината во тој сегмент.* □

Во конкретниот случај, редот е конвергентен за $x=1$, па неговиот збир е непрекината функција во $[0,1]$. Од тоа пак што е $\ln(1+x)=\sum(-1)^{n+1}/n$ за $x\in[0,1]$, поради непрекинатоста на $\ln(1+x)$ за $x=1$, добиваме $\ln 2=\sum(-1)^{n+1}/n$.

10) Ако е дадена функцијата

$$f(x)=(1+x)^m$$

каде што m е даден реален број, тогаш имаме:

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

---

2) Види Фихтенгольц II, Гл. XII §2, стр. 446

Од тоа следува дека маклореновиот ред за функцијата $f(x)$ е

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \tag{8}$$

Со помош на Даламберовиот критериум лесно се увидува дека редот (8) е конвергентен во интервалот $(-1,1)$. Ставајќи

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \tag{8'}$$

лесно се добива дека $(1+x)y'=my$. Општото решение на оваа диференцијална равенка е $y=C(1+x)^m$; за $x=0$, добиваме $y=C$, од што следува $C=1$. Со тоа докажавме дека за секој $x\in(-1,1)$ и за секој реален број m, точно е равенството:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \tag{9}$$

Редот од десната страна се вика ***биномен ред.***

11) Поаѓајќи од $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}=$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{-1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^4}{2!}+\cdots+(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots=$$

$=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2^2}x^4+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n!\;2^n}x^{2n}+\cdots$, добиваме:

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2!2^2\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots.$$

4. 4. Вежби

1. Да се најде интервалот на конвергенцијата на редот:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\cos n\alpha$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b^n}{a^n}x^n$.

Р е ш е н и е. а) Поради $|x^n\cos n\alpha|\le|x|^n$, редот е конвергентен за $|x|<1$; за $x=\pm 1$ редот е дивергентен. б) Според Кошиевиот критериум, $R=|a/b|$, па $-|a/b|<x<|a/b|$; за $x=\pm a/b$ редот е дивергентен.

2. Да се разложат во ред по степените на x следниве функции:

а) $\cos^2 x$; б) $\dfrac{x^{10}}{1-x}$; в) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Р е ш е н и е. а) $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, па $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{2^2x^2}{2!}+\dfrac{2^4x^4}{4!}-\dfrac{2^6x^6}{6!}+\cdots\right)$, т.е. $\cos^2 x=1-\dfrac{2x^2}{2!}+\dfrac{2^3x^4}{4!}-\dfrac{2^5x^6}{6!}+\cdots$, $x\in\mathbb{R}$. Може и со помош на $(\cos^2 x)'=-\sin 2x$. б) $x^{10}/(1-x)=x^{10}(1+x^2+x^4+\cdots)$, $-1<x<1$.

в) $\left(\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)' = \dfrac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+\cdots,$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots, \quad -1<x<1$$

3. Да се најде збирот $f(x)$ на редот:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Р е ш е н и е. а) $(xf(x))'' = 1+x+x^2+\cdots = 1/(1-x)$, $|x|<1$; $xf(x) = x+$ $+(1-x)\ln(1-x)$, па значи $f(x) = 1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)$.

б) $g(x) = \int_0^x f(x)dx = x^2+2x^3+3x^4+\cdots = x^2h(x)$,

$$\int_0^x h(x)dx = x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = \frac{x}{1-x},\quad h(x) = \frac{1}{(x-1)^2};$$

$$\int_0^x f(x)dx = \frac{x^2}{(x-1)^2},\quad f(x) = \frac{-2x}{(x-1)^2}.$$

в) $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}2n\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!2n}$, т.е. $y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = y.$$

Општото решение на диференцијалната равенка $y''=y$ е $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$, а од $y(0)=1$ и $y'(0)=0$ се добиваат $C_1 = C_2 = 1/2$, па $y = (e^x+e^{-x})/2 = \operatorname{ch} x$.

4. Користејќи го разложувањето во степенен ред на подинтегралната функција, да се изрази во облик на ред интегралот $\int_0^x f(x)dx$, за приложените функции; да се наведат областите на конвергенција на добиените редови.

а) $f(x) = e^{-x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; в) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}$.

Р е ш е н и е. а) Од $e^{-x^2} = 1-\dfrac{x^2}{1!}+\dfrac{x^4}{2!}-\dfrac{x^6}{3!}+\cdots$, добиваме

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty).$$

б) Според примерот 4) г) имаме:

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\cdots;$$

интегрирајќи, добиваме:

$$\int_0^x\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx = x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2},\quad x\in[-1,1].$$

в) Според примерот 10) имаме:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[-1+1+\frac{x^4}{4}-\frac{3x^8}{2!\,4^2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{3\cdot7\cdots(4n-5)}{n!\;4^n}x^{4n}+\cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2!\,4^2}x^8+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{3\cdot7\cdots(4n-5)}{n!\;4^n}x^{4n-2}+\cdots.$$

Интегрирајќи добиваме:

$$\int_0^x f(x)dx = \frac{x^3}{4\cdot 3} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 7\cdots(4n-5)}{n!.4^n}\cdot\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \quad (-1 \le x \le 1).$$

5. Да се пресмета приближната вредност на определениот интеграл земајќи толку членови од редот на подинтегралната функција колку што е назначено. Потоа да се оцени грешката.

а) $\int_{0,1}^{1}\frac{e^x}{x}dx$ (6 членови); б) $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 члена).

Одговор. а) 3,518; грешката е помала од 10^{-5}. б) 0,4971; грешката е помала од 10^{-4}.

6. Со помош на разложување во ред да се пресметаат следниве интеграли со назначената точност (во заградите):

а) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ (до 10^{-5}); б) $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}dx$ (до 10^{-3});

в) $\int_0^{0,5}\cos\frac{x^2}{4}dx$ (до 10^{-6}); г) $\int_0^{1/4}\ln(1+\sqrt{x})dx$ (до 10^{-3}).

Решение. а) 0,94608. б) $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}dx = \left[x+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2!2^2\cdot 7}+\cdots\right]\Big|_0^{0,5} =$ $= \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 2^4}-\cdots \approx \frac{65}{128} \approx 0,508$, со грешка $< \frac{1}{7\cdot 2^{10}}$.

в) $\int_0^{0,5}\cos\frac{x^2}{4}dx = \left[x-\frac{x^5}{4^2\cdot 5\cdot 2!}+\frac{x^9}{4^4\cdot 9\cdot 4!}-\cdots\right]\Big|_0^{0,5} = \frac{1}{2}-\frac{1}{5\cdot 2^{10}}+\cdots \approx 0,499805$, со грешка $< \frac{1}{27\cdot 2^{20}}$. г) 0,0707 со грешка $< 1/63\cdot 2^8$.

VIII. 5. Примена на степените редови за решавање диференцијални равенки

Во овој параграф ќе разгледаме некои линеарни диференцијални равенки од втор ред, кои често се среќаваат во разните проблеми на физиката и техничките науки. За наоѓање на решенијата на тие равенки ќе ги искористиме степените редови. (По потреба да се консултира и VI.1.4.)

5. 1. Метод на степени редови

Да разгледаме најнапред еден пример.

1) Нека е дадена диференцијалната равенка

$$y' - 2xy = 0. \qquad (1)$$

Да претпоставиме дека за неа постои решение што може да се претстави со степенен ред

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (2)$$

Со диференцирање на (2) и замена во (1) добиваме дека

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0, \tag{3}$$

од каде што по средувањето, се добива:

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}]x^n = 0. \tag{4}$$

Работејќи сега како при методот на неопределените коефициенти (I.3.2) добиваме дека:

$$\begin{aligned} &a_1 = 0,\ \ 3a_3 - 2a_1 = 0, \ldots,\ \ (2k+1)a_{2k+1} - 2a_{2k-1} = 0, \ldots \\ &2a_2 - 2a_0 = 0,\ 4a_4 - 2a_2 = 0, \ldots,\ 2ka_{2k} - 2a_{2k-2} = 0, \ldots . \end{aligned} \tag{5}$$

Од првите од равенствата (5) се добива: $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k-1} = \cdots = 0$, а од вторите од тие равенства: $a_2 = a_0, a_4 = a_0/2!, \ldots, a_{2k} = a_0/k!, \ldots$ Ако вака добиените вредности за коефициентите a_ν ги замениме во (2), ќе добиеме дека бараното решение на (1) е

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{x^{2k}}{k!} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}. \tag{2'}$$

Меѓутоа, за редот $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}/k!$ којшто е конвергентен за секој реален број x, знаеме дека има збир e^{x^2}, па значи $y = a_0 e^{x^2}$ е бараното решение на равенката (1). До овој резултат би можело да се дојде и со обично интегрирање, бидејќи кај дадената диференцијална равенка променливите се раздвојуваат. Но и без тоа, дури и без да знаеме дека редот (2′) може да се претстави во облик e^{x^2}, сигурни сме дека со тој ред е определено општото решение на дадената диференцијална равенка. Имено, користејќи го, на пример критериумот на Даламбер, лесно се добива дека степениот ред (2′) е конвергентен за секој реален број x, а од тоа следува дека неговиот збир е диференцијабилна функција. Од начинот по кој се одредени коефициентите на редот следува дека се задоволени равенствата (5) па значи и (4) и (3), од што следува дека збирот на тој ред е навистина решение на (1); дека тоа решение е општо следува од тоа што во него фигурира произволна интеграциона константа a_0.

Да спомeнеме и тоа дека работата можевме да ја сметаме за завршена во моментот кога установивме дека добиениот ред е конвергентен (во соодветниот интервал), бидејќи од начинот на кој тој е добиен се гледа дека тој ја задоволува диференцијалната равенка (1). Затоа во наредните примери нема да ја спроведуваме оваа обратна постапка.

Да ја разгледаме и диференцијалната равенка:

$$y'' - xy' + py = 0, \tag{6}$$

(наречена: ***ермитова*** [1] ***диференцијална равенка***), каде што p е константен реален број.

1) Според францускиот математичар Шарл Ермит (*Charles Hermite*, 1822-1901)

Нека со редот (2) е определено едно нејзино решение. Диференцирајќи го редот (2) двапати и заменувајќи во (6), добиваме:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1} + p\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0,$$

т.е. ако средиме по степените од x,

$$pa_0 + 2!a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(p-n)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}]x^n = 0.$$

Изедначувајќи ги со 0 коефициентите пред одделните степени од x добиваме:

$$\begin{aligned} pa_0 + 2a_2 = 0, \quad (p-2)a_2 + 3\cdot 4a_4 = 0, \ldots \\ (p-2k+2)a_{2k-2} + (2k-1)2ka_{2k} = 0, \ldots \\ (p-1)a_1 + 2\cdot 3a_3 = 0, \quad (p-3)a_3 + 4\cdot 5a_5 = 0, \ldots \\ (p-2k+1)a_{2k-1} + 2k(2k+1)a_{2k+1} = 0, \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Ако ги задржиме a_0 и a_1 како неопределени, преку нив од последниве равенства можеме да ги определиме останатите коефициенти. Така добиваме дека

$$a_2 = -\frac{p}{2!}a_0,\ a_4 = \frac{p(p-2)}{4!}a_0, \ldots,\ a_{2k} = (-1)^k\frac{p(p-2)\cdots(p-2k+2)}{(2k)!}a_0, \ldots$$

$$a_3 = -\frac{(p-1)}{3!}a_1,\ a_5 = \frac{(p-1)(p-3)}{5!}a_1, \ldots,\ a_{2k+1} = (-1)^k\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)}{(2k+1)!}a_1$$

и редот (2) добива облик

$$\begin{aligned} y = a_0 + a_1x - \frac{p}{2!}a_0x^2 - \frac{(p-1)}{3!}a_1x^3 + \cdots + \\ + (-1)^k\frac{p(p-2)\cdots(p-2k+2)}{(2k)!}a_0x^{2k} + \\ + (-1)^k\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)}{(2k+1)!}a_1x^{2k+1} + \cdots \end{aligned} \tag{2'}$$

Последниот ред може да се претстави како збир од редовите

$$a_0 + a_0\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{p(p-2)\cdots(p-2k+2)}{(2k)!}x^{2k} \quad \text{и}$$

$$a_1x + a_1\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

за кои лесно се покажува дека се конвергентни за секој реален број x. Така, ако ставиме

$$\begin{aligned} y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{p(p-2)\cdots(p-2k+2)}{(2k)!}x^{2k} \quad \text{и} \\ y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1} \end{aligned} \tag{8}$$

добиваме дека бараното решение на равенката (6) е

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2. \tag{9}$$

Функциите y_1 (за $a_0 = 1, a_1 = 0$) и y_2 (за $a_0 = 0, a_1 = 1$) се решенија на (6) и бидејќи $y_1 / y_2 \neq const$, овие две решенија се линеарно независни. (Да се види подолу наведеното тврдење 1°.) Тоа покажува дека (9) е општо решение на (6), при што a_0 и a_1 се две произволни константи.

Да забележиме дека за $p = 2k$ од (7) добиваме дека $a_{2k+2} = a_{2k+4} = \cdots = 0$ и y_1 постанува полином со степен $2k$, а за $p = 2k+1$, се добива дека $a_{2k+3} = a_{2k+5} = \cdots = 0$, па тогаш y_2 постанува полином. Кога p не е природен број, y_1 и y_2 не се сведуваат на полиноми. Ако y_1 е полином со степен $2k$, т.е.

$$y_1 = 1 - \frac{p}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^k \frac{p(p-2)\cdots(p-2k+2)}{(2k)!}x^{2k},$$

тогаш

$$H_{2k}(x) = (-1)^k \frac{(2k)!}{p(p-2)\cdots(p-2k+2)} y_1$$

се вика ***ермитски полином со степен*** $2k$. Слично кога

$$y_2 = x - \frac{(p-1)}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)}{(2k+1)!}x^{2k+1},$$

со

$$H_{2k+1}(x) = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{(p-1)(p-3)\cdots(p-2k+1)} y_2$$

се определуваат ***ермитските полиноми со непарен степен.*** Еве неколку ермитски полиноми:

$$H_0(x) = 1 \ (\text{за } p = 0),\ H_1(x) = x \ (\text{за } p = 1),\ H_2(x) = x^2 - 1 \ (\text{за } p = 2)$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x \ (\text{за } p = 3),\ H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3 \ (\text{за } p = 4) \ \text{итн.}$$

Погоре, при утврдување на фактот дека (9) е општо решение на (6), го искористивме следново тврдење за хомогените линеарни диференцијални равенки од втор ред:

1°. *Нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се две решенија на диференцијалната равенка $y'' + py' + qy = 0$. Ако $y_1(x) / y_2(x)$ не е константа, тогаш $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ е општото решение на дадената диференцијална равенка.* □

(Во случај кога $y_1(x) / y_2(x) \neq const$, велиме дека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се *линеарно независни функции.*)

Секако е пожелно од самиот облик на една диференцијална равенка да може да се заклучи дали таа има решение во облик на степенен ред. Во наредната теорема, која нема да ја докажеме, се изнесуваат доволни услови за постоење на такви решенија.

Претходно да се потсетиме дека за една функција велиме дека е аналитична во дадена точка $x=a$, ако таа може да се претстави со степенен ред по степените на $x-a$ со позитивен радиус на конвергенција (види 4.3).

2°. *Нека е дадена диференцијалнаша равенка*

$$y''+f(x)y'+g(x)y=h(x). \tag{10}$$

Ако $f(x), g(x), h(x)$ *се аналишични функции во шочкаша* $x=a$, *шогаш и секое решение на* (10) *е аналишична функција во* $x=a$. □

5. 2. Лежандрова диференцијална равенка

Равенката

$$(1-x^2)y''-2xy'+k(k+1)y=0, \tag{11}$$

каде што k е реален број, се срекава во многу проблеми и е позната како ***лежандрова диференцијална равенка***. Ако се доведе во облик (10), лесно може да се види дека лежандровата равенка ги исполнува условите од теоремата 2° во точката $x=0$. Ако се работи како и во примерот 2), за одредување на коефициентите a_v во (2) ќе се добие следнава рекурентна формула

$$a_{n+2}=-\frac{(k-n)(k+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n=0,1,2,\dots \tag{12}$$

Од (12) можеме постепено да ги изразиме, со помош на a_0 и a_1, останатите коефициенти што се јавуваат во редот (2). Така на пример,

$$a_2=-\frac{k(k+1)}{2!}a_0, \quad a_4=\frac{(k-2)k(k+1)(k+3)}{4!}a_0,\dots$$

$$a_3=-\frac{(k-1)(k+2)}{3!}a_1, \quad a_5=\frac{(k-3)(k-1)(k+2)(k+4)}{5!}a_1,\dots$$

Редот (2) тогаш добива облик

$$y=a_0y_1+a_1y_2. \tag{13}$$

каде што

$$y_1=1-\frac{k(k+1)}{2!}x^2+\frac{(k-2)k(k+1)(k+3)}{4!}x^4-\dots$$

$$y_2=x-\frac{(k-1)(k+2)}{3!}x^3+\frac{(k-3)(k-1)(k+2)(k+4)}{5!}x^5-\dots$$

се конвергентни редови во интервалот $(-1,1)$. Бидејќи $y_1/y_2\neq const$ (y_1 има само парни, а y_2 само непарни степени по x), следува дека со (13) е дадено општото решение на лежандровата диференцијална равенка во интервалот $(-1,1)$.

Секоја функција којашто е решение на лежандровата диференцијална равенка се вика ***лежандрова функција***. Ќе се задржиме кратко на посебно интересните, од гледна точка на примената, лежандрови функции што се добиваат кога k во (11) е ненегативен цел број. Ако е $k=n$, тогаш од (12) се добива дека $a_{n+2}=a_{n+4}=\cdots=0$, па за $n=2m$, y_1 е полином, а за $n=2m+1$, y_2 е полином со степен n. Слично како и при ермитските полиноми, со множење со извесни константи, од y_1 и y_2 се добиваат таканаречените лежандрови полиноми. Да ги определиме лежандровите полиноми и да изнесеме едно нивно својство.

Најнапред, рекурентната формула (12) ќе ја напишеме во облик

$$a_i=-\frac{(i+2)(i+1)}{(n-i)(n+i+1)}a_{i+2}, \tag{14}$$

каде што променливиот индекс n е заменет со i, а наместо k, е ставено n. Полиномот y_1, односно y_2 (според тоа дали $k=2m$ или $k=2m+1$) ќе го помножиме со константа, таква што $a_n=1$ кога $n=0$, односно $a_n=(2n)!/2^2(n!)^2$ кога $n=1,2,\ldots$ земајќи во (14) i да ги прима вредностите $n-2,n-4,\ldots,n-2m,\ldots$, p (p е 0 или 1), добиваме:

$$\begin{aligned}
a_{n-2}&=-\frac{n(n-1)a_n}{2(2n-1)}=-\frac{n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)2^2(n!)^2}=\\
&=-\frac{n(n-1)2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)!n(n-1)(n-2)!}=-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!},\\
a_{n-4}&=-\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2}=\\
&=-\frac{(n-2)(n-3)(2n-2)(2n-3)(2n-4)!}{4(2n-3)2^n n(n-1)(n-2)!(n-2)(n-3)(n-4)!}=\\
&=-\frac{(2n-4)!}{2^n\cdot 2!(n-2)!(n-4)!},
\end{aligned}$$

. . . .

$$a_{n-2m}=(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!},$$

. . . .

па за y_1, односно y_2, добиваме дека полиномот е

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{t}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}, \tag{15}$$

каде што $t=n/2$ или $t=(n-1)/2$, според тоа дали n е парен или непарен. На пример, за $n=0,1,2,3$ добиваме:

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

Полиномите (15) се викаат ***лежандрови***, а нивно заедничко својство е

$$P_n(1) = 1 \text{ за кој било } n;$$

всушност, ова и беше причината за погоре направениот избор на a_n.

Да ставиме сега $f(x) = (x^2 - 1)^n$ и да го најдеме $f^{(n)}(x)$. Развивајќи ја $f(x)$ по биномната формула, добиваме

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \binom{n}{m} x^{2n-2m} = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!} x^{2n-2m}.$$

Ако $f(x)$ ја диференцираме n пати, добиваме по ред:

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!}(2n-2m)x^{2n-2m-1},$$

$$f''(x) = \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^2 \frac{n!}{m!(n-m)!}(2n-2m)(2n-2m-1)x^{2n-2m-2},$$

$$f'''(x) = \sum_{m=0}^{n-2}(-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!}(2n-2m)(2n-2m-1)(2n-2m-2)x^{2n-2m-3},$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{t}(-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!}(2n-2m)(2n-2m-1)\cdots(n-2m+1)x^{n-2m},$$

каде што $t = n/2$ кога n е парен, а $t = (n-1)/2$ кога n е непарен. Но, $f^{(n)}(x)$ можеме да ја напишеме во облик

$$f^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{t}(-1)^m \frac{n!(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m},$$

од каде што лесно се добива дека:

3°. $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n f(x)}{dx^n} = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$. □

Формулата 3° е позната под името ***формула на Родригез*** за лежандровите полиноми.

Неколку други својства на овие полиноми ќе бидат изнесени во вежбите (3 и 4).

5. 3. Метод на Фробениус

Да ја разгледаме диференцијалната равенка

$$y'' + \frac{f(x)}{x}y' + \frac{g(x)}{x^2}y = 0 \qquad (16)$$

Јасно е дека на ваков вид равенка не може да се примени теоремата 2° во точката $x = 0$. Со оглед на тоа што во многу проблеми се јавуваат равенки од обликот (16), овде накусо ќе се задржиме на примената на степените редови за нивното решавање. Постоењето на решение во облик на степенен ред при ваквите равенки, при одредени услови, го искажува следнава теорема:

4°. *Ако $f(x)$ и $g(x)$ се аналитични функции во точката $x = 0$, тогаш постои барем едно решение на равенката (16) што може да се напише во облик на степенен ред*

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{17}$$

каде што r е избран така што $a_0 \neq 0$. □

За решавање на равенките од облик (16) го користиме ***методот на Фробениус***, кој овде ќе го изнесеме.

Равенката (16) ќе ја напишеме во обликот

$$x^2 y'' + x f(x) y' + g(x) y = 0 \tag{16'}$$

а $f(x)$ и $g(x)$ ќе ги претставиме со степени редови:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{18}$$

За равенката (16) претпоставуваме дека се исполнети условите од теоремата 4°, па можеме да земеме дека со (17) е дадено едно нејзино решение. Ако го диференцираме решението (17) двапати, па заедно со изводите и редовите (18) го замениме во (16'), ќе добиеме дека:

$$\begin{aligned} x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n + \\ + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

И овде, како и порано, ги изедначуваме со нула коефициентите пред поодделните степени од x, со што добиваме равенки за одредување на коефициентите a_ν во (17). Коефициентот пред x^r - најмалиот степен од x, изнесува

$$r(r-1)a_0 + r a_0 b_0 + a_0 c_0 = [r + (b_0 - 1) r + c_0] a_0.$$

па за да биде тој нула, бидејќи по претпоставка е $a_0 \neq 0$, мора да биде точно равенството

$$r^2 + (b_0 - 1) r + c_0 = 0. \tag{20}$$

Ако r_1 и r_2 се корени на равенката (20), тогаш заменувајќи во (19) прво $r = r_1$, а потоа $r = r_2$, во секој од овие два случаја, како и порано, можеме да ги определиме со помош на a_0 останатите коефициенти во редот (17). На тој начин можат да се добијат два реда:

$$\begin{aligned} &\text{за} \quad r = r_1: \quad y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ &\text{за} \quad r = r_2: \quad y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n. \end{aligned} \tag{21}$$

Кога r_1 и r_2 не се разликуваат за цел број, како и да се избере a_0, се добива дека $y_1 / y_2 \neq const$, па општото решение на (16) може да се напише во облик $y = Ay_1 + By_2$, каде што A, B се произволни константи. Кога r_1 и r_2 не го исполнуваат горниот услов, одредувањето на општото решение на (16) е прилично покомпликувано. Не впуштајќи се во детална анализа на случајот кога r_1 и r_2 се разликуваат за цел број, во наредната теорема ќе ги изнесеме, во одделни случаи, другите решенија на равенката (16), различни од y_1, а кои со y_1 се линеарно независни.

5°. а) *ако r_1 и r_2 не се разликуваат за цел број, тогаш општото решение на равенката* (16) *е дадено со*

$$y = Ay_1 + By_2, \tag{22}$$

каде што y_1 и y_2 се определени со (21).

б) *Ако $r_1 = r_2$, општото решение на* (16) *е*

$$y = Ay_1 + By_2^*, \tag{23}$$

каде што y_1 е определена со (21), *а y_2^* има облик*.

$$y_2^* = y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n. \tag{24}$$

в) *Ако $r_1 \neq r_2$, но разликата $r_1 - r_2 > 0$ е цел број, општото решение на* (16) *е дадено со* (23), *каде што y_2^* има облик*

$$y_2^* = ky_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \ ; \tag{25}$$

притоа, y_1 е пак определено со (21), *а k може да биде и* 0. □

Пред да разгледаме еден пример, да истакнеме уште еднаш дека r_1 во случајот в) е поголемиот од корените на равенката (20).

3) Равенката

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{26}$$

е позната под името ***гаусова хипергеометриска равенка.***

Ако равенката (26) ја доведеме во обликот (16), ќе видиме дека таа ги исполнува условите од теоремата 4°, па значи за неа постои решение што може да се претстави во обликот (17).

Применувајќи го методот на Фробениус добиваме:

$$\begin{aligned} & x^{r-1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \\ & +[c-(a+b+1)x]x^{r-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^n - abx^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Пред најмалиот степен од x, т.е. пред x^{r-1}, го имаме коефициентот $r(r+c-1)a_0$, па на равенката (20) во овој случај ѝ одговара равенката

$$r(r+c-1) = 0, \tag{20'}$$

од каде што наоѓаме $r_1 = 0$, $r_2 = 1-c$. Заменувајќи $r = 0$ во (27), за одредување на a_ν ги добиваме следниве равенки:

$$ca_1 - aba_0 = 0,\quad 2(c+1)a_2 - (a+1)(b+1)a_1 = 0,$$

$$3(c+2)a_3 - (a+2)(b+2)a_2 = 0,\ldots,n(c+n-1)a_n = (a+n-1)(b+n-1)a_{n-1},\ldots$$

Земајќи $a_0 = 1$, добиваме

$$a_1 = \frac{ab}{c},\quad a_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)},\quad a_3 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)},\ldots$$

$$a_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!c(c+1)\ldots(c+n-1)},\ldots$$

Така добиваме дека

$$y_1 = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \cdots + \\ + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!c(c+1)\ldots(c+n-1)}x^n + \cdots \tag{28}$$

е решение на равенката (26). Редот (28) е познат под името ***хипергеометриски ред***, накратко овој ред ќе го означуваме со $F(a,b,c;x)$. Така, (28) можеме да го напишеме: $y_1 = F(a,b,c;x)$. Лесно се проверува дека хипергеометрискиот ред е конвергентен за секој $x \in (-1,1)$. (За $x = 1$, да се види вежбата 6 б) од 1.4.)

Ако во (27) r го замениме со $r_2 = 1-c$, тогаш на ист начин наоѓаме дека

$$y_2 = x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x) \tag{29}$$

е решение на равенката (26). Ако c не е цел број, т.е. $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тогаш $y_1 / y_2 \neq const$, па општото решение на гаусовата хипергеометриска равенка во тој случај гласи

$$y = AF(a,b,c;x) + BF(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)x^{1-c}.$$

5. 4. Беселова диференцијална равенка

Равенката

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \tag{30}$$

каде што p е ненегативен реален број, се вика ***беселова диференцијална равенка***.

Според методот на Фробениус се добива дека на равенката (20) во овој случај ѝ одговара равенката $r^2 - p^2 = 0$, а за $r = p$, за одредување на коефициентите во редот

$$x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

се добиваат равенките

$$(2p+1)a_1 = 0,\qquad a_n = -\frac{1}{n(n+2p)}a_{n-2}.$$

Поради претпоставката $p \geq 0$, од првата од овие равенки се добива дека $a_1 = 0$, а потоа од втората по ред добиваме $a_3 = 0$, $a_5 = 0, \ldots, a_{2k+1} = 0, \ldots$ Да ставиме $n = 2k$; за одредување на коефициентите со парни индекси ја имаме значи рекурентната формула

$$a_{2k} = -\frac{1}{2^2 k(k+p)} a_{2k-2}, \qquad k = 1,2,\ldots \tag{31}$$

За коефициентот a_0, обично се зема следнава вредност

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}, \tag{32}$$

каде што $\Gamma(x)$ е позната под името *гама-функција* и се определува со несвојствениот интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0 \tag{33}$$

Неколку својства за оваа функција читателот може да најде во вежбите (8 и 9), каде што, меѓу другото, ќе биде покажано како може да се дефинира $\Gamma(x)$ и за негативни вредности на x како и тоа дека е точно равенството

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \tag{34}$$

коешто овде ќе го искористиме за одредување на коефициентите a_{2k}, $k > 0$.

Од (31), (32) и (33) добиваме по ред:

$$a_2 = -\frac{1}{2^2(p+1)} a_0 = -\frac{1}{2^2(p+1)} \cdot \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} = -\frac{1}{2^{p+2}\, 1!\, \Gamma(p+2)},$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 2(p+2)} a_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 2(p+2)} \cdot \frac{1}{2^{p+2}\, 1!\, \Gamma(p+2)} = \frac{1}{2^{p+4}\, 2!\, \Gamma(p+3)},$$

. . . .

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{p+2k}\, k!\, \Gamma(p+k+1)},$$

. . . .

Со замена на овие коефициенти во редот $x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, го добиваме следново решение на равенката (30):

$$J_p(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{p+2k}\, k!\, \Gamma(p+k+1)} \tag{35}$$

Функцијата $J_p(x)$ е позната како ***беселова функција од прв вид***, со ред p.

Нека p не е цел број. Земајќи $r = -p$ и работејќи како во случајот $r = p$, може да се добие друго решение на равенката (30):

$$J_{-p}(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k-p}\, k!\, \Gamma(k-p+1)}, \tag{36}$$

при што $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ се линеарно независни. Според тоа, кога p не е цел број, општото решение на беселовата диференцијална равенка е

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x). \tag{37}$$

Во случајот кога $p = n$ е природен број, се покажува дека $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ се линеарно зависни, па општото решение на (30) не е од облик (37). Во тој случај може да се покаже дека $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ се линеарно независни решенија на беселовата диференцијална равенка, каде што

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \frac{x^n}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(h_k + h_{k+n})}{2^{n+2k}\,k!\,(k+n)!}x^{2k} -$$
$$-\frac{x^{-n}}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-k-1)!}{2^{2k-n}\,k!}x^{2k}, \quad (x > 0, n = 1,2,3,\ldots), \tag{38}$$
$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}h_k}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k},$$

а $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$; $h_0 = 0$; $h_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$, $k > 0$.

Така, кога $p = n$ е природен број, или 0, општото решение на беселовата диференцијална равенка гласи:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \quad x > 0. \tag{39}$$

5. 5. Вежби

1. Да се реши секоја од дадените диференцијални равенки по методот на степените редови, а потоа да се провери добиениот резултат со решавање на секоја од равенките на некој од другите, познати начини.

а) $(x-1)y' - 2y = 0$; б) $y'' + y = 0$; в) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Р е ш е н и е. а) $y = a_0(x-1)^2$. б) $y = a_0\cos x + a_1\sin x$.

в) $y = Ae^x + Be^{2x}$, каде што е $A = 2a_0 - a_1, B = a_1 - a_0$.

2. Да се решат диференцијалнте равенки:

а) $(x^2+1)^2 y'' - 4x(x^2+1)y' + (6x^2-2)y = 0$;

б) $y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)y = 0$, каде што p е реален број.

Р е ш е н и е. а) Работејќи како во примерот 2) се добива дека $y = a_0(x^2+1) + a_1 x(x^2+1)$. б) Ако се стави $y = z\exp(-x^2/4)$, каде што z е нова функција од x, ќе се добие равенката од примерот 2). Притоа, $\exp(t)$ означува e^t.

3. Да се покаже дека $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

Р е ш е н и е. Следува директно од (15).

4. Да се покаже дека за $m \neq n$: $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$.

Р е ш е н и е. Лежандровата диференцијална равенка можеме да ја напишеме во облик $[(1-x^2)y']'=-k(k+1)y$. За $k=m$ и $k=n$ соодветните лежандрови полиноми претставуваат решенија на оваа равенка, така што имаме

$$[(1-x^2)P_m'(x)]'=-m(m+1)P_m(x), \quad [(1-x^2)P_n'(x)]'=-n(n+1)P_n(x)$$

Првата од овие равенки ја множиме со $P_n(x)$, втората со $-P_m(x)$, а потоа собираме:

$$[(1-x^2)P_m'(x)]'\cdot P_n(x)=[(1-x^2)P_n'(x)]'\cdot P_m(x)=[n(n+1)-m(m+1)]P_m(x)P_n(x)$$

Последната равенка ја интегрираме во сегметот $[-1,1]$, при што интегралите од левата страна ги решаваме по методот на делумна интеграција. Така добиваме:

$$\int_{-1}^{1}[(1-x^2)P_m'(x)]'P_n(x)dx-\int_{-1}^{1}[(1-x^2)P_n'(x)]'P_m(x)dx=(n-m)(m+n+1)\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx,$$

$$(n-m)(m+n+1)\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=(1-x^2)P_m'(x)P_n(x)\Big|_{-1}^{1}-(1-x^2)P_m(x)P_n'(x)\Big|_{-1}^{1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'(x)P_n(x)dx=0,$$

па поради $m\neq n$, $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0$.

5. Со помош на методот на Фробениус да се решат следниве диференцијални равенки:

а) $x(x+1)^2y''+(1-x^2)y'+(x-1)y=0$;

б) $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$.

Р е ш е н и е. а) Равенката (20) во овој случај добива облик $r^2=0$, па го имаме случајот б) од теоремата 5°. Заменувајќи го редот (2) и неговите изводи во дадената равенка, за одредување на коефициентите a_ν ќе ги добиеме равенките

$$a_1-a_0=0,\ 4a_2-a_1+a_0=0,\ 9a_3+3a_2=0,\ 16a_4+11a_3-a_2=0,\ldots,$$

од каде што се добива дека $a_1=a_0$, $a_2=a_3=\ldots=0$, па, ставајќи $a_0=1$, за дадената равенка го добиваме следново решение: $y=1+x$. Според погоре спомената теорема, со $y_2^*=(1+x)\ln x+\sum A_nx^n$ е дадено друго (со y_1 линеарно независно) решение на таа равенка. За да ги одредиме коефициентите A_ν, ги заменуваме y_2^* и неговите изводи во дадената равенка, а потоа работиме на ист начин како и за одредување на коефициентите при решението y_1; така се добива дека $A_1=A_0$ и $A_\nu=0$ за $\nu>1$, па $y_2^*=(1+x)\ln x+A_0(1+x)$, т.е. $y_2^*=(1+x)\ln x+A_0y_1$; со оглед на тоа дека y_1 е решение на дадената равенка, добиваме дека $\tilde{y}_2^*=$ $=(1+x)\ln x$ е нејзино друго решение, па бидејќи y_1 и $\tilde{y}_2^*$ се линеарно независни, општото решение на равенката е $y=C_1(1+x)+C_2(1+x)\ln x$, каде што C_1 и C_2 се произволни константи.

б) Општото решение е $y=C_1e^x+C_2e^x\ln x$.

6. Да се покаже дека:

а) $F(1,b,b;x) = 1 + x + x^2 + \ldots$; б) $F(-n,b,b;-x) = (1+x)^n$;

в) $xF(1,1,2;-x) = \ln(1+x)$; г) $xF(1/2,1/2,3/2;x^2) = \arcsin x$.

7. Да се пресмета $\dfrac{dF(a,b,c;x)}{dx}$.

Р е ш е н и е. $\dfrac{dF(a,b,c;x)}{dx} = \dfrac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;x)$.

8. Да се покаже дека $\Gamma(x)$ е дефинирана во интервалот $(0,+\infty)$.

Р е ш е н и е. Бидејќи $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$, потребно е да покажеме дека за $x > 0$ интегралот е конвергентен. Да ставиме

$$I_1(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt \quad \text{и} \quad I_2(x) = \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt;$$

тогаш $\Gamma(x) = I_1(x) + I_2(x)$. Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-n}n^{x-1}}{1/n^p} = 0$, $p > 1$, и бидејќи редот $\sum(1/n^p)$ е конвергентен, се добива дека за секој реален број x е конвергентен и редот $\sum e^{-n}n^{x-1}$ (види 10° од 1.2); според интегралниот Кошиев критериум, од тоа следува дека е конвергентен и интегралот $I_2(x)$. Останува да го испитаме интегралот $I_1(x)$; за $x = 1$, $I_1(x)$ постои бидејќи тогаш подинтегралната функција е непрекината на сегментот $[0,1]$ поради тоа, да земеме $x < 1$. Бидејќи, за $t > 0$, $0 < e^{-t}t^{x-1} \le t^{x-1}$, добиваме дека $0 < \int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt \le \int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt$, каде што $\varepsilon > 0$; интегралот $\int_0^1 t^{x-1}dt$ е конвергентен за $x > 0$ $\left(\int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt = \dfrac{t^x}{x}\Big|_\varepsilon^1 \to \dfrac{1}{x} \text{ кога } \varepsilon \to 0\right)$, па за $x > 0$, конвергентен е и интегралот $I_1(x)$. На крајот, нека $x \le 0$; тогаш $\int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt \to \infty$ кога $\varepsilon \to 0$, па поради тоа што $e^{-t} \ge 1/e$ за $t \in (0,1)$, добиваме дека $\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{x-1}dt \ge \dfrac{1}{e}\int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt \to \infty$ кога $\varepsilon \to 0$, т.е. $I_1(x)$ дивергира за $x \le 0$.

9. Да се докаже равенството

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{34}$$

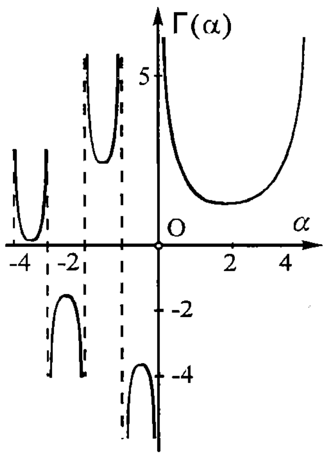
Р е ш е н и е. Равенството (34) се добива веднаш ако се изврши делумна интеграција на интегралот $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt$. Бидејќи $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$, со помош на (34) може да се добие равенството

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{41}$$

каде што n е природен број.

Во вежбата 8 беше покажано дека $\Gamma(x)$ е дефинирана за $x > 0$. Често под гама-функција се подразбира функцијата којашто за $x > 0$ се определува со

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$



Црт. 1

а за $x<0, x\neq 0,-1,-2,\ldots$ се определува со помош на функционалната равенка (34). На црт. 1 графички е претставен дел од таа функција.

10. Да се решат следниве равенки:

а) $x^2y''+xy'+\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)y=0$; б) $y''+\left(e^{2x}-\dfrac{9}{4}\right)y=0$.

Р е ш е н и е. а) $y=C_1J_{1/2}(x)+C_2J_{-1/2}(x)$ (за $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ види вежба 11). б) Со смената $e^x=z$ равенката се трансформира во беселовата равенка $z^2y_z''+zy_z'+\left(z^2-(4/9)\right)y=0$, па нејзиното општо решение е $y=C_1J_{3/2}(z)+$ $+C_2J_{-3/2}(z)$ (за $J_{3/2}(x)$ и $J_{-3/2}(x)$ види вежба 12).

11. Да се покаже дека $J_{1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$, $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$.

Р е ш е н и е. Ако ставиме во (35) $p=1/2$, ќе добиеме дека

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{x/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!\,\Gamma(n+(3/2))} \tag{42}$$

Користејќи го равенството

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2$$

(вежба 4 од VI.1.4) добиваме

$$\Gamma(1/2)=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},$$

а од тоа и од функционалното равенство (34), добиваме дека

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{x/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}\cdot n!(n+(1/2))(n-(1/2))\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=$$

$$=\sqrt{x/2}\,\frac{2}{x\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n\cdot n!(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Последниот ред, како што е познато, има збир $\sin x$, па првото од равенствата е на овој начин докажано. За второто равенство доказот е сличен.

12. Да се докажат следниве рекурентни формули:

$$J_{p-1}(x)+J_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x) \tag{43}$$

$$J_{p-1}(x)-J_{p+1}(x)=2J_p'(x) \tag{44}$$

Р е ш е н и е. Според (35) имаме $x^pJ_p(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+2p}}{2^{2n+p}\cdot n!\,\Gamma(n+p+1)}$, од каде што со диференцирање, користејќи ја притоа и функционалната равенка (34), добиваме дека

$$\frac{d}{dx}\left(x^pJ_p(x)\right)=x^px^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+p-1}\cdot n!\,\Gamma(n+p)}=x^pJ_{p-1}(x). \tag{45}$$

Слично се добива и дека

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-p}J_p(x)\right)=-x^{-p}J_{p+1}(x). \tag{46}$$

Од (45) се добива дека

$$px^{p-1}J_p(x)+x^pJ_p'(x)=x^pJ_{p-1}(x), \tag{45'}$$

а од (46), по множењето со x^{2p},

$$-px^{p-1}J_p(x)+x^pJ_p'(x)=-x^pJ_{p+1}(x). \tag{46'}$$

Формулите (43) и (44) сега лесно се добиваат од (45') и (46').

Во вежбата 11 покажавме дека $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ се елементарни функции. Користејќи ги нив и рекурентната формула (43) добиваме дека за секој $p=\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots, J_p(x)$ е елементарна функција.

VIII. 6. Фурјеови редови

Во многу проблеми од техничките науки се појавуваат периодични функции, често прилично компликувани, а поради тоа се наложува потребата една периодична функција да се претстави со помош на едноставни периодични функции, како што се функциите синус и косинус. Таа задача доведува до фурјеовите редови, чија практична примена во техничките науки зазема посебно место. Во овој параграф ќе изнесеме неколку работи во врска со тие редови.

6. 1. Тригонометриски редови

Во врска со задачата една периодична функција [1] со период 2π да се изрази со помош на едноставните периодични функции

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots,$$

коишто исто така имаат период 2π, се појавуваат редовите од облик

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots, \tag{1}$$

каде што $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$ се реални константи. (Слободниот член е означен со $a_0/2$, а не со a_0 од причини на симетрија, како што ќе видиме подолу, во теоремата 3°.) Секој ред со облик (1) се вика ***тригонометриски ред***, а a_n и b_n се викаат ***коефициенти*** на тој ред. Бидејќи секој член од редот (1) има период 2π, неговиот збир, ако редот конвергира, ќе биде периодична функција со период 2π.

Секако, поведението на редот (1) зависи од низите (a_n), (b_n). Ќе изнесеме две теореми што се очигледни последици на теоремите 4° и 5° за функционални редови (в. 3.2).

1) За овие функции види I.3.3.

1°. *Ако редот*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n|+|b_n|) \tag{2}$$

е конвергентен, тогаш редот (1) *е апсолутно конверегентен за секој x и рамномерно конвергентен во секој сегмент. Во тој случај, збирот на редот* (1) *е непрекината функција и може да се интегрира член по член.*

Д о к а з. Поради $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|$, од конвергенцијата на редот (2), според критериумот на Вајерштрас, следува дека редот (1) е апсолутно и рамномерно конвергентен во секој сегмент.

Од тоа, според теоремата 4° од 3.2 се добива дека збирот на редот (1) е непрекината функција и дека тој ред може да се интегрира член по член. □

2°. *Ако постојат константи* α, β *и* p, *каде што* $p > 1$, *такви што* $|a_n| \le \dfrac{\alpha}{n^p}$, $|b_n| \le \dfrac{\beta}{n^p}$, *тогаш редот* (1) *е апсолутно конвергентен, а неговиот збир е непрекината функција.*

Ако k *е најголемиот природен број што го задоволува неравенството* $p - k > 1$, *тогаш збирот на редот* (1) *е* k *пати диференцијабилна функција и, притоа, изводите се определуваат со диференцирање на редот член по член.*

Д о к а з. Поради $p > 1$, редот $(a+b)\sum(1/n^p)$ е конвергентен, од што следува дека е конвергентен и редот (2) бидејќи ќе биде $|a_n|+|b_n| \le (\alpha+\beta)/n^p$. Според теоремата 1°, редот (1) е апсолутно и рамномерно конвергентен, а неговиот збир е непрекината функција. Да претпоставиме дека $p > 2$ и да го диференцираме редот (1) член по член. Тогаш го добиваме редот

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-n\, a_n \sin nx + n\, b_n \cos nx). \tag{1'}$$

Притоа имаме $|na_n| \le \alpha / n^{p-1}$, $|nb_n| \le \beta / n^{p-1}$, од што, поради $p-1>1$, добиваме дека редот (2) е рамномерно ковергентен во секој сегмент. Според теоремата 5° од 3.3, добиваме:

$$\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)\right\}' = \sum_{n=0}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx).$$

Ако $p > 3$, тогаш, од исти причини, ќе може да се диференцира член по член и редот (1') итн., а ако $p > k+1$, добиваме дека редот (1) може k пати да се диференцира член по член.

Да разгледаме еден пример.

1) Нека $f(x) = \sum \dfrac{\cos nx + 2\sin nx}{n^4}$; $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p = 4$. Имаме:

$$f'(x) = \sum \frac{-\sin nx + 2\cos nx}{n^3}; \quad f''(x) = \sum \frac{-\cos nx - 2\sin nx}{n^2}.$$

Наредната теорема укажува на врската што постои меѓу функцијата $f(x)$ што е збир на редот (1) и коефициентите на тој ред.

3°. *Нека* $f(x)$ *е збиройт на редойт* (1) *йри шйо* $f(x)$ *е инйтеграбилна функција, а исйто йака нека редойт* (1) *може да се инйтегрира член йо член. Тогаш, коефициенйтийте* a_n, b_n *и функцијайта* $f(x)$ *се сврзани со равенсйтвайта:*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx. \tag{3}$$

Д о к а з. Ако равенството $f(x) = (a_0/2) + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ го помножиме со $\cos mx$ и го интегрираме во граници од $-\pi$ до π, добиваме

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx dx\right\}.$$

Да ги пресметаме интегралите од десната страна. За $m=0$ имаме

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\, dx = 0.$$

Според тоа, добиваме

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

За $m>0$ имаме:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}dx = 0;$$

За $n=m$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2mx)dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4m}\sin 2mx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi;$

за $m \neq n$: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\, dx = 0.$

Од тоа следува: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = a_m\pi$, т.е. $\displaystyle a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx.$

Множејќи го редот (1) со $\sin mx$ и интегрирајќи од $-\pi$ до π, на сосема ист начин, ќе добиеме дека

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx,$$

а со тоа би го комплетирале доказот на теоремата. □

6. 2. Развивање на функции во фурјеови редови

Како и при степените редови, се поставува прашањето: во кој случај дадена функција може да се развие во ред со облик (1)?

Да претпоставиме дека $f(x)$ е дадена функција, интеграбилна во сегментот $[-\pi,\pi]$. Тогаш може да ги определиме a_n и b_n со (3) и да го добиеме редот

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{1}$$

Овој ред се вика ***фурјеов***[2] ***ред*** за функцијата $f(x)$ и се пишува:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx); \tag{4}$$

неговите коефициенти, добиени со помош на (3) се викаат ***фурјеови коефициенти*** на $f(x)$. Се поставува прашањето: какви услови треба да задоволува функцијата $f(x)$ за да биде збир на својот фурјеов ред? Со наредната теорема, која нема да ја докажеме,[3] е окарактеризирана една класа функции од тој вид.

4° (***Признак на Дирихле***). *Нека $f(x)$ е периодична функција со период 2π и нека $f(x)$ и $f'(x)$ се непрекинати функции во сегментот $[-\pi,\pi]$, освен можеби, за конечно многу точки од тој сегмент, кои што се прекини од прв вид.*[4] *Тогаш фурјеовиот ред на функцијата $f(x)$ е конвергентен за секој x. Притоа:*

а) ако x е точка на непрекинатост на $f(x)$, тогаш

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx); \tag{5}$$

б) ако x_0 е точка на прекин, тогаш збирот на редот (1) *е*

$$[f(x_0^+)+f(x_0^-)]/2;$$

в) ако $f(x)$ нема прекини, тогаш редот е апсолутно и рамномерно конвергентен. □

Да разгледаме еден пример.

2) Нека функцијата $f(x)$ е определена со $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$, а надвор од сегментот $[-\pi,\pi]$ се определува така што да биде периодична функција со период 2π. Значи, функцијата $f(x)$ има график прикажан црт. 1. Имаме:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\pi\int_{-\pi}^{0}dx+\int_0^{\pi}x\,dx\right]=\frac{3\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\pi\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right]=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi},\text{ па}$$

---

2) Жан Фурје (*Jean Baptiste Joseph Fourier*, 1768-1830), француски математичар

3) Да се види, на пример, Толстов, том II, гл.XXV §10, или Фихтенголц III, гл.XIX §2

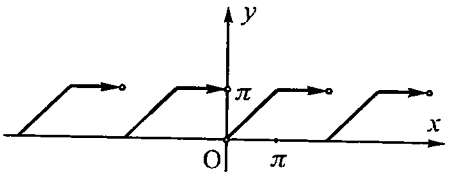
4) Функцијата $f(x$ има прекин од прв вид во точката x_0, ако постојат двете граници $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$, а тие се меѓусебно различни (види I.5.7)

$$a_{2k}=0,\ a_{2k+1}=-\frac{2}{(2k+1)^2\pi},\quad k\in \mathbb{N},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\pi\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx\right]=-\frac{1}{n}.$$

Според тоа имаме:

$$f(x)=\frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{2}{\pi}\cos x-\sin x\right)+\left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\left(-\frac{2}{\pi\cdot 9}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)+\cdots$$



Црт. 1

Ако во резултатот ставиме $x=0$ и извршиме средување добиваме:

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Да претпоставиме сега дека $f(x)$ е функција со период $2T(T>0)$ и дека ги задоволува условите од теоремата 4°, т.е. $f(x)$ и $f'(x)$ се непрекинати во сегментот $[-T,T]$, со исклучок на конечно многу точки, каде што тие функции имаат прекини од прв вид. Ако ставиме $g(t)=f(Tt/\pi)$, добиваме

$$g(t+2\pi)=f\left(\frac{T}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{T}{\pi}t+2T\right)=f\left(\frac{T}{\pi}t\right)=g(t).$$

Значи, $g(t)$ има период 2π, а јасно е дека ги исполнува и другите услови за да може да се развие во фурјеов ред. Според тоа, ако ставиме

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,dt,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,dt,$$

добиваме

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=f\left(\frac{T}{\pi}t\right);$$

ставајќи $\frac{T}{\pi}t=x$, добиваме

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}\right).$$

Притоа, коефициентите a_n и b_n се определени со:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{T}{\pi}t\right)\cos nt\,dt,\ \text{па за}\ \frac{T}{\pi}t=x,$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx;\ \text{слично: }b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx.$$

Добиените резултати ќе ги формулираме во следнава теорема:

5°. *Нека $f(x)$ е периодична функција со период $2T$ и нека $f(x)$ и $f'(x)$ се непрекинати функции во сегментот $[-T,T]$, освен можеби, за конечно многу точки, каде што постојат прекини од прв вид. Тогаш, за секоја точка на непрекинатост, точно е равенството:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}\right), \tag{5'}$$

каде што

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx.\ \square \tag{3'}$$

Ако една функција со период $2T$ е парна (или непарна), тогаш нејзиниот фурјеов ред добива попрост облик. Имено, *ако $f(x)$ е* ***парна функција****, тогаш $f(x)\cos(n\pi x/T)$ е исто така парна, а $f(x)\sin(n\pi x/T)$ е непарна функција, од што следува дека*

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx=\frac{2}{T}\int_{0}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx,\quad b_n=0.$$

Фурјеовиот ред, во овој случај, е од облик

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{T}, \tag{6}$$

т.е. ќе биде ***ред од косинуси.***

Во случај функцијата $f(x)$ да е ***непарна****, ќе имаме*

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{0}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{T}, \tag{7}$$

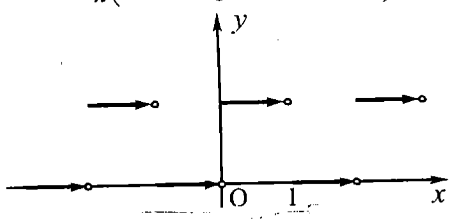
т.е. ќе добиеме ***ред од синуси.*** Да разгледаме неколку примери.

3) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & -1\le x<0\end{cases}$: периодот е 2, а графикот е прикажан на црт. 2.

Имаме: $a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\,dx$, па $a_0=1, a_n=0$ за $n\neq 0$;

$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\sin n\pi x\,dx=\int_0^1\sin n\pi x\,dx=\frac{1-\cos n\pi}{n}$, па $b_{2k+1}=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ и $b_{2k}=0$;

$$f(x)=1+\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$$

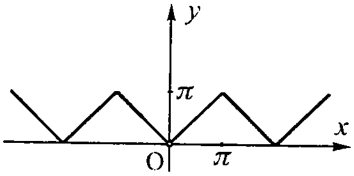


Црт. 2

4) $f(x)=|x|$ за $|x|\le\pi$, со период 2π (црт. 3). Функцијата е парна, па затоа нејзиниот фурјеов ред ќе биде ред од косинуси. Имаме:

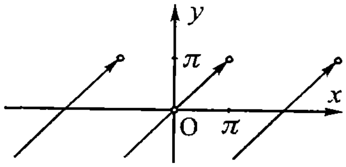
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}=\begin{cases}0, & n=2k, k\neq 0\\ -4/n^2, & n=2k+1\end{cases}\qquad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi,\ \text{па}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+\cdots\right).$$



Црт. 3

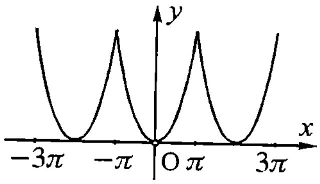
5) $f(x)=x$ за $-\pi\le x<\pi$, со период 2π (црт. 4); функцијата е непарна, па $a_n=0$, а $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}$. Значи: $f(x)=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right)$. За $x=\pi/2$ добиваме: $\frac{\pi}{2}=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$, т.е. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.



Црт. 4

Од изнесените примери се гледа како може дадена функција $f(x)$, која во сегментот $[a,b]$ ги исполнува условите изнесени во теоремата 4°, да се развие во фурјеов ред. Имено, наместо со функцијата $f(x)$, може да се работи со функција што има период $b-a$ и на сегментот $[a,b]$ се совпаѓа со $f(x)$.

6) Функцијата $f(x)=x^2$ да ја развиеме во фурјеов ред во сегментот $[-\pi,\pi]$ (црт. 5). Функцијата е парна, па



Црт. 5

$b_n = 0$; $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x^2 \cos nx\, dx = \frac{(-1)^n 4}{n^2}$; значи имаме:

$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \cdots\right)$ За $x = 0$ добиваме: $\frac{\pi^2}{12} = \sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$.

Ако функцијата $f(x)$ е дефинирана на сегментот $[a, a+2T]$, каде што a е реален, а T - позитивен број, тогаш таа може на единствен начин да се продолжи на целата реална оска во периодична функција со период $2T$.

Ако $f(x)$ ги задоволува условите од теоремата 5° на сегментот $[a, a+2T]$, тогаш во секоја точка на непрекинатост таа може да се развие во фурјеов ред:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

каде што

$$a_n = \frac{1}{T}\int\limits_a^{a+2T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx, \quad n = 0,1,2\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int\limits_a^{a+2T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx, \quad n = 1,2\ldots,$$

којшто претставува фурјеов ред за периодичното продолжение на $f(x)$ на целата оска Ox.

Да разгледаме еден пример.

7) Функцијата $f(x) = x$ да ја разложиме во фурјеов ред во интервалот $[a, a+2T]$. Имаме:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_a^{a+2T} x\,dx = \frac{x^2}{2T}\Big|_a^{a+2T} = 2(a+T);$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int\limits_a^{a+2T} x\cos\frac{n\pi x}{T}dx = \frac{1}{T}\left[\frac{Tx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{T}\Big|_a^{a+2T} - \frac{T}{n\pi}\int\limits_a^{a+2T}\sin\frac{n\pi x}{T}dx\right] =$$

$$= \frac{a+2T}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi a}{T} + 2n\pi\right) - \frac{a}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{T} = \frac{2T}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{T};$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int\limits_a^{a+2T} x\sin\frac{n\pi x}{T}dx = -\frac{2T}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{T}.$$

Според тоа, фурјеовиот ред на $f(x)$ во $(a, a+2T)$ е:

$$f(x) = a + T + \frac{2T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{T}\cdot\cos\frac{n\pi x}{T} - \cos\frac{n\pi a}{T}\cdot\sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

Со изнесеното, ни оддалеку не ја исцрпивме проблематиката во врска со фурјеовите редови. Целта ни беше само да се запознаеме со основните својства на овие редови.

6. 3. Вежби

1. Да се разложи во фурјеов ред во сегментот $[-\pi,\pi]$ функцијата:

а) $f(x)=x$ при $-\pi<x\leq 0, f(x)=2x$ при $0\leq x\leq\pi$;

б) $g(x)=\cos ax$, каде што a не е цел број.

Р е ш е н и е. а) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+\frac{3}{n}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$.

б) $g(x)=\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{a^2-1}\cos x+\frac{1}{a^2-2^2}\cos 2x-\dots\right]$.

2. Да се разложи функцијата $f(x)$ во сегментот $[0,\pi]$:

а) $f(x)=\pi/4$ во ред од синуси;

б) $f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{при } 0\leq x\leq\pi/2\\ -\cos x, \text{при } \pi/2<x\leq\pi\end{cases}$ во ред од косинуси.

Р е ш е н и е. а) $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

б) $f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}+\sum(-1)^{k-1}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\right]$.

3. Да се покаже дека:

а) $e^x-1=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right]$ за $0<x<2\pi$;

б) $\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)=-\sum\frac{\cos nx}{n}$, $0<x<\pi$;

в) $\frac{s}{2}x=\frac{1}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{s}$, $0<x<s$.

4. Да се разложи: а) $f(x)=\begin{cases}x, \text{ при } 0<x\leq 1\\ 2-x, \text{ при } 1<x<2\end{cases}$

во интервалот $(0,2)$ во ред од косинуси;

б) $g(x)=10-x$, во интервалот $(5,15)$ во ред од синуси.

Р е ш е н и е. а) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

б) $g(x)=\frac{10}{\pi}\sum\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$.

5. Функцијата $f(x)$ ги задоволува условите:

а) $f(-x)=-f(x)$ и $f(x+\pi)=-f(x)$;

б) $f(-x)=f(x)$ и $f(x+\pi/2)=-f(-x+\pi/2)$.

Да се докаже дека: а) $a_0=a_1=a_2=\dots=0$ и $b_2=b_4=b_6=\dots=0$; б) $b_1=b_2=$ $=b_3=\dots=0$ и $a_0=a_2=a_4=\dots=0$, во фурјеовиот ред на $f(x)$ во интервалот $(-\pi,\pi)$.

Р е ш е н и е. а) $\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$

$= \int_{\pi}^{0} f(-x)\cos(-nx)d(-x) + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0;$

$$\pi b_{2n} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin 2nx\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx.$$

Ставајќи во претпоследниот интеграл $x+\pi$ наместо x (т.е. смена $x = t+\pi$), добиваме:

$$\pi b_{2n} = \int_0^{\pi} f(x+\pi)\sin(2nx+2n\pi)d(x+\pi) + \int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx =$$

$$= -\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx = 0.$$

б) За $b_n = 0$ се покажува слично како при а). Функцијата е парна, па имаме:

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx\right].$$

Ставајќи во првиот интеграл $x = -t + \pi/2$, а во вториот $x = t + \pi/2$ и потоа користејќи го условот $f(x+\pi/2) = -f(-x+\pi/2)$, добиваме:

$$\frac{\pi}{2}a_{2n} = \int_{\pi/2}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos 2n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)d\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos 2n\left(\frac{\pi}{2}+t\right)d\left(\frac{\pi}{2}+t\right) =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos(n\pi - 2nt)\,dt + \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos(n\pi + 2nt)\,dt = 0$$

(зашто $\cos(n\pi + 2nt) = \cos(n\pi - 2nt)$), т.е. $a_{2n} = 0$.

6. Множеството од реални функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$ се вика ***ортогонално множество*** на сегментот $[a,b]$, ако

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$$

за $m \neq n$; ако е уште и $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1$, тоа се вика ***ортонормирано***.

Да се покаже дека множеството функции

а) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ на $[-\pi, \pi]$;

б) $1, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots$ на $[0,2]$;

в) $1, x, (3x^2-1)/2, (5x^3-1)/2$ на $[-1,1]$,

е ортогонално и да се најде соодветното ортонормирано множество.

Р е ш е н и е. Ортогоналноста на трите множества лесно се проверува. Да ги најдеме соодветните ортонормирани множества. а) Бидејќи

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi, \quad (m \in \mathbb{N}),$$

соодветното ортонормирано множество ќе биде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} \dots .$$

б) $1/\sqrt{2}, \cos\pi x, \sin\pi x, \ldots$.

в) $1/\sqrt{2},\ x\sqrt{3/2},\ (3x^2-1)\sqrt{5/8},\ (x^3-3x)\sqrt{7/8}$.

7. Да се определат $a_0, b_0, \ldots, c_2$ така што функциите $\varphi_1 = a_0, \varphi_2 = b_0 + b_1 x$, $\varphi_3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, да формираат ортонормирано множество на сегментот $[-1,1]$.

Р е ш е н и е. Имаме: $\int_{-1}^{1}\varphi_1^2 dx = 2a_0^2$, па $2a_0^2 = 1 \Rightarrow a_0 = 1/\sqrt{2}$;

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1\varphi_2 dx = \int_{-1}^{1} a_0(b_0 + b_1 x)dx = 2a_0 b_0,\ \text{па } 2a_0 b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_2^2 dx = \int_{-1}^{1}(0 + b_1 x)^2 dx = b_1^2/3,\ \text{па од } 2b_1^2/3 = 1 \Rightarrow b_1 = \sqrt{3/2};$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_1\varphi_3 dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2c_0 + \frac{2}{3}c_2\right),$$

$$\text{па } \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2c_0 + \frac{2}{3}c_2\right) = 0 \Rightarrow c_2 = -3c_0;$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_2\varphi_3 dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}c_1,\ \text{па } c_1 = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_3^2 dx = \int_{-1}^{1}(c_0 + 0\cdot x - 3c_0 x^2)^2 dx = 8c_0^2/5,\ \text{па } 8c_0^2/5 = 1,\ \text{т.е.}$$

$$c_0 = \sqrt{5/8} \quad \text{и} \quad c_2 = -3\sqrt{5/8}.$$

Значи, множеството за кое станува збор е:

$$\varphi_1 = 1/\sqrt{2},\quad \varphi_2 = x\sqrt{3/2},\quad \varphi_3 = (1-3x^2)\sqrt{5/8}$$

8. Ако $f(x)$ е збир на редот $\sum c_n\varphi_n(x)$ на $[a,b]$, при што редот може да се интегрира член по член, а низата $\varphi_n(x)$ е ортонормирана, тогаш се точни равенствата

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

П о м о ш. Равенството $f(x) = \sum c_n\varphi_n(x)$ да се помножи со $\varphi_m(x)$ и да се интегрира на сегментот $[a,b]$.

VIII. 7. Фурјеов метод за решавање парцијални диференцијални равенки

Поимот парцијална диференцијална равенка го воведовме во VI.1.4. Во овој дел ќе разгледаме неколку линеарни парцијални диференцијални равенки од втор ред, коишто често се сретнуваат во разни проблеми од физиката и техничките науки. Претходно ќе го појасниме на еден пример Фурјеовиот метод којшто ќе го искористиме при решавањето на споменатите равенки.

7. 1. Методот на Фурје

Методот на Фурје се состои во тоа што за дадена парцијална диференцијална равенка се бараат оние решенија што можат да се претставаат во облик на производ од повеќе функции, секоја од кои зависи само од една променлива; притоа, парцијалната диференцијална равенка се заменува со еден систем од две или повеќе обични диференцијални равенки. Да го појасниме ова на еден пример.

1) Да ја разгледаме парцијалната диференцијална равенка

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Ги одредуваме оние нејзини решенија што можат да се претставаат во обликот

$$u=f(x)\,g(y). \tag{2}$$

Со диференцирање на (2) и замена во (1) ја добиваме равенката $f'(x)g(y)+$ $+f(x)g'(y)=0$, којашто може да се напише во обликот

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{g'(y)}{g(y)}$$

На левата страна во последната равенка имаме функција од x, а на десната страна функција од y; тоа е возможно само ако и двете страни се константни, т.е.

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{g'(y)}{g(y)}=k. \tag{3}$$

Равенката (3) се распаѓа на две обични диференцијални равенки $f'(x)/f(x)=k$ и $g'(y)/g(y)=-k$, чиишто општи решенија се $f(x)=C_1e^{kx}$, $g(y)=C_2e^{-ky}$, кои заменети во (2) даваат

$$u(x,y)=C_2e^{k(x+y)}. \tag{4}$$

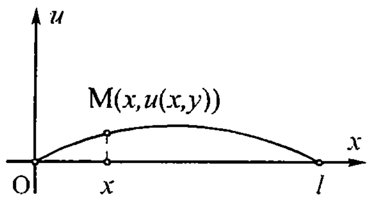
Опишаниот метод често се вика и метод на ***раздвојување на променливите***.

7. 2. Бранова равенка

Да ја разгледаме равенката

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5}$$

каде што a е реален број. Оваа равенка е позната под името ***бранова равенка***, зашто се јавува при изучување на осцилациите на жица зацврстена на двата краја (црт. 1); тоа изучување се состои во одредување на законот за движењето на секоја точка од жицата во зависност од времето t, откако жицата е отклонета од првобитната положба. До истата равенка доведува и изучувањ-



Црт. 1

то на електричните осцилации во проводниците.

Овде, како и во наредните раздели, ќе се интересираме за оние решенија на равенката, коишто задоволуваат и некои други услови. Имено, ќе го одредиме она решение на (5) коешто ги задоволува следниве

$$\textbf{\textit{гранични услови:}} \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{6}$$

$$\textbf{\textit{и почетни услови:}} \quad u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \tag{7}$$

каде што $f(x)$ и $g(x)$ се две познати функции од x.

За задачата на осцилациите на жицата граничните услови значат дека жицата е зацврстена на краевите, додека со почетните услови е дадена положбата на жицата и брзината во секоја нејзина точка во почетокот на нејзиното движење.

Како и во примерот 1), го одредуваме она решение на (5), што ги задоволува условите (6) и (7), а може да се напише во обликот

$$u(x,y) = F(x)\,\Phi(t). \tag{8}$$

Тогаш равенката (5) доведува до следниве две диференцијални равенки:

$$F''(x) - kF(x) = 0, \tag{9}$$

$$\Phi''(t) - a^2k\,\Phi(t) = 0, \quad k \text{ - константа.} \tag{10}$$

Исклучувајќи го тривијалното решение $u(x,t) = 0$, коешто ги задоволува условите (6) и (7) само во случајот кога $f(x) = g(x) = 0$, ќе покажеме прво дека $k < 0$. Од граничните услови (6), а според (8), добиваме

$$u(0,t) = F(0)\Phi(t) = 0, \quad u(l,t) = F(l)\Phi(t) = 0$$

од каде што, поради $\Phi(t) \neq 0$ (случајот $\Phi(t) = 0$ доведува до $u(x,t) = 0$), се добива

$$F(0) = 0, \quad F(l) = 0. \tag{11}$$

За $k = 0$, од (9) би добиле $F(x) = ax+b$, па со оглед на (11) би имале $a = b = 0$ т.е. $u(x,t) = 0$.

Ако е пак $k = p^2 > 0$, од (9) се добива $F(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$, па пак поради (11) би имале $A = B = 0$ и $u(x,t) = 0$ (имено условите (11) би довеле до системот

$$A + B = 0, \quad A\exp(pl) + B\exp(pl) = 0,$$

којшто има само тривијално решение; притоа, $\exp(x)$ означува e^x).

Така, останува случајот $k < 0$; да ставиме $k = -\mu^2$. Равенките (9) и (10) тогаш постануваат

$$F''(x) + \mu^2 F(x) = 0, \tag{9'}$$

$$\Phi''(t) + a^2\mu^2\,\Phi(t) = 0. \tag{10'}$$

Општото решение на (9') е $F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$, од каде што според (11), се добива

$$F(0) = A = 0, \quad F(l) = B\sin\mu l = 0.$$

Во второто од овие две равенства мора да е $B \neq 0$, бидејќи во спротивниот случај би имале $F(x) = 0$, т.е. $u(x,t) = 0$. Според тоа, $\sin \mu l = 0$, т.е.

$$\mu l = n\pi, \quad \mu = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1,2,..., \tag{12}$$

а за секоја вредност μ од (12) се добива решение на (9') што ги задоволува условите (11):

$$F_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1,2,... \tag{13}$$

Во (12) и (13) земаме n да се менува во множеството на природните броеви, бидејќи за $n = 0$ се добива тривијалното решение $F(x) = 0$, а за $n < 0$ можеме знакот "$-$" под знак на синусот да го префрлиме во неопределената константа B_n. Вредностите на μ определени со (12) се викаат ***сопствени вредности*** за разгледуваната задача при зададените гранични услови, а соодветните функции $F_n(x)$ од (13) - ***сопствени функции***.

За секоја вредност на μ од (12) се добива по една равенка од (10')

$$\Phi''(t) + \nu_n^2\Phi(t) = 0, \quad \nu_n = \frac{an\pi}{l}, \tag{14}$$

чии општи решенија се

$$\Phi_n(t) = C_n \cos \nu_n t + C_n^* \sin \nu_n t, \quad n = 1,2,... \tag{15}$$

Од (8), (13) и (15) добиваме дека секоја од функциите

$$u_n(x,t) = F_n(x)\Phi_n(t) = (D_n \cos \nu_n t + D_n^* \sin \nu_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1,2... \tag{16}$$

каде што е $D_n = B_nC_n$ и $D_n^* = B_nC_n^*$, е решение на равенката (5) што ги задоволува граничните услови (6). Во општ случај, меѓу решенијата (16) може да не постои решение што би ги задоволувало и почетните услови (7). Поради тоа, ќе го разгледаме редот

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(D_n \cos \nu_n t + D_n^* \sin \nu_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{17}$$

а константите D_n и D_n^* ќе ги определиме така што функцијата $u(x,t)$ да ги задоволува и почетните услови (7). Да забележиме дека функцијата $u(x,t)$ ја задоволува равенката (5) и граничните услови (6) (равенката (5) е хомогена линеарна; во други случаи ова може и да не биде точно).

Од првиот од почетните услови се добива дека

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)$$

а според теоремата 5° од **6.2**, тогаш добиваме дека

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n = 1,2,.. \tag{18}$$

Диференцирајќи го (17) и користејќи го вториот од почетните услови добиваме

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(-D_n \nu_n \sin \nu_n t + D_n^* \nu_n \cos \nu_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x\right]_{t=0} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \nu_n \sin\frac{n\pi}{l}x = g(x)$$

па како и за D_n добиваме

$$D_n^* = \frac{2}{an\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx, \quad n = 1,2,.. \tag{19}$$

На тој начин, со редот (17), каде што D_n и D_n^* се определени со (18) и (19), е дадено решението на равенката (5) што ги задоволува граничните услови (6) и почетните услови (7). Притоа, со (17) е дадено решението за оние вредности на t и x, за кои е возможно двапати диференцирање член по член, а збировите на изводните редови $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ се непрекинати функции.

7. 3. Равенка на топлоспроводливост

Ќе ја разгледаме равенката

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{20}$$

До оваа равенка доведува проблемот за распространување на топлината во прачка; притоа $a^2 = k / \sigma\rho$ каде што k е коефициент на распространувањето на топлината, σ - специфичната топлина и ρ - густината на материјалот на прачката.

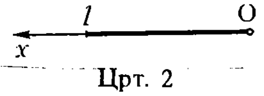
Најнапред ќе го разгледаме случајот кога е потребно да се одреди такво решение на (20) што ги задоволува следниве

$$\text{гранични услови: } u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \tag{21}$$

$$\text{и почетен услов: } u(x,0) = f(x), \tag{22}$$

каде што $f(x)$ е позната функција.

Физичката смисла на граничните услови (21) се состои во тоа што се разгледува прачка (црт. 2) со должина l и се претпоставува дека на краевите на прачката температурата е 0.



Црт. 2

Ставајќи $u(x,t) = F(x)\cdot\Phi(t)$, равенката (20) ја сведуваме на следниве две обични диференцијални равенки:

$$F''(x)+\mu^2F(x)=0 \tag{23}$$

$$\Phi'(t)+a^2\mu^2\Phi(t)=0, \tag{24}$$

при што, како и во претходниот раздел, константата k на раздвојувањето и овде се зема за негативна, $k=-\mu^2$.

И во овој случај сопствените вредности и сопствените функции се дадени со (12) и (13), а за секоја од сопствените вредности μ се добива соодветна равенка од (24),

$$\Phi_n'(t)+a^2\mu_n{}^2\Phi_n(t)=0,\ \mu_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\dots \tag{24'}$$

Бидејќи општите решенија на (24') се дадени со

$$\Phi_n(t)=C_n\exp(-\nu_n{}^2t) \qquad \nu_n=\frac{an\pi}{l},\ n=1,2,\dots \tag{25}$$

секоја од функциите

$$u_n(x,t)=F_n(x)\Phi_n(t)=D_n\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\exp(-\nu_n{}^2t),\quad n=1,2,\dots \tag{26}$$

претставува решение на (20) што ги задоволува граничните услови (21).

За да го најдеме она решение на (20), кое покрај граничните услови го задоволува и почетниот услов (22), го разгледуваме редот

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\exp(-\nu_n{}^2t), \tag{27}$$

а D_n ги определуваме така што да биде

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)$$

Од тоа, според теоремата 5° од **6.2** се добива

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\quad n=1,2,\dots \tag{28}$$

Така, со редот (27), каде што D_n се определени со (28), е дадено решението на (20) што ги задоволува граничните услови (21) и почетниот услов (22) (и овде во однос на редот (27) треба да се направат претпоставки, соодветни на оние при брановата равенка).

Да ја разгледаме сега равенката (20), задржувајќи го само почетниот услов (22). (Тоа би значело дека се разгледува прачка со "бесконечна должина".) Земајќи $u(x,t)=F(x)\Phi(t)$, доаѓаме до равенките (23) и (24), чии општи решенија се

$$F(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x, \tag{29}$$

$$\Phi(t)=C\exp(-a^2\mu^2t). \tag{30}$$

Од (30) и (29) е јасно дека можеме да се задржиме само на случајот $\mu>0$.

Од (29) и (30) добиваме дека секоја функција $u(x,t;\mu)$ од облик

$$u(x,t;m) = F(x)\Phi(t) = (M\cos\mu x + N\sin\mu x)\exp(-a^2\mu^2 t), \tag{31}$$

каде што $M = AC$, $N = BC$, е решение на равенката (20).

Каков било функционален ред од облик (31), за $t = 0$ претставува периодична функција. Со оглед на тоа што $f(x)$, во општ случај, не мора да биде периодична, наместо ред, овде го разгледуваме интегралот

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} u(x,t;\mu)d\mu = \int_0^{\infty}\left[M(\mu)\cos\mu x + N(\mu)\sin\mu x\right]\exp(-a^2\mu^2 t)d\mu, \tag{32}$$

каде што произволните константи M и N од (31) ги сметаме сега за функции од μ.

Ако го земеме предвид почетниот услов (22), ќе добиеме дека

$$u(x,0) = \int_0^{\infty}\left[M(\mu)\cos\mu x + N(\mu)\sin\mu x\right]d\mu = f(x). \tag{33}$$

За определување на функциите $M(\mu)$ и $N(\mu)$ се користи следнава теорема (што нема да ја докажеме):

1°. *Ако постои интегралот* $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ *и ако* $f(x)$ *е диференцијабилна функција, тогаш е точно равенството* (33), *каде што*

$$M(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\mu u\,du, \quad N(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin\mu u\,du. \;\Box \tag{34}$$

Така, ако интегралот (32) може да се диференцира двапати по x и еднаш по t, и ако притоа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ се непрекинати функции, тогаш, со (32) е дадено решението на равенката (20) што го задоволува почетниот услов (22); притоа, $M(\mu)$ и $N(\mu)$ се определуваат со (34), ако за $f(x)$ се исполнети и условите од својството 1°.

Макар што горните разгледувања не можат да се сметаат за доволно образложени, овде ние ќе се задоволиме со изнесеното. Целта ни беше да го илустрираме Фурјеовиот метод за решавање на парцијални диференцијални равенки, и тоа за одредување такви решенија, коишто задоволуваат дадени гранични и почетни услови. Читателот што сака поопстојно да се запознае со заклучоците кои овде накратко ги дискутиравме, ќе треба да консултира соодветна литература.[1]

7. 4. Вежби

1. Со помош на методот на Фурје да се реши секоја од дадените парцијални диференцијални равенки:

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial u}{\partial y}$; б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2(x+y)u$; в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u$.

1) Да се види, на пример, *Kreyszig*, 486-518

Р е ш е н и е. а) Работејќи како во примерот 1) се добива $u(x,y)=Cy^k e^{kx}$.

б) $u(x,y)=C\exp[(x^2+y^2+k(x-y)]$. в) $u(x,y)=C\exp(kx+y/k)$.

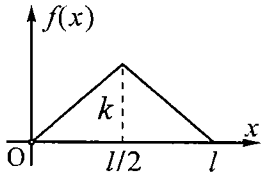
2. Да се реши брановата равенка при граничните услови (6) и почетните услови (7) ако:

а) $f(x)$ е дадена со графикот на црт. 3, а $g(x)=0$;

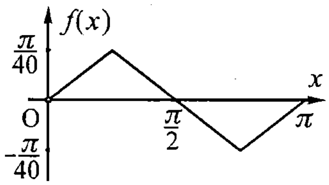
б) $a=1$, $l=\pi$, $f(x)=0{,}02\sin x$, $g(x)=0$;

в) $a=1$, $l=\pi$, $f(x)=k(\sin x-\sin 2x)$, $g(x)=0$;

г) $a=1$, $l=\pi$, $g(x)=0$, а $f(x)$ е дадена графички на црт. 4 (на оските се избрани различни единични отсечки)



Црт. 3



Црт. 4

Р е ш е н и е. а) Функцијата $f(x)$ е определена со:

$$f(x)=\begin{cases} 2kx/l, & 0\le x\le l/2 \\ 2k(l-x)/l, & (l/2)\le x\le l \end{cases}.$$

Поради $g(x)=0$, од (19) добиваме $D_n^*=0$, додека пак од (18), наоѓаме

$$D_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2}\frac{2k}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx+\int_{l/2}^{l}\frac{2k}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Според тоа, $D_{2s}=0$, $D_{2s-1}=(-1)^{s+1}\dfrac{8k}{(2s-1)^2\pi^2}$, па со замена во (17) добиваме:

$$u(x,t)=\frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{a\pi}{l}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3a\pi}{l}t+\ldots\right)=$$

$$=\frac{8k}{\pi^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{(2s-1)^2}\sin\frac{(2s-1)\pi}{l}x\cos\frac{(2s-1)a\pi}{l}t;$$

б) $D_n^*=0$, $D_n=0$, $n\neq 1$, $D_1=\dfrac{0{,}04}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=0{,}02$; $u(x,t)=0{,}02\sin x\sin t$.

в) $D_n^*=0$, $D_n=0$, $n\neq 1,2$, $D_1=\dfrac{2k}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=k$, $D_2=-\dfrac{2k}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx=-k$,

$$u(x,t)=k(\sin x\cos t-\sin 2x\cos 2t).$$

г) За функцијата $f(x)$ имаме: $f(x)=x/10, x\in[0,\pi/4]$;

$f(x)=(-x+\pi/2)/10$, $x\in[\pi/4,3\pi/4]$; $f(x)=(x-\pi)/10$, $x\in[3\pi/4,\pi]$.

Тогаш $D_n^*=0$, $D_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x}{10}\sin nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin nx\,dx+$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{3\pi/4}^{\pi}\frac{1}{10}(x-\pi)\sin nx\,dx=\frac{2}{5n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{4}-\frac{2}{5n^2\pi}\sin\frac{3n\pi}{4};$$

така $D_1 = 0, D_2 = \frac{4}{5\pi}\cdot\frac{1}{2^2}, D_3 = D_4 = D_5 = 0,\ D_6 = -\frac{4}{5\pi}\cdot\frac{1}{6^2}, D_7 = D_8 = D_9 = 0,$

$D_{10} = \frac{4}{5\pi}\cdot\frac{1}{10^2},\ldots,$ па $u(x,t) = \frac{4}{5\pi}\left(\frac{\sin 2x\cos 2t}{2^2} - \frac{\sin 6x\cos 6t}{6^2} + \frac{\sin 10x\cos 10t}{10^2} - \ldots\right)$

3. Да се покаже дека решението (32) на равенката (20), каде што $M(\mu)$ и $N(\mu)$ се определени со (34), може да се доведе во облик

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp\left(-\frac{(u-x)^2}{4a^2t}\right)du. \tag{35}$$

Р е ш е н и е. Со замена на $M(\mu)$ и $N(\mu)$ од (34) во (32), по средувањето се добива

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-a^2\mu^2t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\mu(u-x)\,du\right)d\mu,$$

каде што со промена на редоследот на интеграцијата се добива

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(u)\left(\int_0^{+\infty}\exp(-a^2\mu^2t)\cos\mu(u-x)\,d\mu\right)\right]du. \tag{36}$$

Ставајќи $a\mu\sqrt{t} = z,\ (u-x)/a\sqrt{t} = \xi,$ добиваме дека

$$\int_0^{\infty}\exp(-a^2\mu^2t)\cos\mu(u-x)\,d\mu = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{\infty}\exp(-z^2)\cos\xi z\,dz. \tag{37}$$

Нека $J(\xi) = \int_0^{\infty}\exp(-z^2)\cos\xi z\,dz$. Тогаш $J'(\xi) = -\int_0^{\infty}\exp(-z^2)z\sin\xi z\,dz$, па применувајќи го методот на делумна интеграција, добиваме

$$J'(\xi) = \frac{1}{2}\exp(-z^2)\sin\xi z\,\Big|_0^{\infty} - \frac{\xi}{2}\int_0^{\infty}\exp(-z^2)\cos\xi z\,dz = -\frac{\xi}{2}J(\xi),$$

т.е. $J'(\xi) = -\xi J(\xi)/2$, од каде што се добива дека $J(\xi) = C\exp(-\xi^2/4)$. Бидејќи $J(0) = \int_0^{\infty}\exp(-z^2)dz = \sqrt{\pi}/2$ (вежба 4 од VI.3.4), добиваме дека $\sqrt{\pi}/2 = J(0) = C$ и значи $J(\xi) = (\sqrt{\pi}/2)\exp(-\xi^2/4)$. Така,

$$\int_0^{\infty}\exp(-a^2\mu^2t)\cos\mu(u-x)\,d\mu = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\left(-\frac{(u-x)^2}{4a^2t}\right),$$

што заменето во (36) го дава равенството (35).

4. Да се покаже дека брановата равенка (5):

$$u_{tt} = a^2u_{xx} \tag{5'}$$

со смената

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at, \tag{38}$$

се трансформира во парцијалната диференцијална равенка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\cdot\partial\eta} = 0. \tag{39}$$

Потоа, со интегрирање на (39), да се покаже дека

$$u = f(\xi) + g(\eta),$$

каде што f и g се произволни, двапати диференцијабилни функции, е решение на (39). Од тоа да се направи заклучок дека

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at) \tag{40}$$

е решение на (5'). (Тоа е познато како ***Даламберово решение*** на брановата равенка.)

IX. КОМПЛЕКСНИ ФУНКЦИИ

Прво се конструира полето $\mathbb{C}$ на комплексните броеви како проширување на $\mathbb{R}$ така што равенката $x^2+1=0$ да има решение. По кратка дискусија во врска со геометриската интерпретација и примена за коренување, се разгледуваат равенките во $\mathbb{C}$ со степен ≤ 4, како и равенки што се сведуваат на нив. Потоа се дефинираат комплексните функции од една реална променлива и тие се применуваат за решавање на линеарни диференцијални равенки од втор ред со константни коефициенти.

Читателот што има доволно предзнаења за комплексните броеви, може веднаш да преjде на изучувањето на IX.4 - IX.7, каде што се изнесени почетните елементи на диференцијалното и интегралното сметање кај функциите од една комплексна променлива. (Со цел овој дел да претставува автономна целина, извршени се соодветни повторувања во IX.4.) Параграфот IX.8 е посветен на лапласовата транформација, односно на нејзината примена за решавање диференцијални равенки, а IX.9 - на комплексните векторски простори и комплексните матрици.

IX. 1. Поле на комплексните броеви

1. 1. Конструкција на комплексните броеви

Си поставуваме задача да добиеме поле во кое се содржат сите реални броеви и во кое полиномот x^2+1 има корен. За таа цел ќе избереме еден симбол - буквата i, како корен на x^2+1. Ако b е реален број, го формираме "бројот" од облик bi, и натаму, за секој реален број a го формираме "бројот" од облик $a+bi$. Притоа сметаме дека

$$0i=0,\quad 1i=i,\quad a+0i=a,\quad 0+bi=bi,$$

т.е. дека $0i, 1i, a+0i, 0+bi$ се други ознаки за $0, i, a, bi$ соодветно.

За секој елемент $a+bi$, каде што a и b се реални броеви, ќе велиме дека е ***комплексен број***, а множеството од сите комплексни броеви ќе го означиме со $\mathbb{C}$. Поради $a=a+0i$ добиваме дека секој реален број е и комплексен. Ако $z=a+bi$, тогаш за a велиме дека е ***реален***, а за b ***имагинарен дел*** од z и пишуваме

$$a=\operatorname{Re}z, \quad b=\operatorname{Im}z.$$

Да споменеме уште во почетокот дека двата комплексни броја z и w ги сметаме за еднакви само ако имаат еднакви реални и имагинарни делови, т.е.

$$a+bi=c+di \quad \Leftrightarrow \quad a=c, \ b=d. \tag{1}$$

Исто така, комплексниот број $a+bi$ често ќе го пишуваме и во облик $a+ib$, т.е. $a+bi$ и $a+ib$ се две ознаки за еден ист комплексен број.

1. 2. Поле на комплексните броеви

Да дефинираме сега операции собирање и множење во множеството на комплексните броеви, така што да добиеме поле [1] во кое собирањето и множењето на реалните броеви ќе се врши на ист начин како и досега и во кое ќе биде точно равенството $i^2=-1$. Да претпоставиме дека операциите собирање и множење со бараните својства се веќе дефинирани. Ако $z=a+bi$ и $w=c+id$, тогаш ќе имаме:

$$z+w=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d),$$

$$z\cdot w=(a+ib)(c+id)=a(c+id)+ib(c+id)=$$

$$=ac+iad+ibc-bd=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

Оттука следува дека операциите ***собирање*** и ***множење на комплексни броеви***, кои засега ќе ги означиме со $\oplus$ и $\odot$, треба да се дефинираат на следниот начин:

$$(a+ib)\oplus(c+id)=(a+c)+i(b+d), \tag{2}$$

$$(a+ib)\odot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc). \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува:

$$a\oplus b=(a+i0)\oplus(b+i0)=(a+b)+i0=a+b,$$

$$a\odot b=(a+i0)\odot(b+i0)=(ab-0)+i(0+0)=ab.$$

Значи, збирот и производот на реални броеви определени со (2) и (3) ги имаат вообичаените значења. Понатаму, за $b,\ x\in R$, имаме и:

$$i\odot b=(0+i1)\odot(b+i0)=(0b-1\cdot 0)+i(0\cdot 0+1\cdot b)=ib,$$

$$x\oplus ib=(x+i0)\oplus(0+ib)=(x+0)+i(0+b)=x+ib.$$

1) Да се види I.1.6

Од ова следува дека не може да настане недоразбирање ако дефинираните операции ги означиме со вообичаените ознаки "+" и "•", наместо со $\oplus$ и $\odot$. Според тоа, (2) и (3) ги добиваат следниве форми:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d) \tag{2'}$$

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc). \tag{3'}$$

Со помош на соодветните својства на реалните броеви, лесно се докажува дека операциите собирање и множење се комутативни и асоцијативни, а и дека множењето е дистрибутивно спрема собирањето. Нулата $0=0+i0$ е неутрален елемент за собирање, а $1=1+i\cdot 0$ е неутрален елемент за множење. Потоа, $(-a)+i(-b)=-(a+ib)$ е спротивен за $a+ib$, т.е. $(a+ib)+[(-a)+i(-b)]=0$. Ако $a^2+b^2\neq 0$, т.е. $a+ib\neq 0$, тогаш:

$$(a+ib)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+i\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}=1.$$

Според тоа:

$$\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i=(a+ib)^{-1}. \tag{4}$$

Од сето тоа следува точноста на следнава теорема:

1°. *Множеството $\mathbb{C}$ на комплексните броеви е поле во однос на операциите собирање и множење.*

Притоа реалните броеви се собираат и се множат во $\mathbb{C}$ на ист начин како и во $\mathbb{R}$, а освен тоа:

$$i\cdot i=(0+1\cdot i)(0+1\cdot i)=-1+i\cdot 0=-1\ . \ \square$$

Ако $z=a+bi$, тогаш комплексниот број $a-ib$ ќе го означиме со $\overline{z}$, и ќе велиме дека е ***конјугиран*** на z. Лесно се покажува дека се точни следниве својства:

2°. $z=a+ib\Longrightarrow z\overline{z}=a^2+b^2$. $\square$

3°. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$, за секои $z_1, z_2\in\mathbb{C}$. $\square$

Имајќи предвид дека $\mathbb{C}$ е поле, можеме да дефинираме операција *делење* со:

$$z_1:z_2=\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}, \text{ каде што } z_2\neq 0.$$

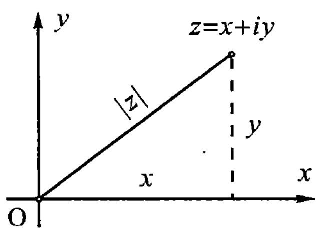
Со помош на ова може и ефективно да се врши делењето, но во пракса е подобро да се користи својството 2°. Така, на пример, имаме:

$$\frac{1+i}{2+i}=\frac{(1+i)(2-i)}{4+1}=\frac{1}{5}(3+i).$$

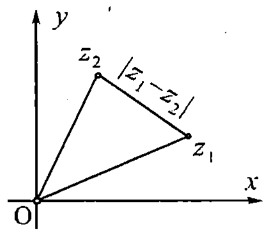
Да споменеме дека е вообичаено комплексниот број $z=ib$ (b е реален, $b\neq 0$) да се вика ***имагинарен***.

1. 3. Геометриска интерпретација на комплексните броеви

Фактот што секој комплексен број z е еднозначно определен од еден пар реални броеви, наложува да ги интерпретираме овие броеви како точки од една рамнина. Имено, во рамнината избираме декартов правоаголен систем Oxy и комплексниот број $z = x + iy$, го претставуваме со точката (x, y) (црт. 1). Според тоа, реалните броеви се нанесуваат на апсцината оска, а имагинарните - на ординантата. Затоа апсцисната оска ќе ја викаме ***реална***, а ординатната - ***имагинарна оска***.



Црт. 1



Црт. 2

Растојанието од точката z до координатниот почеток се вика ***модул*** (или ***норма***) на z и се означува со $|z|$.

4°. *Ако $z = x + iy$, тогаш имаме:* $|z|^2 = x^2 + y^2$. □

Јасно е дека за $y = 0$, т.е. кога $z = x$ е реален број, поимот за модул се совпаѓа со поимот апсолутна вредност, па затоа наместо "модул од z" ќе велиме и ***апсолутна вредност*** од z. Исто така, забележуваме дека $z \mapsto |z|$ е пресликување од множеството на комплексните броеви во множеството на ненегативните реални броеви.

Ако $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ се два комплексни броја, тогаш модулот на нивната разлика изнесува

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

(црт. 2), од што следува дека:

5°. *Бројот $|z_1 - z_2|$ е еднаков со растојанието меѓу точките чии претставници се z_1 односно z_2.* □

Ќе го докажеме следново важно својство за модулите:

6°. *За секој пар комплексни броеви z_1, z_2 важи неравенството*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Д о к а з. Од својството 5° (да се види и црт. 2) следува дека $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Од друга страна, според 4°, имаме $|-z| = |z|$, па значи

$$|z_1+z_2|=|z_1-(-z_2)|\le |z_1|+|-z_2|=|z_1|+|z_2|,$$

што и сакавме да докажеме. □

Да напомниме дека ова неравенство се докажува лесно и чисто алгебарски. Имено, би требало да се докаже дека е точно неравенството

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\le\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

за секоја четворка реални броеви x_1, x_2, y_1, y_2 (види и V.1.1).

Со директно пресметување се докажува дека е точно и следново својство:

7°. $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2\ne 0)$. □

1. 4. Моаврова формула

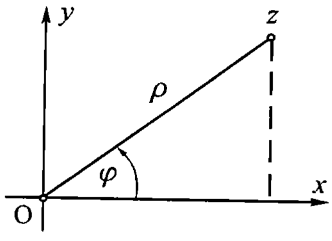
Ако наместо со декартов систем работиме со поларен, на комплексниот број $z=x+iy$ можеме да му ја дадеме следнава *тригонометриска форма*:

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \qquad (5)$$

каде што ρ е модулот на z, т.е.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|z|,$$

а φ е аголот меѓу позитивната насока на оската Ox и отсечката Oz (црт. 3); φ се вика *аргумент* на z и се означува со $\arg z$. Притоа, ρ е еднозначно определен од комплексниот број z, но тоа не важи и за φ. Ако $z=0$, тогаш имаме $0=0(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ за секој φ, а за $z\ne 0$, добиваме:



Црт. 3

8°. $\cos\varphi+i\sin\varphi=\cos\alpha+i\sin\alpha \Leftrightarrow \varphi-\alpha=2k\pi$ *каде што* k *е цел број.* □

Ако $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1), z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, тогаш лесно се покажува точноста на следниве равенства:

9°. $z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$. □

10°. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$, $(\rho_2\ne 0)$. □

Како последици од овие равенства, се добиваат равенствата 7°, а и следното равенство, познато под името *Моаврова формула*:

11°. $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$,

за секој цел број n и секој реален број φ.

Д о к а з. За $n=0$ и $n=1$ точноста е јасна. За $n=2$ следува од 9°, а потоа (со индукција) лесно се покажува дека Моавровата формула е точна за секој природен број n. За $n=-1$, ќе имаме:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi=$$

$$=\cos(-1)\varphi+i\sin(-1)\varphi.$$

Нека n е негативен цел број. Ако ставиме $m=-n$, добиваме

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n}=[(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}]^{m}=[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)^{-1}]^{m}=$$

$$=\cos m(-\varphi)+i\sin m(-\varphi)=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$$

од што следува дека Моавровата формула е точна и кога n е негативен цел број. □

1. 5. Коренување

Наредната теорема овозможува да се воведе поим за корен кај комплексните броеви.

12°. *Нека $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ е даден комплексен број различен од нула. За секој природен број n равенката $w^n=z$ има n различни решенија во множеството на комплексните броеви. Тие решенија се:*

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),\tag{6}$$

каде што $k=0,1,\dots,n-1$.

Д о к а з. Ако w_k е определен со (6), а притоа k е кој било цел број, тогаш (имајќи ја предвид Моавровата формула) добиваме дека е точно равенството $w_k^n=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=z$.

Обратно, од $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $w^n=z$ (пак според Моавровата формула), добиваме $\rho=\sqrt[n]{r},\ \varphi=\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$, за некој цел број k. Имајќи предвид дека $w_{k+n}=w_k$, заклучуваме дека равенката $w^n=z$ има најмногу n различни решенија $w_0,w_1,\dots,w_{n-1}$.

Преостанува уште да докажеме дека тие решенија се навистина различни. Да претпоставиме дека $w_s=w_t$, каде што $0\le s\le t<n$. Тогаш имаме:

$$\frac{\alpha+2t\pi}{n}-\frac{\alpha+2s\pi}{n}=2k\pi,$$

т.е. $t-s=kn$, што е можно само за $t=s$. Со тоа теоремата е докажана. □

Како и при реалните броеви, секое решение на равенката $w^n=z$ се вика ***корен*** на z и се означува со $\sqrt[n]{z}$. Според докажаната теорема, ако

$z \neq 0$, $\sqrt[n]{z}$ има n различни вредности. Значи, при комплексните броеви,

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$$

е множество со n елементи. На пример:

$$\sqrt[3]{i} = \left\{\cos\frac{2k\pi + \pi/2}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \pi/2}{3} \;\middle|\; k = 0,1,2\right\} = \left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i\right\}.$$

Ако z е реален број, тогаш при употребата на ознаката $\sqrt[n]{z}$ постои опасност да настане недоразбирање. Имено, во множеството на реалните броеви $\sqrt[n]{z}$ е еднозначно определен број, додека (за $z \neq 0$) при комплексните броеви тоа е множество со n елементи. За да истакнеме дека се работи во множеството на комплексните броеви, ќе пишуваме $\sqrt[n]{\overline{z}}$. Така, имаме:

$$\sqrt[3]{\overline{1}} = \left\{1, -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\};$$

притоа $\sqrt{3}$ е еднозначно определен реален број.

За комплексниот број ε велиме дека е ***примитивен n-ти корен на единицата*** ако $\varepsilon^n = 1$, но $\varepsilon^m \neq 1$, за секој $m: 0 < m < n$, т.е ако ε е n-ти корен на единицата, но не е m-ти корен на единицата за $0 < m < n$. Ќе ја докажеме следнава теорема:

13°. *Комплексниот број ε е примитивен n-ти корен на единицата ако и само ако*

$$\varepsilon = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \tag{7}$$

каде што k е природен број заемно прост со n. Во тој случај со

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$$

се исцрпува множеството од сите n-ти корени на единицата.

Доказ. Нека ε е примитивен n-ти корен на единицата. Поради $\varepsilon^n = 1 = \cos 0 + i\sin 0$, го добиваме равенството (7), за некој $k: 0 \leq k \leq n-1$. Ако s е заеднички делител на k и n и ако $k = sp$, $n = sq$, ќе имаме $\varepsilon = \cos(2p\pi/q) + i\sin(2p\pi/q)$, од што следува $\varepsilon^q = \cos 2p\pi + i\sin 2p\pi = 1$, што е можно само за $q = n$, т.е. $s = 1$. Со тоа покажавме дека k и n се заемно прости.

Да претпоставиме сега дека важи (7), каде што $0 < k < n-1$ и k е заемно прост со n. Јасно е дека $\varepsilon^n = 1$. Да видиме дали е можно да биде $\varepsilon^m = 1$ за $0 < m < n$. Во тој случај би имале $\cos(2km\pi/n) = 1$, т.е. n е делител на km, што поради $(k,n) = 1$ и $0 < m < n$ не е можно; според тоа, ε е навистина примитивен n-ти корен на единицата. Во тој случај имаме $(\varepsilon^{\nu})^{n}=(\varepsilon^{n})^{\nu}=1$, па значи сите броеви $\varepsilon,\varepsilon^{2},\dots,\varepsilon^{n-1},\varepsilon^{n}=1$ се n-ти корени на единицата. Ако $\varepsilon^{\nu}=\varepsilon^{\lambda}$, за $1\le\nu\le\lambda\le n$, ќе имаме $\varepsilon^{\lambda-\nu}=1$, што е можно само ако $\lambda=\nu$. Според тоа сите броеви $1,\varepsilon,\dots,\varepsilon^{n-1}$ се различни, а со тоа доказот на теоремата е комплетиран. □

Лесно се докажува и следнава теорема:

14°. *Ако ε е примитивен n-ти корен на единицата, а w една вредност на коренот $\sqrt[n]{z}$, тогаш $\{w,w\varepsilon,w\varepsilon^{2},\dots,w\varepsilon^{n-1}\}$ е множеството од сите вредности на $\sqrt[n]{z}$.* □

1. 6. Вежби

1. Да се пресмета: а) i^{n}; б) $(1+i)^{10}$; в) $(1+i)^{n}$; г) $(1+i)^{9}/(1-i)^{7}$.

Р е ш е н и е. а) Пред сè, воочуваме дека $i^{2}=-1, i^{3}=-i, i^{4}=1$. Нека при делењето на n со 4 се добие количник k и остаток r, т.е. $n=4k+r$ каде што $0\le r\le 3$. Тогаш имаме $i^{n}=i^{r}=1,i,-1,-i$ за $r=0,1,2,3$ соодветно.

б) $32i$; добро е притоа да се користи равенството $(1+i)^{2}=2i$.

в) $2^{k}i^{k}$ за $n=2k$; $2^{k}i^{k}(1+i)$, за $n=2k+1$. г) 2.

2. Да се решат приложените равенки и системи равенки:

а) $(1+i)x=(2-i)x+3i$; б) $(1/(x+i))+i=(2+i)/i$;

в) $(-i)x+(4+2i)y=-1+3i$, $(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i$;

г) $x+iy-2z=10$, $x-y+3iz=30$; $ix+3iy-(1+i)z=30$.

О д г о в о р. а) $x=-(-6+3i)/5$. б) $x=(1-7i)/10$. в) $x=1+i, y=i$.
г) $x=\dfrac{10}{3}-\dfrac{110}{9}i$, $y=-\dfrac{10}{3}-\dfrac{80}{9}i$, $z=\dfrac{10}{9}-\dfrac{70}{9}i$.

3. Да се определи комплексниот број z така што:

а) $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$; б) $\bar{z}=z^{2}$; в) $\bar{z}=z^{3}$.

Р е ш е н и е. а) Нека $z=x+iy$. Тогаш имаме: $\bar{z}=x-iy$. а) $\bar{z}z=1$, т.е. $x^{2}+y^{2}=1$, што значи сите точки од единичната кружница. б) Дадената равенка е еквивалентна со следниот систем равенки со реални непознати: $x=x^{2}-y^{2}$, $-y=2xy$; решенија на овој систем се двојките $(0,0),(1,0),(-1/2;\pm\sqrt{3}/2)$; според тоа имаме: $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=(-1+i\sqrt{3})/2$, $z_4=-(1+i\sqrt{3})/2$.

в) $z_1=0, z_{2,3}=\pm i, z_{4,5}=\pm 1$.

4. Да се пресмета: а) $(\sqrt{3}-i)^{n}$; б) $(1+i\sqrt{3})^{n}$; в) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{10}}$; г) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{4n}}{(1+i)^{8n}}$.

Р е ш е н и е. а) Имаме: $\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$, а од тоа следува $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$. б) $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $(1+i\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$. в) $-2^{10}i$. г) 1 за $n=3k$; $-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ за $n=3k+1$; $(-1+i\sqrt{3})/2$ за $n=3k+2$, $k=0,1,2\ldots$

5. Во кој случај е точно равенството:

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{1-i\operatorname{tg}\varphi}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\varphi}{1-i\operatorname{tg}n\varphi}\ ?$$

Р е ш е н и е. Ако се примени Моавровата формула, лесно се добива дека равенството е точно за секој $\varphi\neq(2k+1)\pi/2n$ и $(2k+1)\pi/2$, k е цел број.

6. Да се пресметаат сите вредности на корените:

а) $\sqrt[3]{2-2i}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; в) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

Р е ш е н и е. а) $z_k=\sqrt{2}\left[\cos\frac{(8k-1)\pi}{12}+i\sin\frac{(8k-1)\pi}{12}\right]$, $k=0,1,2$; потоа ќе треба да се пресметаат $\cos(\pi/12)$ и $\sin(\pi/12)$; тоа може да се направи со таблица, а и со помош на формулите за тригонометриски функции од полуагли.

б) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

в) $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]}{2[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right]$; потоа се добива: $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left[\cos\frac{(24k-7)\pi}{72}+i\sin\frac{(24k-7)\pi}{72}\right]$.

7. Да се изразат:

а) $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$; б) $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$,

со помош на степените од $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Р е ш е н и е. а) $\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

б) Применувајќи ја прво биномната формула, имаме:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos^n\alpha+\binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha(i\sin\alpha)+\binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha(-\sin^2\alpha)+$$
$$+\binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha(-i\sin^3\alpha)+\cdots+\binom{n}{n}i^n\sin^n\alpha,$$

а потоа Моавровата: $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$. Според тоа:

$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+\cdots,$$

$$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \cdots, \text{ т.е.}$$

$$\cos n\alpha = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k}\alpha,$$

$$\sin n\alpha = \sum_{k=1}^{s}(-1)^{k+1}\binom{n}{2k-1}\cos^{n-2k+1}\alpha\sin^{2k-1}\alpha,$$

каде што $r=[n/2]$ (r е цел дел од $n/2$), а $s=[(n+1)/2]$.

8. Да се напише равенката на: а) кружница; б) елипса; в) хипербола, користејќи ја геометриската интерпретација на комплексните броеви.

Р е ш е н и е. а) $|z-z_0|=r$ е равенка на кружница со центар во z_0 и радиус r.

б) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ е равенка на елипса со фокуси z_1, z_2 и полуоска a; притоа $2a>|z_1-z_2|$.

в) хипербола со фокуси z_1, z_2 и полуоска a: $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2a$.

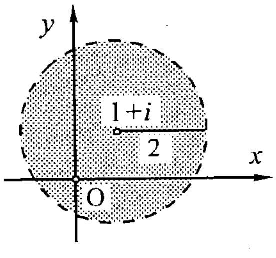
9. Што претставува геометриски секоја од подолу приложените равенки односно неравенки?

а) $|z-1+i|<2$; б) $|z-i|\geq 1$; в) $|z-i|+|z-1-2i|=3$;

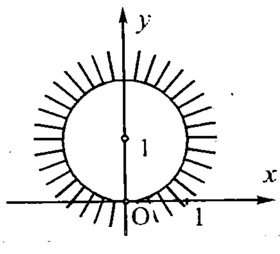
г) $|z-2|-|z+2|=2$; д) $|z-z_1|=|z-z_2|$;

ѓ) $\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z<1$; е) $|z|=\mathrm{Re}\,z+1$.

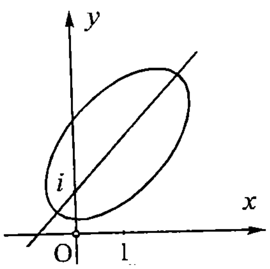
Р е ш е н и е. а) Црт. 4. б) Црт. 5. в) Црт. 6. г) Црт. 7.



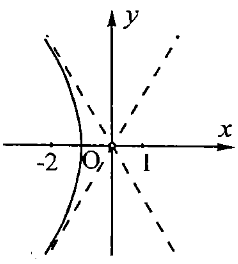
Црт. 4



Црт. 5



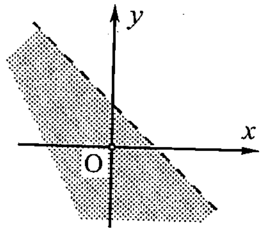
Црт. 6



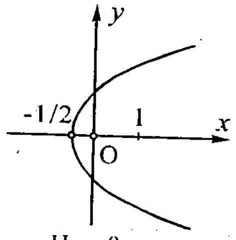
Црт. 7

д) Ова е права, и тоа симетралата на отсечката определена со точките z_1, z_2.

ѓ) Црт. 8. е) Парабола: $2x+1=y^2$ (црт. 9)



Црт. 8



Црт. 9

10. Да се воочи дека сѐ што е изнесено во VII.1 останува во сила ако наместо со полето $\mathbb{R}$ се работи со полето $\mathbb{C}$.

Упатство. Да се види забелешката во вежбата 27 од VII.1.6.

11. Да го означиме со K множеството на сите матрици **A** од обликот $\begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix}$, каде што x и y се произволни комплексни броеви. Да се докаже дека K е ***некомутативно тело*** во однос на операциите собирање и множење на матрици, т.е. $(K;+,\cdot)$ ги исполнува сите услови за поле (в. I.1.6), освен комутативниот закон за множењето.

Решение. Според правилата за операции со матрици, лесно се добива дека $\mathbf{A},\mathbf{B}\in K \Rightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B}, -\mathbf{A}, \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\in K$. Јасно е дека во K се наоѓаат единичната и нултата матрица. Од тоа ќе следува дека K е прстен во однос на операциите собирање и множење на матрици. Ако **A** е ненулта матрица од K, тогаш имаме: $h=\det A = x\bar{x}+y\bar{y}=|x|^2+|y|^2\neq 0$, бидејќи барем еден од броевите x, y е различен од нула. Според тоа, постои $\mathbf{A}^{-1}$,

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{h}\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ -y & x \end{bmatrix},\ \text{а поради}\ \overline{\frac{1}{h}\bar{x}}=\frac{1}{h}x,\ \overline{\frac{1}{h}\bar{y}}=\frac{1}{h}y,\ \text{добиваме дека}\ \mathbf{A}^{-1}\in K.$$

Од сето тоа следува дека K е тело. Ако се има предвид и дека, на пример

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

заклучуваме дека телото K е навистина некомутативно. (Да напомниме дека елементите од K се викаат ***кватерниони***.)

12. Нека P е поле. Во директниот производ $S=P\times P$ да определиме собирање и множење со:

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v),\qquad (x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv,xv+yu).$$

Да се покаже дека $(S;+,\cdot)$ е прстен. Во кој случај тој прстен е поле?

Решение. Со директна проверка, ако се има предвид дека P е комутативен прстен, се добива дека S е комутативен прстен со единица (1, 0). Елементот $(a,b)\in S$ ќе има инверзен елемент во S ако и само ако $a^2+b^2\neq 0$. Според тоа S ќе биде поле ако и само ако $a\neq 0, b\neq 0 \Rightarrow a^2+b^2\neq 0$. (Ако P е на пример полето на комплексните броеви, добиваме дека S не е поле, зашто, на пример, $1\neq 0$ и $i\neq 0$, но $1^2+i^2=0$.)

IX. 2. Алгебарски равенки

2. 1. Поим за алгебарска равенка. Биномни и триномни равенки

Нека $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, се n дадени комплексни броеви. Секој комплексен број x_0 што го задоволува равенството

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = 0,$$

се нарекува ***решение*** (или ***корен***) ***на равенката***

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (1)$$

За (1) велиме дека е ***алгебарска равенка*** и тоа ***од n-ти степен***, ако $a_n \neq 0$. Да се реши една алгебарска равенка значи да се најде множеството од нејзините решенија.

Овде ќе ги разгледаме двата најпрости вида алгебарски равенки - биномните и триномните. Имено, ако a и b се дадени комплексни броеви, $(a \neq 0)$, за равенката:

$$ax^n + b = 0 \qquad (2)$$

велиме дека е ***биномна***; за $n = 1$ имаме ***линеарна равенка*** која се решава на ист начин во секое поле, т.е. равенката $ax + b = 0$ има само едно решение: $x = -b/a$. За $n \geq 2$, добиваме дека секоја вредност на коренот $\sqrt[n]{-b/a}$ е решение на равенката (2). Значи (*за* $b \neq 0$), *равенката* (2) *има n различни решенија.*

Квадратната равенка

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \qquad (3)$$

се решава на добро познатиот начин. Имено, ако z_1 и z_2 се двете вредности на коренот $\sqrt{b^2 - 4ac}$, тогаш:

$$x_1 = \frac{-b + z_1}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + z_2}{2a} \qquad (3')$$

се единствените решенија на оваа равенка. (Притоа имаме $x_1 = x_2$ само за $b^2 - 4ac = 0$.)

Квадратната равенка е специјален случај од равенките од следниот облик:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad a \neq 0, \qquad (4)$$

за кои велиме дека се ***триномни***. Ако во (4) ставиме $z = x^n$, добиваме квадратна равенка: $az^2 + bz + c = 0$. По решавањето на оваа равенка, откако ќе ги најдеме сите вредности на корените $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, го добиваме множеството решенија на равенката (4).

Да разгледаме два примера.

1) Ако во равенката $x^6+2ix^3+3=0$ ставиме $x^3=z$, ја добиваме равенката $z^2+2iz+3=0$, а оттука $z_1=i$, $z_2=-3i$. Значи $x=\sqrt[3]{i}$, $x=\sqrt[3]{-3i}$ па решенијата на дадената равенка се:

$$x_1=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i),\qquad x_2=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i),\quad x_3=-i;$$

$$x_4=i\sqrt[3]{3},\qquad x_5=-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(\sqrt{3}+i),\qquad x_6=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(\sqrt{3}-i).$$

2) Ќе ја решиме ***симетричната равенка***

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=0;$$

ако левата страна на таа равенка ја означиме со $f(x)$, тогаш е јасно дека $(x-1)f(x)=x^{n+1}-1$. Решение на равенката $(x-1)f(x)=0$ е секој $(n+1)$-ви корен на единицата:

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}.$$

За $k=0$, добиваме $x_0=1$, а тој број не е решение на дадената равенка, па значи сите нејзини решенија се определени со x_k за $k=1,2,\dots,n$.

2. 2. Равенка од трет степен

Ќе ја разгледаме овде ***равенката од трет степен***:

$$x^3+px+q=0, \tag{5}$$

каде што p и q се дадени комплексни броеви. Во равенката (5) ќе ставиме $x=u+v$, и ќе добиеме:

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0. \tag{6}$$

Ако ставиме $3uv+p=0$, тогаш од (6) добиваме:

$$u^3+v^3=-q,\qquad uv=-p/3 \tag{7}$$

Ако (u_0,v_0) е решение на системот (7), тогаш (u_0,v_0) ќе биде решение и на (6) од што следува дека $x_0=u_0+v_0$ е решение на равенката (5). Да претпоставиме сега дека x^* е решение на (5) и u^*, v^* да ги определиме така што: $u^*+v^*=x^*$, $u^*\cdot v^*=-p/3$. Тоа значи дека u^* и v^* се решенија на квадратната равенка

$$z^2-x^*z-\frac{p}{3}=0.$$

(Да се види вежбата 2.) Во тој случај (u^*,v^*) ќе биде решение на (6), па значи и на (7), бидејќи $u^*\cdot v^*=-p/3$.

Со тоа покажавме дека за да се реши равенката (5), доволно е да се реши системот (7). Јасно е дека ако (a,b) е решение на (7), тогаш и (b,a) е решение на (7), но и двата пара (a,b), (b,a) ќе бидат едно исто решение $(a+b=x=b+a)$ на равенката (5).

Да претпоставиме дека $p \neq 0$ (во спротивен случај, равенката (5) би имала облик $x^3+q=0$ и би се решила со обично коренување). Од ова следува дека $u \neq 0$, па системот (7) е еквивалентен со:

$$v=-\frac{p}{3u}, \qquad u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0. \tag{8}$$

Решавајќи ја втората равенка од (8), ќе добиеме најмногу шест различни решенија $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$; потоа со помош на равенката $uv=-p/3$ ги определуваме паровите $(u_1,v_1), (u_2,v_2), (u_3,v_3), (u_4,v_4), (u_5,v_5), (u_6,v_6)$, и со нивна помош ги определуваме решенијата на (5). (Притоа можеме да претпоставиме дека $v_1=u_4, v_2=u_5, v_3=u_6, v_4=u_1, v_5=u_2, v_6=u_3$.)

За да ја упростиме работата, доволно е да најдеме само една двојка (u,v) што е решение на (7). Имено, нека $\varepsilon=(-1+i\sqrt{3})/2$ е еден примитивен трети корен на единицата, и нека (u,v) е еден пар решенија на (7). Поради $\varepsilon^3=1$ имаме $u\varepsilon v\varepsilon^2=u\varepsilon^2 v\varepsilon=uv$, $(u\varepsilon)^3+(v\varepsilon^2)^3= =(u\varepsilon^2)^3+(v\varepsilon)^3=u^3+v^3$, од што следува дека и двојките $(u\varepsilon,v\varepsilon^2)(u\varepsilon^2,v\varepsilon)$, се решенија на (7). Јасно е дека сите три тројки (u,v), $(u\varepsilon,v\varepsilon^2)(u\varepsilon^2,v\varepsilon)$ се различни. Од сето тоа следува точноста на следнава теорема:

1°. *Нека u_0 е едно решение на равенката $u^6+qu^3-p^3/27=0$ и нека е $v_0=-p/3u_0$. Ако $\varepsilon=(-1+i\sqrt{3})/2$, тогаш со*

$$x_1=u_0+v_0, \quad x_2=\varepsilon^2u_0+\varepsilon v_0, \quad x_3=\varepsilon u_0+\varepsilon^2 v_0 \tag{9}$$

се определени сите решенија на равенката (5). □

Равенствата (9) се познати под името ***Карданови***[1] ***формули.***

(Да забележиме дека Кардановите формули се даваат и во поинаков облик, така што корените на равенката (5) се изразуваат преку нејзините коефициенти со помош на квадратни и кубни радикали[2]:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}; \tag{9'}$$

притоа, избирајќи која било вредност на првиот кубен корен во (9'), треба да се избере онаа вредност на вториот кубен корен (од трите можни), чиј производ со избраната вредност од првиот кубен корен дава $-p/3$.)

Да разгледаме еден конкретен пример.

3) За равенката

$$x^3-6x+9=0,$$

1) Џ. Кардано (*Girolamo Kardano*, 1501-1576), италијански математичар

2) Да се види, на пример, Курош, §38 (стр. 235)

според (8), имаме: $u^6+9u^3+8=0$, а јасно е дека $u_0=-1$ е еден корен на оваа равенка; потоа добиваме $v_0=6/3u_0=-2$. Според тоа и (9), решенијата на дадената равенка се определени со: $x_1=-3$, $x_2=-\varepsilon-2\varepsilon^2$ и $x_3=-\varepsilon^2-2\varepsilon$, т.е.

$$x_1=-3, \qquad x_2=\frac{1}{2}(3+i\sqrt{3}), \qquad x_3=\frac{1}{2}(3-i\sqrt{3}).$$

Општата равенка $x^3+ax^2+bx+c=0$ може да се сведе на обликот $y^3+py+q=0$, ако се стави $x=y-a/3$. Така, на пример, со смената $x=y-1$ равенката $x^3+3x^2-3x-1=0$ се трансформира во $y^3-6y+4=0$.

2. 3. Равенка од четврти степен

Равенката од четврти степен

$$x^4+px^2+qx+r=0, \tag{10}$$

се решава со раставување. Јасно е дека за секој број u е точно равенството

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+u)^2-2ux^2-u^2+px^2+qx+r=$$
$$=(x^2+u)^2-[(2u-p)x^2-qx+u^2-r].$$

Сакаме да го определиме бројот u така што изразот

$$(2u-p)x^2-qx+u^2-r \tag{11}$$

да биде потполн квадрат, а тогаш тој ќе може да се претстави во обликот $(\alpha x+\beta)^2$, така што ќе добиеме:

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+u)^2-(\alpha x+\beta)^2=$$
$$=(x^2+u-\alpha x-\beta)(x^2+u+\alpha x+\beta). \tag{12}$$

На тој начин решавањето на равенката (10) се сведува на решавање на две квадратни равенки.

За да биде изразот (11) потполн квадрат (т.е. соодветната квадратна равенка да има двоен корен), потребно и доволно е да имаме $q^2-4(u^2-r)(2u-p)=0$, т.е. по средувањето,

$$u^3-\frac{p}{2}u^2-ru+\frac{pr}{2}-\frac{q^2}{8}=0. \tag{13}$$

Гледаме дека за да ја решиме равенката (10) од четврти степен, треба да ја решиме претходно равенката (13). Да напомниме дека е доволен само еден корен на равенката (13). Ќе разгледаме еден пример.

4) Ако е дадена равенката

$$x^4+3x^2+2x+2=0,$$

тогаш равенката (13) добива облик $u^3-\frac{3}{2}u^2-2u+\frac{5}{2}=0$, а јасно е дека $u=1$ е еден нејзин корен. Оттука следува дека левата страна на дадената равенка може да се напише во облик:

$$(x^2+1)^2-(-x^2-2x-1)=(x^2+1)^2+(x+1)^2=$$
$$=[x^2+1+i\cdot(x+1)]\cdot[x^2+1-i\cdot(x+1)].$$

Според тоа, треба да ги решиме следниве две квадратни равенки:

$$x^2+ix+1+i=0,\quad x^2-ix+1-i=0.$$

Ако имаме равенка од облик $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, со смената $x=y-a/4$ ја трансформираме во равенка со облик $y^4+py^2+qy+r=0$.

Но, оваа трансформација не е неопходна, бидејќи горната постапка може да се спроведе и во случајот кога во равенката постои членот со трет степен. Имено, за секој број u, имаме:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{a}{2}x+u\right)^2-\left[\left(2u+\frac{a^2}{4}-b\right)x^2+(au-c)x+u^2-d\right];$$

потоа се определува u така што изразот во средните загради да биде потполн квадрат, слично како погоре во (12).

2. 4. Забелешка за алгебарските равенки

Во горната дискусија покажавме како се сведува решавањето на една равенка од трет степен на решавање на равенка од втор степен и пресметување трет корен од еден комплексен број. Потоа, решавањето на равенка од четврти степен го сведовме на решавање на една равенка од трет степен и на две квадратни. Во врска со ова се наложува прашањето дали и во општ случај една алгебарска равенка од n-ти степен може да се реши со помош на една или повеќе алгебарски равенки од понизок степен? Се покажало дека на ова прашање му следува негативен одговор [3], но ние нема да се задржиме на поопстојна анализа на овој проблем.

2. 5. Вежби

1. Да се решат равенките:

а) $(1+i)x^6+\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=0$; б) $x^8+2ix^4+1=0$;

в) $x^{2n}-x^{2n-1}+\cdots-x+1=0$; г) $(x+i)^n=(x-i)^n$;

д) $x^3+12x+63=0$; ѓ) $x^3+3x-i=0$;

е) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$; ж) $x^4+2x^3-2x^2+6x-15=0$.

Р е ш е н и е. а) Дадената равенка може да се напише во облик:

$$x^6=\frac{\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)}{\sqrt{2}[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right].$$

3) Доказ може да се најде, на пример, во Обрешков: "Висша алгебра", стр. 500

па $x_k = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{24k+5}{72}\pi + i\sin\frac{24k+5}{72}\pi\right), k = 0,1,2,3,4,5$

б) $x^4 = z \Rightarrow z_{1,2} = i(-1\pm\sqrt{2})$; со коренување се добива:

$x_k' = \sqrt[4]{\sqrt{2}-1}\left(\cos\frac{4k+1}{8}\pi + i\sin\frac{4k+1}{8}\pi\right)$ и

$x_k'' = \sqrt[4]{\sqrt{2}+1}\left(\cos\frac{4k-1}{8}\pi + i\sin\frac{4k-1}{8}\pi\right) k = 0,1,2,3.$

в) $x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+1}\pi + i\sin\frac{2k+1}{2n+1}\pi, k = 0,1,2,\ldots,2n,\ k \neq n$; претходно да се помножи левата страна со $x+1$.

г) Со делење и коренување добиваме

$$\frac{x+i}{x-i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0,1,\ldots n-1,$$

а потоа и: $x_k = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}, k = 1,2\ldots,n-1$.

д) $u_0 = 1, v_0 = -4$; $x_1 = u_0 + v_0 = -3$, $x_2 = \varepsilon^2 u_0 + \varepsilon v_0 = (3+5i\sqrt{3})/2$, $x_3 = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 v_0 = (3-5i\sqrt{3})/2$; притоа $\varepsilon = -(1+i\sqrt{3})/2 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$.

ѓ) Едно решение на равенката $u^6 - iu^3 - 1 = 0$, е $u_0 = \cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}$, а потоа (поради $p = 3$, $q = -i$), добиваме: $v_0 = -\frac{1}{u_0} = -\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}$. Од тоа следува: $x_1 = 2i\sin\frac{\pi}{18}$, $x_2 = \varepsilon^2 u_0 + \varepsilon v_0 = -2i\sin\frac{7\pi}{18}$, $x_3 = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 v_0 = 2i\sin\frac{5\pi}{18}$.

е) $\pm\sqrt{2}$, $1\pm i\sqrt{3}$; ж) $-1\pm\sqrt{6}$, $\pm i\sqrt{3}$.

2. Да се докаже дека, ако x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$, тогаш се точни следниве равенства:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$

познати како ***Виетови равенства.***

3. Да се изведат равенства, аналогни на Виетовите, за:

а) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, б) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Одговор. а) $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$, $x_1x_2x_3 = -c$.

б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b$,

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -c$, $x_1x_2x_3x_4 = d$.

IX. 3. Комплексни функции

3. 1. Комплексна функција од еден реален аргумент

Нека во еден декартов правоаголен координатен систем е дадена крива (L) со параметарските равенки $x = f(t)$, $y = g(t)$. Ако ставиме $z = f(t) + ig(t)$, тогаш таа крива ја претставуваме со помош на една равенка. За секој t, од заедничкиот дел на дефиниционите области на функциите $f(t)$ и $g(t)$ се добива еден комплексен број z. затоа, природно е да речеме дека

$$z = h(t) = f(t) + ig(t)$$

е ***комплексна функција од реалната променлива*** t. Да разгледаме неколку примери.

1) а) Со функцијата $z = \cos t + i\sin t$ е определена кружницата $|z| = 1$. Функцијата $z(t)$ е определена за секој t, но за да се добие целата кружница, доволно е да го менуваме t во еден сегмент со должина 2π.

б) Функцијата $z = t + it$ ја определува правата $y = x$.

в) Со $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ е определена елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Понатаму, независнопроменливата обично ќе ја означуваме со x наместо со t, т.е. ако $f(x)$ и $g(x)$ се две реални функции од реалната независнопроменлива x, тогаш

$$h(x) = f(x) + ig(x)$$

е комплексна функција од реалната променлива x.

Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имаат извод (во ист интервал), тогаш ***изводот на функцијата*** $h(x)$ се определува со

$$h'(x) = f'(x) + ig'(x).$$

Ако се искористи оваа дефиниција, како и својствата за изводи од реалните функции, се покажува дека аналогни својства имаат и изводите на комплексните функции од една реална променлива. Имено, исти формули важат за изводи од збир, разлика, производ и количник како и при реалните функции. Ако $f(x)$ е реална функција од реалната променлива x, а $g(x)$ комплексна функција од реалната променлива x, тогаш и $g(f(x))$ е комплексна функција од реалната променлива x. Притоа, имаме

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x,$$

каде што $u = f(x)$, $z = g(u) = g(f(x))$. Во сите случаи треба да се направат истите претпоставки како и кај соодветните својства докажани за реалните функции (в. 11.2).

И поимот за ***неопределен интеграл*** се воведува на ист начин. Имено, ако $z(x) = f(x) + ig(x)$, тогаш

$$\int z(x)\,dx = \int f(x)\,dx + i\int g(x)\,dx.$$

Ако C_1 е интеграциона константа што се добива при интегралот $\int f(x)dx$, а C_2 при $\int g(x)dx$, се добива комплексната константа $C = C_1 + {}$ $+ iC_2$. Значи, и во овој случај при неопределениот интеграл $\int z(x)\,dx$ имаме произволна интеграциона константа.

Како и при изводите, така и овде, сите равенства што ги имаме изведено за неопределени интеграли од реални функции важат и за неопределени интеграли од комплексни функции. Тоа се, имено, правилата за извлекување на (комплексна) константа пред знакот за интеграл, претставување на интеграл од збир како збир на интеграли, формулата за делумна интеграција, како и интегрирање со методот на замена.

Да разгледаме неколку примери.

2) а) $z(x)=a+ib$, $z'(x)=a'+ib'=0$; a и b се реални константи.

б) $z(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+i\arcsin x$; $\quad z'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{i}{\sqrt{1-x^2}}$.

в) $\int(\cos x+i\sin x)dx=\sin x-i\cos x+(C_1+iC_2)$.

Да спомeнеме дека поимот за неопределен интеграл би можел да се воведе директно, преку поимот за примитивна функција, кој се воведува на ист начин како и при реалните функции (III.1.1).

На ред доаѓа поимот за *определен интеграл*. И во овој случај тој може да се даде на два начина. Прво, ако $z(x)=f(x)+ig(x)$, тогаш

$$\int_a^b z(x)dx=\int_a^b f(x)dx+i\int_a^b g(x)dx.$$

или пак, ако $Z'(x)=z(x)$, т.е. ако $Z(x)$ е примитивна функција на $z(x)$, тогаш

$$\int_a^b z(x)dx=Z(x)\Big|_a^b=Z(b)-Z(a).$$

(Притоа, се претпоставува дека равенството $Z'(x)=z(x)$ е точно во целиот сегмент $[a,b]$.) И во двата случаја се доаѓа до ист резултат.

3. 2. Експоненцијална функција

Да ја разгледаме функцијата

$$h(x)=\cos x+i\sin x$$

и да воочиме неколку нејзини својства:

$$h(u+v)=\cos(u+v)+i\sin(u+v)=$$

$$=(\cos u+i\sin u)(\cos v+i\sin v)=h(u)h(v), \tag{1}$$

$$h'(x)=-\sin x+i\cos x=i(\cos x+i\sin x)=ih(x). \tag{2}$$

Својството (1) ни покажува дека функцијата $h(x)$ се однесува како ***експоненцијалната функција***, а (2) сугерира таа функција да ја означиме со e^{ix}. Затоа, по дефиниција, земаме функцијата e^{ix} да биде определена со

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x. \tag{3}$$

Горните две својства сега можеме да ги напишеме и вака:

1°. $e^{iu}e^{iv}=e^{i(u+v)}$.

2°. $(e^{ix})' = ie^{ix}$.

Од равенството (3) и од

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x, \tag{4}$$

лесно се добиваат и следниве равенства:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \text{ т.с.} \tag{5}$$

$$\operatorname{ch} ix = \cos x, \quad \operatorname{sh} ix = i\sin x. \tag{5'}$$

Равенствата (3), (4) и (5) се познати под името ***Ојлерови формули***. Тие формули овозможуваат тригонометриските функции да се трансформираат во експоненцијални, а тоа често пати е корисно. Да разгледаме два примера.

3) а) $\cos^5 x = \left[\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right]^5 = \frac{1}{32}(e^{5ix} + 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} + 10e^{2ix}e^{-3ix} +$ $+ 5e^{ix}e^{-4ix} + e^{-5ix})$, од каде што, по средувањето и применувањето на формулите (4), се добива дека $\cos^5 x = (2\cos 5x + 10\cos 3x + 10\cos x)/32$.

б) Нека $C_n = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha$, $S_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha$. Тогаш имаме $T_n = C_n + iS_n = e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \cdots + e^{ni\alpha}$, т.е.

$$T_n = \frac{e^{i\alpha}(e^{ni\alpha} - 1)}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{i\alpha} \cdot e^{ni\alpha/2}}{e^{i\alpha/2}} \cdot \frac{e^{ni\alpha/2} - e^{-ni\alpha/2}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}} =$$

$$= e^{i(n+1)\alpha/2} \cdot \frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\left(\cos\frac{n+1}{2}\alpha + i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\right)$$

од каде што следува:

$$C_n = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}\sin\frac{n}{2}\alpha \cdot \cos\frac{n+1}{2}\alpha, \quad S_n = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}\sin\frac{n}{2}\alpha \cdot \sin\frac{n+1}{2}\alpha.$$

Природно е, за $x, y \in \mathbb{R}$, степенот e^{x+iy} да се дефинира со

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{6}$$

За $y = 0$ имаме $e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x$, што значи новиот поим за степен е во согласност со поимот за степен на реални броеви.

Да разгледаме уште неколку својства.

3°. *Ако $k = a + ib$ е комплексна константа, тогаш*

$$(e^{kx})' = ke^{kx}.$$

Д о к а з. $(e^{kx})' = (e^{ax}e^{ibx})' = (e^{ax})'e^{ibx} + e^{ax}(e^{ibx})' =$

$= ae^{ax}e^{ibx} + ibe^{ax}e^{ibx} = (a+ib)e^{ax}e^{ibx} = ke^{kx}$. □

4°. *Ако $h(x) = f(x) + ig(x)$ е комплексна функција од реалната променлива x, тогаш*

$$[e^{h(x)}]' = h'(x)e^{h(x)}.$$

Д о к а з. $[e^{h(x)}]' = [e^{f(x)}e^{ig(x)}]' = f'e^f e^{ig} + e^f ig'e^{ig} = e^h(f' + ig') = h'e^h$ □

Добиените резултати можат да се применат за решавање на некои реални интеграли.

4) а) Ако ставиме

$$J_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad J_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx,\quad J = J_1 + iJ_2,$$

добиваме:

$$J = \int e^{(a+bi)x}dx = \frac{1}{a+ib}e^{(a+bi)x} = \frac{e^{ax}}{a+ib}(\cos bx + i\sin bx) + C_1 + iC_2 =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[(a\cos bx - b\sin bx) + i(b\cos bx + a\sin bx)] + C_1 + iC_2.$$

Според тоа имаме:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx - b\sin bx) + C_1,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\cos bx + a\sin bx) + C_2.$$

б) $I = \int \sin^2 x\cdot\cos^4 x\,dx = \int -\frac{1}{4}(e^{ix}-e^{-ix})^2\cdot\frac{1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^4\,dx =$

$$= -\frac{1}{64}\int[(e^{ix}-e^{-ix})(e^{ix}+e^{-ix})]^2(e^{ix}+e^{-ix})^2\,dx,$$

а откако ќе го средиме изразот под интегралот, добиваме

$$I = -\frac{1}{64}\int(e^{6ix}+e^{-6ix}+2e^{4ix}+2e^{-4ix}-e^{2ix}-e^{-2ix}-4)dx$$

$$= -\frac{1}{64}\int(2\cos 6x + 4\cos 4x - 2\cos 2x - 4)dx =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 6x}{3\cdot 64} = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

3. 3. Линеарни диференцијални равенки од втор ред со константни коефициенти

Поимот за диференцијална равенка се воведува кај комплексните функции на ист начин како и кај реалните, па затоа овде нема да даваме експлицитна дефиниција. Формулата [1]

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[C + \int q e^{\int p\,dx}dx\right], \qquad (*)$$

за решавање на линеарната диференцијална равенка $y' + p(x)y = q(x)$ важи и кога $p(x)$ и $q(x)$ се комплексни функции, и се изведува на сосем ист начин. Овде ќе ја користиме таа формула.

Да ја разгледаме сега *линеарната диференцијална равенка од втор ред*

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (7)$$

1) Да се види VI.1.4

каде што p и q се константни комплексни броеви. Да ги означиме со λ_1 и λ_2 решенијата на квадратната равенка:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{8}$$

Тогаш равенката (7) можеме да ја напишеме во обликот

$$\begin{gathered} y'' + (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0, \quad \text{т.е.} \\ (y' - \lambda_1 y)' - \lambda_2(y' - \lambda_1 y) = 0. \end{gathered} \tag{7'}$$

Ако ставиме $u = y' - \lambda_1 y$, добиваме $u' - \lambda_2 u = 0$, па од (*) (за $q = 0$) добиваме $u = Ce^{\lambda_2 x}$. Според тоа,

$$y' - \lambda_1 y = Ce^{\lambda_2 x}, \tag{7''}$$

каде што C е која било комплексна константа. Користејки ја уште еднаш формулата (*), од (7'') добиваме:

$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C\int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}\,dx). \tag{9}$$

За $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, добиваме:

$$y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x), \text{ каде што } C_2 = C. \tag{9'}$$

За $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ако ставиме $C_2 = C/(\lambda_2 - \lambda_1)$, добиваме

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{9''}$$

Со спроведената дискусија покажавме дека секоја функција $y = y(x)$ што ја задоволува диференцијалната равенка (7) може да се напише во облик (9') ако $\lambda_1 = \lambda_2$, односно (9'') ако $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и притоа C_1 и C_2 се комплексни константи. И обратно: секоја функција од облик (9') (односно (9'')) ја задоволува диференцијалната равенка (7).

Да спомнеме дека за квадратната равенка (8) се вели дека е ***карактеристична равенка*** на диференцијалната равенка (7).

Да разгледаме неколку примери.

5) а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$; $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

б) $y'' + y = 0$; $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; $y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$.

в) $y'' - 4y' + 7y = 0$; $\lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{3}$; $y = e^{2x}(C_1 e^{ix\sqrt{3}} + C_2 e^{-ix\sqrt{3}})$.

г) $y'' + 3iy' - 2y = 0$; $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = -2i$; $y = C_1 e^{-ix} + C_2 e^{-2ix}$.

Диференцијалната равенка (7) е специјален случај од следниот вид равенки:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{10}$$

каде што $f(x)$ е дадена комплексна функција од реалната променлива x. Ако $f(x)$ не е нула, велиме дека (10) е ***нехомогена линеарна диференцијална равенка*** со константни коефициенти, а за (7) велиме дека е нејзината ***соодветна хомогена равенка***.

Да претпоставиме дека y_0 е решение на (7), а Y на (1). Ако ставиме $y = y_0 + Y$, добиваме:

$$y'' + py' + qy = (y_0'' + py_0' + qy_0) + (Y'' + pY' + qY) = 0 + f(x) = f(x),$$

т.е. дека y е решение на (10). И обратно, ако $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се решенија на (10), се добива дека $y_0 = y_1(x) - y_2(x)$ е решение на (7). Од ова следува дека за да се реши равенката (10) потребно е да се реши равенката (7) и да се најде едно решение Y на (10). Тогаш, $y = \tilde{y} + Y$ е општото решение на (10), а притоа со $\tilde{y}$ сме го означиле општото решение на (7).

Да разгледаме неколку примери.

6) а) $y'' - 5y' + 6y = 3$; $\tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, $Y = 1/2$; $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + 1/2$.

б) $y'' + 9y = 2x$; $\tilde{y} = C_1e^{3ix} + C_2e^{-3ix}$, $Y = 2x/9$;

$y = C_1e^{3ix} + C_2e^{-3ix} + 2x/9$.

в) $y'' + y' - 6y = 2$; $\tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$, $Y = -1/3$; $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - 1/3$.

г) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{3x}$; $\tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$, $Y = -3e^{3x}$; $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} - 3e^{3x}$.

Да објасниме како дојдовме до резултатот $Y = -3e^{3x}$. Од обликот на равенката се наложува да се бара решение од облик $Y = Ae^{3x}$. По заменувањето во равенката се добива $A = -3$.

д) $y'' - 3y' = 2x + 3$. Во овој случај се наложува да се бара Y од облик $Y = Ax + B$, но по замената би се добило дека тоа не е можно, бидејќи би се добило $-3A = 2Ax + B$, а тоа не е точно за секој x. Тоа наложува да се бара решение од облик $Y = Ax^2 + Bx + C$. И навистина, се добива $Y = -x\left(\frac{x}{3} + \frac{11}{9}\right)$. Имајќи предвид дека $\tilde{y} = C_1 + C_2e^{3x}$ е решение на $y'' - 3y' = 0$, добиваме

$$y = C_1 + C_2e^{3x} - x\left(\frac{x}{3} + \frac{11}{9}\right).$$

3. 4. Комплексна функција од комплексна променлива

Нека D е подмножество од множеството $\mathbb{C}$, т.е. од множеството на комплексните броеви, и нека $f : z \mapsto w = f(z)$ е пресликување од D во $\mathbb{C}$. Во тој случај велиме дека $w = f(z)$ е ***функција од една комплексна променлива*** z; за D велиме дека е дефинициона област на оваа функција. Ако $w = u + iv$, $z = x + iy$, тогаш $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ се реални функции од реалните независнопроменливи x и y. Според тоа, комплексната функција $f(z)$ можеме да ја претставиме во обликот

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{11}$$

при што $u(x, y)$ се вика ***реален дел***, а $v(x, y)$ - ***имагинарен дел*** на $f(z)$.

Да разгледаме неколку примери.

7) а) $w = z^2$; $w = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Оваа функција е дефинирана за секој z, т.е. на целата рамнина.

б) $w = \dfrac{1}{z}$; $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Функцијата е дефинирана за секој $z \neq 0$.

в) $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$; $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Експоненцијалната функција e^z е дефинирана за секој z.

Сакајќи Ојлеровите равенства да бидат точни и за произволен комплексен број z, ги дефинираме ***тригонометриските функции од комплексна променлива***:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Јасно е дека $\sin z$ и $\cos z$ се дефинирани за секој z.

Природно е ***логаритамската функција*** да се дефинира со:

$$\operatorname{Ln} z = w \Leftrightarrow z = e^w.$$

Да ги определиме реалниот и имагинарниот дел на $\operatorname{Ln} z$. За таа цел ќе ставиме $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = u + iv$. Тогаш имаме: $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^u(\cos v + i\sin v)$, од што следува: $e^u = |z|$, т.е. $u = \ln|z|$ и $v = \varphi + 2k\pi$. Според тоа имаме:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi + 2k\pi i,$$

каде што φ е аргументот на z, а k е произволен цел број. Сакајќи да добиеме еднозначна логаритамска функција, пишуваме:

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi, \text{ каде што е } -\pi < \varphi \le \pi.$$

За $\ln z$ велиме дека е ***главна вредност*** на $\operatorname{Ln} z$.

8) Да пресметаме: а) $\ln(1+i)$; б) i^i (притоа по дефиниција: $a^b = e^{b\ln a}$).

а) Поради $1+i = \sqrt{2}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)]$, имаме: $\ln(1+i) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{i\pi}{4}$.

б) Имаме: $i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\ln|i| + i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$.

Ако $a_0, a_1, \ldots, a_n$ се дадени комплексни броеви, $a_n \neq 0$, тогаш за

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

велиме дека е ***полиномна функција*** (или само ***полином***) *со степен n*. Оваа функција е дефинирана за секој z. Количникот

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

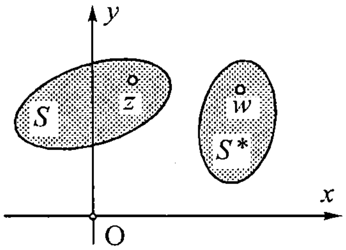
од две полиномни функции, се вика ***рационална функција***. Оваа функција не е дефинирана само за корените на $g(z)$, т.е. за секој z_0 за кој $g(z_0) = 0$.

Овде е место да споменеме дека:

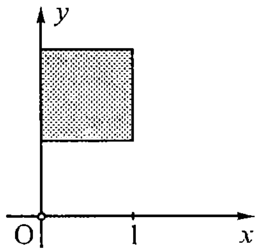
3°. *Секоја неконстантна полиномна функција од една комплексна променлива има барем еден комплексен корен*[3].

(Овој резултат е познат како **основна теорема на алгебрата.**)

Исто така напомнуваме дека сите својства на реалните полиномни функции споменати во I.3.1 важат и за комплексните полиномни функции.



Црт. 1



Црт. 2

Да видиме сега каква геометриска интерпретација можеме да им дадеме на комплексните функции. Ако S е множество точки за кое е дефинирана функцијата $w = f(z)$, тогаш на секоја точка $z = x + iy$ од S и кореспондира точка $w = u + iv$. Според тоа, со дадената функција множеството точки, S, се пресликува во некое множество точки, S^* (црт.1).

Да ја разгледаме, на пример, функцијата $w = z^2$ (пример 7), и да ја определиме сликата на квадратот: $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$ (црт. 2). За таа цел ќе ја определиме сликата на контурата од тој квадрат. За $x = 0$ имаме $u = -y^2$, $v = 0$, а тоа е делот од оската Ou: $-4 \le u \le -1$. Потоа, добиваме:

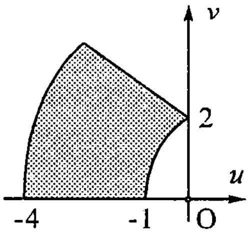
$$x = 1 \Rightarrow u = 1 - y^2, \quad v = 2y; \quad y = 1 \Rightarrow u = x^2 - 1, \quad v = 2x;$$
$$y = 2 \Rightarrow u = x^2 - 4, \quad v = 4x$$

Така ги добиваме лаците од трите параболи:

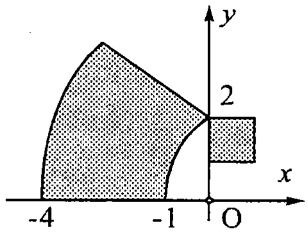
$$u = 1 - \frac{v^2}{4}, \quad u = \frac{v^2}{4} - 1, \quad u = \frac{v^2}{16} - 4.$$

Сликата на дадениот квадрат тогаш ќе биде фигурата заградена од тие три лаци и споменатиот дел од оската Ou (црт.3). Да напомниме дека целата работа може да се изведе и само со еден координатен систем. Тоа е направено на црт. 4.

3) Оваа теорема е докажана во вежбата 10 од 5.4



Црт. 3



Црт. 4

3. 5. Вежби

1. Да се докажат правилата за извод од збир, разлика, производ и количник на две комплексни функции од една реална променлива.

Р е ш е н и е. На пример, за производ имаме:

$$[(f_1+ig_1)(f_2+ig_2)]'=[(f_1f_2-g_1g_2)+i(f_1g_2+g_1f_2)]'=$$
$$=(f_1'f_2-g_1'g_2+f_1f_2'-g_1g_2')+i(f_1'g_2+g_1'f_2+f_1g_2'+g_1f_2')=$$
$$=(f_1'+ig_1')(f_2+ig_2)+(f_1+ig_1)(f_2'+ig_2').$$

Значи: $(h_1h_2)'=h_1'h_2+h_1h_2'$, каде што $h_\nu=f_\nu+ig_\nu$, $\nu=1,2$.

2. Да се најде n-тиот извод од функцијата:

а) $1/(x^2+1)$; б) $\operatorname{arc\,tg} x$.

Р е ш е н и е. а) Имаме:

$$\left[\frac{1}{x^2+1}\right]^{(n)}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right]^{(n)}=\frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^{n-1}n!}{(x-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^{n-1}n!}{(x+i)^{n+1}}\right]=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}n!}{2i}\cdot\frac{(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(x^2+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{r}\binom{n+1}{2k-1}x^{n-2k};\quad r=\left[\frac{n}{2}\right]\ \text{(цел дел).}$$

б) Поради $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$, имаме: $(\operatorname{arc\,tg} x)^{(n)}=\left[\dfrac{1}{x^2+1}\right]^{(n-1)}$

3. Да се пресметаат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin nx}{\sin x}dx$; б) $\displaystyle\int_0^\pi\cos^n x\cos nx\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$.

(Притоа n е природен број.)

Р е ш е н и е. а) 0 за $n=2k$, π за $n=2k+1$; со помош на Ојлеровите формули добиваме:

$$I=\int_0^\pi\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{ix}}dx=\int_0^\pi[e^{i(n-1)x}+e^{i(n-2)x}e^{-ix}+\dots+e^{-(n-1)x}]dx.$$

б) $\pi / 2^n$. в) $(-1)^n \pi$.

4. Да се пресметаат сумите:

$$A = \cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x,$$
$$B = \sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x.$$

О д г о в о р. $A = (\sin 2nx)/(2\sin x)$; $B = (\sin^2 nx)/\sin x$.

(*Помош.* Да се пресмета прво $A + iB = e^{ix} + e^{3ix} + \dots + e^{i(2n-1)x}$.)

5. Да се решат диференцијалните равенки:

а) $y'' + y' - 2y = 0$; б) $y'' - 4y = 0$;

в) $y'' - 2y' + 5y = e^x$; г) $y'' + 2y' = x^2$.

Р е ш е н и е. а) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$. б) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

в) Хомогената равенка има решение: $\tilde{y} = C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x}$; ако ставиме $Y = Ae^x$, добиваме: $A - 2A + 5A = 1$, т.е. $A = 1/4$; според тоа, општото решение е: $y = \tilde{y} + e^x/4$.

г) $\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{-2x}$; ако ставиме $Y = Ax^2 + Bx + C$, добиваме: $2A + 2Ax + 2B = x^2$, па значи такво решение не постои; затоа земаме: $Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$; така добиваме: $6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2$, т.е. $6A = 1$, $6A + 4B = 2B + 2C = 0$; според тоа, имаме $A = 1/6$, $B = -1/4$, $C = 1/4$, D е произволно, па затоа ќе земеме $D = 0$; го добиваме следното решение:
$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + x(2x^2 - 3x + 3)/12$.

6. Нека Y_1 е едно решение на $y'' + py' + qy = f_1(x)$, а Y_2 на $y'' + py' + qy = f_2(x)$. Да се покаже дека $Y = Y_1 + Y_2$ е решение на $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.

Р е ш е н и е. Со непосредна проверка користејќи ги равенствата $f_\nu(x) = Y_\nu'' + pY_\nu' + qY_\nu$, $\nu = 1,2$.

7. Да се решат равенките:

а) $y'' - 2y' = 2x + e^{3x}$; б) $y'' + 2y' = x^2 + e^y$, в) $y'' - 3y' + 2y = 3\operatorname{ch}(5x/2)$.

Р е ш е н и е. а) $y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^{3x}/3 - (x + x^2)/2$. б) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + x\cdot(2x^2 - 3x + 3)/12 + e^x/3$. в) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2e^{5x/2} + (2e^{-5x/2})/21$; да се стави $3\operatorname{ch}(5x/2) = (3e^{5x/2}/2) + (3e^{-5x/2}/2)$.

8. Нека p и q се реални броеви. Да се покаже дека $y = y_1(x) + iy_2(x)$ е решение на диференцијалната равенка $y'' + py' + qy = 0$, ако и само ако $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се нејзини решенија. (Притоа $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се реални функции.)

Р е ш е н и е. Тоа следува од:

$$y'' + py' + qy = (y_1'' + py_1' + qy_1) + i(y_2'' + py_2' + qy_2)$$

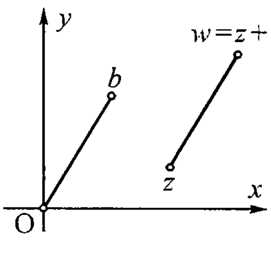
9. Нека карактеристичната равенка $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (од диференцијалната равенка $y'' + py' + qy = 0$) има корени $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Да се докаже дека $y = e^{\alpha x}(K_1 \cos\beta x + K_2 \sin\beta x)$ е општото реално решение на равенката $y'' + py' + qy = 0$. (Притоа K_1 и K_2 се произволни реални константи).

Р е ш е н и е. Нека $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ е општото комплексно решение на дадената диференцијална равенка $y'' + py' + qy = 0$; да ставиме $A_1 + iB_1 = C_1$, $A_2 + iB_2 = C_2$. По средувањето, добиваме: $y = e^{\alpha x}\{[(A_1 + A_2)\cos\beta x + (B_2 - B_1)\sin\beta x] + i[(B_1 + B_2)\cos\beta x + (A_1 - A_2)\sin\beta x]\}$, а од тоа (според претходната вежба) следува заклучокот (при што $K_1 = A_1 + A_2$, $K_2 = B_2 - B_1$).

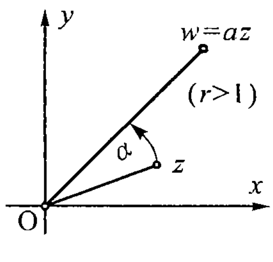
10. Да се најдат реалните решенија на диференцијалните равенки дадени во примерите 5) а), б) и в); 6) а), б), в) и г) и вежбите 5 и 7.

Р е ш е н и е. Ако карактеристичната равенка има само реални корени, тогаш остануваат истите решенија, со тоа што интеграционите константи ке бидат реални. Во случај корените на карактеристичната равенка да не се реални, се користи претходната вежба. Така, на пример, во вежбата 5 в) имаме: $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x/4$, каде што C_1 и C_2 се произволни константи.

11. Нека $a \neq 0$ и b се дадени комплексни броеви. Да се објасни како се добива (геометриски) точката $w = az + b$ со помош на z.



Црт. 5



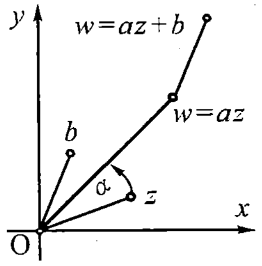
Црт. 6

Р е ш е н и е. Ако $a = 1$, тогаш $w = z + b$ се добива од z со транслација за векторот $\vec{OB}$, каде што B е точката, што одговара на комплексниот број b (црт. 5) Нека $b = 0$, и $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}$, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$. Тогаш имаме $w = r\rho e^{i(\alpha+\varphi)}$. Според тоа, треба модулот на z да се помножи со r и да се изврши ротација за агол α (црт.6). (За $r = 1$ велиме дека имаме ***ротација***, а за $\alpha = 0$ ***хомотетија***.) Во општиот случај, за $w = az + b = a(z + b/a)$, добиваме дека w се добива од z со последователно извршување на по една транслација, ротација и хомотетија (црт. 7).

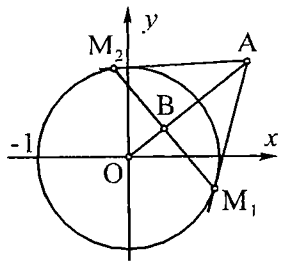
12. Нека (L) е кружница со центар во O и радиус 1 и нека A е точка надвор од кружницата. Од A повлекуваме тангенти на (L); нека M_1, M_2 се допирните точки, а B пресекот на правите OA и M_1M_2 (црт. 8). Да се докаже дека, ако z е комплексниот број што ѝ одговара на A, тогаш на B ѝ одговара $1/\bar{z}$.

Р е ш е н и е. Ако $z = \rho e^{i\alpha}$, тогаш $\bar{z} = \rho e^{-i\alpha}$, од каде што следува $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{\rho} e^{i\alpha}$.

Според тоа, точката што одговара на $1/\bar{z}$ лежи на отсечката $\overline{OA}$. Од црт. 8 се гледа дека $\overline{OB}\cdot\overline{OA}=1$, од што следува заклучокот дека навистина $1/\bar{z}$ е точката B. (Велиме дека точките A и B се ***симетрични*** во однос на единичната кружница.)



Црт. 7



Црт. 8

13. Како се добива $w=1/z$ со помош на z?

Р е ш е н и е. Прво се врши симетрија во однос на единичната кружница, а потоа симетрија во однос на реалната оска.

14. Да се објасни како се добива точката $w=\dfrac{z+i}{z-i}$.

Р е ш е н и е. Со делење, добиваме $w=1+(2i/(z-i))$. Да ставиме $w_1=z-i$, $w_2=1/\overline{w_1}$, $w_3=\overline{w_2}$, $w_4=2iw_3$, $w=w_5=1+w_4$. Од ова се гледа како се добива w од z со последователно извршување на следниве пресликувања: транслација за $-i$, симетрија во однос на единичната кружница, симетрија во однос на реалната оска, ротација за $\pi/2$, хомотетија (во овој случај удвојување на модулот), и транслација за 1.

15. Да се покаже дека сите идентитети што ги задоволуваат реалните тригонометриски функции, ги задоволуваат и комплексните тригонометриски функции.

П о м о ш. Доволно е да се покаже точноста на адиционите теореми:

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2,$$

(зашто, повеќето од останатите идентитети се последици на овие).

16. Да се определат реалниот и имагинарниот дел на функцијата

а) $\sin z$; б) $\cos z$.

Р е ш е н и е. а) $\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+$ $+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$. б) $\cos z=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y$.

17. Да се решат равенките: а) $\cos z=2$; б) $\sin z=2$; в) $\ln z=3+i$.

Р е ш е н и е. а) $z=i\cdot\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi$. б) $z=\pi(1+4k)/2+i\ln(2\pm\sqrt{3})$.

в) $3+i=\ln|z|+i\varphi\Rightarrow 3=\ln|z|,\ \varphi=1\Rightarrow z=e^{3+i}$.

18. Да се пресмета: а) $e^{i\pi/2}$; б) $e^{ik\pi}$; в) $\sin i$;

г) $\sin(1+i)$; д) $\ln(1+i\sqrt{3})$; ѓ) $\operatorname{tg} i$

О д г о в о р. а) i. б) $(-1)^k$. в) $i\operatorname{sh}1$. г) $\sin 1\operatorname{ch}1+i\cos 1\operatorname{sh}1$.
д) $\ln 2+i\pi/3$. ѓ) $i\operatorname{th}1$.

19. Нека $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$ е полиномна функција со степен $n\,(a_n\neq 0)$. Да се покаже дека постојат комплексни броеви $z_1, z_2, \ldots, z_n$, такви што: $f(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$.

Р е ш е н и е. Според основната теорема на алгебрата, постои барем еден корен $z=z_1$ на $f(z)$. Тогаш имаме: $f(z)=(z-z_1)\cdot f_1(z)$, каде што $f_1(z)$ е полином со степен $n-1$. Истата постапка може да се продолжи и со $f_1(z)$.

20. Нека $f(z)$ е полином со реални коефициенти. Да се покаже дека, ако z_0 е корен на тој полином, тогаш и $\bar{z}_0$ е корен.

П о м о ш. Да се искористат равенствата $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$, $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_1$, $\bar{a}_\nu=a_\nu$ за секој реален број a_ν.

IX. 4. Изводи

Поимот за извод при комплексните функции од една комплексна променлива се воведува на ист начин како и при реалните функции. Многу од својствата на изводите се исти и при двата вида функции, но како што ќе видиме во овој (а и во наредниот) параграф, постојат и некои разлики.

4. 1. Граници и непрекинатост

Да ја разгледаме комплексната функција
$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1}$$
од комплексната променлива $z=x+iy$. Поради тоа што комплексниот број $z=x+iy$ може да се идентификува со точката (x,y), функцијата $f(z)$ може да се запише во обликот
$$f(z)=(u(x,y),v(x,y))=(u(z),v(z)). \tag{1'}$$

Според тоа, секоја комплексна функција може да се смета за специјален вид векторска функција (в. V.4), па значи сите поими што ги воведовме за векторските функции имаат смисла и за комплексните функции. Ќе се потсетиме прво на поимите за граница и непрекинатост.

1°. *Ако* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$, $a=a_1+ia_2$, *тогаш:*
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=a \Leftrightarrow \{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a_1,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=a_2\}. \ \square \tag{2}$$

2°. *Функцијата* $f(z)=u+iv$ *е непрекината во точката* z_0 *ако и само ако таа е дефинирана во* z_0, *и притоа*
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0). \tag{3}$$
Ова е еквивалентно и со барањето функциите $u(x,y)$, $v(x,y)$ *да се непрекинати во* $z_0=(x_0,y_0)$. $\square$

(Да напомниме дека овие поими можат да се воведат и директно на ист начин како и при реалните функции.)

Користејќи ги реалните функции, или директно, се покажува дека важат соодветните формули за граница од збир, разлика, производ и количник. Од тоа пак следува и дека збир, разлика, производ и количник на две непрекинати функции е непрекината. (Се разбира, при количникот треба да се претпостави дека именителот не е нула во соодветната точка.) Да ја спомнеме и следната теорема за ***непрекинатост на сложените функции***.

3°. *Ако* $f(z)$ *е нейрекинаша функција во шочкаша* z_0, *а* $g(w)$ *во шочкаша* $w_0 = f(z_0)$, *шогаш и функцијаша* $h(z) = g(f(z))$ *е нейрекинаша во шочкаша* z_0. □

Ако се има предвид својството 2°, тогаш лесно се утврдува дека рационалните, експоненцијалните и тригонометриските функции се непрекинати. Логаритамската функција $\ln z$ е непрекината секаде освен на негативниот дел од реалната оска, бидејќи овде има прекин имагинарниот дел на $\ln z$; имено, тој "скока" од $-\pi$ до π при преминот на $z = x + iy$ од $y < 0$ кон $y > 0$.

Во врска со непрекинатоста на функциите, да спомнеме како, на пример, од двозначната функција $\sqrt{z} = w$ можеме да добиеме една непрекината еднозначна функција. Да ставиме $z_0 = i$, и од двете вредности на $\sqrt{i}$ ја земаме едната, на пример $w_0 = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2 = e^{i\pi/4}$. Ако потоа z се менува во близината на z_0, земајќи ја за $\sqrt{z}$ онаа вредност што е во "близината" на w_0 (црт. 1), добиваме еднозначна непрекината функција.

4. 2. Извод на комплексна функција

Нека функцијата $f(z)$ е определена за $z = z_0$; да го разгледаме количникот

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{4}$$

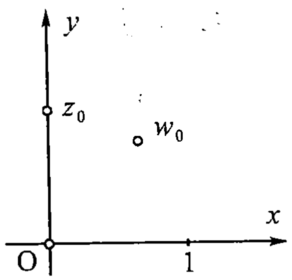
Ако постои гранична вредност на тој количник кога z се стреми кон z_0, велиме дека функцијата $f(z)$ има ***извод во точката*** z_0 и пишуваме

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{5}$$

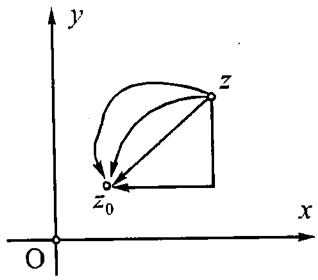
Ставајќи z наместо z_0, а $z + \Delta z$ наместо z, можеме да напишеме:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{5'}$$

Да воочиме веднаш дека за егзистенцијата на изводот $f'(z_0)$ потребно е изразот (4) да има определена граница кога $z \to z_0$, и таа граница не треба да зависи од патот по кој z се стреми кон z_0 (црт. 2).



Црт. 1

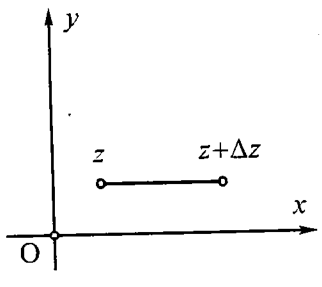


Црт.2

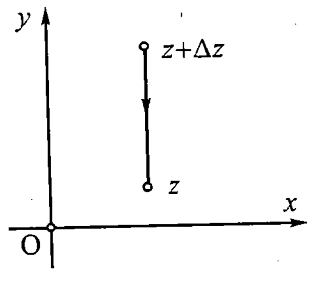
Да разгледаме неколку примери.

1) $f(z)=\bar{z}$. Да земеме прво $z+\Delta z$ да се стреми кон z по права (црт. 3) паралелна со реалната оска; тогаш ќе имаме $\Delta z=\Delta x$, па значи

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\to 1$$



Црт. 3



Црт. 4

Ако $z+\Delta z$ се стреми кон z по права паралелна со имагинарната оска (црт. 4), ќе имаме $\Delta z=i\Delta y$, од што ќе следува дека

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{-i\Delta y}{i\Delta x}=-1\to -1.$$

Според тоа, функцијата $f(z)=\bar{z}$ нема извод ниту во една точка.

2) $f(z)=z^2$: $\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=2z+\Delta z\to 2z$, кога $\Delta z\to 0$. Значи, $f'(z)=2z$ за секој z.

3) $f(z)=\dfrac{1}{z}$; $\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\dfrac{-1}{z(z+\Delta z)}\to -\dfrac{1}{z^2}$, кога $\Delta z\to 0$, па $(1/z)'=-1/z^2$, за секој $z\neq 0$.

Повеќето од својствата што важат за изводите на реалните функции, важат и за изводите од комплексните функции, па дури и доказите се исти. Да спомснеме неколку од нив.

4°. (***Формула за конечно нараснување***). *Ако функцијата* $f(z)$ *има извод во точката* z_0, *тогаш е точно равенството*:

$$f(z)-f(z_0)=f'(z_0)\cdot(z-z_0)+\alpha(z-z_0), \tag{6}$$

каде што $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha=0$.

Д о к а з. Ако се стави $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)+\alpha$, се добива $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha=0$, а и точноста на (6).

Ставајќи $\Delta w=f(z)-f(z_0)$, $\Delta z=z-z_0$ можеме равенството (6) да го напишеме во облик:

$$\Delta w=f'(z_0)\Delta z+\alpha\Delta z. \;\square \tag{6'}$$

Поради докажаната теорема, за една функција $f(z)$ којашто има извод во дадена точка z велиме дека е ***диференцијабилна*** во таа точка.

5°. *Ако постои изводот* $f'(z_0)$, *тогаш функцијата* $f(z)$ *е непрекината во точката* z_0.

Д о к а з. Ако се искористи равенството (6), се добива

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)-f(z_0)|, \text{ т.е. } \lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0).$$

а од тоа следува дека $f(z)$ е навистина непрекината во точката z_0. $\square$

6° (***Извод од сложена функција***). *Нека* $h(z)=g(f(z))$ *и* $w_0=f(z_0)$. *Ако постојат изводите* $f'(z_0)$ *и* $g'(w_0)$, *тогаш постои и изводот* $h'(z_0)$ *и притоа*

$$h'(z_0)=g'(w_0)f'(z_0) \tag{7}$$

Д о к а з. Според (6) имаме:

$$g(w)-g(w_0)=g'(w_0)(w-w_0)+\alpha(w-w_0), \text{ т.е.}$$

$$h(z)-h(z_0)=g'(w_0)(f(z)-f(z_0))+\alpha(f(z)-f(z_0)).$$

каде што $w=f(z)$. Делејќи со $z-z_0$, добиваме

$$\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}=g'(w_0)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\alpha\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Од последното равенство, ако се има предвид и фактот што $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha=\lim\limits_{w\to w_0}\alpha=0$, се добива точноста на (7). $\square$

Ако се погледнат доказите на последните три теореми, ќе се воочи дека тие се по форма исти како и при соодветните теореми на реалните функции од една реална променлива. Истото се однесува и за доказите на формулите за извод од збир, разлика, производ и количник на две функции, па затоа нив нема ни да ги наведеме.

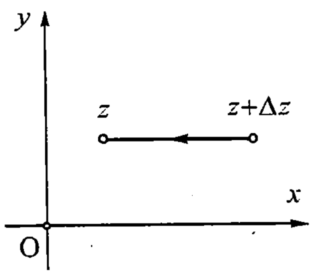
4. 3. Коши-Риманови услови

Нека функцијата
$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$
има извод во точката z за која претпоставуваме дека е *внатрешна точка* од дефиниционата област на $f(z)$. Да видиме како се пренесува на функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ фактот што постои изводот $f'(z)$.

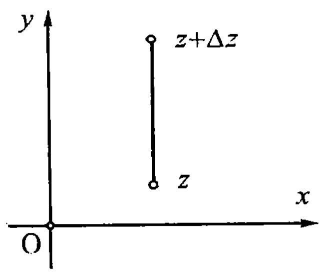
Претпоставуваме, значи, дека постои границата:
$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},$$
при што имаме и
$$f(z+\Delta z)-f(z)=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+i[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)], \quad (8)$$
каде што $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$.

Да земеме прво точката $z+\Delta z$ да се стреми кон z по права паралелна со реалната оска (црт. 5). Тогаш ќе имаме $\Delta z=\Delta x$, т.е. $\Delta y=0$, од каде што следува:
$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

Да го разгледаме случајот кога $\Delta z=i\Delta y$, $\Delta x=0$, т.е. кога $z+\Delta z$ се стреми кон z по права паралелна со оската Oy (црт.6).



Црт. 5



Црт. 6

Во овој случај, добиваме:
$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}=$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10}$$

Од (9) и (10) добиваме дека е исполнето равенството:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z), \tag{11}$$

а од тоа ги добиваме и следните, така наречени ***Коши-Риманови услови***:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{12}$$

Точна е, значи, следнава теорема:

7°. *Ако функцијата $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, има извод $f'(z)$ во точката z која е внатрешна за дефиниционата област, тогаш постојат парцијалните изводи $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ во таа точка, и тие ги задоволуваат Коши-Римановите услови* (12). *Притоа, изводот $f'(z)$ е определен со* (11). □

Со горното е покажана нужноста на Коши-Римановите услови за егзистенцијата на изводот. Со наредната теорема ќе покажеме дека тие се и доволни, ако се додаде уште претпоставката за диференцијабилност на функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

8°. *Функцијата $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ има извод во точката z која е внатрешна за дефиниционата област ако и само ако функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ се диференцијабилни во таа точка и ги задоволуваат Коши-Римановите услови.*

Д о к а з. Да претпоставиме прво дека постои изводот $f'(z)$. Според теоремата 7°, од тоа следува дека функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имаат први парцијални изводи, и притоа се исполнети Коши-Римановите услови. Да покажеме дека тие функции се и диференцијабилни. Пред тоа, да се потсетиме (види V.2.1) дека за функцијата $F(x,y)$ велиме дека е диференцијабилна ако е исполнето равенството од облик

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x, \tag{13}$$

каде што $\lim \alpha_1 = \lim \alpha_2 = 0$ кога $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Според теоремата 4° (равенството (6)), имаме:

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)] &= \\ = f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z &= \\ = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_2)(\Delta x + i\,\Delta y), \end{aligned} \tag{14}$$

каде што е $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ и $\lim \alpha_\nu = 0$ ($\nu = 1,2$), кога $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Од (14), ако притоа се искористат и Коши-Римановите услови, се добива:

$$
\begin{aligned}
u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x-\alpha_2\Delta y,\\
v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2\Delta x+\alpha_1\Delta y,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

од каде што следува дека функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ се навистина диференцијабилни.

Да претпоставиме сега обратното, т.е. дека $u(x,y)$ и $v(x,y)$ се диференцијабилни функции што ги задоволуваат Коши-Римановите услови; тогаш имаме:

$$
\begin{aligned}
f(z+\Delta z)-f(z) &= u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y)+i[v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y)] =\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y\right).
\end{aligned}
$$

каде што $\lim\alpha_\nu=\lim\beta_\nu=0$ ($\nu=1,2$) кога $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

Потоа, ако ги искористиме и Коши-Римановите услови, добиваме:

$$
\begin{aligned}
f(z+\Delta z)-f(z) &=\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+i(\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y) =\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+i(\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y) =\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\,\Delta y)+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+i(\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y).
\end{aligned}
$$

Ако поделиме со $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$, добиваме:

$$
\frac{f(+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y}{\Delta x+i\,\Delta y}+i\frac{\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.
$$

Да ги разгледаме изразите:

$$
A=\frac{\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y}{\Delta x+i\,\Delta y}, \qquad B=i\frac{\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y}{\Delta x+i\,\Delta y}.
$$

и да покажеме дека $\lim A=\lim B=0$ кога $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.
Навистина, тоа следува од :

$$
|A|\le|\alpha_1|\left|\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right|+|\alpha_2|\left|\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\right|\le|\alpha_1|+|\alpha_2|,\quad |B|\le|\beta_1|+|\beta_2|.
$$

Имајќи го сето тоа предвид, добиваме:

$$
\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.
$$

т.е. дека $f(z)$ има определен извод.

Со тоа теоремата е целосно докажана. □

Да разгледаме неколку примери.

4) Ако $f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, ќе имаме $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$, од каде што следува

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

па значи исполнети се Коши-Римановите услови. Функциите u и v се диференцијабилни, зашто нивните изводи се непрекинати. Според тоа, e^z има извод и тој се добива со помош на равенството (11):

$$(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z.$$

5) Користејќи ги правилата за извод од сложени функции, добиваме

$$\left[\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\right]'=\frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz}),\quad \text{т. е.}$$

$$(\cos z)'=-\sin z.$$

Слично се добива и $(\sin z)'=\cos z$.

6) Нека е познат реалниот дел $u(x,y)=x^2-y^2+xy$ на функцијата $f(z)=u+iv$, којашто има извод во секоја точка и го задоволува условот $f(0)=0$. Да ја определиме функцијата $f(z)$. Според Коши-Римановите услови имаме

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y,\ \text{па}\ v=2xy+\frac{y^2}{2}+\varphi(x),$$

каде што $\varphi(x)$ е функција од x, која допрва треба да ја определиме. Диференцирајќи по x добиваме

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y-x,\ \text{т.е.}\ \varphi'(x)=-x$$

и, на крајот, $\varphi(x)=x^2/2+\alpha$. Имаме, значи:

$$f(z)=x^2-y^2+xy+i\left[2xy+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\alpha\right].$$

Поради $f(0)=0$, добиваме $\alpha=0$. По средувањето, добиваме:

$$f(z)=(x^2-y^2+2ixy)-\frac{i}{2}(x^2-y^2+2ixy)=\left(1-\frac{i}{2}\right)z^2.$$

Погоре видовме дека од егзистенцијата на изводот $f'(z)$ следува диференцијабилност на функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Може да се покаже дека од тоа следува и повеќе, т.е. дека $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *имаат непрекинати први и втори изводи.* Доказот на ова тврдење нема да го спроведеме,[1] но овој резултат ќе го искористиме на неколку места. Како прва последица ја добиваме следнава теорема:

9°. *Ако $u(x,y)$ и $v(x,y)$ се реалниот и имагинарниот дел на една диференцијабилна функција $w=f(z)$, тогаш се задоволени следниве равенства:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,\tag{16}$$

т.е. u и v се решенија на лапласовата парцијална диференцијална равенка.

1) Да се види, на пример, Митриновић, Теорема 1, стр. 65

Д о к а з. Користејќи ги Коши-Римановите услови, добиваме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0.$$

Слично се добива и $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. □

Од оваа теорема се гледа дека компонентите на една комплексна диференцијабилна функција не можат да бидат произволни (диференцијабилни) функции. Така, на пример, не постои диференцијабилна функција чиј реален дел е $u=x^2+y$, бидејќи $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\neq 0$.

Ако една функција $f(z)$ има извод во секоја точка од некоја област D, тогаш за неа велиме дека е ***аналитична*** во таа област.

Секоја функција $\varphi(x,y)$ која ја задоволува лапласовата диференцијална равенка $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ се вика ***хармониска*** (в. и вежба 12 од V.4.6). Според (16), компонентните функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ од една аналитична функција $f(z)$ се хармониски.

Да разгледаме еден пример.

7) Ќе ја определиме аналитичната функција чиј реален дел има облик $u(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$, каде што $\varphi(t)$ е двапати диференцијабилна функција од една реална променлива t. Имаме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\varphi', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\varphi'+4x^2\varphi'';$$

од причини на симетрија имаме и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\varphi'+4y^2\varphi''$. Според тоа ја добиваме диференцијалната равенка: $4\varphi'+4(x^2+y^2)\varphi''=0$, т.е. $\varphi'+t\varphi''=0$. Од тоа добиваме $(t\varphi')'=0$, т.е. $\varphi'=C_1/t$, $\varphi=C_1\ln t+C_2=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2$. Според тоа, реалниот дел има облик $u=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2$, каде што C_1 и C_2 се реални константи. Со помош на Коши-Римановите услови се добива и

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2C_1x}{x^2+y^2},\ \text{а потоа и}\ v=2C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\psi(x);$$

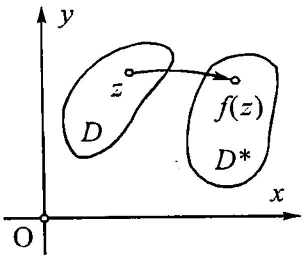
$$\frac{-2C_1y}{x^2+y^2}+\psi'(x)=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2C_1y}{x^2+y^2}\Rightarrow\psi'(x)=0,\ \psi(x)=C_3.$$

Така, добиваме:

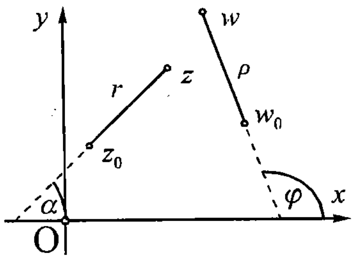
$$\begin{aligned} f(z)&=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2+i2C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+iC_3=\\ &=2C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+i2C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_2+iC_3=\\ &=2C_1\ln z+C_2+iC_3. \end{aligned}$$

4. 4. Конформни пресликувања

Ако $w = f(z)$ е функција со дефинициона област D, тогаш секоја точка $z_0 \in D$ со оваа функција се пресликува во соодветна точка $w_0 = f(z_0)$, па значи целото множество D се пресликува на некое множество точки D^* (црт. 7). Со други зборови, секоја функција од една комплексна променлива определува едно пресликување во рамнината. (Да се види и 3.4)



Црт. 7



Црт. 8

Ќе видиме сега како се пренесува на ова пресликување својството за диференцијабилност на комплексната функција $w = f(z)$. За таа цел ќе појдеме од дефиницијата за извод:

$$w'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}. \tag{17}$$

Да ставиме $z - z_0 = re^{i\beta}$, $w - w_0 = \rho e^{i\delta}$, $w_0' = \mathrm{R}e^{i\varphi}$, (црт. 8) при што ќе претпоставиме и дека е $R \neq 0$. Од равенството (17) добиваме:

$$R = \lim_{z\to z_0} \frac{\rho}{r}, \qquad \varphi = \lim_{z\to z_0} (\delta - \beta) \tag{18}$$

Да земеме две криви L_1 и L_2 што минуваат низ точката z_0 и на секоја од тие криви по една точка z_1 и z_2, чии слики се $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$ (црт. 9). Ако ставиме

$$z_1 - z_0 = r_1 e^{i\beta_1}, \quad z_2 - z_0 = r_2 e^{i\beta_2}, \quad w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\delta_1}, \quad w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\delta_2},$$

според горе добиеното, ќе имаме

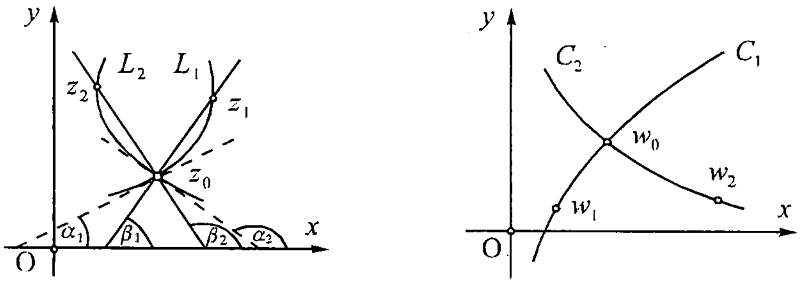
$$\varphi = \lim_{z\to z_0} (\delta_1 - \beta_1) = \lim_{z\to z_0} (\delta_2 - \beta_2). \tag{19}$$

Ако ставиме $\alpha_1 = \lim\limits_{z\to z_0} \beta_1$, $\alpha_2 = \lim\limits_{z\to z_0} \beta_2$, $\gamma_1 = \lim\limits_{z\to z_0} \delta_1$, $\gamma_2 = \lim\limits_{z\to z_0} \delta_2$, ќе добиеме:

$$\varphi = \gamma_1 - \alpha_1 = \gamma_2 - \alpha_2, \text{ т.е. } \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma_2 - \gamma_1. \tag{20}$$

Имајќи предвид дека α_ν е аголот што тангентата на кривата L_ν ($\nu = 1,2$) го зафаќа со позитивниот дел на оската Ox, добиваме дека аголот $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$, под кој се сечат кривите L_1 и L_2, е еднаков со аголот под кој се сечат нивните слики C_1 и C_2. Секое пресликување што ги запазува аглите, се вика **конформно пресликување**. Поради ова, можеме да речеме дека е точна следнава теорема:

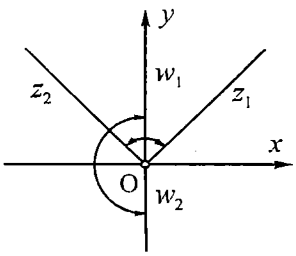
10°. *Ако функцијата $f(z)$ е диференцијабилна, тогаш пресликувањето определено со неа е конформно во сите точки z за кои $f'(z) \neq 0$.*



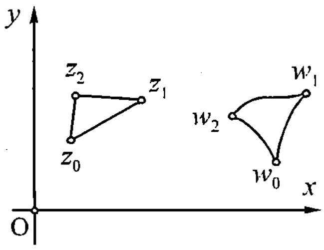
Црт. 9

Точна е и следната теорема што нема да ја докажеме.[2]

11°. *Нека $u(x,y)$ и $v(x,y)$ се две реални функции од две реални променливи x и y. Ако тие функции определуваат конформно пресликување $(x,y) \mapsto (u,v)$, тогаш една (и само една) од функциите $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $g(z) = \overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ е диференцијабилна.*



Црт. 10



Црт. 11

Да напомниме дека условот $f'(z) \neq 0$ е битен во теоремата 10°. Тоа се воочува при функцијата $f(z) = z^2$. За $z = 0$ имаме $f'(z) = 0$. Да ги разгледаме полуправите $z_1 = \rho e^{i\pi/4}$ и $z_2 = \rho e^{3i\pi/4}$. Тие се сечат под агол од 90°, но нивните слики се полуправите $w_1 = z_1^2 = \rho^2 e^{i\pi/2}$, $w_2 = z_2^2 = \rho^2 e^{3i\pi/2}$ кои се сечат под агол од 180° (црт. 10).

2) Да се види, на пример, Романовский стр. 194

Ако во (18) претпоставиме дека r е доволно мала величина, тогаш можеме да напишеме $\rho \approx Rr$. Имајќи ја предвид и теоремата 10°, можеме да ја формулираме следнава теорема:

12°. *Ако е $f(z)$ диференцијабилна функција и ако $f'(z_0) \neq 0$, тогаш "мали" фигури во близината на z_0 се пресликуваат во на нив слични мали фигури* (црт. 11). *Притоа $|f'(z_0)|$ е коефициент на сличноста.* □

4. 5. Вежби

1. Да се покаже дека функциите $f(z)=|z|$, $f(z)=\operatorname{Re} z$ и $f(z)=\bar{z}$ се непрекинати за секој z.

Р е ш е н и е. Имаме $|z|=\sqrt{x^2+y^2}+i0$, $\operatorname{Re} z=x+i0$, $\bar{z}=x-iy$, па заклучокот следува од својството 2°.

2. Да се покаже дека за изводите од елементарните комплексни функции важат истите формули како и за изводите од реалните елементарни функции.

У п а т с т в о. За дробнорационалните функции, формулите се изведуваат на сосема ист начин како и за реалните. За експоненцијалните функции, а и тригонометриските, тоа е покажано во примерите 1) и 2). За функцијата $\ln z$ се добива $(\ln z)'=1/z$ со помош на (11).

3. Да се определи аналитичната функција $f(z)$ ако е даден нејзиниот реален или пак имагинарен дел:

а) $u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$; б) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

в) $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$; г) $u=e^{y/x}$; д) $v=\ln(x^2+y^2)-x^2+y^2$.

Р е ш е н и е. а) $\dfrac{\partial v}{\partial y}=3x^2+12xy-3y^2$; $v=3x^2y+6xy^2-y^3+\varphi(x)$;

$6xy+6y^2+\varphi'(x)=-6x^2+6xy+6y^2$; $\varphi(x)=-2x^3+\alpha$;

$f(z)=u+iv=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3+i(3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3)+i\alpha.$

Ако се има предвид дека $z=x+iy$, ставајќи $y=0$, добиваме $f(x)=x^3-2ix^3+$ $+i\alpha=(1-2i)x^3+i\alpha$. Тоа ни сугерира да ставиме $f(z)=(1-2i)z^3+i\alpha$, а со проверка лесно се востановува дека е точно (α е произволна реална константа).

б) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $u=\dfrac{-x}{x^2+y^2}+\varphi(x)$; $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

$\varphi(x)=\alpha$; $f(z)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}+\alpha+i\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}=-\dfrac{1}{z}+\alpha.$

в) $f(z)=ze^z+i\alpha$.

г) и д) Не постојат аналитични функции со споменатите својства.

4. Да се даде пример на функција $f(z)$, за која од $f(x+i0)=g(x)$, не следува $f(z)=g(z)$.

Р е ш е н и е. Ако ставиме, на пример, $f(z)=\bar{z}$, ќе имаме $f(x+i0)=x$, но $f(z)\neq z$.

5. Да се покаже дека Коши-Римановите услови во поларни координати $(x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi)$ го добиваат следниов вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

6. Да се провери во која точка функцијата $f(z)=z\bar{z}$ има извод.

Р е ш е н и е. $f(z)=x^2+y^2+i0, u=x^2+y^2, v=0$. Оттука следува дека $f(z)$ има извод само за $z=0$.

7. Да се определи аналитичната функција $f(z)=u+iv$, ако се знае дека нејзиниот реален, односно имагинарен дел го има следниов вид:

а) $u=\varphi(x+y)$; б) $v=\varphi(xy)$;

в) $u=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$; г) $u=\varphi(x^2+y)$.

(Притоа, $\varphi(t)$ е двапати диференцијабилна функција.)

Р е ш е н и е. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\varphi''$; од ова добиваме $\varphi(t)=\alpha t+\beta$, т.е. $u=\alpha\cdot(x+y)+\beta$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\alpha$, $v=\alpha y+\psi(x)$; $\psi'(x)=-\alpha$, $\psi(x)=-\alpha x+\gamma$; $f(z)=\alpha(x+y)+$ $+\beta+i(y-x)\alpha+i\gamma=\alpha(x+y)-i\alpha(x+y)+\beta+i\gamma=\alpha(1-i)z+\beta+i\gamma$; α,β,γ, се произволни реални константи.

б) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\varphi''=0$; $\varphi(t)=\alpha t+\beta$; $v=\alpha xy+\beta$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\alpha x$,

$u=\dfrac{\alpha}{2}x^2+\psi(y)$; $\psi'(y)=-\alpha y$; $\psi(y)=-\dfrac{\alpha y^2}{2}+\gamma$; $u=\dfrac{\alpha}{2}(x^2-y^2)+\gamma$;

$f(z)=\dfrac{\alpha}{2}(x^2-y^2)+\gamma+i(\alpha xy+\beta)=\dfrac{\alpha}{2}(x+iy)^2+\gamma+i\beta=\dfrac{\alpha}{2}z^2+\gamma+i\beta$.

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2y}{x^3}\varphi'+\dfrac{y^2}{x^4}\varphi''+\dfrac{1}{x^2}\varphi''=\dfrac{1}{x^2}[2t\varphi'+(1+t^2)\varphi'']$;

$2t\varphi'+(1+t^2)\varphi''=[(1+t^2)\varphi']=0$; $\varphi'=\dfrac{\alpha}{1+t^2}$; $\varphi=\alpha\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\beta$; $u=\alpha\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\beta$;

$v=-\dfrac{\alpha}{2}\ln(x^2+y^2)+\gamma$; $f(z)=-i\alpha\ln z+\beta+\gamma i$.

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\varphi'+4x^2\varphi''+\varphi''=0$; $1+4x^2=-\dfrac{2\varphi'}{\varphi''}[=\psi(x^2+y^2)]$.

Диференцирајќи по y, добиваме $\psi'(t)=0$, т.е. $2\varphi'/\varphi''=$ константа, што не е можно. Од сето тоа следува дека аналитична функција со бараното својство не постои.

8. Дали поимот за извод кај комплексните функции е обопштение на соодветниот поим за извод на реалните функции од една реална променлива?

О д г о в о р. Да. Имено, ако една функција $w=f(z)$ е дефинирана на дел од реалната оска и прима само реални вредности, тогаш таа е, во суштина, една реална функција од една реална независнопроменлива. Тогаш, јасно е дека

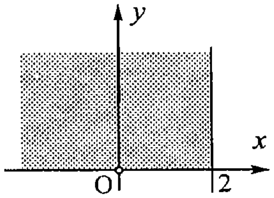
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to u} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

е обичен реален извод, зашто Δz е реален број, како и z.

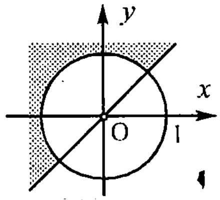
(Во овој случај имаме $u(x,y)=x$, $v(x,y)=0$, па значи и $\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=0$, т.е. не се задоволени Коши-Римановите услови. Ова сепак не е во спротивност со теоремата 8°, бидејќи реалната оска нема внатрешна точка. Во таа смисла, овој пример покажува дека во теоремите 7° и 8° е битна претпоставката z да е внатрешна точка.)

9. Дадена е трансформацијата $w=\frac{i-z}{i+z}$. Да се најде сликата на делот од рамнината определен со неравенствата:

а) $\operatorname{Re}z\le 2$, $\operatorname{Im}z\ge 0$ (црт. 12),   б) $|z|\ge 1$, $\operatorname{Im}z\ge\operatorname{Re}z$ (црт. 13).



Црт. 12



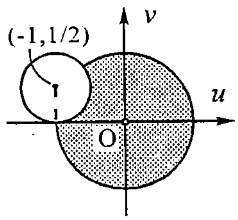
Црт. 13

Р е ш е н и е. а) Имаме $z=\frac{i(1-w)}{1+w}$, од каде што

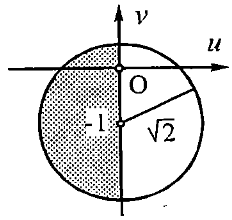
$$x=\frac{2v}{(1+u)^2+v^2},\qquad y=\frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2},$$

па од $x=\operatorname{Re}z\le 2$ добиваме $(u+1)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)\ge\frac{1}{4}$, а од $y=\operatorname{Im}z\ge 0$ добиваме: $u^2+v^2\le 1$ (црт. 14).

б) Од $|z|\ge 1$ имаме $\left|\frac{1-w}{1+w}\right|\ge 1$, т.е. $|1-w|\ge|1+w|$, а по средувањето: $u\le 0$; потоа, од $\operatorname{Im}z\ge\operatorname{Re}z$, т.е. $y\ge x$, добиваме $u^2+(v+1)\le 2$ (црт. 15).



Црт. 14



Црт. 15

10. Дадена е трансформацијата $w=\frac{az+1}{z+a}$, каде што a е реален број различен од ± 1.

а) Да се најде сликата на кружницата $|z|=1$.

б) Дали може a да се одреди така што кружницата $|z-1|=1$ да се преслика во кружницата $|w+1|=1$?

Р е ш е н и е. а) Имаме $z=\dfrac{1-aw}{w-a}$, па од $|z|=1$, т.е. $|z|^2=1$, добиваме $u^2+v^2=1$, т.е. $|w|=1$.

б) Имаме: $z-1=\dfrac{1-aw}{w-a}-1$, па

$$|z-1|=1 \Leftrightarrow |(a+1)^2-1|(u^2+v^2)+2|a-(a+1)^2|u=-(2a+1).$$

Но: $|w+1|=1 \Leftrightarrow u^2+v^2+2u=0$, па од

$$(a+1)^2-1=a-(a+1)^2 \quad \text{и} \quad 2a+1=0,$$

добиваме дека дадената трансформација ја пресликува $|z-1|=1$ во $|w+1|=1$ при $a=-1/2$.

11. Да се докажат формулите за извод на: збир, производ и количник од две комплексни функции $f(z)$, $g(z)$ и тоа:

а) користејќи ја само дефиницијата на поимот извод.

б) со помош на 8° и (13).

Р е ш е н и е. а) На ист начин како и во II.2.1.

б) При претпоставка дека $f(z)$ и $g(z)$ ги задоволуваат Коши-Римановите услови, се покажува дека истите услови важат и за $f(z)+g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$, $1/g(z)$ и се применува (13). Овој доказ е посложен, а важи само за внатрешни точки од доменот.

12. Дали функцијата $f(z)=y+1+ie^y$ има извод во некоја точка z_0, ако за нејзин домен се смета: а) $\mathbb{C}$, б) $\{iy \mid y\in\mathbb{R}\}$?

Р е ш е н и е. а) Не, бидејќи не се исполнети Коши-Римановите услови, а сите точки од доменот се внатрешни. б) За која било точка $z_0=iy_0$, имаме $f'(z)=e^y-i$. Во овој случај, може да се примени формулата (10), но не и (9).

13. Да се покаже дека ако $f'(z)=0$, за секој z од едно отворено множество U, тогаш $f(z)$ е константа во U.

Р е ш е н и е. Заклучокот следува од тоа што: $u_x=u_y=v_x=v_y=0$.

14. На ист начин како и во III.1, да се дефинираат поимите: примитивна функција, неопределен интеграл, определен интеграл, на една комплексна функција $f(z)$.

15. На ист начин како и во II.6 да се дефинира поимот за извод од повисок ред и да се докаже фомулата на Лајбниц.

16. Да се покаже дека Т.1-Т.5, Т.13, како и Евклидовиот алгоритам, докажани во I.3.1, се точни и за комплексни полиномни функции. (Не се потребни никакви измени во доказите, т.е. доволно е само $\mathbb{R}$ да се замени со $\mathbb{C}$.)

17. Нека $n,m\in\mathbb{N}$, $m\le n$ и $z_0\in\mathbb{C}$. Ако $p(z)$ е полином со степен n, да се покаже дека следните два услова се еквивалентни.

а) Постои полином $q(z)$ со степен $n-m$, таков што:

$$p(z) = (z-z_0)^m q(z),\ q(z_0) \neq 0.$$

б) $p(z_0) = 0,\ p^{(m)}(z_0) \neq 0,\ p^{(j)}(z_0) = 0$, за секој $j \in \{1,\ldots,m-1\}$.

Р е ш е н и е. Ако а) е точно, тогаш $p(z_0) = 0$, а (со помош на формулата на Лајбниц) лесно се покажува дека се исполнети и другите два услова од б). Обратно, ако е б) точно, тогаш (според Т.1 од I.3.1) постои најголем број $m \in \{1,\ldots,m\}$, таков што $p(z)$ се дели без остаток со $(z-z_0)^m$, па $q(z)$ е количникот $p(z)\ (z-z_0)^m$.

18. Нека $z_1, z_2, \ldots, z_s$ се различни комплексни броеви, $m_1, m_2, \ldots, m_s$ се природни броеви (може меѓу нив да има и еднакви), а $p(z)$ полином со степен помал од $m = m_1 + \cdots + m_s$, таков што: $p^{(j-1)}(z_k) = 0$, за секој $j \in \{1,2,\ldots,m_k\}$ $k \in \{1,2,\ldots,s\}$. Да се покаже дека $p(z)$ е нултиот полином, т.е. $p(z) = 0$ за секој $z \in C$. (Притоа $p^{(0)}(z) = p(z)$.)

Р е ш е н и е. Кога $p(z)$ би бил ненулти полином што ги задоволува условите $p^{(j)}(z_k) = 0$ за секои $j < m_k$, $k \leq s$, според резултатот од претходната вежба, би добиле дека $p(z)$ има степен $\geq m$.

19. Нека $z_1, \ldots, z_s$ се s различни комплексни броеви, а $m_1, m_2, \ldots, m_s$ природни броеви (незадолжително различни) и нека на секој пар броеви (j,k), такви што $j \in \{1,\ldots,m_k\}$, $k \in \{1,\ldots,s\}$ му е придружен комплексен број α_{jk}. Да се покаже дека постои единствен полином $p(z)$ со степен помал од $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$, таков што:

$$p^{(j-1)}(z_k) = \alpha_{jk}. \qquad (*)$$

за секои $j \in \{1,\ldots,m_k\}$, $k \in \{1,\ldots,s\}$.

Р е ш е н и е. Два различни полиноми со споменатите својства не постојат, според резултатот од претходната вежба. Според тоа, треба да се покаже дека таков полином постои.

Јасно е дека за $s = 1$, бараните својства ги има полиномот:

$$p(z) = \alpha_1 + \frac{z-z_0}{1!}\alpha_2 + \cdots + \frac{(z-z_0)^{m-1}}{(m-1)!}\alpha_m, \qquad (**)$$

при што $\alpha_j = \alpha_{j1}$, $z_0 = z_1$, $m = m_1$

Да претпоставиме дека $s \geq 2$ и дека тврдењето е точно за $t = s-1$. Според тоа постои полином $q(z)$ со степен помал од $m_2 + \cdots + m_s$, таков што $q^{(j-1)}(z_k) = \alpha_{jk}$, за секои $j \in \{1,\ldots,m_k\}$, $k \in \{2,\ldots,s\}$. Да формираме полином $p(z)$ со:

$$p(z) = q(z) + (z-z_2)^{m_2} \cdots (z-z_s)^{m_s}[\beta_1 + \beta_2(z-z_1) + \cdots + \beta_{m_1}(z-z_1)^{m_1-1}], \qquad (***)$$

каде што $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m_1}$, се константни комплексни броеви. Ако се има предвид резултатот од претходната вежба, се добива дека $(*)$ е точно за секои $j \in \{1,\ldots,m_k\}$, $k \in \{2,\ldots,s\}$ и кои било $\beta_1, \ldots, \beta_{m_1}$. Потоа лесно се покажува дека пос постојат (еднозначно определени) $\beta_1,\dots,\beta_{m_1}$, такви што равенствата (*) се точни и за $k=1$. Имено, тоа се добива за:

$$\beta_1 = [\alpha_{11} - q(z_1)]\gamma^{-1},\ \beta_2 = [\alpha_{21} - q'(z_1)]\gamma^{-1},\dots,$$
$$\beta_j = [\alpha_{j1} - q^{(j-1)}(z_1)]\gamma^{-1},\dots,\beta_{m_1} = [\alpha_{m_1 1} - q^{(m_1-1)}(z_1)]\gamma^{-1},$$

каде што:

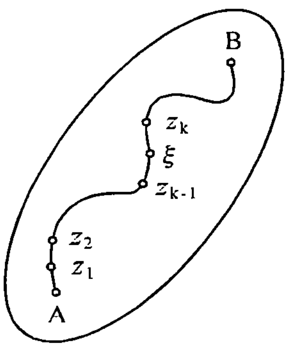
$$\gamma = (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda_1 - \lambda_s)^{m_s}.$$

IX. 5. Интеграли

5. 1. Линиски интеграли: својства и примери

Поимот за линиски интеграл при функциите од една комплексна променлива се воведува на ист начин како и при реалните функции (в. VI.2.).

Нека $f(z)$ е непрекината функција во една област D, а L линија, којашто целосно лежи во областа D, со почетна точка A и крајна точка B (црт. 1). Лакот AB го делиме на n делови со точките $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ и ставаме $z_0 = A$, $z_n = B$. Потоа ја формираме сумата



Црт. 1

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

каде што ζ_k е точка од линијата L, а се наоѓа меѓу z_{k-1} и z_k. Ако функцијата $f(z)$ ја претставиме во облик $f(z) = u + iv$, ќе имаме: $f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$, каде што $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Означувајќи го Δz_k со $\Delta x_k + i\Delta y_k$, добиваме:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k].\end{aligned} \tag{1}$$

Ако бројот на поделиците n се стреми кон бесконечност, а притоа $\max|\Delta z_k| \to 0$, тогаш првата сума од (1) се стреми кон линискиот интеграл $\int_{AB} udx - vdy$, а втората кон $\int_{AB} vdx + udy$. Според тоа, имаме

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_k|\to 0}} \sigma_n = \left[\int_{AB} u dx - v dy\right] + i\left[\int_{AB} v dx + u dy\right]. \tag{1'}$$

Природно е оваа граница да ја означиме со $\int_{AB} f(z)dz$ и да ја наречеме ***линиски интеграл од функцијата*** $f(z)$ по лакот AB. Имаме, значи,

$$\int_{AB} f(z)dz = \left[\int_{AB} u dx - v dy\right] + i\left[\int_{AB} v dx + u dy\right]. \tag{2}$$

Од својствата на линиските интеграли при реалните функции, се добиваат и следниве својства на комплексните линиски интеграли:

1°. $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz.$

2°. $\int_{ABC} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz.$

3°. $\int_{AB} k f(z)dz = k \int_{AB} f(z)dz$ (k *е комплексна константа*).

4°. $\int_{AB} [f(z) + g(z)]dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{AB} g(z)dz.$

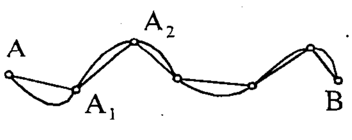
Ќе докажеме овде уште една теорема:

5°. *Нека* $|f(z)| \le K$ *за некој реален број* $K \ge 0$ *и за секој* $z \in L$. *Ако* l *е должината на лакот од кривата* L, *тогаш* $\left|\int_L f(z)dz\right| \le Kl$.

Д о к а з. Ако $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ е сумата со помош на која е определен линискиот интеграл $\int_{AB} f(z)dz$, тогаш

$$|\sigma_n| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le K\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \le K\cdot l;$$

притоа $\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ е должината на искршената линија (црт. 2), а таа е секако помала од должината на лакот од кривата. Од сето тоа следува неравенството $\left|\int_L f(z)dz\right| \le Kl$, т.е. точноста на теоремата. □



црт. 2

Линијата по која се врши интеграцијата може да биде и затворена, но во тој случај треба да се знае насоката по која се интегрира. Ако таа насока не е специјално обележана, се подразбира *позитивната насока*. (Да се види забелешката во VI.2.3)

Дефинирајќи го линискиот интеграл $\int_{AB} f(z)dz$ со равенството (2) даваме во исто време и начин за негово пресметување. Ако кривата AB е дадена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $A(t = t_1)$, $B(t = t_2)$, а притоа целиот лак се добива кога t се менува монотоно од t_1 до t_2 (т.е. $t_1 \le t \le t_2$), тогаш *линискиот интеграл можеме да го изразиме со помош на определен интеграл на комплексна функција од реална променлива* t:

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\cdot z'(t)dt. \tag{3}$$

Навистина, при наведените услови имаме:

$$\int_{AB} f(z)dz = \left[\int_{AB} udx - vdy\right] + i\left[\int_{AB} vdx + udy\right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}[u(x(t),y(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t)]\,dt + i\int_{t_1}^{t_2}[v(x(t),y(t))\dot{x} + u(x(t),y(t))\dot{y}]\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} u(x(t),y(t))(\dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t))\,dt + i\int_{t_1}^{t_2} v(x(t),y(t))(\dot{x} + i\,\dot{y})\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}[u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))]\,[\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)]\,dt = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt$$

Да разгледаме неколку примери.

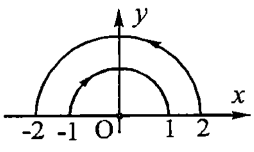
1) Да го пресметаме интегралот $I = \oint_L \frac{dz}{z-a}$, каде што L е кружница со радиус R и центар a. Имаме, значи, $z = a + \mathrm{R}e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, од што следува:

$$I = \oint_L \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{Ri\,e^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}}d\varphi = i\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

2) $I = \oint_L (z-a)^n dz$; L е истата кружница, а n е цел број $\ne -1$. Имаме:

$$I = \int_0^{2\pi} R^n e^{in\varphi} i\,\mathrm{R}e^{i\varphi}\,d\varphi = \frac{iR^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}}{i(n+1)}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

3) Да го пресметаме и интегралот $I = \oint_L \frac{z}{\bar{z}}dz$, каде што L е затворена крива дадена на црт. 3. Потребно е овој интеграл да го поделиме на четири дела:



Црт. 3

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{2e^{i\varphi}}{2e^{-i\varphi}} 2ie^{i\varphi}d\varphi = 2i\int_0^{\pi} e^{3i\varphi}d\varphi = \frac{2}{3}(-1-1) = -\frac{4}{3}.$$

$$I_2 = \int_{-2}^{-1} dx = 1; \quad I_3 = i\int_{\pi}^{0} e^{3i\varphi}d\varphi = \frac{2}{3}; \quad I_4 = \int_1^2 dx = 1.$$

Така, $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 4/3$.

5. 2. Основна теорема на Коши

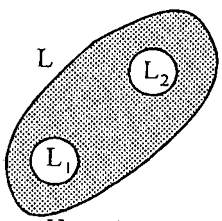
Нека $f(z)$ е аналитична функција во едноставната област D, а L нека е затворена крива што лежи целосно во таа област. Го разгледуваме интегралот:

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i\oint_L vdx + udy.$$

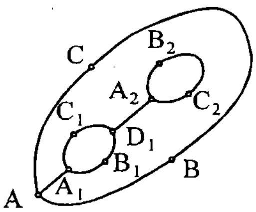
Според Коши-Римановите услови имаме: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, со што, според Т.1 од VI.2.4, следува дека и двата интеграла $\oint_L udx - vdy$, $\oint_L vdx + udy$ се еднакви на нула, па така добиваме $\oint_L f(z)dz = 0$. Точна е значи следнава теорема, позната под името ***основна теорема на Коши***.

6°. *Ако $f(z)$ е аналитична функција во едноставната област D, тогаш интегралот од оваа функција по секоја затворена крива што лежи во областа D, е нула.* □

Да претпоставиме сега дека $f(z)$ е аналитична функција во неедноставната област D со облик како на црт. 4. На кривата L којашто лежи во D да избереме три точки A, B и C, и на L_1: A_1, B_1, C_1, а на L_2: A_2, B_2 и C_2. Потоа да ги поврзиме тие точки како што е направено на црт. 5. Според основната теорема на Коши, имаме:



Црт. 4



Црт. 5

$$0 = \oint_{ABCAA_1C_1D_1A_2B_2C_2A_2D_1B_1A_1A} f(z)dz = \int_{ABCA} f(z)dz + \int_{A_1C_1B_1A_1} f(z)dz + \int_{A_2B_2C_2A_2} f(z)dz + \int_{AA_1} + \int_{D_1A_2} + \int_{A_2D_1} + \int_{A_1A}$$

Од тоа следува

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz. \tag{4}$$

Овој резултат може да се обопшти и за случај кога во внатрешноста на кривата L се наоѓаат произволен конечен број криви: $L_1, L_2, \dots, L_n$, а притоа $f(z)$ да е аналитична во областа меѓу L и тие криви. Тогаш ќе имаме:

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz + \dots + \oint_{L_n} f(z)dz. \tag{5}$$

Да разгледаме неколку примери.

4) Нека L е која било затворена крива во чија внатрешност се наоѓа точката i. Да го пресметаме интегралот

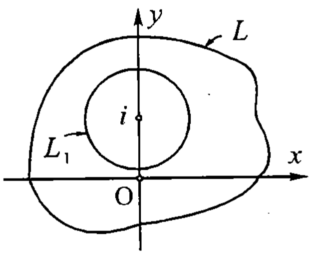
$$I = \oint_L \frac{dz}{z-i}.$$

За таа цел, околу точката i опишуваме кружница L_1 што лежи целосно во внатрешноста на кривата L (црт. 6). Според (5) имаме

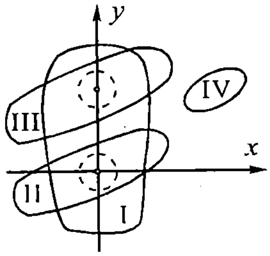
$$I = \oint_L \frac{dz}{z-i} = \oint_{L_1} \frac{dz}{z-i},$$

а вториот интеграл, како што видовме во примерот 1), изнесува $2\pi i$. Според тоа, имаме $I = 2\pi i$.

(Во случај точката i да не се наоѓа во внатрешноста на кривата L, функцијата $f(z) = 1/(z-i)$ ќе биде аналитична во внатрешноста на L, од што ќе следува $I = 0$.)



Црт. 6



Црт. 7

5) Ќе видиме какви вредности може да има интегралот

$$J = \oint_L \frac{(1+z)dz}{z(z-2i)},$$

во зависност од кривата L. (Се разбира, кривата треба да не минува низ координатниот почеток ниту низ точката $2i$.)

Можни се следниве четири случаи:

I: точките $z=0$ и $z=2i$, се во внатрешноста на кривата L;

II: $z=0$ е во внатрешноста, а $z=2i$ не е;

III: $z=2i$ е во внатрешноста, а $z=0$ не е;

IV: ниедна од точките $z=0$, $z=2i$ не е во внатрешноста на L.

Функцијата $f(z)$ да ја претставиме во обликот

$$f(z) = \frac{i}{2z} + \frac{2-i}{2(z-2i)}$$

и околу точките $z=0$ и $z=2i$ да опишеме кружници L_1 и L_2 со доволно мали радиуси (црт. 7). Тогаш имаме:

$$\text{I: } J = \oint_L \frac{1+z}{z(z-2i)}dz = \frac{i}{2}\oint_L \frac{dz}{z} + \frac{2-i}{2}\oint_L \frac{dz}{z-2i} =$$

$$= \frac{i}{2}\oint_{L_1} \frac{dz}{z} + \frac{2-i}{2}\oint_{L_2} \frac{dz}{z-2i} = \frac{i}{2}2\pi i + \frac{2-i}{2}2\pi i = \pi i(i+2-i) = 2\pi i$$

II: $J = \frac{i}{2}\oint_L \frac{dz}{z} + \frac{2-i}{2}\oint_L \frac{dz}{z-2i} = \frac{i}{2}2\pi i + 0 = -\pi.$

III: $J = 0 + \frac{2-i}{2}\oint_L \frac{dz}{z-2i} = \frac{2-i}{2}2\pi i = \pi(1+2i).$

IV: $J = 0$

6) Нека L е затворена крива во чија внатрешност е комплексниот број a. Тогаш, опишувајќи околу a кружница со доволно мал радиус, и искористувајќи го примерот 1) (како и (5)), добиваме

$$\oint_L \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Ќе изнесеме уште неколку последици од ***основната теорема на Коши.***

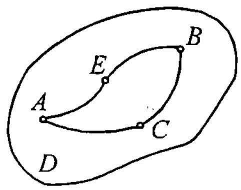
7°. *Нека $f(z)$ е аналитична функција во областа D и нека A и B се две точки од D, а AB крива што ги сврзува точките A и B и не излегува од областа D. Тогаш интегралот $\int_{AB} f(z)dz$ не зависи од кривата, а само од крајните точки A и B.*

Д о к а з. Точките A и B ќе ги поврземе со два лака: ACB и AEB (црт. 8). Според основната теорема на Коши имаме:

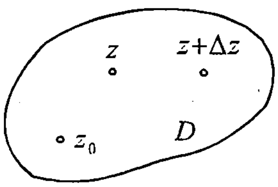
$$0 = \oint_{ACBEA} f(z)dz = \int_{ACB} f(z)dz + \int_{BEA} f(z)dz, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_{ACB} f(z)dz = -\int_{BEA} f(z)dz = \int_{AEB} f(z)dz.$$

Со тоа точноста на теоремата ја докажавме. □



Црт. 8



Црт. 9

Имајќи предвид дека интегралот $\int_{AB} f(z)dz$ зависи само од точките A, B (а, се разбира, и од функцијата $f(z)$), можеме тој интеграл да го означиме со

$$\int_A^B f(z)dz, \quad \text{или со} \quad \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz,$$

каде што z_1 е точката A, а z_2 - точката B.

Ако z_0 е фиксна точка, а z променлива, тогаш со

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{6}$$

е определена функција $F(z)$, дефинирана во D.

Ќе ја докажеме следнава теорема:

8°. *Ако $f(z)$ е аналитичка функција, тогаш и функцијата $F(z)$ определена со (6) е аналитична и, притоа,*

$$F'(z) = f(z).$$

Д о к а з. Точките z и $z+\Delta z$ да ги поврземе со отсечка (црт. 9); притоа го избираме Δz по апсолутна вредност доволно мало за да лежи таа отсечка целосно во областа D. Да воочиме дека, во тој случај имаме

$$\int_z^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta = f(z)\Delta z$$

Имајќи го тоа предвид, добиваме:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta.$$

Функцијата $f(z)$ е непрекината, од што следува дека за секој позитивен реален број ε постои δ_ε, таков што $|\zeta - z| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$. Во тој случај имаме

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon,$$

од што следува $F'(z) = f(z)$, т.е. точноста на теоремата. □

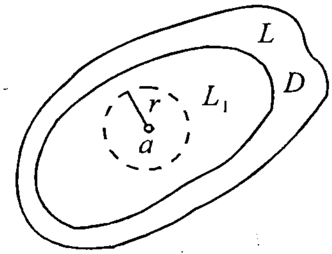
5. 3. Кошиева интегрална формула

Ќе ја докажеме сега следнава теорема.

9°. *Нека $f(z)$ е аналитична функција во областа D и нека L е затворена крива што лежи во D (заедно со својата внатрешност). Ако a е произволна точка од внатрешноста на L, тогаш е точно равенството:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-a}dz. \qquad (7)$$

Ова равенство е познато под името ***Кошиева интегрална формула.***



Црт. 10

Д о к а з. Околу точката a опишуваме кружница L_1 со радиус r, така што таа да се наоѓа во внатрешноста на L (црт. 10). Функцијата

$$g(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

е аналитична во областа меѓу L и L_1 од што следува дека

$$\oint_L g(z)dz = \oint_{L_1} g(z)dz.$$

Ако се има предвид дека $g(z)$ не е дефинирана само за $z=a$ и дека границата $\lim_{z\to a} g(z)=f'(a)$ постои, заклучуваме дека $g(z)$, како непрекината функција, е ограничена во ограничената затворена област $|z-a|\leq$ $\leq r$, т.е. постои број K, таков што $|g(z)|\leq K$ за секој z, за кој $|z-a|\leq r$. Од тоа, според 5°, следува дека

$$\left|\oint_L g(z)dz\right| = \left|\oint_{L_1} g(z)dz\right| \leq 2rK\pi.$$

Ако ε е позитивен реален број, и ако ставиме $r<\frac{\varepsilon}{2\pi K}$, добиваме:

$$\left|\oint_L g(z)dz\right| < \varepsilon.$$

Значи, апсолутната вредност на интегралот $\oint_L g(z)dz$ може да се направи помала од секој позитивен реален број ε, а тоа е можно само ако тој интеграл е 0. Според тоа:

$$0=\oint_L \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=\oint_L \frac{f(z)}{z-a}dz-f(a)\oint_L \frac{dz}{z-a}.$$

па бидејќи $\oint_L \frac{dz}{z-a}=2\pi i$ (в. пример 1)), добиваме

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-a}dz=f(a)\cdot 2\pi i.$$

Со тоа го докажавме равенството (7). □

Како последица од 9° се добива и следнава теорема:

10°. *Нека $f_1(z)$ и $f_2(z)$ се две аналитички функции во областа D и нека затворената крива L се наоѓа во таа област. Ако е точно равенството $f_1(z)=f_2(z)$ за секоја точка z од кривата L, тогаш тоа равенство е точно и за секоја точка од внатрешноста на кривата L.* □

Да разгледаме неколку примери.

6) Да го пресметаме интегралот

$$I=\oint_L \frac{e^z dz}{z-i\pi/2}$$

ако L е затворена крива што не минува низ точката $i\pi/2$. Ако таа точка не се наоѓа во внатрешноста на кривата L, тогаш според основната теорема на Коши ќе имаме $I=0$. Ако пак $z=i\pi/2$ е во внатрешноста на кривата L, тогаш според (7), ќе имаме:

$$I=2\pi i\cdot e^{i\pi/2}=-2\pi$$

7) Да го пресметаме интегралот

$$I=\oint_L \frac{e^z}{z^2+a^2}dz,$$

ако во внатрешноста на L се наоѓа кругот $|z|\leq a$, каде што a е позитивен реален број.

Функцијата $\frac{1}{z^2+a^2}$ ќе ја претставиме во обликот:

$$\frac{1}{z^2+a^2}=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{z-ai}-\frac{1}{z+ai}\right);$$

од тоа следува

$$I=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2i}\oint_L\frac{e^z}{z-ai}dz-\frac{1}{2i}\oint_L\frac{e^z}{z+ai}dz\right)=$$

$$=\frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{e^z}{z-ai}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{e^z}{z+ai}dz\right)=$$

$$=\frac{\pi}{a}(e^{ai}-e^{-ai})=\frac{2i\pi}{a}\sin a.$$

Ќе изнесеме неколку теореми што се во врска со Кошиевата интегрална формула.

Нека функцијата $f(\zeta)$ е дефинирана во областа D и е непрекината на лакот L. Тогаш изразот:

$$\int_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^k}d\zeta=F(z) \tag{8}$$

има смисла за секој z што не лежи на L. Тој израз е, имено, функција $F(z)$ дефинирана за секој z што не припаѓа на L. Точна е следнава теорема:

11°. *Ако функцијата $f(\zeta)$ е непрекината на лакот L, тогаш функцијата $F(z)$ е аналитична за секој z што не лежи на кривата L, и притоа е точно равенството*

$$F'(z)=k\int_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta. \tag{9}$$

Доказ. Со обични алгебарски трансформации се добива:

$$\frac{F(z_1)-F(z)}{z_1-z}=\int_L f(\zeta)\frac{(\zeta-z)^{k-1}+(\zeta-z)^{k-2}(\zeta-z_1)+\cdots+(\zeta-z_1)^{k-1}}{(\zeta-z_1)^k(\zeta-z)^k}d\zeta$$

Ако пуштиме z_1 да се стреми кон z, ќе добиеме:

$$\lim_{z_1\to z}\frac{F(z_1)-F(z)}{z_1-z}=\int_L f(\zeta)\frac{k(\zeta-z)^{k-1}}{(\zeta-z)^{2k}}d\zeta=k\int_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta,$$

т.е. го добиваме равенството (9). □

Овој доказ не можеме да го сметаме за комплетен бидејќи (без образложение) користевме равенство од облик:

$$\lim_{z_1\to z}\int_L f(\zeta)(\ldots)d\zeta=\int_L\lim_{z_1\to z}f(\zeta)(\ldots)d\zeta.$$

Тоа равенство е точно, но нема да се задржиме на неговото докажување.

Како последица од теоремата 11° и Кошиевата интегрална формула ја добиваме и следнава теорема:

12°. *Ако $f(z)$ има прв извод во внатрешноста на кривата L, тогаш таа функција има n-ти извод за секој природен број n во внатрешноста на L и притоа е точно равенството:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta. \tag{10}$$

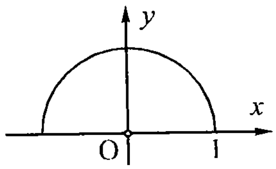
Доказ. Според (7), имаме: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$. Користејќи ја теоремата 11°, добиваме $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$. Да претпоставиме дека $f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta$, т.е. дека е точно равенството (10) за $n = k$. Применувајќи го уште еднаш равенството (9), добиваме дека (10) е точно и за $n = k+1$, па значи е точно и за секој природен број n. Со тоа точноста на теоремата ја докажавме. □

Оваа теорема е карактеристична за комплексните функции; таа не важи за реалните функции. На пример, ако $f(x) = x|x|$, ќе имаме $f'(0) = 0$, но $f''(0)$ не постои.

5. 4. Вежби

1. Да се пресмета интегралот
$$\int_L |z|\,\bar{z}\,dz,$$
каде што L е горниот дел од кружната линија $|z| = 1$, заедно со дијаметарот (црт. 11).

Решение. Имаме:
$$\int_L |z|\,\bar{z}\,dz = \int_0^{\pi} e^{-i\varphi}\, i e^{i\varphi} d\varphi + \int_{-1}^{0} -x\cdot x\,dx + \int_0^1 x\cdot x\,dx = i\pi.$$



Црт. 11

2. Да се пресметаат сите можни вредности на интегралот
$$I = \oint_L \frac{dz}{z(z^2-1)}.$$

Решение. Можни се осум случаи, во зависност од тоа која од точките −1, 0, 1 е во кривата, а која надвор.

Подинтегралната функција да се растави во обликот $\frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-1}$. Откога ќе се спроведе целата таа работа, ќе се добие дека I има една од следниве вредности: $-2\pi i, -\pi i, 0, \pi i, 2\pi i$.

3. Да се пресмета интегралот

$$I = \int_L \frac{zdz}{z^4-1}, \quad L: |z-1| = 1 \qquad \text{(црт. 12).}$$

Р е ш е н и е. Изразот $\dfrac{z}{z^4-1}$ ќе го претставиме во обликот:

$$\frac{z}{z^4-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+1} + \frac{D}{z+i}.$$

Имаме, потоа: $I = A\oint_L \dfrac{dz}{z-1}$, бидејќи сите други интеграли се нула. Лесно се добива дека $A = 1/4$, па од тоа следува $I = 2\pi i/4 = \pi i/2$.

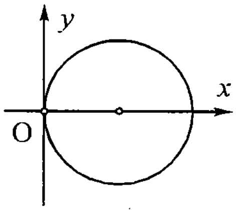
4. Да се пресмета интегралот: а) $I = \oint_L \dfrac{\sin z}{z-\pi}dz$; б) $J = \oint_L \dfrac{\cos z}{z-\pi}dz$;

Р е ш е н и е. а) $I = 0$. б) $J = 0$ ако $z = \pi$ е надвор од кривата, а $I = -2\pi i$, ако $z = \pi$ се наоѓа во внатрешноста на кривата L.

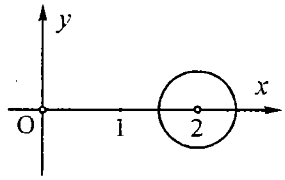
5. Да се пресмета интегралот

а) $\oint_L \dfrac{dz}{z^4+1}$, $L: |z-1| = 1$; б) $\oint_L \dfrac{zdz}{(z-1)(z-2)}$, $L: |z-2| = \dfrac{1}{2}$;

в) $\oint_L \dfrac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, $L: |z-3| = 1$.



Црт. 12



Црт. 13

Р е ш е н и е. а) Ги наоѓаме корените на $z^4+1=0$. Имаме $z_0 = e^{-i\pi/4}$, $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{3i\pi/4}$, $z_3 = e^{5i\pi/4}$. Во внатрешноста на кружницата (црт. 12) се наоѓаат само z_0 и z_1. Ја претставуваме функцијата

$$\frac{1}{z^4+1} \quad \text{во облик} \quad \frac{a}{z-z_0} + \frac{b}{z-z_1} + \frac{c}{z-z_2} + \frac{d}{z-z_3}.$$

Потоа, добиваме:

$$I = \oint_L \frac{dz}{z^4+1} = a\oint_L \frac{dz}{z-z_0} + b\oint_L \frac{dz}{z-z_1} + c\oint_L \frac{dz}{z-z_2} + d\oint_L \frac{dz}{z-z_3} =$$

$$= 2\pi i a + 2\pi i b + 0 + 0.$$

Ако ги определиме a и b на добро познатиот начин, ќе добиеме:

$$a = \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} = -\frac{z_0}{4} = -\frac{e^{-i\pi/4}}{4}, \quad b = -\frac{e^{i\pi/4}}{4}.$$

од што следува:

$$I = -\frac{\pi i}{2}(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) = -\pi i \cos(\pi/4) = -\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}.$$

б) Во кругот (црт. 13) се наоѓа $z=2$, но не и $z=1$. Работејќи слично како и во а) се добива: $I = 4\pi i$.

в) $I = \frac{\pi i}{121}$.

6. Да се пресмета интегралот $I = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{ze^z\,dz}{(z-a)^3}$, ако точката a лежи во внатрешноста на кривата L.

Р е ш е н и е. Го користиме равенството $f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}$ и добиваме: $I = \frac{1}{2}[ze^z]''_{z=a} = \frac{1}{2}[e^z(z+2)]_{z=a} = \frac{1}{2}e^a(a+2)$.

7. Да се пресмета интегралот

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{e^z + z^2}{z(1-z)^3}dz,$$

ако $z=1$ е во внатрешноста на L, а $z=0$ не е.

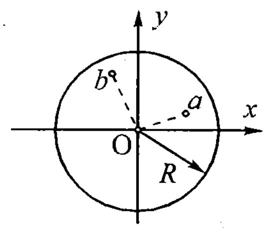
Р е ш е н и е. Функцијата $f(z) = \frac{1}{z}(e^z + z^2)$ е аналитична во внатрешноста на L, бидејќи $f'(z) = \frac{e^z}{z^2}(z-1)+1$ постои. Потоа: $f''(z) = \frac{e^z}{z^3}(z^2-2z+2)$, $f''(1) = e$, па

$$I = -\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{2!}\cdot e = -\frac{e}{2}.$$

8. Да се пресмета интегралот

$$I = \oint_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)},$$

каде што $f(z)$ е аналитична во кругот $|z|\leq R$ и $|a|< R$, $|b|< R$, $a\neq b$ (црт. 14).



Црт. 14

Р е ш е н и е. Поради $\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{(a-b)}\left\{\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right\}$ имаме: $I = \frac{2\pi i}{a-b}[f(a) - f(b)]$

9. *Ако функцијата $f(z)$ е аналитична и ограничена во целата рамнина, тогаш $f(z)$ е константа* (**теорема на Лиувил** [1]).

Р е ш е н и е. Нека a и b се кои било два различни комплексни броја. Го избираме позитивниот реален број R, така што $R>|a|$ и $R>|b|$. Тогаш, според вежбата 8, имаме:

$$I = \oint_{|z|=R}\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}[f(a)-f(b)].$$

1) Жозеф Лиувил (*Joseph Liouville*, 1809-1882), француски математичар

Нека $|f(z)|< K$, Поради $|z-a|\geq|z|-|a|=R-|a|$, $|z-b|\geq R-|b|$, имаме:

$$|I|\leq\left|\int_{|z|=R}\frac{K}{(R-|a|)(R-|b|)}dz\right|\leq\frac{K\cdot 2R\pi}{(R-|a|)(R-|b|)}\to 0 \text{ кога } R\to\infty.$$

Од сето тоа следува $I=0$, т.е. $f(a)=f(b)$, што и сакавме да докажеме.

10. *Нека $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0$ е полином со комплексни коефициенти, каде што $a_n\neq 0$ ($n\geq 1$). Да се докаже дека постои барем еден комплексен број z_0, таков што $f(z_0)=0$.*

Овој резултат е познат под името ***основна теорема на алгебрата.***

Решение. Да претпоставиме дека таков број z_0 не постои. Тогаш функцијата $|f(z)|$ ќе биде позитивна за секој z и ќе има некоја минимална вредност $1/K$. Според тоа, функцијата $g(z)=1/f(z)$ е аналитична за секој z, и ограничена, бидејќи $|g(z)|\leq K$. Според теоремата на Лиувил, од тоа добиваме дека $g(z)$ е константа, а тоа очигледно не е точно. Од сето тоа следува дека претпоставката за непостоењето на бројот z_0 со својството $f(z_0)=0$ е неодржива, па значи таков број постои, а тоа и сакавме да докажеме.

IX. 6. Редови

Во VIII глава извршивме прилично детална анализа на редовите со реални членови. Голем дел од својствата на тие редови се пренесуваат и на редовите со комплексни членови, а некои и на поопштите редови чии членови се k-димензионални вектори. Овде ќе се задржиме само на редовите со комплексни членови, при што (како и во претходните два параграфа) на неколку места ќе ги повториме дефинициите на поимите што се порано дадени.

6. 1. Низи и редови од комплексни броеви

Порано (V.1.3.) е воведен поимот за конвергентна низа од m-димензионални вектори. Специјален вид конвергентни низи од точки се конвергентните низи од комплексни броеви, бидејќи овие броеви можат да се сметаат за точки во дводимензионалниот простор. Според тоа, низата од комплексни броеви,

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

е ***конвергентна*** и се стреми кон z, ако е исполнет следниов услов:

1°. *За секој позитивен реален број ε, постои природен број n_0, таков што:*

$$n\geq n_0 \Rightarrow |z_n - z|<\varepsilon.$$

Во тој случај пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Како специјален случај на теоремата од V.1.3, ја добиваме и следнава теорема:

2°. *Низата* $(z_n) = (x_n + iy_n)$ *конвергира кон* $z = x + iy$ *ако и само ако*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y. \ \square$$

Теоремата 2° ни овозможува многу од својствата за конвергентни низи од реални броеви да ги пренесеме и при низите од комплексните броеви. На пример, од ***основниот Кошиев критериум*** за конвергентност на реални низи (Т.1, I.4.9) следува и следнава теорема:

3°. *Низата* (z_n) *е конвергентна ако и само ако, за секој позитивен реален број* ε, *постои природен број* n_0, *таков што*

$$n \ge n_0, \quad k \ge 1 \Rightarrow |z_{n+k} - z_n| < \varepsilon. \tag{1}$$

Д о к а з. Нека е исполнет условот (1). Тогаш ќе имаме:

$$n \ge n_0, \quad k \ge 1 \Rightarrow |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon, \quad |y_{n+k} - y_n| < \varepsilon,$$

од каде што следува дека реалните низи (x_n) и (y_n) се конвергентни, па значи е конвергентна и низата $(z_n) = (x_n + iy_n)$.

Да претпоставиме обратно, дека $(z_n) = (x_n + iy_n)$ е конвергентна низа. Тогаш, за секој позитивен реален број ε, постои природен број n_0, таков што

$$n \ge n_0, \quad k \ge 1 \Rightarrow |x_{n+k} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_{n+k} - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Во тој случај ќе имаме:

$$|z_{n+k} - z_n| = |(x_{n+k} - x_n) + i(y_{n+k} - y_n)| \le |x_{n+k} - x_n| + |y_{n+k} - y_n| < \varepsilon,$$

т.е. добиваме дека е исполнет условот (1). $\square$

Користејќи ги соодветните резултати за конвергентните низи од реални броеви, или директно, се докажува дека *збир, производ и количник на конвергентни низи е конвергентна низа.*

Треба да се спомене само дека не важи ставот за конвергентност на ограничена монотона низа, од простата причина што поимот за монотоност при комплексните низи не се воведува, бидејќи при комплексните броеви не можеме да речеме дека "z_1 е поголем (или помал) од z_2".

Ако $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ е дадена низа од комплексни броеви, и ако ставиме

$$s_1 = z_1, s_2 = z_1 + z_2, \ldots, s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \ldots,$$

добиваме друга низа од комплексни броеви. Ако добиената низа $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ е конвергентна и има граница s, тогаш велиме дека s е ***збир на редот*** $z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$ и пишуваме

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{3}$$

За самиот ред велиме дека е ***конвергентен***; секој ред што не е конвергентен се вика ***дивергентен***. За низата (s_n) велиме дека е ***низа од парцијалните суми на редот.***

И овде се сретнавме со ситуацијата поимот за збир на ред од комплексни броеви да го дефинираме на ист начин како и соодветниот поим при реалните броеви. За да не вршиме повторување, ќе се задоволиме да речеме дека *сите својства* (1°- 5°) *докажани во* VIII.1.1 *важат и за редовите со комплексни членови. Истото се однесува и за воведените поими и докажаните теореми во* VIII.2. Доказите што се дадени за реалните редови, без битни промени важат и за комплексните. Исклучок прави само теоремата 2° од VIII.2. Тоа својство е точно и за комплексните редови, но доказот што го дадовме не важи за редовите со комплексни членови. Поради важноста, таа теорема ќе ја формулираме повторно и ќе ја докажеме.

4°. *Нека е даден редот*

$$z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n. \tag{4}$$

Да го формираме редот со позитивни членови:

$$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|. \tag{5}$$

Ако редот (5) *е конвергентен, тогаш е конвергентен и редот* (4).

(Во тој случај велиме дека редот (4) е ***апсолутно конвергентен***.)

Д о к а з. Со s_n да ја означиме n-тата парцијална сума на редот (4), а со $\tilde{s}_n$ - на редот (5). Тогаш имаме:

$$\tilde{s}_{n+k}-\tilde{s}_n=|z_{n+1}|+|z_{n+2}|+\cdots+|z_{n+k}|,$$

$$s_{n+k}-s_n=z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+k}.$$

Да претпоставиме сега дека редот (5) е конвергентен. Тогаш, според теоремата 3°, за секој позитивен реален број ε, постои природен број n_0, таков што

$$n\ge n_0,\ k\ge 1 \Rightarrow |\tilde{s}_{n+k}-\tilde{s}_n|=|z_{n+1}|+\cdots+|z_{n+k}|<\varepsilon.$$

Поради

$$|s_{n+k}-s_n|=|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+k}|\le|z_{n+1}|+\cdots+|z_{n+k}|<\varepsilon$$

следува дека е конвергентен и редот (4). □

Докажаната теорема овозможува изучувањето на еден дел од конвергентните редови со комплексни членови да го сведеме на редовите со позитивни членови.

6. 2. Функционални низи и редови

Нека е дадена низата функции

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

дефинирани во областа S. Велиме дека таа низа ***конвергира кон функ-***

цијата $f(z)$ ***на областа*** S, ако

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

за секој $z \in S$. Со други зборови, *за секој* $\varepsilon > 0$ *и секој* $z \in S$, *постои природен број* n_0, *таков што*

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Во општ случај, n_0 зависи од ε и од z, а ако може n_0 да се избере независно од z, така што неравенството $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ да биде точно за секој $z \in S$, ќе велиме дека дадената низа е ***рамномерно*** (или: ***униформно***) ***конвергентна*** на S.

На ист начин како и теоремата 1° од VIII.3.1 се докажува точноста и на следнава теорема:

5°. *Ако* $f_n(z)$ *е рамномерно конвергентна низа од непрекинати функции на затворената ограничена област* S, *тогаш и границата* $f(z)$ *е непрекината функција на* S.

Освен тоа, за секоја крива L што се наоѓа во S, *имаме*

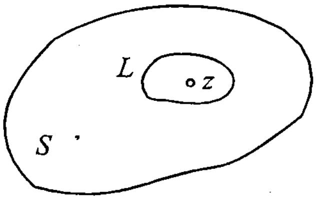
$$\lim_{n\to\infty} \int_L f_n(z)dz = \int_L f(z)dz. \ \Box$$

Ќе докажеме сега една теорема што ја немаат низите од реални функции.

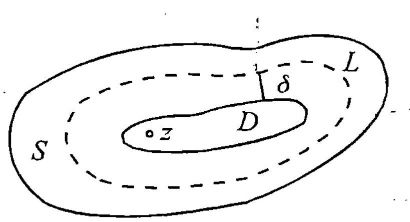
6°. *Ако низата од аналитични функции* $f_n(z)$ *конвергира рамномерно во внатрешноста на областа* S *кон функцијата* $f(z)$, *тогаш* $f(z)$ *е аналитична во областа* S, *а притоа низата од изводите* $f_n'(z)$ *конвергира рамномерно кон* $f'(z)$ *во секоја ограничена област* D *од внатрешноста на* S.

Д о к а з. Нека z е точка од внатрешноста на S. Околу оваа точка опишуваме затворена крива L, која (заедно со својата внатрешност) лежи во дадената област (црт. 1). Според интегралната формула на Коши, имаме:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{6}$$



Црт. 1



Црт. 2

Имајќи ја предвид и униформната конвергенција на низата $(f_n(z))$, од (6) добиваме

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{7}$$

Според теоремата 11° од 5.3, од (7) следува дека функцијата $f(z)$ е аналитична и дека

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta. \tag{8}$$

Преостанува да докажеме дека $(f_n'(z))$ конвергира униформно кон $f'(z)$ во секоја ограничена област D од внатрешноста на S. За таа цел, околу D ќе опишеме крива L, така што $\delta>0$ да е минималното растојание од L до контурата на D (црт. 2). Имајќи ги предвид равенствата:

$$f_n'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta, \quad f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta,$$

добиваме:

$$f_n'(z)-f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta. \tag{9}$$

Нека ε е даден позитивен реален број; да ставиме $\varepsilon_1=\dfrac{2\pi\delta^2}{l}\varepsilon$, каде што l е должината на кривата L. Поради униформната конвергенција на $(f_n(\zeta))$, постои природен број n_0, таков што, за секој $n\ge n_0$ и секој ζ од областа S, имаме:

$$|f_n(\zeta)-f(\zeta)|<\varepsilon_1.$$

Од друга страна,

$$|\zeta-z|>\delta$$

за секој z од областа D и секој ζ од кривата L. Имајќи го сето тоа предвид, од (9) добиваме:

$$|f_n'(z)-f'(z)|<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon_1}{\delta^2}l=\varepsilon,$$

со што покажавме дека $(f_n'(z))$ рамномерно конвергира кон $f'(z)$ во областа D. □

Ако работиме со функционални редови, докажаната теорема ја добива следнава форма:

7°. *Ако членовите на функционалниот ред* $\sum f_n(z)$ *се аналитични во дадена област и ако тој ред рамномерно конвергира во таа област, тогаш збирот* $f(z)$ *е исто така аналитична функција; притоа имаме*

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z).$$

Редот $\sum f_n'(z)$ *исто така е рамномерно конвергентен.* □

(Како и при реалните функции, за еден ред велиме дека е ***рамномерно конвергентен*** ако неговата низа од парцијални суми е рамномерно конвергентна.)

Критериумот на Вајерштрас важи и за комплексните функции. Овде само ќе го формулираме, бидејќи доказот што го дадовме во 7°, VIII.3.2, се пренесува и за овој случај, без никакви измени.

8°. *Нека е даден функционалниот ред* $\sum f_n(z)$, *каде што* $f_n(z)$ *се комплексни функции дефинирани во областа* S. *Ако постои конвергентен ред* $\sum c_n$ *со позитивни членови, таков што* $|f_n(z)| \le c_n$, *за секој природен број* n *и секој* z *од* S, *тогаш редот* $\sum f_n(z)$ *е рамномерно и апсолутно конвергентен во* S. □

6. 3. Степени редови. Тејлоров ред на функција

Да го разгледаме редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{10}$$

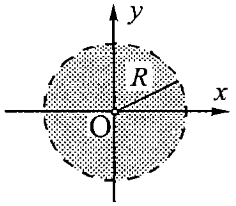
каде што (a_n) е дадена низа од комплексни броеви. На сосема ист начин како и при теоремите 1° и 2° од VIII.4 се докажува и следната:

9°. (***Теорема на Абел***). *Ако редот (10) е конвергентен за* $z = z_0 (\neq 0)$, *тогаш тој ред е апсолутно конвергентен за секој* z *од внатрешноста на кругот* $|z| \le |z_0|$.

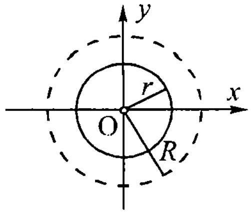
Ако редот (10) *е дивергентен за* $z = z_1$, *тогаш тој ред е дивергентен и за секој* $z: |z| > |z_1|$. □

Според оваа теорема се добива дека се можни следниве три случаи. Редот (10) е: а) конвергентен за секој z; б) дивергентен за секој $z \neq 0$, и в) конвергентен за секој z што е во внатрешноста на кругот $|z| < R$ (црт. 3), а дивергентен за секој $z: |z| > R$ (притоа R е фиксен реален број).

За бројот R велиме дека е ***радиус на конвергенција***, а $|z| < R$ ***е круг на конвергенцијата***. Во случајот а) можеме да сметаме дека $R = \infty$, а во случајот б) $R = 0$. На кружната линија редот може да биде конвергентен, или пак дивергентен.



Црт. 3



Црт. 4

Ќе докажеме дека секој степенен ред е и рамномерно конвергентен во кругот на конвергенцијата. Имено:

10°. *Ако $R>0$ е радиусот на конвергенција на редот (10) и ако е $0<r<R$, тогаш редот (10) е рамномерно конвергентен во кругот $|z|\le r$.*

Д о к а з. Нека $r<|z_0|<R$ (црт.4). Од тоа следува дека редот $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ е апсолутно конвергентен, т.е. дека редот со позитивни членови $\sum |a_n z_0^n|$ е конвергентен. Ако имаме $|z|\le r$, тогаш $|a_n z^n|<|a_n z_0^n|$, од што, според критериумот на Вајерштрас, следува дека редот $\sum a_n z^n$ е рамномерно конвергентен во кругот $|z|\le r$. Со тоа теоремата е докажана. □

Редот (10) е специјален случај од редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{11}$$

каде што a е фиксен комплексен број. Но, и овој ред може да се сведе на (10), ако се стави $z-a=z^*$. Според тоа, резултатите добиени за редот (10) се пренесуваат, на соодветен начин, и на редот (11). Така, и при редот (11) може да се зборува за круг на конвергенција, но сега центарот на тој круг е во точката a (црт. 5). Исто така, редот (11) е рамномерно конвергентен во кругот на конвергенцијата. Од теоремата 7° се добива и следнава теорема:

11°. *Збирот $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ на степениот ред (11) е аналитична функција во кругот на конвергенцијата. Притоа имаме*

$$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{12}$$

Д о к а з. Првиот дел на теоремата, како што веќе споменавме, е директна последица од 7°, ако се има предвид и 10°. Вториот дел, т.е. равенството (12) ќе го добиеме диференцирајќи го редот (11) n пати, и ставајќи $z=a$. □

Да претпоставиме сега дека $f(z)$ е аналитична функција во внатрешноста на кругот со центар во a и радиус R (црт. 6). Нека z е точка во внатрешноста на тој круг и нека L е кружна линија со центар во a и радиус r. Според интегралната формула на Коши, имаме:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

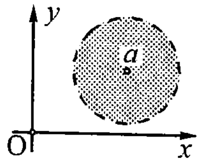
Ќе ја извршиме следнава трансформација:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{(\zeta-a)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}.$$

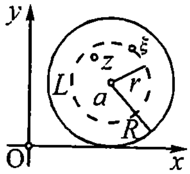
Ако ставиме $q=\dfrac{z-a}{\zeta-a}$, ќе имаме $|q|<1$, поради што $\dfrac{1}{1-q}=1+q+q^2+\cdots$

$\cdots + q^n + \cdots$. Така, добиваме:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2}(z-a) + \cdots + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}(z-a)^n + \cdots.$$



Црт. 5



Црт. 6

Од аналитичноста на $f(\zeta)$ следува дека постои k, таков што $|f(\zeta)| < k$ за секој $\zeta \in L$, а поради

$$\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| = |q| < 1, \text{ добиваме } \left|\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\right| < \frac{k}{r}|q^n|.$$

Според критериумот на Вајерштрас, редот од десната страна е рамномерно конвергентен на кривата L. Поради тоа, можеме да интегрираме член по член, и добиваме:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n,$$

каде што

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{13}$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

12°. *Ако $f(z)$ е аналитична функција во внатрешноста на кругот со центар во a, тогаш, за секоја точка z од внатрешноста на кругот, функцијата може да се развие во степенен ред*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n, \tag{14}$$

каде што коефициентите A_n се определени со (13). □

Редот од десната страна на (14) се вика **тејлоров ред за функцијата** $f(z)$ во околината на точката a.

Да изнесеме неколку примери.

1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

3) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

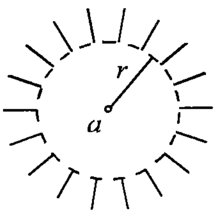
Сите три равенства се последица од правилата за барање на изводи: $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$. (Притоа: $a = 0$, $|z| < +\infty$.)

6. 4. Лоранов ред

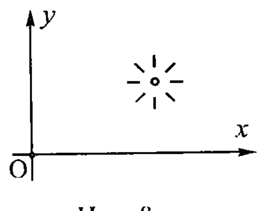
Многу блиски до степените редови се редовите со форма

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n} \ . \tag{15}$$

Уште повеќе, тие можат и да се испитаат со помош на степените редови. Навистина, ако ставиме $\frac{1}{z-a} = \zeta$, добиваме степенен ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$; нека овој ред има радиус на конвергенција $1/r > 0$. Тогаш, редот (15) ќе биде конвергентен за секој $z: |z-a| > r$, т.е. овој ред е конвергентен за секоја точка што е надвор од кругот со радиус r и центар во a (црт. 7). Може да се случи и тоа, редот (15) да биде конвергентен за секој $z \neq a$ (црт. 8) или пак да не биде конвергентен за ниедна точка z.



Црт. 7



Црт. 8

Користејќи ги резултатите добиени за степените редови, заклучуваме дека ако (15) е конвергентен за $|z-a| > R$, тогаш тој ред е апсолутно и рамномерно конвергентен во секоја област што лежи надвор од кругот $|z-a| \leq R$. Од тоа следува дека збирот на тој ред е аналитична функција во областа на конвергенцијата.

Да ги разгледаме сега редовите

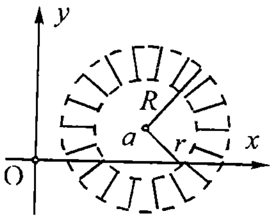
$$\sum_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-a)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n;$$

притоа, првиот нека е конвергентен за $|z-a| > r$, вториот за $|z-a| < R$, каде што $r < R$. Во тој случај редот

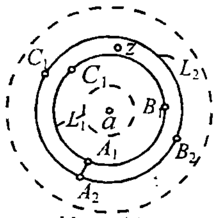
$$\sum_{n=-1}^{-\infty} A_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n \tag{16}$$

е конвергентен за секој z од кружниот прстен: $r < |z-a| < R$ (црт. 9).

Притоа, збирот на редот е аналитична функција во кружниот прстен.



Црт. 9



Црт. 10

Ќе ја докажеме следнава теорема:

13°. *Нека функцијата* $f(z)$ *е аналитична во кружниот прстен* $r<|z-a|<R$; *да ставиме:*

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \tag{17}$$

каде што L *е која било затворена крива што лежи во кружниот прстен. Тогаш функцијата* $f(z)$ *може да се напише во обликот*

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n, \tag{18}$$

при што равенството е точно за секој z *од кружниот прстен.*

Редот од десната страна на (17) се вика **лоранов**[1] **ред** за функцијата $f(z)$.

Д о к а з. Нека z е точка од кружниот прстен и нека L_1 и L_2 се кружни линии што лежат во кружниот прстен, а точката z е меѓу нив. На кружната линија L_1 да избереме точки A_1, B_1 и C_1 а на L_2: A_2, B_2 и C_3 (црт. 10); тогаш, според Кошиевата интегрална формула, имаме

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_3}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{A_1C_1B_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{19}$$

каде што $L_3=A_2B_2C_2A_2A_1C_1B_1A_1A_2$.

Да го разгледаме интегралот

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

На ист начин како и во доказот на теоремата 12° се добива дека

$$I_2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n,$$

каде што

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta. \tag{20}$$

1) Пол Лоран (*Paul Matthieu Hermann Laurent*, 1841-1908), француски математичар

(Во овој случај не мора да биде точно равенството (13), бидејќи функцијата $f(z)$ може и да не биде аналитична во внатрешноста на L_2.) .

Преостанува да го пресметаме интегралот:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A_1C_1B_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{B_1C_1A_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta.$$

Точката ζ се менува во кругот L_1, од што следува дека $|\zeta - a| < |z-a|$ т.е. $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1$. Потоа, изразот $\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}$ го претставуваме во облик:

$$\frac{f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{f(\zeta)}{z-a-(\zeta-a)} = \frac{f(\zeta)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} =$$

$$= \frac{f(\zeta)}{z-a}\left(1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n}+\cdots\right)$$

Поради рамномерната конвергенција, редот од десната страна може да се интегрира член по член. Така се добива:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{z-a}\oint\limits_{L_1} f(\zeta)d\zeta + \frac{1}{(z-a)^2}\oint\limits_{L_1}(\zeta-a)f(\zeta)d\zeta + \right.$$

$$\left. +\cdots+\frac{1}{(z-a)^2}\oint\limits_{L_1}(\zeta-a)^{n-1}f(\zeta)d\zeta+\cdots\right] = \sum_{n=-\infty}^{-1}A_n(z-a)^n,$$

каде што

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \tag{21}$$

Од сето тоа следува дека е точно равенството (18), при што A_n, за $n \geq 0$, е определен со (20), а за $n < 0$ – со (21).

Ако L е која било затворена крива меѓу L_1 и L_2 се добива:

$$\int\limits_{L_1}(\zeta-a)^{n+1}f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{L}(\zeta-a)^{n+1}f(\zeta)d\zeta,$$

$$\int\limits_{L_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \int\limits_{L}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

од што следува дека е точно и равенството (18) за секој цел број n.

Со тоа теоремата е докажана. □

Да наведеме два примера.

4) $e^{1/z}+e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right), \qquad 0<|z|<+\infty;$

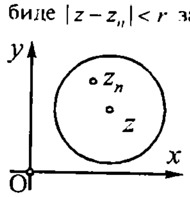
5) $\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!z^{2n-1}}, \qquad 0<|z|<+\infty.$

6. 5. Вежби

1. Нека низата (z_n) конвергира кон $z \neq 0$. Да се покаже дека
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}=\frac{1}{z}.$$

Р е ш е н и е. Ќе дадеме два доказа. Прво ќе ги искористиме низите со реални членови. Ако $x_n+iy_n=z_n$, $x+iy=z$, тогаш имаме
$$\frac{1}{z_n}=\frac{x_n}{x_n^2+y_n^2}-i\frac{y_n}{x_n^2+y_n^2}\to\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{z}.$$

Ќе дадеме сега директен доказ. Нека $|z|=2r$; околу z да опишеме круг со радиус r (црт. 11). Го избираме природниот број n_1, така што да биде $|z-z_n|<r$ за $n\geq n_1$ т.е. секој член на низата (z_n), за $n\geq n_1$, е во внатрешноста на кругот. Според тоа, за $n\geq n_1$, имаме:
$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{z_n}\right|=\left|\frac{z_n-z}{z\,z_n}\right|<\frac{2}{|z|^2}|z_n-z|.$$



Црт. 11

Нека ε е даден позитивен реален број; да го избереме n_2 така што да биде $|z_n-z|<\dfrac{|z|^2\varepsilon}{2}$, за $n\geq n_2$.

Земајќи n_0 да е поголемиот од броевите n_1 и n_2, добиваме $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z_n}\right|<\varepsilon$ за $n\geq n_0$, а тоа и сакавме да докажеме.

2. Да се испита конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{in}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(in)}{2^n}$.

Р е ш е н и е. а) Редот е дивергентен, бидејќи општиот член e^{in} не се стреми кон нула.

б) Поради $\left|\dfrac{e^{in}}{n^2}\right|<\dfrac{1}{n^2}$ редот е апсолутно конвергентен.

в) $\dfrac{\cos(in)}{2^n}=\dfrac{e^n+e^{-n}}{2^n}=\left(\dfrac{e}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2e}\right)^n\to\infty$; одовде следува дека редот е дивергентен.

3. Да се одредат радиусите на конвергенција на приложените редови.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(in)\cdot z^n$.

Р е ш е н и е. а) $R=1$. б) $R=\infty$. в) $\left|\dfrac{\cos i(n+1)}{\cos(in)}\right|=\dfrac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}}\to e$; одовде, според критериумот на Даламбер, следува дека $R=1/e$.

4. Ако се знае дека редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ има радиус на конвергенција $R: 0<R<\infty$, да се одреди радиусот на конвергенција на секој од следниве редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$.

Р е ш е н и е. а) Ист радиус R како и дадениот ред, бидејќи може да се добие од него со диференцирање и множење со z.

б) Лесно се добива дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n z^n$ има радиус на конвергенција $R/2$.

Нека z_0 е во внатрешноста на кругот на конвергенција од редот $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n$.

Тогаш, поради $|c_n z_0^n| \le |(2^n-1)c_n z_0^n|$, добиваме дека е конвергентен редот $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_0{}^n$,

па значи и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n z_0{}^n$, од што следува $|z_0| \le R/2$. Имајќи го тоа предвид, лесно се

заклучува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n$ има радиус на конвергенција $R/2$. в) ∞. г) 0.

5. Да се развијат по степените на z функциите $f(z)$:

а) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$; б) $\int_0^z e^{z^2}dz$; в) $z^2 e^{1/z}$; г) $\dfrac{1}{z^3-3z^2}$,

а по степените на $z-i$ функцијата д) $1/(1+z^2)$.

Да се одреди и областа на конвергенцијата.

Р е ш е н и е. а) $1/(1+z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$;

$1/(1+z)^2 = 1 - 2z + 3z^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)z^n + \cdots$

$z^2/(1+z)^2 = z^2 - 2z^3 + 3z^4 + \cdots + (-1)^{n-1}(n+1)z^{n+2} + \cdots$

сето тоа е точно при $|z| < 1$.

б) $\int_0^z e^{z^2}dz = z + \dfrac{z^3}{1!\cdot 3} + \dfrac{z^5}{2!\cdot 5} + \cdots + \dfrac{z^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)} + \cdots$, за секој z.

в) $z^2 e^{1/z} = z^2\left(1 + \dfrac{1}{1!z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \cdots\right) = z^2 + z + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!z} + \dfrac{1}{4!z^2} + \cdots, z \ne 0.$

г) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{-1}{3-z} = -\dfrac{1}{3z^2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = -\dfrac{1}{3z^2}\left(1 + \dfrac{z}{3} + \dfrac{z^2}{3^2} + \cdots\right) =$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{3^{n+1}} \text{ при } 0 < |z| < 3;$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{z}} = -\frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+3}}, \quad |z| > 3.$$

д) $\dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{z-i}\cdot\dfrac{1}{2i\left(1+\dfrac{z-i}{2i}\right)} = \dfrac{1}{2i(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{z-i}{2i}\right)^n =$

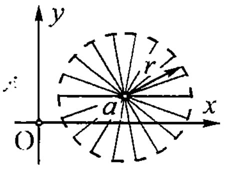
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1}, \text{ за } 0 < |z-i| < 2;$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{2i}{z-i}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}}, \quad |z-i| > 2.$$

IX. 7. Остатоци

7. 1. Изолирани сингуларни точки

Точките во кои една функција $f(z)$ нема извод се викаат ***сингуларни точки*** за таа функција. За сингуларната точка a велиме дека е ***изолирана***, ако постои позитивен број r, таков што функцијата $f(z)$ има извод во секоја точка $z \neq a$ од кругот $|z-a|<r$ (црт. 1). Во тој случај $f(z)$ може да се развие во лоранов ред во близината на точката a:



Црт. 1

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n. \tag{1}$$

Притоа можат да настанат следниве три случаи:

(i) $A_n = 0$ за сите $n<0$.

(ii) Има само конечно многу $n<0$ за кои $A_n \neq 0$.

(iii) Има безброј многу $n<0$ за кои $A_n \neq 0$.

Во случајот (i) за a велиме дека е ***привидна сингуларна точка***. (На пример, за функцијата $\sin z/z$, $z=0$ е привидна сингуларна точка.) Ставајќи $f(a)=A_0$, уредуваме $f(z)$ да е аналитична и за $z=a$.

Во случајот (ii) за $z=a$ велиме дека е ***пол***, и тоа ***со ред*** k, ако k е најголемиот природен број со својството: $A_{-k} \neq 0$. Тогаш редот (1) го има обликот

$$f(z)=\frac{A_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots+\frac{A_{-1}}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+\cdots+A_n(z-a)^n+\cdots,$$

од што следува дека

$$(z-a)^k f(z)=A_{-k}+A_{-k+1}(z-a)+\cdots+A_0(z-a)^k+\cdots,$$

па значи $z=a$ е привидна сингуларна точка за функцијата $g(z)=$ $=(z-a)^k f(z)$. Исто така, ако $h(z)$ е аналитична функција во околината на $z=a$ и ако $h(a)\neq 0$, тогаш функцијата за

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-a)^n}$$

$z=a$ е пол од n-ти ред.

Во случајот (iii) велиме дека $z=a$ е ***есенцијална*** (т.е. ***суштинска***) ***сингуларна точка***. На пример, $z=0$ е есенцијална сингуларна точка за функцијата $f(z)=e^{1/z}$, бидејќи имаме:

$$f(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}+\cdots.$$

7. 2. Остатоци

Нека функцијата $f(z)$ е аналитична во околината на точката a. Ако L е кружница со доволно мал радиус, тогаш интегралот

$$I = \oint_L f(z)dz$$

постои. За бројот $\frac{1}{2\pi i} \cdot I = B$ велиме дека е ***остаток*** (или ***резидуум***) на функцијата $f(z)$ во точката a; тој број се означува и со $\operatorname*{Res}_a f(z)$. Според тоа имаме,

$$\operatorname*{Res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz. \tag{2}$$

Ако функцијата $f(z)$ е аналитична и во точката a, ќе добиеме $\oint_L f(z)dz = 0$, па значи и $\operatorname*{Res}_a f(z) = 0$. Во случај a да е изолирана сингуларна точка, можеме во нејзината околина да ја развиеме функцијата $f(z)$ во лоранов ред:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(z-a)^n,$$

каде што

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

За $n = -1$ ќе добиеме

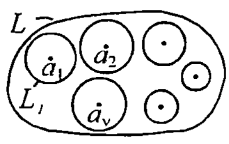
$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz = \operatorname*{Res}_a f(z). \tag{3}$$

Според тоа, *остатокот на функцијата $f(z)$ во точката a е коефициентот пред $(z-a)^{-1}$ во развојот на функцијата $f(z)$ во околината на точката a, по степените од $z-a$.*

Ќе докажеме една теорема, која се вика ***основна теорема за остатоците.***

1°. *Нека функцијата $f(z)$ е аналитична во областа ограничена од затворената крива L, освен за конечно многу точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$, кои се изолирани сингуларни точки. Во тој случај е точно равенството:*

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i[\operatorname*{Res}_{a_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{a_2} f(z) + \cdots + \operatorname*{Res}_{a_k} f(z)]. \tag{4}$$



Црт. 2

Д о к а з. Околу секоја сингуларна точка a опишуваме круг со доволно мал радиус така што во внатрешноста на тој круг да нема друга сингуларна точка освен a (црт. 2). Тогаш, според равенството (5) од 5.2 имаме:

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint_{L_1} f(z)\,dz + \oint_{L_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{L_k} f(z)\,dz =$$
$$= 2\pi i[\operatorname*{Res}_{a_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{a_2} f(z) + \cdots + \operatorname*{Res}_{a_k} f(z)],$$

што и сакавме да докажеме. □

Да видиме сега како се пресметува остатокот $\operatorname*{Res}_a f(z)$, ако a е пол со ред n. Во тој случај функцијата $g(z) = (z-a)^n f(z)$ можеме да ја сметаме за аналитична во точката a и некоја нејзина околина. Да ја развиеме $f(z)$ во лоранов ред:

$$f(z) = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \cdots + A_m + (z-a)^m + \cdots,$$

и да ја помножиме со $(z-a)^n$:

$$(z-a)^n f(z) = A_{-n} + \cdots + A_{-1}(z-a)^{n-1} + A_0(z-a)^n + \cdots,$$

Диференцираме $n-1$ пат:

$$[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)} = [g(z)]^{(n-1)} = (n-1)!A_{-1} + (z-a)(\ldots).$$

Од тоа следува:

$$A_{-1} = \operatorname*{Res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} g_{(a)}^{(n-1)}, \text{ т.е.}$$

$$A_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}[(z-a)^n \cdot f(z)]_{z=a}^{(n-1)};$$

но, со оглед на тоа што $f(z)$ не е определена за $z=a$, покоректно е да напишеме:

$$\operatorname*{Res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} [(z-a)^n \cdot f(z)]^{(n-1)}. \tag{5}$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

2°. *Ако a е пол со ред n за функцијата $f(z)$, тогаш е точно равенството* (5). □

Да разгледаме еден пример.

1) За функцијата $1/(z^2+1)^n$ точката $z=i$ е пол со ред n, па значи имаме:

$$B = \operatorname*{Res}_i \frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i}\left[\frac{(z-i)^n}{(z^2+1)^n}\right]^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^n}\right]^{(n-1)}.$$

Поради $[(z+i)^{-n}]^{(n-1)} = (-1)^{n-1} n(n+1)\ldots(2n-2)(z+i)^{-2n+1}$, имаме

$$B = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \cdot \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1} i^{2n}} \cdot i = -\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \cdot \frac{i}{2^{2n-1}}.$$

При пресметувањето на остатоците може корисно да послужи и следнава теорема:

3°. *Нека $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ се аналитични функции во околина на точката* *а и нека* $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi(z) = (z-a)\psi_1(z)$, *каде што* $\psi_1(a) \neq 0$. *Тогаш а е пол од прв ред за функцијата* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ *и притоа:*

$$\operatorname*{Res}_a \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{6}$$

Доказ. Од направените претпоставки следува дека

$$\frac{\varphi(z)}{\psi_1(z)} = g(z)$$

е аналитична функција во околина на a, па можеме да го напишеме тејлоровиот ред за оваа функција:

$$g(z) = g(a) + (z-a)g'(a) + \cdots,$$

од што следува

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{g(z)}{z-a} = \frac{g(a)}{z-a} + g'(a) + \cdots.$$

Од ова се гледа дека

$$g(a) = \operatorname*{Res}_a \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Имајќи пак предвид тоа што $g(a) = \dfrac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}$ и $\psi'(z) = \psi_1(z) + (z-a)\psi_1'(z)$, добиваме

$$\operatorname*{Res}_a \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = g(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

т.е. равенството (6). □

2) Функцијата $1/(z^4+1)$ има четири пола од прв ред; тоа се $z_1 = e^{-i\pi/4}$, $z_2 = e^{i\pi/4}$, $z_3 = e^{3i\pi/4}$, $z_4 = e^{-3i\pi/4}$. Да ги пресметаме остатоците во сите четири точки. Според докажаната теорема ќе имаме:

$$\operatorname*{Res}_{z_\nu} \frac{1}{z^4+1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_\nu} = -\frac{z_\nu}{4}, \quad \nu = 1,2,3,4.$$

Да ја примениме теоремата 1°, за пресметување на неколку интеграли.

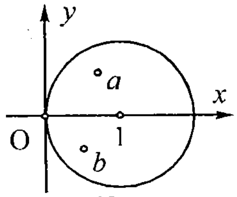
3) $I = \int\limits_L \dfrac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, каде што L е $|z-2| = \dfrac{1}{2}$ (Спореди со вежбата 56) од 5.4). Подинтегралната функција има два пола $z=1$ и $z=2$, но само $z=2$ е во внатрешноста на кружницата по која се врши интеграцијата, па затоа ќе имаме:

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_2 f(z) = 2\pi i \left[\frac{z}{z-1}\right]'_{z=2} = 2\pi i\left[-\frac{1}{(z-1)^2}\right]_{z=2} = -2\pi i$$

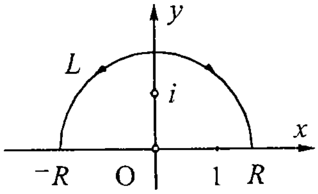
4) $I = \oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left\{ \operatorname*{Res}_a \dfrac{1}{z^4+1} + \operatorname*{Res}_b \dfrac{1}{z^4+1} \right\} =$

$$= 2\pi i\left\{-\frac{a}{4}-\frac{b}{4}\right\} = -\frac{\pi i}{2}\{e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}\} = -\pi i\cos\frac{\pi}{4} = \frac{-\pi i\sqrt{2}}{2},$$

каде што $a = e^{i\pi/4}$, $b = e^{-i\pi/4}$ (црт. 3).



Црт. 3



Црт. 4

5) За L како на црт. 4, имаме $I = \oint_L \frac{dz}{(z^2+1)^n} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{1}{(z^2+1)^n} =$

$$= -2\pi i\frac{(2n-2)!\,i}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}} = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}.$$

7. 3. Пресметување на реални несвојствени интеграли

Ќе докажеме уште две својства, коишто ќе ги искористиме за пресметување на некои реални интеграли со бесконечни граници.

Нека $f(z)$ е непрекината функција во областа $|z| \geq R_0$, каде што R_0 е даден позитивен реален број, и нека L е полукружната линија $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ $(R > R_0)$ (црт. 5).

4°. *Ако* $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, *тогаш* $\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz = 0$.

Д о к а з. Поради $zf(z) \to 0$, за доволно голем $|z| = R$, ќе имаме $|zf(z)| < \varepsilon/\pi$, т.е. $|f(z)| < \varepsilon/\pi R$, па значи:

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{\pi R}\cdot \pi R = \varepsilon,$$

а од тоа следува

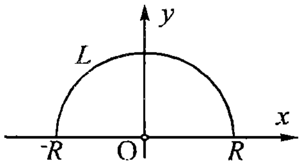
$$\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz = 0,$$

т.е. точноста на теоремата.

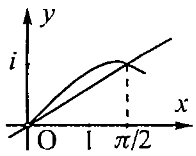
5° (***Жорданова лема***). *Ако m е даден позитивен реален број и ако* $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, *тогаш*

$$\lim_{R\to\infty}\int_L e^{imz} f(z)dz = 0.$$

Д о к а з. Да покажеме прво дека е точно неравенството $\sin x > 2x/\pi$, каде што $0 < x < \pi/2$. За таа цел, да ја воочиме синусоидата $y = \sin x$ и правата што ги сврзува точките $z = 0$ и $z = \pi/2 + i$ (црт. 6). Равенката на таа права е: $y = 2x/\pi$; па бидејќи $\sin x$, при $0 \leq x \leq \pi/2$ е конвексна имаме $\sin x > 2x/\pi$.



Црт. 5



Црт. 6

Да се вратиме сега на интегралот:

$$I=\int_L e^{imz}f(z)dz=\int_0^{\pi} e^{imRe^{i\varphi}}f(Re^{i\varphi})\,iRe^{i\varphi}d\varphi=$$

$$=iR\int_0^{\pi} e^{i\varphi}e^{imR\cos\varphi}e^{-mR\sin\varphi}f(Re^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi.$$

Го избираме $R=|z|$ така голем да биде $|f(z)|=|f(Re^{i\varphi})|<\varepsilon$, каде што ε е однапред даден позитивен реален број. Во тој случај, ќе имаме:

$$I<R\int_0^{\pi}|e^{i(\varphi+mR\cos\varphi)}||f(Re^{i\varphi})|e^{-mR\sin\varphi}d\varphi<R\varepsilon\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi. \qquad (7)$$

Поради: $\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi=\int_0^{\pi/2}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi+\int_{\pi/2}^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi,$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi=-\int_{\pi/2}^{0}e^{-mR\sin t}dt=\int_0^{\pi/2}e^{-mR\sin t}dt,$$

имаме:

$$\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi=2\int_0^{\pi/2}e^{-mR\sin\varphi}d\varphi.$$

Имајќи го тоа предвид, а и неравенството $\sin\varphi>2\varphi/\pi$, т.е. $-\sin\varphi\leq-2\varphi/\pi$ за $0<\varphi<\pi/2$, од (7) добиваме:

$$|I|<2R\varepsilon\int_0^{\pi/2}e^{-2mR\varphi/\pi}d\varphi=\frac{\pi\varepsilon}{m}(1-e^{-mR}),$$

а од тоа следува дека $I\to 0$ кога $R\to\infty$, што и сакавме да докажеме. □

Ќе видиме сега како може својствата 4° и 5° да се искористат ***за пресметување на реални интеграли со бескрајни граници.***

Да претпоставиме дека функцијата $f(z)$ е аналитична во горната полурамнина, $\operatorname{Im} z>0$, освен за конечно многу изолирани сингуларни точки $a_1, a_2, \dots, a_k$ и да ставиме

$$B_\nu=\operatorname*{Res}_{a_\nu} f(z),\quad C_\nu=\operatorname*{Res}_{a_\nu} e^{imz}f(z).$$

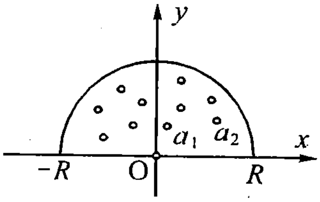
каде што m е даден позитивен реален број. Точни се следниве теореми:

6°. *Ако* $\lim_{z\to\infty} z\cdot f(z)=0$, *тогаш*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i[B_1+B_2+\cdots+B_k]. \qquad (8)$$

7°. *Ако* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, *тогаш*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x)dx = 2\pi i[C_1+C_2+\cdots+C_k]. \tag{9}$$



Црт. 7

Д о к а з. За да ги докажеме овие тврдења, ќе го избереме R така големо што сите точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ да лежат во внатрешноста на полукружната линија $z=Re^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$. Нека L^* е линијата составена од полукружницата L и нејзиниот дијаметар (црт. 7). Тогаш, според основната теорема за остатоците, имаме:

$$2\pi i[B_1+B_2+\cdots+B_k] = \int_{L^*} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_L f(z)dz. \tag{10}$$

$$2\pi i[C_1+C_2+\cdots+C_k] = \int_{L^*} e^{imz} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{imx} f(x)dx + \int_L e^{imz} f(z)dz. \tag{11}$$

Ако $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, тогаш од (11) (имајќи ја предвид лемата на Жордан), го добиваме равенството (9), т.е. точноста на тврдењето 7°. Според својството 4°, од (10), го добиваме и равенството (8), т.е. точноста на тврдењето 6°. □

Да ги примениме добиените резултати на неколку конкретни примери.

6) Поради $\lim\limits_{z\to\infty} z\dfrac{1}{(z^2+1)^n}=0$ (за $n\ge1$), имаме

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i\,\operatorname*{Res}_{i}\frac{1}{(z^2+1)^n} \text{ (пример 1)} =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{-(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\cdot\frac{i}{2^{2n-1}} = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}.$$

7) Од исти причини, ако се искористи и примерот 2), добиваме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\left(-\frac{e^{i\pi/4}}{4}-\frac{e^{3i\pi/4}}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i\left(\frac{2i\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

8) Функцијата

$$\frac{z}{z^2-2z+10}$$

се стреми кон нула кога $z\to\infty$ и има еден пол од прв ред $a=1+3i$ во горната полурамнина. Притоа, имаме

$$\operatorname*{Res}_{a}\frac{e^{iz}z}{z^2-2z+10} = \frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{2(1+3i)-2} = \frac{1}{6i}(1+3i)e^{-3}(\cos 1+i\sin 1).$$

Според лемата на Жордан добиваме дека

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx = \frac{2\pi i}{6ie^3}(1+3i)(\cos 1+i\sin 1),$$

од што следува:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1).$$

7. 4. Вежби

1. Да се најдат сингуларните точки на приложените функции, а потоа да се пресметаат и остатоците во секоја од нив:

а) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$; б) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$; в) $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$;

г) $1/\sin z$; д) $e^{z+1/z}$; ѓ) $z^n \sin(1/z)$ (n е природен број).

Р е ш е н и е. а) $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-1$; z_2 и z_3 се полови со ред 1, а z_1 има ред 3. Според тоа, имаме $\operatorname{Res}_{z_2} f(z)=\left[\dfrac{1}{3z^2-5z^4}\right]_{z=1}=-\dfrac{1}{2}=\operatorname{Res}_{z_3} f(z)$;

$$\operatorname{Res}_{z_1} f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z^2}\right]''_{z=0}=\frac{1}{2}[2z(1-z^2)^{-2}]'_{z=0}=\frac{1}{2}[2(1-z^2)^{-2}+8z^2(1-z^2)^{-3}]_{z=0}=1.$$

б) Сингуларни точки се $z=\pm i$, а тие се имено, полови со ред 2. Според тоа имаме: $\operatorname{Res}_{i} f(z)=\lim\limits_{z\to i}\left[\dfrac{z^2}{(z+i)^2}\right]'=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{2z(z+i)^2-2z^2(z+i)}{(z+i)^4}=\dfrac{2i\cdot 2i+2}{8i^3}=\dfrac{1}{4i}$;

$$\operatorname{Res}_{-i} f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{2z(z-i)-2z^2}{(z-i)^3}=\frac{-2}{8i}=-\frac{1}{4i}.$$

в) $z_1=0$, $z_{2,3}=\pm 3i$; сите се полови, z_1 има ред 2, $z_{2,3}$ се од прв ред. Притоа имаме $\operatorname{Res}_{3i} f(z)=\dfrac{e^{3i}}{-9\cdot 6i}=\dfrac{i\,e^{3i}}{54}$; $\operatorname{Res}_{-3i} f(z)=\dfrac{e^{-3i}}{9\cdot 6i}=\dfrac{-ie^{-3i}}{54}$;

$$\operatorname{Res}_{0} f(z)=\left[\frac{e^z}{z^2+9}\right]'_{z=0}=\left[\frac{e^z(z^2+9)-2ze^z}{(z^2+9)^2}\right]_{z=0}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}.$$

г) Секоја точка $z=k\pi$ (k е цел број) е пол од прв ред. Притоа имаме:

$$\operatorname{Res}_{k\pi}\frac{1}{\sin z}=\left[\frac{1}{\cos z}\right]_{k\pi}=\frac{1}{(-1)^k}=(-1)^k$$

д) $z=0$ е есенцијална сингуларна точка. Поради

$$e^{z+1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n,$$

добиваме:

$$\operatorname{Res}_{0} f(z)=1+\frac{1}{3!}\binom{3}{2}+\frac{1}{5!}\binom{5}{3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}\binom{2n-1}{n}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2!1!}+\frac{1}{3!2!}+\cdots+\frac{1}{n!(n-1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!\,n!}.$$

г) $z=0$ е есенцијална сингуларна точка. Притоа имаме:

$$z^n \sin\frac{1}{z} = z^{n-1} - \frac{1}{3!}z^{n-3} + \frac{1}{5!}z^{n-5} - \dots$$

Ако $n=2k$, тогаш

$$\operatorname*{Res}_0 f(z) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}; \quad \operatorname*{Res}_0 f(z) = 0, \text{ за } n = 2k-1.$$

2. Да се решат интегралите од вежбите 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 од **5.4** со помош на остатоци.

3. Да се покаже точноста на равенствата:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; б) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a}\ (a>0)$;

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}\ (a>0, b>0)$;

г) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$; д) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{\pi}{6}$.

Р е ш е н и е. При сите интеграли се применува резултатот од теоремата 6°. Да ја спроведеме работата во сите детали, на пример, за интегралот даден во г). Во горната полурамнина, функцијата $1/(1+z^6)$ има три пола од прв ред, тоа се $z_1 = e^{i\pi/6}$, $z_2 = e^{i\pi/2}$ и $z_3 = e^{5i\pi/6}$. Остатоците во тие точки ги определуваме лесно: $\operatorname*{Res}_{z_\nu} f(z) = \frac{1}{6z_\nu^5} = -\frac{z_\nu}{6}$; од тоа следува:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \pi i\left(-\frac{z_1}{6} - \frac{z_2}{6} - \frac{z_3}{6}\right) = -\frac{\pi i}{6}(z_1+z_2+z_3) =$$

$$= -\frac{\pi i}{6}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} + i + \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}$$

4. Да се покаже точноста на равенствата:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx = \frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2 + \sin 2)$,

б) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \pi\frac{e^{-ab}}{2b}\ (a,b>0)$,

в) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-ab}\ (a,b>0)$.

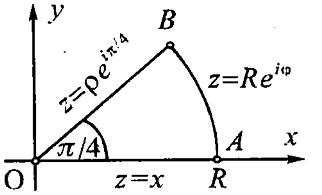
Р е ш е н и е. Во сите три случаи се користи теоремата 7°. Да го разгледаме последниот интеграл. Имаме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{aix}dx}{x^2+b^2} = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{bi}\frac{ze^{aiz}}{z^2+b^2} = 2\pi i \cdot \frac{bie^{-ab}}{2\cdot bi} = \pi ie^{-ab}.$$

Според тоа, имаме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos ax}{x^2+b^2}dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx = \pi e^{-ab}.$$

5. Да се пресметаат интегралите $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2dx$, (*интеграли на Фреснел* [1]).



Црт. 8

Р е ш е н и е. Поаѓаме од функцијата $f(z)=e^{iz^2}$. Интегрираме по кружниот исечок $L=OABO$ (црт. 8). Од аналитичноста на функцијата, според основната теорема на Коши, следува

$$0=\int_L e^{iz^2}dz=\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_0^{\pi/4}e^{iR^2e^{2i\varphi}}iRe^{i\varphi}d\varphi+\int_R^0 e^{i\rho^2e^{i\pi/2}}\cdot e^{i\pi/4}d\rho. \tag{12}$$

Да го воочиме интегралот:

$$|I|=\left|\int_0^{\pi/4}e^{iR^2(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)}iRe^{i\varphi}d\varphi\right|\le R\int_0^{\pi/4}e^{-R^2\sin2\varphi}d\varphi=\frac{R}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-R^2\sin t}dt.$$

Притоа, користејќи го неравенството $\sin t>2t/\pi$ (како и при доказот на Жордановата лема), добиваме $\lim\limits_{R\to\infty}I=0$. Имајќи го тоа предвид, од (12) добиваме

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx+i\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=e^{i\pi/4}\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}d\rho=\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)\frac{\sqrt\pi}{2},$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{\sqrt\pi}{2\sqrt2}.$$

(Погоре е користен и резултатот од вежбата 4 во VI.3.7, дека $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt\pi}{2}$.)

IX. 8. Лапласова трансформација

Во овој параграф ќе се задржиме накратко на лапласовата трансформација, која се состои во тоа што функциите од една реална променлива ги пресликува во соодветни комплексни функции од една комплексна променлива. Оваа трансформација потоа ќе ја користиме за решавање на диференцијални равенки од попрост вид.

8. 1. Дефиниција, својства и примери

Нека $f(t)$ е комплексна функција од реалната променлива t и нека $p=\sigma+i\tau$ е комплексен број. Интегралот

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt \tag{1}$$

---

1) Августин Фреснел (*Augustin Jean Fresnel*, 1788-1827), француски математичар

секако зависи од p, т.е. е функција $F(p)$ од комплексната променлива p. За $F(p)$ велиме дека е ***лапласова трансформација*** на $f(t)$ и пишуваме $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, или $F(p) \to f(t)$, или $F(p) = f(t)$. Значи,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt. \tag{1'}$$

Функцијата $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ е дефинирана за оние вредности на p за кои несвојствениот интеграл (1) е конвергентен. Јасно е дека за конвергенцијата на тој интеграл е битна функцијата $f(t)$, и тоа само за $t \geq 0$. Затоа, обично, ќе претпоставуваме дека $f(t) = 0$ за $t < 0$. Исто така, не споменувајќи специјално, ќе претпоставиме дека $f(t)$ е непрекината функција за секој позитивен број t, или пак дека има конечно многу прекини.

За $f(t)$, обично, се вели дека е ***оригинал***, а за $F(p)$ - ***слика*** на $f(t)$.

Ќе изнесеме две теореми (едната без доказ [1]) кои се однесуваат на прашањето за дефинираноста на функцијата $F(p)$.

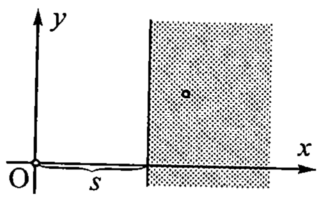
1°. *Нека $f(t)$ е дадена комплексна функција од една реална променлива t, и нека $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$. Еден од следните три случаи е исполнет:*

(*i*) *$F(p)$ е определена за секој p;*

(*ii*) *$F(p)$ не е определена ниту за една вредност на p;*

(*iii*) *постои реален број s, таков што $F(p)$ е определена за секој комплексен број $p = \sigma + i\tau$, за кој $\operatorname{Re} p = \sigma > s$, а не е определена ако $\sigma < s$.*

Уште повеќе, $F(p)$ е аналитична функција во спомената област. □



црт. 1

Третиот случај е претставен на црт. 1. Во исшрафираниот дел на рамнината, функцијата $F(p)$ е определена, а во неисшрафираниот не. Бројот s се вика и ***апсциса на конвергенцијата за интегралот*** (1). Не е секогаш така лесно определувањето на тој број, па затоа е корисно ако се знае барем дека $s \leq \alpha$, каде што α е познат реален број. Наредната теорема ни укажува како се наоѓа таков број за една широка класа елементарни функции.

2°. (*Теорема на егзистенција*). Нека $f(t)$ е функција, непрекината по делови на секој конечен интервал за $t \geq 0$ и нека го задоволува условот

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \tag{2}$$

1) За доказ да се види, на пример, Толстов, том II, стр. 224

за секој $t \geq 0$ и за некои констанши M и α. Тогаш лайласовата шрансформација од $f(t)$ постои за секој $\sigma = \operatorname{Re} p > \alpha$.

Д о к а з. Бидејќи $f(t)$ е непрекината по делови [2], $e^{-\sigma t} f(t)$ е интеграбилна во кој било конечен интервал на t-оската, па според (2), за $p = \sigma + i\tau$ и $\sigma > \alpha$, добиваме:

$$\left|\int_0^A e^{-pt} f(t)dt\right| \leq \int_0^A e^{-\sigma t}|f(t)|\,dt \leq M\int_0^A e^{-(\sigma-\alpha)t}dt =$$

$$= \frac{M}{\sigma-\alpha} e^{-(\sigma-\alpha)t}\Big|_0^A \to \frac{M}{\sigma-\alpha} \text{ кога } A \to \infty. \ \square$$

Условот (2) го задоволуваат многу функции. Такви се имено, полиномните функции, експоненцијалните и тригонометриските.

И во ойшш случај, за сиише функции шшо нашаму ќе ги разгледуваме, ќе йрешйосшавуваме дека е исйолнеш овој услов.

Поголемиот дел од својствата што ќе ги изнесеме подолу, ќе ги докажуваме, но некои од доказите не ќе можат да се сметаат за комплетни затоа што се работи за несвојствени интеграли чија теорија не е во задоволителна мера изградена во нашите книги.

3° (***Теорема на линеарност***). *Ако постои $\mathcal{L}(f_i(t))$, $i = 1,2$, тогаш*

$$\mathcal{L}(k\, f_1(t)) = k\,\mathcal{L}(f_1(t)), \ (k \text{ е константа});$$

$$\mathcal{L}(f_1(t) + f_2(t)) = \mathcal{L}(f_1(t)) + \mathcal{L}(f_2(t)).$$

Д о к а з. $\mathcal{L}(k\, f_1(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} k\, f_1(t)dt = k\,\mathcal{L}(f_1(t))$;

$$\mathcal{L}(f_1 + f_2) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(f_1 + f_2)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f_1\, dt + \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f_2 dt = \mathcal{L}(f_1) + \mathcal{L}(f_2) \ \square$$

4° (***Теорема за комплексна транслација***). *Нека a е реален број. Ако $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, тогаш*

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(p+a)$$

(За $a > 0$, ова својство е познато како ***теорема за придушување***.)

Д о к а з. $\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} f(t)dt = F(p+a)$.

5° (***Теорема за реална транслација***). *Ако $a > 0$ и $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, тогаш*

$$\mathcal{L}(f(t-a)) = e^{-pa}\mathcal{L}(f(t)).$$

Д о к а з. Да ставиме $g(t) = f(t-a)$. Поради $f(t) = 0$ за $t < 0$,

2) т.е. таква што во секој конечен интервал таа има најмногу конечен број прекини од прв вид

имаме $g(t)=0$ за $t \leq a$. Според тоа имаме:

$$\mathcal{L}(f(t-a)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)dt = \int_a^{+\infty} e^{-pt} g(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-p(u+a)} g(u+a)du =$$

$$= e^{-pa} \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-pa}\mathcal{L}(f(t)) = e^{-pa}F(p). \ \square$$

6° (***Теорема за периодичен оригинал***). *Ако $f(t)$ е периодична функција со период T, тогаш е точно равенството:*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$$

Доказ. Пред сè, да напомниме дека $f(t)$ е периодична за позитивни t, додека $f(t)=0$ за $t<0$. Имајќи го тоа предвид, добиваме дека:

$$f(t)-f(t-T)=f(t) \text{ за } 0<t<T \text{ и } f(t)-f(t-T)=0 \text{ за } t>T.$$

Потоа, со помош на 3° и 5°, добиваме

$$\mathcal{L}[f(t)-f(t-T)] = \int_0^{\infty} [f(t)-f(t-T)]e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \text{ т.е.}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) - e^{-pT}\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

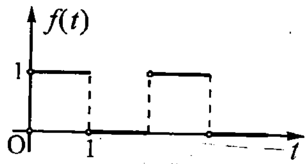
од каде што следува:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt,$$

што и сакавме да докажеме. $\square$

Да разгледаме два примера.

1) Нека $f(t)$ е функцијата определена со графикот на црт. 2.



Црт. 2

Периодот е 2, од што следува:

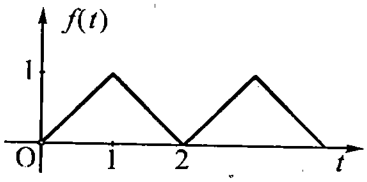
$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-2p}} \int_0^2 e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p(1-e^{-2p})} \cdot (1-e^{-p}) = \frac{1}{p(1+e^{-p})}.$$

2) Нека $f(t)$ е определена со црт. 3.

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-2p}} \left[\int_0^1 e^{-pt} t\, dt + \int_1^2 (2-t)e^{-pt}\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2p}}\left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^1 - \frac{e^{-pt}}{p^2}\Big|_0^1 + \left(\frac{t-2}{p}\right)e^{-pt}\Big|_1^2 + \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{p^2(1-e^{-2p})}\cdot(1-2e^{-p}+e^{-2p}) = \frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})}.$$



Црт. 3

Ќе видиме сега како се определуваат лапласовите трансформации на функциите $f'(t)$ и $\int_0^t f(t)dt$, со помош на трансформацијата од $f(t)$. Имено, претпоставувајќи дека $f(t)$ го задоволува условот (2), ќе ги докажеме следниве теореми:

7° (***Теорема за диференцирање на оригиналот***).

$$\mathcal{L}(f'(t)) = p\mathcal{L}(f(t)) - f(0) = pF(p) - f(0).$$

8° (***Теорема за интегрирање на оригиналот***).

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p}F(p).$$

Д о к а з. $\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt = e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt =$

$$= -f(t) + p\mathcal{L}(f(t)).$$

(Притоа, земаме $\mathrm{Re}\,p > 0$, па затоа $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-pt}f(t) = 0$.) Со тоа ја докажавме теоремата 7°.

Ако ставиме $g(t) = \int_0^t f(t)dt$, ќе имаме $g(0) = 0$ и $g'(t) = f(t)$. Користејќи ја 7°, добиваме:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(g(t)) = pF(g) - g(0) = p\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right),$$

од каде што $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t))$. □

Како последици од 7° и 8° (со помош на индукција), лесно се докажуваат и следниве нивни обопштенија:

9°. $\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n\mathcal{L}(f(t)) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$

$$10°.\ \mathcal{L}[\underbrace{\int_0^t \cdots (\int_0^t}_{n} f(t)dt)\dots dt] = \frac{1}{p^n}\mathcal{L}(f).\ \square$$

Ако се погледнат теоремите 7° и 8° (или нивните обопштенија 9° и 10°), се воочува дека *операциите диференцирање и интегрирање се сведуваат на множење и делење*. Ова може да се смета за најважна причина за големата примена што ја наоѓаат лапласовите трансформации при решавање на диференцијални равенки.

Ќе ги наведеме лапласовите трансформации на неколку конкретни функции.

3) $\mathcal{L}(k) = k\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt = \dfrac{k}{p}$ (k е константа).

4) $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int\limits_0^t dt\right) = \dfrac{1}{p}\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{p^2}.$

5) $\mathcal{L}(t^2) = 2\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t t\,dt\right) = \dfrac{1\cdot 2}{p^3}.$

6) $\mathcal{L}(t^n) = n!\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t \dots \left(\int\limits_0^t t\,dt\right)\dots dt\right) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}.$

7) $\mathcal{L}(e^{\alpha t}t^n) = \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$. (Овде се користени 4° и 6°). За $n=0$ од 7) добиваме

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{p-\alpha}$$

8) $\mathcal{L}(\sin at) = \mathcal{L}\left(\dfrac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-ai} - \dfrac{1}{p+ai}\right) = \dfrac{1}{p^2+a^2}.$

9) $\mathcal{L}(e^{at}\sin bt) = \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}.$

10) $\mathcal{L}(\cos at) = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{iat}) + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-iat}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-ai} + \dfrac{1}{p-ai}\right) = \dfrac{p}{p^2+a^2}.$

11) $\mathcal{L}(e^{at}\cos bt) = \dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}.$

8. 2. Инверзна лапласова трансформација

Видовме како се наоѓаат лапласовите трансформации од неколку видови функции. Природно е да се постави задачата: при дадена функција $F(p)$, да се определи функцијата $f(t)$, така што $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$. Веднаш се поставува прашањето и за тоа, дали можат да постојат повеќе функции $f(t)$ од тој облик. Одговор на ова прашање дава наредната важна теорема што нема да ја докажеме [3].

11° (***Теорема за единственост на оригиналот***). *Ако $f(t)$ и $g(t)$ се непрекинати функции за $t>0$ и ако $\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(g(t))$, тогаш $f(t)=g(t)$.* □

Од оваа теорема следува дека, при дадена функција $F(p)$, непрекинатата функција $f(t)$ со својството $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$ е еднозначно определена; затоа пишуваме

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

за $\mathcal{L}^{-1}$ велиме дека е ***инверзна лапласова трансформација***. Како се изразува $\mathcal{L}^{-1}(F(p))$ со помош на $F(p)$ се гледа од следнава теорема:

12° (***Теорема за инверзната трансформација***). *Нека $F(p)$ е аналитична функција за $\operatorname{Re}p>s$ и за секој $a>s$:*

(*i*) $\int_{-\infty}^{+\infty}|F(a+i\tau)|d\tau$ *конвергира,*

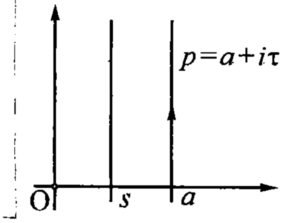
(*ii*) *при* $\operatorname{Re}p\geq a$, $\lim_{|p|\to+\infty}f(p)=0.$

Тогаш $F(p)$ е слика и нејзиниот оригинал е

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(p))=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}F(p)dp. \ □ \tag{3}$$

Интегралот што фигурира на десната страна од (3) е (несвојствен) линиски интеграл од функцијата $e^{ipt}F(p)$ по правата $p=ai\tau$ (црт. 4) во насока "одоздола нагоре", т.е.

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}=\lim_{b\to\infty}\int_{a-ib}^{a+ib}.$$



Црт. 4

Формулата (3) не е згодна за практична работа. За случаите кога $F(p)=U(p)/V(p)$ е дробнорационална функција, при што броителот има помал степен од именителот, инверзната лапласова трансформација може да се определи со помош на порано добиените резултати, ако се искористи теоремата 11°. Имено, од примерите 3) - 11) следува:

12) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)=1$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^{n+1}}\right)=\frac{t^n}{n!}$;

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-a)^{n+1}}\right)=\frac{e^{at}t^n}{n!}$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+a^2}\right)=\frac{1}{a}\sin at$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)=\cos at.$

3) За доказ да се види, на пример, Толстов, том II, гл. XVII, §8

Да го разгледаме случајот кога

$$F(p)=\frac{U(p)}{V(p)}, \tag{4}$$

каде што $U(p)$ и $V(p)$ се полиноми и $V(p)$ има поголем степен од $U(p)$. Да ја претставиме $F(p)$ во обликот

$$F(p)=\frac{A_1}{(p-a)^k}+\frac{A_2}{(p-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{p-a}+\frac{B_1}{(p-b)^r}+\frac{B_2}{(p-b)^{r-1}}+\cdots, \tag{5}$$

каде што $V(p)=(p-a)^k(p-b)^r\ldots$

Ако претпоставиме дека сме ги определиле коефициентите $A_\nu, B_\lambda,\ldots$, ќе имаме:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p))=e^{at}(A_k+A_{k-1}t+\cdots+)+e^{bt}(B_r+B_{r-1}t+\cdots+)+\cdots \tag{6}$$

Според тоа, бараната функција $\mathcal{L}^{-1}(F(p))$ ќе биде определена ако ги најдеме тие коефициенти. На ист начин како и при докажувањето на теоремата 2° од 7.2 се докажува и следната постапка за определување на спомнатите коефициенти.

13°. *Нека* $V(p)=(p-a)^k W(p)$, *каде што* $W(a)\neq 0$. *Тогаш,* $A_1, A_2,\ldots, A_k$ *од (5) се определуваат со следниве равенства:*

$$A_1=\frac{U(a)}{W(a)},\ A_2=\left[\frac{U(p)}{W(p)}\right]'_{p=a},\ A_3=\frac{1}{2!}\left[\frac{U(p)}{W(p)}\right]''_{p=a},\ldots$$

$$A_k=\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{U(p)}{W(p)}\right]^{(k-1)}_{p=a} \tag{7}$$

(*Слично и за* $B_1, B_2,\ldots$). □

Да разгледаме еден пример.

13) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p^4+4)p^2}$. Имаме: $F(p)=\dfrac{A}{p+2i}+\dfrac{B}{p-2i}+\dfrac{C_1}{p^2}+\dfrac{C_2}{p}$,

од каде што следува

$$A=\left[\frac{p^2+1}{(p-2i)p^2}\right]_{p=-2i}=-\frac{3}{16i}=\frac{3i}{16},\quad B=\left[\frac{p^2+1}{(p+2i)p^2}\right]_{p=2i}=\frac{-3}{-16i}=-\frac{3i}{16},$$

$$C_1=\left[\frac{p^2+1}{p^4+1}\right]_{p=0}=1,\ C_2=\left[\frac{p^2+1}{p^4+1}\right]'_{p=0}=\left[\frac{2p(p^2+4)-2p(p^2+1)}{(p^4+4)^2}\right]_{p=0}=0.$$

(Се разбира, истата работа би можела да се спроведе и директно, т.е. без помош на (7), и тоа на ист начин како и при пресметување на неопределени интеграли од дробнорационални функции. Имено, множејќи со именителот, добиваме:

$$p^2+1=Ap^2(p-2i)+Bp^2(p+2i)+C_1(p^2+4)+C_2p(p^2+4).$$

Ставајќи во ова равенство последователно: $p=2i$, $p=-2i$, $p=0$, ги добиваме вредностите за A, B и C_1, а потоа ако се стави, на пример, $p=1$ се пресметува и C_2.)

Од сето тоа следува:

$$\frac{p^2+1}{(p^2+4)p^2} \to \frac{3}{16}i(e^{-2it}-e^{2it})+\frac{1}{4}t=\frac{3}{8}\sin 2t+\frac{1}{4}t, \text{ т.е.}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^2+1}{(p^2+4)p^2}\right)=\frac{3}{8}\sin 2t+\frac{1}{4}t.$$

8. 3. Примена за решавање диференцијални равенки

Како што веќе спомнавме во почетокот на овој параграф, лапласовата трансформација наоѓа најголема примена при решавањето на диференцијални равенки.

Ќе разгледаме прво неколку конкретни примери, а потоа ќе видиме *како се применува лапласовата трансформација за определување општиот интеграл на хомогена линеарна диференцијална равенка од n-ти ред со константни коефициенти.*

14) Да ја определиме функцијата $x=x(t)$ што ја задоволува диференцијалната равенка:

$$\ddot{x}+4\dot{x}+4x=4e^{2t} \tag{8}$$

и почетните услови: $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=-4$.

Претпоставуваме дека таква функција постои; да ставиме $\mathcal{L}(x(t))=X(p)$. Тогаш, поради $\mathcal{L}(\ddot{x})=p^2X(p)-px(0)-\dot{x}(0)=p^2X-p+4$, $\mathcal{L}(\dot{x})=pX-1$, од (8) добиваме

$$p^2X-p+4+4p\cdot X-4+4X=\frac{4}{p-2}, \text{ т.е.}$$

$$X(p)=\frac{p^2-2p+4}{(p-2)(p+2)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{p-2}-\frac{3}{(p+2)^2}+\frac{3}{4}\frac{1}{p+2}.$$

Според тоа, бараното решение на диференцијалната равенка е:

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}(X(p))=\frac{1}{4}e^{2t}-3te^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}.$$

15) Да го разгледаме системот диференцијални равенки:

$$\dot{x}=y+z,\quad \dot{y}=x+z,\quad \dot{z}=x+y, \tag{9}$$

каде што x, y и z се функции од една променлива t, и да ги најдеме оние решенија $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ кои го задоволуваат условот $x(0)=y(0)=z(0)=1$.

Ако ставиме $\mathcal{L}(x)=X(p)$, $\mathcal{L}(y)=Y(p)$ и $\mathcal{L}(z)=Z(p)$, и бараме лапласова трансформација од (9), добиваме:

$$pX-1=Y+Z,\quad pY-1=X+Z,\quad pZ-1=X+Y,$$

а тоа е систем од три линеарни алгебарски равенки со три непознати X, Y и Z.

Детерминантата на овој систем е:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ -1 & p & -1 \\ -1 & -1 & p \end{vmatrix} = (p+1)^2(p-2).$$

Ако наместо првата колона ја ставиме колоната од слободните членови, добиваме:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & p & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = (p+1)^2.$$

Според тоа, добиваме: $X = 1/(p-2)$ од што следува $x = e^{2t}$. Од причини на симетрија имаме и $y = z = e^{2t}$.

16) Да ја разгледаме парцијалната диференцијална равенка

$$a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{10}$$

каде што $v(x,t)$ е непозната функција од x и t. Ќе ја решиме оваа парцијална диференцијална равенка, претпоставувајќи дека се исполнети следниве почетни услови:

$$v(x,0) = A\sin\frac{\pi x}{s},\quad v_t'(x,0) = 0,\quad v(0,t) = v(s,t) = 0.$$

Да ја означиме со $V(x,p)$ лапласовата трансформација

$$\mathcal{L}(v(x,t)) = \int_0^\infty e^{-pt}v(x,t)dt.$$

Тогаш од (10) имаме: $a^2V_{xx}'' = p^2V - pv(x,0) - v_t'(x,0)$,

$$a^2V_{xx}'' = p^2V - A\sin\frac{\pi x}{s},$$

т.е. добиваме обична диференцијална равенка. Ако се реши таа равенка, се добива:

$$V(x,p) = c_1(p)e^{px/a} + c_2(p)e^{-px/a} + \frac{Ap}{p^2 + a^2\pi^2/s^2}\sin\frac{\pi x}{s}.$$

Заменувајќи во оваа равенка $x = 0$ и $x = s$ добиваме:

$$c_1 + c_2 = 0,\quad c_1e^{ps/a} + c_2e^{-ps/a} = 0,$$

а од тоа следува: $c_1 = c_2 = 0$. Според тоа

$$V(x,p) = \frac{Ap}{p^2 + a^2\pi^2/s^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{s}.$$

Од последново равенство добиваме конечно:

$$v(x,t) = A\sin\frac{a\pi}{s}t\,\sin\frac{\pi x}{s}. \tag{11}$$

(Читателот ја познава равенката (10) - брановата равенка којашто во VIII.7 ја решивме на друг начин.)

Ќе ја разгледаме сега истата диференцијална равенка, но при изменети почетни услови:

$$v(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}v(x,0) = 0,\quad v(0,t) = f(t),\quad \lim_{x\to\infty} v(x,t) = 0, \tag{12}$$

каде што $f(t)$ е дадена функција.

Како и погоре, ќе ставиме

$$V(x,p)=\mathcal{L}(v(x,t)),\qquad F(p)=\mathcal{L}(f(t)).$$

Од (10), користејќи ги равенствата (12), добиваме:

$$a^2V_x''=p^2V.$$

Решавајќи ја последната равенка, добиваме:

$$V(x,p)=A(p)e^{-px/a}+B(p)e^{px/a}.$$

Поради $V(0,p)=F(p)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}V(x,p)=0$, се добива

$$F(p)=A+B,\quad B(p)=0.$$

Имаме, значи:

$$V(x,p)=e^{-px/a}\cdot F(p).$$

Користејќи ја теоремата 5°, на крајот добиваме:

$$v(x,t)=\begin{cases}0 & \text{за } t<x/a\\ f\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & \text{за } t\geq x/a.\end{cases} \tag{13}$$

8. 4. Хомогена линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти

Уште во VI.1.4 видовме како се определува општиот интеграл на една хомогена диференцијална равенка од втор ред. Аналогно се работи и во општиот случај. Тоа може да се направи и без поимот на лапласова трансформација, но нам ни е заправо целта да покажеме како може да се искористи оваа трансформација и за таква задача.

Да ја разгледаме хомогената диференцијална равенка:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0, \tag{14}$$

каде што $a_1,a_2,\ldots,a_n$ се дадени константи; да ставиме

$$x_0=x(0),\,x_1=x'(0),\ldots,x_{n-1}=x^{(n-1)}(0),$$

при што $x(t)$ е произволно решение на (14).

Лапласовата трансформација на $x(t)$ ќе ја означиме со $X(p)$. Користејќи ја теоремата 9°, добиваме:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(x^{(n)})=p^nX-p^{n-1}x_0-p^{n-2}x_1-\cdots-px_{n-2}-x_{n-1},\\ &\mathcal{L}(x^{(n-1)})=p^{n-1}X-p^{n-2}x_0-p^{n-3}x_1-\cdots-px_{n-3}-x_{n-2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\mathcal{L}(x'')=p^2X-px_0-x_1,\\ &\mathcal{L}(x')=pX-x_0,\\ &\mathcal{L}(x)=X.\end{aligned} \tag{14'}$$

Заменувајќи ги овие вредности во (14), добиваме:

$$\begin{aligned}&(p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n)X(p)=\\ &=x_0p^{n-1}+p^{n-2}(x_1+a_1x_0)+p^{n-3}(x_2+a_1x_1+a_2x_0)+\cdots+\\ &+(x_{n-1}+a_1x_{n-2}+\cdots+a_{n-1}x_0)\end{aligned} \tag{14''}$$

т.е.

$$\varphi(p)X(p)=\psi(p), \tag{15}$$

каде што

$$\varphi(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n \tag{16}$$

се наречува ***карактеристичен полином*** на диференцијалната равенка (13). Со $\psi(p)$ ја означивме десната страна од (14″). Според тоа, $\psi(p)$ е полином со степен не поголем од $n-1$.

Да претпоставиме дека $\varphi(p)$ може да се растави по фактори на следниов начин:

$$\varphi(p)=(p-a)^r(p-b)^s\cdots(p-c)^m,\quad r+s+\cdots+m=n. \tag{16'}$$

Тогаш равенството (15) може да го напишеме во обликот

$$\begin{aligned}X(p)=&\frac{A_1}{(p-a)^r}+\frac{A_2}{(p-a)^{r-1}}+\cdots+\frac{A_r}{p-a}+\frac{B_1}{(p-b)^s}+\\&+\frac{B_2}{(p-b)^{s-1}}+\cdots+\frac{B_s}{p-b}+\cdots+\frac{C_1}{(p-c)^m}+\frac{C_2}{(p-c)^{m-1}}+\cdots+\frac{C_m}{p-c}.\end{aligned} \tag{15'}$$

Притоа $A_1,A_2,\ldots,A_r,B_1,B_2,\ldots,B_s,C_1,\ldots,C_m$ ќе бидат изразени со помош на $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}$, па бидејќи можеме овие константи да ги избереме произволно, можеме и $A_1,\ldots,A_r,B_1,\ldots,B_s,C_1,\ldots,C_m$ да ги сметаме за n произволни константи.

Ако побараме инверзна лапласова трансформација од (15′), ќе добиеме:

$$\begin{aligned}x(t)=&e^{at}\left(\frac{A_1}{(r-1)!}t^{r-1}+\frac{A_2}{(r-2)!}t^{r-2}+\cdots+A_r\right)+\\&+e^{bt}\left(\frac{B_1}{(s-1)!}t^{s-1}+\frac{B_2}{(s-2)!}t^{s-2}+\cdots+B_s\right)+\cdots+\\&+e^{ct}\left(\frac{C_1}{(m-1)!}t^{m-1}+\frac{C_2}{(m-2)!}t^{m-2}+\cdots+C_m\right),\end{aligned} \tag{17}$$

т.е.

$$\begin{aligned}x(t)=&e^{at}(k_1+k_2t+\cdots+k_rt^{r-1})+e^{bt}(k_{r+1}+k_{r+2}t+\cdots+k_{r+s}t^{s-1})+\\&+\cdots+e^{ct}(k_{n-m}+k_{n-m+1}t+\cdots+k_nt^{m-1}),\end{aligned} \tag{17'}$$

каде што $k_1,k_2,\ldots,k_n$ се определуваат со помош на $A_1,A_2,\ldots,A_r,B_1,\ldots,C_m$ на очигледен начин.

Со сето тоа ја докажавме следнава теорема:

14°. *Ако $\varphi(p)$ е карактеристичниот полином на диференцијалната равенка (14), и ако $\varphi(p)$ е претставен со (16′), тогаш со (17′) е определено општото решение на равенката (14). Притоа $k_1,k_2,\ldots,k_n$ се произволни константи.* □

Да разгледаме еден пример.

17) Ќе ја решиме диференцијалната равенка:

$$x^{(4)} + 4x''' + 6x'' + 4x' + x = 0.$$

Карактеристичниот полином на оваа диференцијална равенка е:

$$p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 = (p+1)^4.$$

Од ова следува дека општото решение на дадената диференцијална равенка е:

$$x = e^{-t}(k_1 + k_2 t + k_3 t^2 + k_4 t^3).$$

8. 5. Фурјеов интеграл и Фурјеова трансформација

Нека $f(t)$ е периодична функција со период T. Ако $f(t)$ ги задоволува условите од теоремата 4° во VIII.6.2, тогаш, според таа теорема, $f(t)$ можеме да ја развиеме во фурјеов ред:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t\right), \tag{18}$$

каде што

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\,dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\,dt. \tag{19}$$

Да ставиме $\omega_n = 2n\pi / T$ и да ги искористиме Ојлеровите формули (види (3) - (5) во 3.2); ќе добиеме дека

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - ib_n)e^{i\omega_n t} + (a_n + ib_n)e^{-i\omega_n t}]. \tag{20}$$

Ако ги воведеме ознаките

$$\omega_{-n} = -\omega_n,\ c_0 = a_0,\ c_n = a_n - ib_n,\ c_{-n} = a_n + ib_n, \tag{21}$$

формулата (20) ќе го добие обликот

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}. \tag{22}$$

За (22) велиме дека претставува ***комплексна форма на фурјеовиот ред*** (18). За определување на коефициентите c_n во (22), според (19) и (21), ги добиваме следниве формули:

$$c_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n t} f(t)\,dt, \tag{23}$$

каде што $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Покрај другите услови што треба да ги задоволува една функција $f(t)$ за да може да се претстави во фурјеов ред е нејзината периодичност (в. 4° од VIII.6.2). За непериодични функции, аналогно претставување е можно со помош на т.н. *фурјеов интеграл*. До такво претставување се доаѓа тргнувајќи од фурјеовиот ред во комплексна форма, при што се зема дека периодот T се стреми кон $+\infty$.

Прво, ќе ја воведеме следнава ознака:

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T}. \tag{24}$$

Потоа, заменувајќи го c_n во (22) со десната страна од (23), со тоа што и T се заменува (според (24)) со $2\pi / \Delta\omega_n$, добиваме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n t} f(t)dt\right]e^{i\omega_n t}\Delta\omega_n. \tag{25}$$

Една непериодична функција $f(t)$ можеме да ја сфатиме како граница на фамилија периодични функции $\{f_T(t) | T > 0\}$ кога $T \to +\infty$, каде што T е период на $f_T(t)$. Според (24), точна е формулата (25') што се добива кога на левата страна од (25) се стави $f_T(t)$ наместо $f(t)$. Потоа, ако $T \to +\infty$, интегралот од десната страна на (25) добива облик:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt, \tag{26}$$

а природно е да се претпостави дека редот во (25) ќе се трансформира во определен интеграл. Така се доаѓа до (хипотетичниот) заклучок дека е точно следново равенство:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{27}$$

каде што функцијата $X(\omega)$ е дефинирана со (26).

Десната страна од (27) се вика ***фурјеов интеграл*** за функцијата $f(t)$.

Погоре спроведената дискусија не може да се смета за доказ на равенството (27), но само како поттик на тоа да се одредат условите што треба да ги задоволува функцијата $f(t)$ за да биде тоа равенство Точно. Во врска со тоа, овде ќе формулираме една теорема што нема да ја докажеме [4].

15°. *Ако постои интегралот*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | f(t) | dt,$$

тогаш функцијата $X(\omega)$ определена со (26) е непрекината.

Ако, уште, за секој $t \in \mathbb{R}$, $f(t)$ е диференцијабилна функција, тогаш ќе биде точно и равенството (27). □

4) Да се види, на пример, Романовский, стр. 41-44

Функцијата $X(\omega)$ определена со (26) се вика ***фурјеова трансформација*** (или ***спектар***) на функцијата $f(t)$, поради што се пишува и

$$\mathfrak{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt. \tag{28}$$

Во таа смисла за функцијата $f(t)$ може да се каже дека е ***инверзна фурјеова трансформација*** за функцијата $X(\omega)$ и да се означи со $\mathfrak{F}^{-1}(X(\omega))$. Според тоа, равенството (27) може да се напише во обликот

$$\mathfrak{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{29}$$

Неколку својства на фурјеовата трансформација се изнесени во вежбата 16. (Да се види и книгата: Н. Целакоски, "Диференцијални равенки", стр. 192-207.)

Ќе разгледаме три примери.

1) Да ја најдеме фурјеовата трансформација на функцијата

$$f(t) = \begin{cases} 1/2a & \text{за} \quad t \in [-a, a], \\ 0 & \text{за} \quad |t| > a. \end{cases}$$

Имаме

$$\mathfrak{F}(f(t)) = X(\omega) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2a}\left[\int_{-a}^{a}\cos\omega t\, dt - i\int_{-a}^{a}\sin\omega t\, dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\cos\omega t\, dt = \frac{1}{2a\omega}\sin\omega t\Big|_{-a}^{a} = \frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$

2) Нека $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$. Работејќи како во претходниот пример, добиваме:

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}e^{-t^2/2}dt = = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\, e^{-t^2/2}dt - i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega t\, e^{-t^2/2}dt\right].$$

Вториот од горните два интеграла е еднаков на 0 зашто $\sin\omega t e^{-t^2/2}$ е непарна функција. Така,

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\, e^{-t^2/2}dt.$$

Диференцирајќи по ω (диференцирање под знакот на интегралот), добиваме:

$$X'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -t\sin\omega t\, e^{-t^2/2}dt.$$

Со примена на методот за интегрирање по делови, натаму добиваме:

$$X'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\omega t\, e^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\, e^{-t^2/2}dt = \omega X(\omega)$$

Општото решение на хомогената линеарна диференцијална равенка $X'(\omega) = = \omega X(\omega)$ е

$$X(\omega) = Ce^{-\omega^2/2},$$

од каде што, поради $X(0) = 1$, конечно се добива

$$X(\omega) = e^{-\omega^2/2}.$$

3) Нека $X(\omega) = e^{-|\omega|}$ е фурјеовата трансформација на функцијата $f(t)$. Да ја најдеме $f(t)$. Според (11) имаме:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|} e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{\omega} e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1+it)\omega}}{1+it}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\frac{e^{(it-1)\omega}}{it-1}\Bigg|_{0}^{\infty} = \\ &= \frac{1}{2\pi(1+it)} - \frac{1}{2\pi(it-1)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it}\right) = \\ &= \frac{2}{2\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi(1+t^2)}, \end{aligned}$$

зашто, поради $|e^{i\omega t}| = 1$ и $e^{-T} \to 0$ кога $T \to +\infty$, имаме:

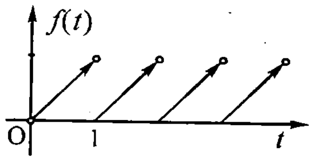
$$\lim_{T\to-\infty} \frac{e^{(1+it)T}}{1+it} = 0 = \lim_{T\to+\infty} \frac{e^{(it-1)T}}{it-1}.$$

8. 5. Вежби

1. Да се пресмета $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, ако

а) $f(t) = t - [t]$; б) $f(t) = \operatorname{ch} at$; в) $f(t) = \operatorname{sh} at$.

Р е ш е н и е. а) Функцијата $f(t)$ е периодична со период 1 (црт. 5).



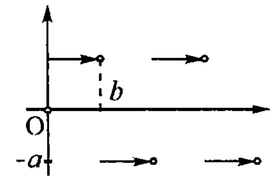
Црт. 5

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= \frac{1}{1-e^{-p}}\int_0^1 t\, e^{-pt} dt = \frac{1}{1-e^{-p}}\left(-\frac{1}{p} t\, e^{-pt}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt} dt\right) = \\ &= \frac{1}{1-e^{-p}}\left(-\frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p^2} e^{-pt}\Bigg|_0^1\right) = \frac{1}{1-e^{-p}}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}\right). \end{aligned}$$

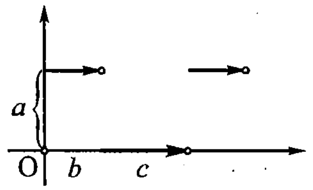
б) $\mathcal{L}(\operatorname{ch} at) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2(p-a)} + \frac{1}{2(p+a)} = \frac{p}{p^2 - a^2}$.

в) $\mathcal{L}(\operatorname{sh} at) = \frac{a}{p^2 - a^2}$.

2. Да се најдат лапласовите трансформации на функциите дадени со нивните графици на црт. 6 (период $2b$) и црт. 7 (период $b+c$).



Црт. 6



Црт. 7

Р е ш е н и е. а) $F(p)=\mathcal{L}(f(t))=\dfrac{1}{1-e^{2bp}}\left(\int\limits_0^b e^{-pt}a\,dt+\int\limits_b^{2b} e^{-pt}(-a)dt\right)=$

$=\dfrac{a}{1-e^{2bp}}\left(-\dfrac{1}{p}(e^{-bp}-1)+\dfrac{1}{p}(e^{-2bp}-e^{-bp})\right)=\dfrac{a}{p(1-e^{2bp})}(1-2e^{-bp}+e^{-2bp})=$

$=\dfrac{a}{p}\cdot\dfrac{1-e^{-bp}}{1+e^{-bp}}=\dfrac{a}{p}\operatorname{th}\dfrac{bp}{2}.$

б) $F(p)=\dfrac{a}{p}\cdot\dfrac{1-e^{-bp}}{1-e^{-(b+c)p}}.$

3. Ако $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$, да се определи функцијата $g(t)$, така што

$$F'(p)=\mathcal{L}(g(t)).$$

Р е ш е н и е. $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \Rightarrow F'(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)(-t)dt \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(p)=\mathcal{L}(-t\,f(t))$ т.е. $g(t)=-t\,f(t)$.

4. Ако $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$, да се докаже дека

$$F^{(n)}(p)=(-1)^n\mathcal{L}(t^n f(t))$$

Р е ш е н и е. Со помош на резултатот од претходната вежба и примена на индукција.

5. Ако $f(t)$ и $g(t)$ се две дадени функции, тогаш за функцијата

$$\int_0^t f(u)g(t-u)du$$

велиме дека е нивна ***конволуција*** и ја означуваме со $f*g$.

Да се покаже дека $f*g=g*f$.

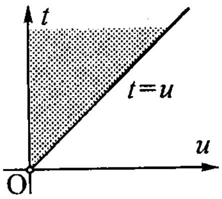
Р е ш е н и е. $f*g=\int\limits_0^t f(u)g(t-u)du=-\int\limits_t^0 f(t-v)g(v)dv=\int\limits_0^t g(v)f(t-v)dv=g*f.$

6. Да се покаже дека $\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.

Р е ш е н и е. Според дефинициите на лапласовата трансформација и конволуцијата $f*g$, имаме:

$$\mathcal{L}(f*g)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}(f*g)dt=\int\limits_0^\infty e^{-pt}dt\int\limits_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Областа на интеграција може да се претстави како на црт. 8. Ако го промениме редоследот на интеграцијата, ќе добиеме



Црт. 8

$$\mathcal{L}(f*g)=\int_0^\infty\left(\int_u^\infty e^{-pt}f(u)g(t-u)dt\right)du.$$

Ставајќи $t-u=v, t=u=v$, добиваме

$$\mathcal{L}(f*g)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-p(u+v)}f(u)g(v)dv\right)du=$$

$$=\left(\int_0^\infty e^{-pu}f(u)du\right)\left(\int_0^\infty e^{-pv}g(v)dv\right)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

(Да напомниме дека доказите во вежбите 3. и 6. не се комплетни. Имено, во 3. не е образложено зошто може диференцирањето да го промени местото со интегрирањето, а во 6. зошто може да се промени редоследот на интегрирањето.)

7. Да се определи функцијата $f(t)$, ако е позната нејзината лапласова трансформација $F(p)$.

а) $F(p)=\dfrac{1}{p^3+p^2-2}$; б) $F(p)=\dfrac{p^2+2}{p^2(p+1)(p+2)}$;

в) $F(p)=\dfrac{p}{(p+2)(p+3)^3}$; г) $F(p)=\dfrac{p^4-p^3+2p^2+p-23}{(p^2+4)(p+1)(p^2+4p+5)}$.

Р е ш е н и е. а) $F(p)=\dfrac{1}{(p^3-1)+(p^2-1)}=\dfrac{1}{(p-1)(p^2+2p+2)}=$

$$=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+2};\ A=\frac{1}{5},\ B=-\frac{1}{5},\ C=-\frac{3}{5};$$

$$F(p)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{p+3}{(p+1)^2+1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+1}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1};$$

$$f(t)=\frac{1}{5}e^t-\frac{1}{5}e^{-t}\cos t-\frac{2}{5}e^{-t}\sin t.$$

б) $F(p)=\dfrac{A_1}{p^2}+\dfrac{A_2}{p}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{p+2}$;

$$A_1=1,\ A_2=\left[\frac{p^2+2}{(p+1)(p+2)}\right]'_{p=0}=-\frac{3}{2},\ B=3,\ C=-\frac{3}{2};$$

$$f(t)=t-\frac{3}{2}+3e^{-t}-\frac{3e^{-2t}}{2}.$$

в) $F(p)=-\dfrac{2}{p+2}+\dfrac{2}{p+3}+\dfrac{3}{(p+3)^2}+\dfrac{3}{(p+3)^3}$; $f(t)=-2e^{-2t}+2e^{-3t}+2te^{-3t}+\dfrac{3}{2}t^2e^{-3t}$.

г) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4}-\dfrac{2}{p+1}+\dfrac{3p+3}{(p+2)^2+1}$;

$$f(t)=\frac{1}{2}\sin 2t-2e^{-t}+3e^{-2t}\cos t-3e^{-2t}\sin t.$$

8. Да се решат следниве диференцијални равенки:

а) $y''' - y' = x,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

б) $y^{(4)} - y = 1,\ y_0 = y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ y_3 = -1.$

в) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 2\cos x,\ y_0 = y_1 = y_2 = 0,\ y_3 = 1.$

г) $y''' - 3y' + 2y = (18t + 6)\cdot e^t + 9e^{-2t},\ y_0 = y_1 = y_2 = 0.$

(Притоа, $y_0 = y(0),\ y_1 = y'(0),\ y_2 = y''(0),\ y'''(0) = y_3,\ y^{(4)}(0) = y_4$.)

Р е ш е н и е. а) Овде, улога на t има x.

$\mathcal{L}(y) = Y(p);\ p^3Y - pY = \frac{1}{p^2};\ Y = \frac{1}{p^3(p-1)(p+1)};$

$$Y = \frac{A_1}{p^3} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1};$$

$$A_1 = -1,\ A_2 = 0,\ A_3 = -1,\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2};$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - 1 + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

б) $Y(p) = \frac{p^4 + p^3 + 2p^2 - p + 1}{p(p-1)(p+1)(p-i)(p+i)};\ y = -1 + e^x + e^{-x} + \sin x.$

в) $Y = \frac{1}{(p+1)^2(p-i)(p+i)};\ y = \frac{1}{2}(1+x)e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x.$

г) $y = e^t\left(t^3 + t - \frac{2}{3}\right) + e^{-2t}\left(t + \frac{2}{3}\right).$

9. Да се реши диференцијално-интегралната равенка:

$$y'' + 2y + 3\int_0^t y\,dt = t,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -\frac{1}{3}.$$

Р е ш е н и е. $y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{t/2}\left[\cos\frac{\sqrt{11}}{2}t - \frac{2}{\sqrt{11}}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}t\right].$

10. Да се најде решението на системот:

$$x' = y + z,\ \ y' = 3x + z,\ \ z' = 3x + y,$$

што ги задоволува следниве почетни услови:

$$x_0 = 3,\ \ y_0 = z_0 = 7.$$

Р е ш е н и е. $x = 4e^{3t} - e^{-2t},\ \ y = z = e^{-2t} + 6e^{3t}.$

11. Да се реши парцијалната диференцијална равенка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

при следниве почетни услови:

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u(\infty,t) = 0,\ u(0,t) = t^2e^t.$$

Р е ш е н и е. $\mathcal{L}(u(x,t)) = U(x,p).$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(pU)=pU'_x;$$

$$U''_{xx}+pU'_x-2p^2U=0;\quad U=c_1(p)e^{px}+c_2(p)e^{-2px};$$

$$U(0,p)=c_1(p)+c_2(p)=\mathcal{L}(t^2e^t)=\frac{2}{(p-1)^3}$$

$$U(\infty,p)=c_1(p)=0,\quad U(x,p)=\frac{2}{(p-1)^3}\cdot e^{-2px}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} u(x,t)=(t-2x)^2e^{t-2x} & \text{за}\ t>2x \\ u(x,t)=0 & \text{за}\ t\le 2x \end{array}$$

12. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+2x\dfrac{\partial u}{\partial t}=0,\quad u(x,0)=0,\quad u(0,t)=t.$

Р е ш е н и е. $u(x,t)=\begin{cases} t-x^2 & \text{за}\ t>x^2 \\ 0 & \text{за}\ t\le x^2 \end{cases}.$

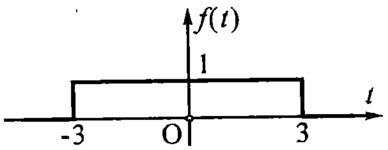
Во вежбите 13-15 да се најде фурјеовата трансформација на дадената функција $f(t)$.

13. а) $f(t)=\begin{cases} 1 & \text{за}\ |x|<a \\ 0 & \text{за}\ |x|>a \end{cases};$

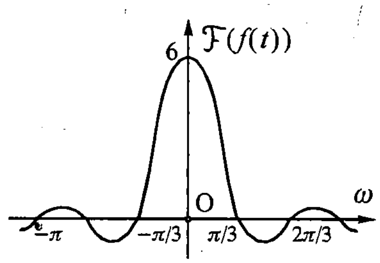
б) Да се претстави графички $f(t)$ и нејзината фурјеова трансформација за $a=3$.

Р е ш е н и е. а) $\mathcal{F}(f(t))=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}f(t)dt=\int\limits_{-a}^{a}e^{-i\omega t}dt=-\dfrac{1}{i\omega}[e^{-i\omega t}]_{-a}^{a}=2\cdot\dfrac{\sin\omega a}{\omega}.$

б) Црт. 9 и црт. 10



Црт. 9



Црт. 10

14. $f(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<1 \\ 0, & t\ge 1 \end{cases}.$

О д г о в о р. $2(1-\cos\omega)/\omega$.

15. $f(t)=\begin{cases} 1-t^2, & |t|<1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases}.$

О д г о в о р. $4(\omega\cos\omega-\sin\omega)/\omega^3$.

16. Да се покаже дека за фурјеовата трансформација се точни следниве својства.

а) (*линеарност*) $\mathcal{F}(c_1f_1+c_2f_2)=c_1\mathcal{F}(f_1)+c_2\mathcal{F}(f_2)$, $c_1,c_2=$ конст.

б) (*сличност*) $\mathcal{F}(f(t))=F(\omega)$ и $a\in\mathbb{R}, a\ne 0\Rightarrow\mathcal{F}(f(at))=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$, в) (*транслација*) $\mathfrak{F}(f(t)) = F(\omega) \Rightarrow \mathfrak{F}(f(t-a)) = e^{-i\omega a}F(\omega)$, $a=$ конст.

г) (*диференцирање*) $\mathfrak{F}(f(t)) = F(\omega) \wedge f(t)$ диференцијабилна $\Rightarrow \mathfrak{F}(f'(t)) = = i\omega F(\omega)$.

Р е ш е н и е. а) Следува од (28) и од својството за линеарност кај интегралите.

б) Да се воведе смената $at = x$ во интегралот на $\mathfrak{F}(f(at))$.

в) Да се воведе смената $t - a = x$ во интегралот на $\mathfrak{F}(f(t-a))$.

г) Според (28), со парцијално интегрирање добиваме:

$$\mathfrak{F}(f'(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f'(t)dt = e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt =$$
$$= 0 + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt = i\omega \mathfrak{F}(f(t)).$$

IX. 9. Комплексни матрици

Овде се продолжува со изучување на матриците и векторските простори, со тоа што се работи со комплексни матрици, односно комплексни векторски простори. Притоа, во 9.2 се дефинираат поимите конвергентни низи и редови од матрици, како и изводи и интеграли на матрици од функции. На читателот му препорачуваме да го прочита и разделот 9.3, каде што се изнесуваат почетните елементи од теоријата на функции од матрици.

9. 1. Комплексни векторски простори

На повеке места во глава VII (вежба: 22 во 1.6, 16 во 2.7, 37 во 5.4, 22 во 6.5 и забелешка во 3.4) спомнавме дека елементите од една матрица, односно скаларите на еден векторски простор, може да бидат елементи од кое било поле. Сепак, претпоставувавме дека тие му припаѓаат на полето на реалните броеви $\mathbb{R}$, т.е. работевме со реални матрици, односно со реални векторски простори. Заменувајќи го $\mathbb{R}$ со $\mathbb{C}$, добиваме ***комплексни матрици***, односно ***комплексни векторски простори***. Комплексните векторски простори ќе бидат предмет на овој раздел, при што нема да ги повториме дефинициите и резултатите од гл. VII, т.е. ќе се задржиме само на некои специфични случаи поврзани со полето на комплексните броеви $\mathbb{C}$.

Од тоа што $\mathbb{R}$ е потполе на $\mathbb{C}$, следува дека еден комплексен векторски простор можеме да го сметаме и за реален. Затоа, со $V(\mathbb{C})$ го означуваме дадениот комплексен простор, а со $V(\mathbb{R})$ соодветниот реален простор. Според тоа, како множества $V(\mathbb{C})$ и $V(\mathbb{R})$ се совпаѓаат со V, но во првиот, скалари се сите комплексни броеви, а во вториот, само реалните. Од тврдењето што ќе го докажеме се гледа дека, како векторски простори, $V(\mathbb{C})$ и $V(\mathbb{R})$ се, сепак, различни.

1°. *Ако $V(\mathbb{C})$ има (конечна) димензија n, тогаш $V(\mathbb{R})$ има димензија $2n$.*

Д о к а з. Нека $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ е база на $V(\mathbb{C})$. Ќе покажеме дека $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n,i\mathbf{a}_1,\dots,i\mathbf{a}_n$, е база на $V(\mathbb{R})$. Навистина, ако $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{R}$ се такви што:

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\dots+\alpha_n\mathbf{a}_n+\beta_1 i\mathbf{a}_1+\dots+\beta_n i\mathbf{a}_n=\mathbf{o}$$

тогаш:

$$(\alpha_1+i\beta_1)\mathbf{a}_1+\dots+(\alpha_n+i\beta_n)\mathbf{a}_n=\mathbf{o},$$

од што следува:

$$\alpha_1+i\beta_1=\dots=\alpha_n+i\beta_n=\mathbf{o}.\ \text{т.е.}\ \alpha_1=\dots=\alpha_n=\beta_1=\dots=\beta_n=0.$$

според тоа, $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n,i\mathbf{a}_1,\dots,i\mathbf{a}_n$ се независни.

Ако $\mathbf{x}\in V$, тогаш постојат $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ такви што $\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\dots+\lambda_n\mathbf{a}_n$, па ако $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$ каде што $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{R}$, ќе добиеме:

$$\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\dots+\alpha_n\mathbf{a}_n+\beta_1(i\mathbf{a}_1)+\dots+\beta_n(i\mathbf{a}_n),$$

од што следува дека $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n,i\mathbf{a}_1,\dots,i\mathbf{a}_n$ е база на $V(\mathbb{R})$.[1] □

Имајќи предвид дека секој n-димензионален комплексен (т.е. реален) векторски простор е изоморфен со $\mathbb{C}^n$ (т.е. со $\mathbb{R}^n$),[2] како и важноста на овие простори, да воочиме неколку врски меѓу нив.

2°. *$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, но $\mathbb{R}^n$ не е потпростор од $\mathbb{C}^n(\mathbb{C})$.* □

3°. *$\mathbb{R}^n$ е потпростор од $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$.* □

4°. *За секој $\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n$, постојат единствени $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, такви што $\mathbf{c}=\mathbf{a}+i\mathbf{b}$.* □

Природно е да се прашаме дали е "прифатлива" формулата (28) од VII.3.5 за дефиниција на поимот скаларен производ во $\mathbb{C}^n$, а притоа да важи својството $\mathbf{x}\circ\mathbf{x}>0$, за секој $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n, \mathbf{x}\neq\mathbf{o}$. Одговорот е одречен, бидејќи (за $n\geq 2$) ако, на пример, $\mathbf{x}=(0,0,\dots,0,1,i)$, тогаш (според таа формула) би добиле $\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=0$. (Уште повеќе, ако $\mathbf{y}=(0,0,\dots,0,i)$, тогаш: $\mathbf{y}\circ\mathbf{y}=-1$.) Оваа "незгода" е последица од фактот, што квадратот од ненулти комплексен број не мора да е позитивен. Но, за секој $\lambda\in\mathbb{C}$,

1) Понатаму доказите (или барем дел од нив) му ги препуштаме на читателот
2) Види 8° од VII.4.2

имаме $|\lambda|^2=\lambda\cdot\bar{\lambda}\geq 0$, а ова сугерира спомeнатата дефиниција (28) од VII.3.5. да се замени со:

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n \tag{1}$$

каде што:

$$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n),\ \mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{C}^n.$$

Дека дефиницијата (1) (за ***скаларен производ во*** $\mathbb{C}^n$) е прифатлива, се гледа од следново својство:

5°. *За секои* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n$, $\alpha\in\mathbb{C}$, *исполнети се следниве услови:*

(*i*) $\mathbf{y}\circ\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}$ (*ii*) $(\alpha\mathbf{x})\circ\mathbf{y}=\alpha(\mathbf{x}\circ\mathbf{y})$;

(*iii*) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\circ\mathbf{z}=\mathbf{x}\circ\mathbf{z}+\mathbf{y}\circ\mathbf{z}$;

(*iv*) *ако* $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$, *тогаш* $\mathbf{x}\circ\mathbf{x}$ *е позитивен реален број.* □

За комплексен векторски простор V различен од $\mathbb{C}^n$, не може (1) да се прифати за дефиниција на скаларен производ, бидејќи (во општ случај) не е ни осмислена. Но, можеме својствата (*i*) - (*iv*) од 5° да ги искористиме за дефинирање на простори со скаларен производ. Имено, ако V е комплексен векторски простор и ако $(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto\mathbf{x}\circ\mathbf{y}$ е пресликување од $V\times V$ во $\mathbb{C}^n$ такво што условите (*i*), (*ii*), (*iii*) и (*iv*) од 1° се точни за секои $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$, $\alpha\in\mathbb{C}$, тогаш велиме дека V е комплексен ***простор со скаларен производ***, или (поедноставно) ***унитарен простор***. Притоа, $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}$ се вика ***скаларен производ*** на $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Својството 5°. можеме сега да го формулираме и на следниов начин:

5′. $\mathbb{C}^n$ *е унитарен простор, при што скаларниот производ е дефиниран со* (1). □

Имајќи предвид дека конјугацијата $\bar{\alpha}$ на секој реален број α е самиот тој број, $\bar{\alpha}=\alpha$, добиваме дека:

6°. *Ако* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, *тогаш дефиницијата на скаларен производ дадена во* (28) *од* VII.3.5 *е во согласност со дефиницијата* (1). □

Подолу, не спомнувајќи го тоа специјално, ќе претпоставуваме дека V е даден унитарен простор.

Лесно се добива дека се точни следниве равенства:

$$(\alpha\mathbf{x})\circ(\beta\mathbf{y})=\alpha\bar{\beta}(\mathbf{x}\circ\mathbf{y}) \tag{2}$$

$$\mathbf{x}\circ(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\circ\mathbf{y}+\mathbf{x}\circ\mathbf{z} \tag{3}$$

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{o}=\mathbf{o}\circ\mathbf{x}=0, \tag{4}$$

за секои $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

Должина (т.е. ***норма***) на вектор се дефинира на ист начин како и кај реални простори т.е. со:

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\mathbf{x}\circ\mathbf{x}} \tag{5}$$

Имајќи ги предвид (i) - (iv) и (2) - (5), лесно се докажува дека (за кои било $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$) се точни и следниве тврдења:

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\cdot\|\mathbf{x}\|, \tag{6}$$

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{o} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| > 0, \tag{7}$$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2. \tag{8}$$

Теоремата на Коши-Буњаковски (т.е. 12° од VII.3.5) важи и за унитарни простори, а и доказот е ист. За правина, се појавуваат соодветни разлики, поради фактот дека може да биде $\mathbf{x}\circ\mathbf{y} \neq \mathbf{y}\circ\mathbf{x}\,(=\overline{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}})$, но "на помош" доаѓа конјугацијата. Имено, од $(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b})\circ(\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}) \geq 0$ следува:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{a} - \overline{\lambda}(\mathbf{a}\circ\mathbf{b}) - \lambda(\overline{\mathbf{a}\circ\mathbf{b}}) + \lambda\overline{\lambda}(\mathbf{b}\circ\mathbf{a}) \geq 0.$$

Да ја споменеме следнава последица од теоремата на Коши-Буњаковски:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \tag{9}$$

познато како ***неравенство на триаголникот.***

И својствата докажани во VII.4.5, во врска со ортогоналност и ортонормираност, остануваат во сила и за унитарни простори. Притоа и дефинициите се формулираат на потполно ист начин, па затоа и нив овде ќе ги подразбираме.

Унитарните простори се специјален вид нормирани векторски простори. За да не бидат исклучени реалните нормирани векторски простори, подолу ќе претпоставиме дека V е реален или комплексен векторски простор, а со K ќе го означиме полето скалари. (Според тоа $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$.)

Ако $\|\ \|: \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ е пресликување од V во K такво што, за секои $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$, $\alpha \in K$, се исполнети условите (6), (7) и (9), тогаш велиме дека V е ***нормиран векторски простор.***

Од дадената дефиниција следува дека просторите со скаларен производ (и реалните и комплексните) се специјални нормирани простори каде што нормата е дефинирана со (5). (Велиме дека ***нормата е индуцирана со скаларниот производ.***)

Ќе докажеме (на еден пример) дека постојат норми што не се индуцирани од скаларен производ.

1) Нека $\|\ \|: \mathbf{z} \mapsto \|\mathbf{z}\|$ е пресликување од $\mathbb{C}$ во $\mathbb{R}$ дефинирано со:

$$\|x+iy\| = \max\{|x|,|y|\},$$

каде што $x,y \in \mathbb{R}$. Притоа $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ го сметаме за реален векторски простор. Јасно е дека важат условите (6) и (7), за секои $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}$, а лесно се покажува и неравенството на триаголник. За $\mathbf{x} = i$, $\mathbf{y} = 1$, имаме:

$$1 = \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

од што следува дека не е исполнето равенството (8), па значи оваа норма не е индуцирана од скаларен производ.

2) Нека $C_c[0,1]$ е множеството непрекинати комплексни функции од реалната променлива t на сегментот $[0,1]$. (Според тоа секоја функција $z(t) \in C_c[0,1]$ има облик $z(t) = x(t) + iy(t)$, каде што $x(t), y(t) \in C[0,1]$; да се види пр. 5) од VII.3.1.) $C_c[0,1]$ е векторски простор во однос на обичните операции собирање на функции и множење на функција со број. Овој простор постанува унитарен, ако скаларниот производ се дефинира со:

$$f \circ g = \int_0^1 f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt$$

каде што $f, g \in C_c[0,1]$.

Забелешка 1. Формално на ист начин како и кај реалните функции, се дефинира поимот комплексна функција $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ од n комплексни променливи $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Имено, ако $D \subseteq \mathbb{C}^n$, и ако f е пресликување од D во $\mathbb{C}^n$, тогаш f (т.е. $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$) е комплексна функција од n-независни променливи со домен D; така, ако $f_0(z_2), f_1(z_2), \ldots$ $\ldots, f_m(z_2)$ се полиномни функции од z_2, тогаш:

$$f(z_1, z_2) = f_0(z_2) + z_1 f_1(z_2) + \cdots + z_1^m f_m(z_2)$$

е ***полиномна функција од*** z_1, z_2.

9. 2. Комплексни матрици

Овде нема да ги повториме дефинициите за: операции со матрици, детерминанта и ранг на матрица, за случајот на комплексни матрици зашто тие се осмислени за матрици над кое било поле.

Кај комплексните матрици важно место има и операцијата конјугација на матрица. Имено, ако $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ е комплексна матрица, тогаш нејзината ***конјугација*** $\overline{\mathbf{A}}$ се определува со

$$\overline{\mathbf{A}} = [\overline{a}_{jk}]. \tag{10}$$

Еве еден едноставен пример.

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 2-i & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 2+i & i \end{bmatrix}.$

Ќе формулираме неколку својства сврзани со поимот конјугација на матрици. Притоа, ќе *претпоставуваме дека* **A**, **B**, **C** и **D** *се кои било комплексни матрици, а* α *е кој било комплексен број; во* **8°** *се претпоставува уште дека* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{CD}$ *постојат.*

6°. $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}$ *е реална матрица.* □

7° $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$, $\overline{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$, $\overline{\alpha\mathbf{A}} = \overline{\alpha}\,\overline{\mathbf{A}}$. □

8°. $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{C}}\,\overline{\mathbf{D}}$. □

9°. *Ако* **A** *е несингуларна (квадратна) матрица, тогаш се несингуларни и матриците* $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, $\overline{\mathbf{A}}$ *и притоа:*

$$(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{T}}, \quad (\overline{\mathbf{A}})^{-1} = \overline{\mathbf{A}^{-1}}, \quad (\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\overline{\mathbf{A}^{-1}})^{\mathsf{T}}. \ \square$$

Се покажува за корисно да се дефинира уште еден оператор кај комплексните матрици, наречен ***ермитска транспозиција*** и означен со "н". Имено, ако **A** е комплексна матрица, тогаш $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ се дефинира со:

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}. \tag{11}$$

Според второто равенство од 7° имаме

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \overline{(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})}. \tag{11'}$$

Директно, или со помош на горните својства, лесно се докажува дека:

10°. *За кој било комплексен број* α *и комплексни матрици* **A, B, C, D**, *такви што* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{CD}$ *постојат, точни се равенствата*

$$(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}, \quad (\alpha\mathbf{A})^{\mathsf{H}} = \overline{\alpha}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}} + \mathbf{B}^{\mathsf{H}}, \quad (\mathbf{CD})^{\mathsf{H}} = \mathbf{D}^{\mathsf{H}}\mathbf{C}^{\mathsf{H}}. \ \square$$

11°. *Ако A е несингуларна матрица, тогаш и* $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ *е несингуларна и притоа* $(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathsf{H}}$. □

За матрицата **A** велиме дека е ***ермитска***, ако $\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}$. Според тоа:

12°. *Една реална матрица е ермитска акко е симетрична.* □

13°. *Ако* **A** *е ненулта матрица, тогаш и двете матрици* $\mathbf{AA}^{\mathsf{H}}$, $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$, *се ненулти.*

Д о к а з. Нека $\mathbf{AA}^{\mathsf{H}} = \mathbf{B} = [b_{ij}]$. Тогаш:

$$b_{ij} = \sum a_{j\nu}a^{\mathsf{H}}_{\nu j} = \sum_{\nu} a_{j\nu}\overline{a}_{j\nu} = \sum_{\nu} |a_{j\nu}|^2,$$

па според тоа: $\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}$. □

Својството 5° од VII.6.4 е специјален случај од следново тврдење:

14°. *Ако A е ермитска матрица, тогаш секоја нејзина сопствена вредност е реална.*

Д о к а з. Нека λ е сопствена вредност на **A**. Тогаш постои ненулта вектор-колона **x**, таква што $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, од што следува дека $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \overline{\lambda}\mathbf{x}^{\mathsf{H}}$. Множејќи оддесно со **x**, добиваме:

$$\overline{\lambda}\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{x},$$

т.е. $(\overline{\lambda}-\lambda)\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = 0$. Од последното равенство (според 13°, а и директно) добиваме дека $\overline{\lambda}-\lambda = 0$, т.е. $\overline{\lambda} = \lambda$. □

Да забележиме дека аналогно тврдење на 13° не важи за обично транспонирање, како што покажува и наредниот пример.

4) Ако $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix}$, тогаш $\mathbf{AA}^{\mathsf{T}} = \mathbf{O}$, па значи и резултатот на вежбата 25 од VII.5.4 (за реални матрици) не важи за комплексни матрици. Но, за ермитско транспонирање (како што се тврди и во 13°), имаме:

$$\mathbf{AA}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}, \quad \mathbf{AA}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

Исто така, за $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ е скелетно разложување на A, (вежба 31 од VII.5.4), но $\mathbf{CC}^{\mathsf{T}} = [0] = \mathbf{O}$ е сингуларна матрица. Слично како погоре се добива дека: $\mathbf{CC}^{\mathsf{H}} = [2]$, $\mathbf{B}^{\mathsf{H}}\mathbf{B} = [1]$ се несингуларни. Ако ставиме:

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{C}^{\mathsf{H}}(\mathbf{CC}^{\mathsf{H}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathsf{H}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{H}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

добиваме дека $\mathbf{AA}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{+}\mathbf{AA}^{+} = \mathbf{A}$, т.е. дека $\mathbf{A}^{+}$ е обопштена инверзија на $\mathbf{A}$, а $\mathbf{A}$ - на $\mathbf{A}^{+}$.

Горната забелешка ќе ја комплетираме со констатацијата дека истите резултати што се изнесени во гл. VII (и во текстот и во вежбите) за реални матрици, се пренесуваат (т.е. важат) и за комплексните матрици, освен неколку исклучоци (како што се разгледаните во примерот 4)). Тие исклучоци се однесуваат главно на теоремата за псевдоинверз на матрица (т.е. 20° од VII.1.6.) и дел од доказот на таа теорема (вежба 35 од VII.5.4). Всушност и тие исклучоци се елиминираат ако во нив знакот за транспозиција (т.е. "т") се замени со знакот за ермитска транспозиција (т.е. "н"), а изразот "симетрична матрица" се замени со "ермитска матрица".

Ќе ги обопштиме сега резултатите за скелетно разложување на матрица докажани во вежбите 31, 33-35 во VII.5.4. *Притоа ќе претпоставуваме дека* **A** *е дадена ненулта комплексна матрица од облик* $m \times n$.

15°. *Ако* **A** *има ранг* r, *тогаш постојат матрици* **B**, **C**, *од облик* $m \times r$, $r \times n$, *соодветно, такви што* $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

(Притоа велиме дека **BC** е ***скелетно разложување*** на **A**.)

Д о к а з. Види ја вежбата 31 од VII.5.4. □

16°. *Ако* **A** *има ранг* r *и* **BC** *е нејзино скелетно разложување, тогаш* **B** *и* **C** *имаат ранг* r *и притоа* $\mathbf{B}^{\mathsf{H}}\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{CC}^{\mathsf{H}}$ *се несингуларни.*

Д о к а з. Дека **B** и **C** имаат ранг r се докажува на ист начин како и кај реални матрици (вежба 33 од VII.5.4). За да покажеме дека $\mathbf{S} = \mathbf{B}^{\mathsf{H}}\mathbf{B}$ е несингуларна, доволно е да покажеме дека, ако $\mathbf{x}$ е r-димензионален вектор-колона таков што $\mathbf{Sx} = \mathbf{o}$, тогаш $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Навистина, множејќи го тоа равенство одлево со $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}$ добиваме: $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{B}^{\mathsf{H}}\mathbf{Bx} = \mathbf{o}$, т.е. $(\mathbf{Bx})^{\mathsf{H}}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{o}$, од што (според 13°) добиваме $\mathbf{Bx} = \mathbf{o}$, а потоа (имајќи предвид дека системот вектор-колони на **B** е независен) и $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. □

17°. *Нека* **BC** *е скелетно разложување на* **A**. *Ако матрицата* $\mathbf{A}^+$ *се определи со:*

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^H(\mathbf{C}\mathbf{C}^H)^{-1}(\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H, \tag{12}$$

тогаш:

а) $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$;

б) *матриците* $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ *и* $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ *се ермитски.*

Д о к а з. Со директна проверка, имајќи ги предвид равенствата $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ и (12). □

18°. *Ако* $\mathbf{A}_1^+$ *и* $\mathbf{A}_2^+$ *се обопштени инверзии на* **A**, *такви што:*

$$\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{U}_1\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{V}_1, \quad \mathbf{A}_2^+ = \mathbf{U}_2\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{V}_2, \tag{13}$$

тогаш $\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{A}_2^+$

Д о к а з. На ист начин како и доказот на тврдењето од вежбата 29 во VII.5.4. □

Како последица ја добиваме и "бараната" ***теорема за егзистенција и еднозначност на псевдоинверз*** од дадена комплексна матрица **A**.

19°. *При дадена комплексна матрица* **A** *постои единствена (комплексна) матрица* $\mathbf{A}^+$ *што ги задоволува условите а) и б) од* 17°.

Д о к а з. За $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, $\mathbf{A}^+ = \mathbf{O}$ е единствената матрица со бараните својства. За $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, се применуваат резултатите од 17° и 18°. □

З а б е л е ш к а 2. Теоремата 20° од VII.1.5 е последица од 19°.

Да разгледаме еден пример на комплексна матрица **A** што не е реална и да го најдеме нејзиниот псевдоинверз $\mathbf{A}^+$.

5) Раководејќи се од равенството

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & i & i \end{bmatrix} = \mathbf{A} = \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

добиваме:

$$\mathbf{B}^H\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{B}^H\mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^H = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{C}\mathbf{C}^H)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -i-1 \\ -1+i & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1-i & 1+i \\ -2i & -1-i & 1-i \\ -2+2i & 4+2i & -2-4i \end{bmatrix}.$$

Забелешка 3. При дадена (ненулта) комплексна матрица $\mathbf{A}$ од облик $m \times n$ и m-димензионална вектор-колона $\mathbf{b}$, равенката $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ има решение само ако се исполнети условите од теоремата на Кронекер-Капели, т.е. 7° од VII.5.3. Независно од тоа дали се исполнети тие услови, векторот $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ е еднозначно определен и ги има следниве својства:

(i) $\|\mathbf{Ax}_0 - \mathbf{b}\| = s_0$ е најмал број во множеството броеви $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ кога $\mathbf{x}$ се менува во $\mathbb{C}^n$, при што елементите од $\mathbb{C}^n$ ги сметаме за вектор-колони.

(ii) $\|\mathbf{x}_0\|$ е најмал број во множеството броеви $\|\mathbf{u}\|$, такви што $\|\mathbf{Au} - \mathbf{b}\| = s_0$. (Да се види Гантмахер гл. I. §5, стр. 33-34.)

Не оптоварувајќи се со докажување на формулираните резултати, ќе ги "провериме" на еден едноставен пример.

6) Очигледно е дека нема решение следниов систем равенки:

$$x_1 + x_2 = 0,$$
$$x_1 + x_2 = 1,$$
$$x_1 + x_2 = 2,$$

инаку еквивалентен со матричната равенка: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, каде што:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Имајќи предвид дека:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

добиваме:

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

од што следува дека:

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

па $\|x_0\|^2 = 1/2$.

По методот на најмали квадрати (в. V.3.3) добиваме дека x_1 и x_2 се решенија на равенката: $x_1 + x_2 = 1$. Ставајќи $x_1 = t$, $x_2 = 1 - t$, добиваме: $\|\mathbf{x}\|^2 = t^2 + (1-t)^2$, а најмалата вредност на десната страна е $1/4$ за $t = 1/2$; за оваа вредност на t, добиваме $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

(Во вежбата 20 ќе се бара да се примени овде изнесениот метод да се дојде до истите резултати како и во примерите 1 и 2 од V.3.3.)

До крајот на овој раздел, ќе се задржиме на низи и редови од матрици, како и на матрици од функции.

Ако на секој природен број k му придружиме матрица $\mathbf{A}_k$ од облик $m \times n$, ќе велиме дека $\mathbf{A}_k$ е ***низа матрици*** [3] (од облик $m \times n$). На секоја таква низа матрици ѝ кореспондираат mn низи броеви $a_{ij}(k)$, каде што $\mathbf{A}_k = [a_{ij}(k)]$. (Овде $i \in \{1,2,\dots,m\}$, т.е. индексот i не е ознака за "имагинарната единица".)

За низата $\mathbf{A}_k$ велиме дека е ***конвергентна, со граница*** $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ акко, за секој пар i, j, низата броеви $a_{ij}(k)$ е конвергентна и има граница a_{ij}. Пишуваме $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$ за $k \to \infty$, или

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}$$

Во спротивен случај, $\mathbf{A}_k$ е ***дивергентна.***

Еве еден едноставен пример.

7) $$\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix} (1+1/k)^k & k(2^{1/k}-1) \\ \sqrt{k+1}-\sqrt{k} & (1-1/k)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \ln 2 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}.$$

Имајќи предвид соодветни својства на низи од броеви, го добиваме следново својство [3]:

19°. *Ако низите матрици* $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{B}_k$, $\mathbf{C}_k$, $\mathbf{D}_k$ *имаат граници* **A, B, C, D**, *а низата броеви* α_k *има граница* α, *тогаш низите матрици* $\alpha_k \mathbf{A}_k$ $\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k\mathbf{D}_k$, *имаат граници* $\alpha\mathbf{A}, \mathbf{A}+\mathbf{B}, \mathbf{CD}$ - *соодветно.* (*Притоа се претпоставува дека* $\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k$, $\mathbf{C}_k\mathbf{D}_k$ *постојат.*) □

Збирови на конвергентни ***редови од матрици*** се дефинираат со помош на конвергентни низи од матрици, на ист начин како и кај редовите од броеви, реални или комплексни. Имено, редот

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$$

е ***конвергентен*** и има ***збир*** $\mathbf{S}$, акко $\mathbf{S}_k \to \mathbf{S}$ за $k \to \infty$, каде што:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}_1 + \cdots + \mathbf{A}_k .$$

Во тој случај, пишуваме:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k . \tag{14}$$

Имајќи ја предвид и дефиницијата за граница на низа од матрици, го добиваме следново својство:

20°. *Ако* $\mathbf{A}_k = [a_{ij}(k)]$, $\mathbf{S} = [s_{ij}]$, *тогаш равенството* (14) *е еквивалентно со следниот систем од* mn *равенства*

3) Не споменувајќи го тоа специјално, ќе претпоставуваме дека се работи за комплексни матрици, а наместо $(\mathbf{A}_K)$ ќе пишуваме $\mathbf{A}_K$; во иста смисла, низата комплексни броеви (a_K) ќе се означува со a_K

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}(k) \tag{14'}$$

за $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. □

Низите од матрици се специјален вид матрични функции од една комплексна променлива. Имено, нека, за секој пар i, j, таков што $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $a_{ij}(z)$ е функција од една комплексна променлива z, и нека сите тие mn функции се дефинирани во $D \subseteq \mathbb{C}$. Тогаш велиме дека $\mathbf{A}(z) = [a_{ij}(z)]$ е ***матрична функција*** од една комплексна променлива z, со домен D. И поимите: граница, непрекинатост, извод кај матрични функции се дефинираат "покомпонентно". Со други зборови:

а) $\lim\limits_{z\to z_0} \mathbf{A}(z) = \mathbf{A} = [a_{ij}^0] \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} a_{ij}(z) = a_{ij}^0$, за секој пар i, j;

б) $\mathbf{A}(z)$ е непрекината на D акко

$$\lim_{z\to z_0} \mathbf{A}(z) = \mathbf{A}(z_0), \tag{16}$$

за секој $z_0 \in D$;

в) $$\mathbf{A}'(z) = [a_{ij}'(z)] \tag{17}$$

г) $$\int_L \mathbf{A}(z)dz = \left[\int_L a_{ij}(z)dz\right]. \tag{18}$$

Притоа, и равенствата (16), (17), (18) треба да се земат за точни по дефиниција.

9. 3. Функции од матрици

Во овој раздел, не споменувајќи го тоа специјално, *ќе претпоставуваме дека $f(\lambda)$ е комплексна функција од комплексната променлива λ, а A е квадратна матрица од n-ти ред.*

Во случај кога $f(\lambda)$ е полиномна функција, $f(\mathbf{A})$ е добро определена матрица од n-ти ред, според договорот од VII.6.1. (За правина, во VII.6.1 се работи со реални полиноми и реални матрици, но сè што е кажано во VII.6, важи и за општиот случај на комплексни матрици и комплексни полиноми.) Наша задача е да дадеме соодветна "прифатлива" дефиниција на $f(\mathbf{A})$ и во случај кога $f(\lambda)$ не е полиномна функција. Битна улога во тоа ќе одигра минималниот полином $\psi(\lambda)$ што одговара на матрицата $\mathbf{A}$, а тој е делител на карактеристичниот полином $\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$. Имајќи ја предвид основната теорема на алгебрата (докажана во вежбата 10 од 5.4), како и Т.9 од I.3.1, го добиваме следново својство:

21°. *Постојат комплексни броеви* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *такви што:*

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n), \tag{19}$$

(Притоа, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *се сопствените вредности на* $\mathbf{A}$.) □

Ако $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ се сите различни сопствени вредности на $\mathbf{A}$, тогаш (19) го добива следниов облик:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \tag{19'}$$

каде што $n_1 + \cdots + n_s = n$.

Ќе покажеме дека:

22°. *Карактеристичниот полином* $\Delta(\lambda)$ *е делител на* $(\psi(\lambda))^n$.

Д о к а з. Да ги формираме матриците:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}, \mathbf{B}_j = \mathbf{A}^j + \alpha_1\mathbf{A}^{j-1} + \cdots + \alpha_{j-1}\mathbf{A} + \alpha_j\mathbf{E}, \ j = 1, 2, \dots, m,$$

каде што:

$$\psi(\lambda) = \lambda^m + \alpha_1\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda + \alpha_m. \tag{20}$$

Имајќи го предвид и фактот дека $\psi(\lambda)$ е минималниот полином на $\mathbf{A}$, добиваме:

$$\mathbf{B}_m = \psi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}, \quad \mathbf{B}_j - \mathbf{A}\mathbf{B}_{j-1} = \alpha_j\mathbf{E}, \quad \text{за } j = 1, 2, \dots, m.$$

Потоа, ако ставиме:

$$\mathbf{B}(\lambda) = \lambda^{m-1}\mathbf{B}_0 + \lambda^{m-2}\mathbf{B}_1 + \cdots + \lambda\mathbf{B}_{m-2} + \mathbf{B}_{m-1},$$

добиваме:

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\lambda) = \lambda^m\mathbf{E} + \lambda^{m-1}\alpha_1\mathbf{E} + \cdots + \lambda\,\alpha_{m-1}\mathbf{E} + \alpha_m\mathbf{E} = \psi(\lambda)\mathbf{E}.$$

Од последново равенство следува:

$$\Delta(\lambda)\cdot\det\mathbf{B}(\lambda) = (\psi(\lambda))^n,$$

т.е. дека $\Delta(\lambda)$ е делител од $(\psi(\lambda))^n$ □

Како последица од 22° ги добиваме и следниве две својства:

23°. *Секој корен на* $\Delta(\lambda)$ *е корен и на* $\psi(\lambda)$, *т.е.* $\psi(\lambda)$ *има облик:*

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}, \tag{20'}$$

каде што $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$, $m_k \geq 1$, *за секој* $k = \{1, 2, \dots, s\}$. □

24°. *Ако* $\Delta(\lambda)$ *има n-различни корени (т.е.* $\mathbf{A}$ *има n различни сопствени вредности), тогаш* $\Delta(\lambda) = \psi(\lambda)$ □

Пред да преједеме на дефиниција на поимот на функција од матрица, $f(\mathbf{A})$, за случај на произволна функција $f(\lambda)$, ќе докажеме уште едно својство.

25°. *Ако* $f(\lambda)$ *е полином, тогаш постои еднозначно определен полином* $p(\lambda)$ *со степен помал од* m, *таков што* $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})$ *и, притоа, за j-тиот извод важи*

$$f^{(j)}(\lambda_k) = p^{(j)}(\lambda_k) \tag{21}$$

за секој $j \in \{0,\ldots,m_k - 1\}$, $k \in \{1,\ldots,s\}$ *(при што:* $f^{(0)}(\lambda) = f(\lambda)$.*)*

Д о к а з. Според Т.13 од I.3.1, постојат (еднозначно определени) полиноми $q(\lambda)$ и $p(\lambda)$, такви што $f(\lambda) = \psi(\lambda)q(\lambda) + p(\lambda)$ и $p(\lambda)$ има степен помал од m, од што следува дека:

$$f(\mathbf{A}) = \psi(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) + p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}).$$

Равенствата (21) се последица од фактот што $h^{(j)}(\lambda_k) = 0$, за секој $j \in \{0,\ldots,m_k - 1\}$, $k \in \{1,\ldots,s\}$, каде што $h(\lambda) = \psi(\lambda)q(\lambda)$. (Да се види и вежбата 17 од 4.5.) □

За функцијата $f(\lambda)$ велиме дека е ***дефинирана на спектарот од матрицата*** **A** ако постои $f^{(j)}(\lambda_k)$ за секој $j \in \{0,1,\ldots,m_k - 1\}$, $k \in \{1,2,\ldots,s\}$. Ако е тоа исполнето и ако $p(\lambda)$ е полином од λ, со степен помал од m, таков што се исполнети сите равенства (21), тогаш велиме дека $p(\lambda)$ е ***интерполационен полином на Лагранж-Силвестер***[4] (скратено ИПЛС) ***за функцијата*** $f(\lambda)$ ***на спектарот од*** **A**.

Според резултатот од вежбата 19 во 4.5, добиваме:

26°. *Ако функцијата* $f(\lambda)$ *е дефинирана на спектарот од* **A**, *тогаш нејзиниот* ИПЛС *на спектарот од* **A** *е еднозначно определен.* □

Сега $f(\mathbf{A})$ се дефинира со:

$$f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}), \tag{22}$$

каде што $p(\lambda)$ е ИПЛС за $f(\lambda)$ на спектарот од **A**.

Имајќи ги предвид 25° и 26°, добиваме дека во случај кога $f(\lambda)$ е полиномна функција, "новата" дефиниција на $f(\mathbf{A})$ е во согласност со "обичната" дефиниција од VII.6.1.

Да видиме што станува во случајот кога $n = 1$, т.е. кога $\mathbf{A} = [a]$ е комплексен број. Тогаш $\Delta(\lambda) = \det[\lambda - a] = \lambda - a$, па и $\psi(\lambda) = \lambda - a$. Според тоа, $f(\lambda)$ е дефинирана на спектарот од **A** акко $f(a)$ постои, а во тој случај константниот полином $p(\lambda) = f(a)$ е ИПЛС за $f(\lambda)$ на спектарот од **A**. Така, (22) добива облик $f([a]) = f(a)$, што и требаше да се очекува.

4) Џејмс Силвестер (*James Joseph Silvester*, 1814-1897), англиски математичар

Да разгледаме три едноставни примери.

8) Минималниот полином на секоја единична матрица $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n$ $(n \geq 1)$ е $\lambda - 1$, од што следува $f(\mathbf{E}) = f(1)\cdot\mathbf{E}$, под услов $f(1)$ да постои. На пример:

$$e^{\mathbf{E}} = e\cdot\mathbf{E}, \quad \cos\mathbf{E} = (\cos 1)\cdot\mathbf{E}.$$

9) Имајќи предвид дека λ е минималниот полином на нултата матрица $\mathbf{O} = \mathbf{O}_n$, на пример, добиваме:

$$e^{\mathbf{O}} = \mathbf{E}, \quad \cos\mathbf{O} = \mathbf{E}, \quad \sin\mathbf{O} = \mathbf{O}.$$

10) За $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, имаме $\Delta(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$, па значи и $\psi(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$. Според тоа, $f(\mathbf{A})$ постои само ако постојат $f(0)$ и $f(2)$ и притоа $f(\mathbf{A}) = \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{A}$, каде што $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ треба да бидат такви што $f(0) = p(0) = \alpha$, $f(2) = \alpha + 2\beta$, каде што $p(\lambda) = \alpha + \beta\lambda$. Од тоа следува:

$$f(\mathbf{A}) = f(0)\mathbf{E} + \frac{1}{2}(f(2) - f(0))\mathbf{A} = \frac{f(0)}{2}(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) + \frac{f(2)}{2}\mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(0)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + f(2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} f(2)+f(0) & f(2)-f(0) \\ f(2)-f(0) & f(2)+f(0) \end{bmatrix}$$

Така:

$$e^{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{bmatrix}, \quad \sin\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sin 2}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Во трите разгледани примери карактеристичниот полином $\Delta(\lambda)$ се состои само од прости корени, па (според 24°) $\Delta(\lambda) = \psi(\lambda)$.

Во тој случај постои едноставна формула за пресметување на $f(\mathbf{A})$, како што се гледа од следнава теорема:

27°. *Ако матрицата* $\mathbf{A}$ *од n-ти ред има n различни сопствени вредности* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *и ако* $f(\lambda)$ *е комплексна функција дефинирана на спектарот од* $\mathbf{A}$, *тогаш*

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)L_1(\mathbf{A}) + f(\lambda_2)L_2(\mathbf{A}) + \cdots + f(\lambda_n)L_n(\mathbf{A}), \tag{23}$$

каде што матрицата $L_k(\mathbf{A})$ *е определена со*:

$$L_k(\mathbf{A}) = \prod_{j\neq k}\frac{(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E})}{(\lambda_k - \lambda_j)} = \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\cdots(\mathbf{A} - \lambda_{k-1}\mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda_{k+1}\mathbf{E})\cdots(\mathbf{A} - \lambda_n\mathbf{E})}{(\lambda_k - \lambda_1)\cdots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}\mathbf{E})\cdots(\lambda_k - \lambda_n)}$$

за $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Д о к а з. Ако полиномот $p(\lambda)$ е определен со:

$$p(\lambda) = f(\lambda_1)L_1(\lambda) + \cdots + f(\lambda_n)L_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)L_k(\lambda), \tag{24}$$

каде што

$$L_k(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}\frac{(\lambda - \lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_j)}. \tag{25}$$

тогаш лесно се проверува дека тој има исти вредности на спектарот од **A** како и функцијата $f(\lambda)$, т.е. $f(\lambda_k) = p(\lambda_k)$, за секој $k \in \{1,2,\dots,n\}$. □

Полиномот $p(\lambda)$ определен со (24) е познат под името ***интерполационен полином на Лагранж*** за функцијата $f(\lambda)$ во точките $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а полиномите $L_k(\lambda)$ определени со (25) се викаат ***лагранжови коефициенти***.

Ако $\Delta(\lambda)$ има и сложени корени, тогаш потребна е (општа) постапка за определување на $\psi(\lambda)$. Една таква постапка се опишува во следното тврдење, чиј доказ може да се најде во Гантмахер, IV глава, §5 стр. 93-94.

28°. *Нека $\Delta_{n-1}(\lambda)$ е најголемиот заеднички делител на минорите од ред $n-1$ на карактеристичната матрица $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$. Тогаш, минималниот полином $\psi(\lambda)$ се определува со помош на следнава формула*

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_{n-1}(\lambda)}. \tag{26}$$

Така, во 10) имаме: $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$, па $\lambda-1$ и -1 се единствените минори од прв ред, од што следува дека $\Delta_{n-1}(\lambda) = 1$, т.е. $\psi(\lambda) = \Delta(\lambda)$, а ние до истиот заклучок дојдовме со помош на 24°.

Ќе разгледаме два примера, каде што $\Delta(\lambda)$ има сложени корени, па $\psi(\lambda)$ не може да се определи со помош на 24°.

11) Ако $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, тогаш

$$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4).$$

Минималниот полином $\psi(\lambda)$ ќе го определиме со помош на (26). Прво ги наоѓаме сите минори со ред 2 на $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3), \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda-2, \quad \begin{vmatrix} 1 & \lambda-5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2-\lambda,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = 3(\lambda-2), \quad \begin{vmatrix} \lambda-3 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3(\lambda-2), \quad \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2),$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 3 \\ 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-6), \quad \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-2) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ \lambda-5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Од горното следува дека $\Delta_2(\lambda) = \lambda-2$, па според (26) добиваме: $\psi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-4)$.

12) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-1\end{bmatrix}$, $\Delta(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

Имајќи предвид дека $\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=1$, добиваме дека $\Delta_2=1$, па $\psi(\lambda)=\Delta(\lambda)=$ $=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, т.е. $\lambda_1=1$ е двократен корен на $\psi(\lambda)$.

Подолу, на секоја (квадратна) матрица $\mathbf{A}$ (чијшто минимален полином $\psi(\lambda)$ е од облик (20), т.е. (20')) ќе ѝ придружиме едно множество матрици, наречени *компонентни матрици на* $\mathbf{A}$. Пред да го направиме тоа, го воочуваме следново својство:

29°. *Множеството* $\langle\mathbf{A}\rangle$ *матрици од облик* $\beta_1\mathbf{E}+\beta_2\mathbf{A}+\cdots+\beta_{k+1}\mathbf{A}^k$ *(каде што* $\beta_j\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$*) е потпростор од просторот на сите комплексни квадратни матрици со ред n, и притоа* $\mathbf{E},\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A}^{m-1}$ *е база на* $\langle\mathbf{A}\rangle$. □

Ќе ја докажеме следнава теорема:

30°. *Постои база* $\{\mathbf{Z}_{k\nu}\,|1\le k\le s,1\le\nu\le m_k\}$ *на* $\langle\mathbf{A}\rangle$, *таква што за секоја функција* $f(\lambda)$ *(дефинирана на спектарот од* $\mathbf{A}$*) е точно равенството:*

$$f(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{s}\left[f(\lambda_k)\mathbf{Z}_{k1}+f'(\lambda_k)\mathbf{Z}_{k2}+\cdots+f^{(m_k-1)}(\lambda_k)\mathbf{Z}_{km_k}\right]. \tag{27}$$

Д о к а з. Според (22), $f(\mathbf{A})=p(\mathbf{A})$, каде што

$$p(\lambda)=\alpha_1+\alpha_2\lambda+\cdots+\alpha_m\lambda^{m-1}, \tag{28}$$

е ИПЛС за $f(\lambda)$ на спектарот од $\mathbf{A}$. Имајќи предвид дека важат равенствата (21) (за секои $j\in\{0,\ldots,m_{k-1}\},k\in\{1,\ldots,s\}$) добиваме систем од m линеарни равенства од облик : $\mathbf{Ba}=\mathbf{f}$, каде што:

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}=[\alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_m],\ \mathbf{f}^{\mathrm{T}}=[f(\lambda_1)\ldots f^{(m_1-1)}(\lambda_1)\ldots f^{(m_s-1)}(\lambda_s)],$$

а $\mathbf{B}$ е квадратна матрица од m-ти ред, којашто зависи само од $\mathbf{A}$, а не и од $f(\lambda)$. Така, за матрицата $\mathbf{A}$ од примерот 12) имаме:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]\\ \mathbf{f}^{\mathrm{T}}=[f(1)\ \ f'(1)\ \ f(2)].\end{matrix}$$

Имајќи предвид дека $\mathbf{a}$ е еднозначно определен вектор-колона, добиваме дека $\mathbf{B}$ е несингуларна матрица, па за $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{C}$, добиваме $\mathbf{a}=\mathbf{Cf}$, од што следува

$$\alpha_j=c_{j1}f(\lambda_1)+c_{j2}f'(\lambda_1)+\cdots+c_{jm}f^{(m_s-1)}(\lambda_s). \tag{29}$$

Потоа, според (22), добиваме:

$$f(\mathbf{A})=\alpha_1\mathbf{E}+\alpha_2\mathbf{A}+\cdots+\alpha_m\mathbf{A}^{m-1}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\mathbf{A}^{j-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left[c_{j1}f(\lambda_1)+c_{j2}f'(\lambda_1)+\cdots+c_{jm}f^{(m_s-1)}(\lambda_s)\right]\mathbf{A}^{j-1}. \tag{22'}$$

Делот од збирот на десната страна од (22'), каде што се појавуваат $f(\lambda_1),\ldots,f^{(m_1-1)}(\lambda_1)$, го има следниов облик:

$$f(\lambda_1)\mathbf{Z}_{11}+f'(\lambda_1)\mathbf{Z}_{12}+f^{(m_1-1)}(\lambda_1)\mathbf{Z}_{1m_1}, \tag{27'}$$

каде што:

$$\mathbf{Z}_{1\nu}=\sum_{j=1}^{m}c_{j\nu}\mathbf{A}^{j-1}. \tag{30}$$

Ставајќи:

$$\mathbf{Z}_{2\nu}=\sum_{j=1}^{m}c_{j\nu'}\mathbf{A}^{j-1}, \tag{30'}$$

(каде што $\nu'=m_1+\nu$) добиваме дека

$$f(\lambda_2)\mathbf{Z}_{21}+f'(\lambda_2)\mathbf{Z}_{22}+f^{(m_2-1)}(\lambda_2)\mathbf{Z}_{2m_2}, \tag{27''}$$

е делот од збирот на десната страна од (22'), каде што се појавува λ_2, итн. Со тоа се добива дека постојат матрици $\mathbf{Z}_{k\nu}$ од $\langle\mathbf{A}\rangle$, такви што е точно (27).

Преостанува да покажеме дека сите такви матрици формираат база на $\langle\mathbf{A}\rangle$. За таа цел доволно е за $f(\lambda)$ да се изберат функциите: $1,\lambda,\ldots$ $\ldots,\lambda^{m-1}$, и ќе се добие дека $\mathbf{E},\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A}^{m-1}$ се линеарни комбинации од матриците $\mathbf{Z}_{k\nu}$. Имајќи предвид дека $\mathbf{E},\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A}^{m-1}$ е база на $\langle\mathbf{A}\rangle$, од тоа следува дека и $\{\mathbf{Z}_{k\nu}|1\le k\le s,1\le\nu\le m_k\}$ е исто така база на $\langle\mathbf{A}\rangle$. □

Матриците $\mathbf{Z}_{k\nu}$ се викаат ***компоненти на матрицата*** $\mathbf{A}$. Ќе ги најдеме компонентите на матриците од последните три примери.

13) Во 10) имаме:

$$\mathbf{Z}_1=\mathbf{Z}_{11}=\frac{1}{2}(2\mathbf{E}-\mathbf{A})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{Z}_2=\mathbf{Z}_{21}=\frac{1}{2}\mathbf{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

Ако се проследи работата во 10), ќе се види дека (всушност) $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ ги добиваме решавајќи ја равенката $\mathbf{Ba}=\mathbf{f}$, а таа во случајов има облик:

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\end{bmatrix}.$$

Но, може при определувањето на компонетите да се искористи фактот што тие не зависат од функцијата $f(\lambda)$.

14) Така, ако во 11) ставиме $f(\lambda)=1$ и $f(\lambda)=\lambda$, добиваме:

$$\mathbf{E}=\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2,\quad \mathbf{A}=2\mathbf{Z}_1+4\mathbf{Z}_2,\quad \text{т.е.}$$

$$\mathbf{Z}_2=\frac{1}{2}\mathbf{A}-\mathbf{E},\quad \mathbf{Z}_1=2\mathbf{E}-\frac{1}{2}\mathbf{A}.$$

Според тоа, за секоја функција $f(\lambda)$ (дефинирана за $\lambda=2$ и $\lambda=4$), добиваме:

$$f(\mathbf{A})=f(2)\cdot\left(2\mathbf{E}-\frac{1}{2}\mathbf{A}\right)+f(4)\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}-\mathbf{E}\right).$$

15) Во 12) имаме $s=2, m_1=2, m_2=1, m=3, \lambda_1=1, \lambda_2=2$. Ставајќи во (27), по ред: $1, \lambda-1, (\lambda-1)^2$ наместо $f(\lambda)$, добиваме:

$$\mathbf{E}=\mathbf{Z}_{11}+\mathbf{Z}_{21}, \quad \mathbf{A}-\mathbf{E}=\mathbf{Z}_{12}+\mathbf{Z}_{21}, \quad (\mathbf{A}-\mathbf{E})^2=\mathbf{Z}_{21},$$

од што следува: $\mathbf{Z}_{12}=(\mathbf{A}-\mathbf{E})(2\mathbf{E}-\mathbf{A}), \mathbf{Z}_{11}=2\mathbf{A}-\mathbf{A}^2$. Според тоа, за секоја функција $f(\lambda)$, таква што $f(1), f(2), f'(1)$ постојат, имаме:

$$f(\mathbf{A})=f(1)\cdot(2\mathbf{A}-\mathbf{A}^2)+f'(1)\cdot(3\mathbf{A}-\mathbf{A}^2-2\mathbf{E})+f(2)\cdot(\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}+\mathbf{E}).$$

Подолу ќе изнесеме уште три својства, од кои ќе го докажеме само првото, а за преостанатите му советуваме на читателот да ја консултира книгата: Гантмахер, гл. IV §4-5, стр. 103-115.

31°. *Ако $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ се дефинирани на спектарот од матрицата* **A**, *тогаш истото важи и за функциите $f(\lambda)+g(\lambda)$, $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$, и притоа:*

$$(f+g)(\mathbf{A})=f(\mathbf{A})+g(\mathbf{A}), \quad (fg)(\mathbf{A})=f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}). \tag{31}$$

Д о к а з. Првиот дел од тврдењето е јасен ако се имаат предвид правилата за извод од збир, односно производ. Нека $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ се ИПЛС за $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ (соодветно) на спектарот од A. Тогаш, $p(\lambda)+q(\lambda)$ е ИПЛС за $f(\lambda)+g(\lambda)$, од што следува првото равенство. Полиномот $p(\lambda)\cdot q(\lambda)$ не мора да биде ИПЛС за $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$, но има исти вредности на спектарот од **A** како и $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$, па:

$$(fg)(\mathbf{A})=p(\mathbf{A})\cdot q(\mathbf{A})=f(\mathbf{A})\cdot g(\mathbf{A}). \ \square$$

32°. *Ако функциите $f(\lambda)$ и $h(\lambda)=g(f(\lambda))$ се дефинирани на спектарот од* **A**, *тогаш $g(\lambda)$ е дефинирана на спектарот од $\mathbf{B}=f(\mathbf{A})$ и притоа: $h(\mathbf{A})=g(\mathbf{B})$, т.е. $(g(f(\lambda)))(\mathbf{A})=g(f(\mathbf{A}))$.* $\square$

33°. *Ако $f(\lambda)$ е збир на степениот ред*

$$a_0+a_1(\lambda-\lambda_0)+a_2(\lambda-\lambda_0)^2+\cdots+a_k(\lambda-\lambda_0)^k+\cdots \tag{32}$$

во кругот $|\lambda-\lambda_0|<r$ и ако сите сопствени вредности на матрицата **A** *се во внатрешноста на тој круг, тогаш f е дефинирана на спектарот од* **A** *и притоа:*

$$f(\mathbf{A})=a_0\mathbf{E}+a_1(\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{E})+a_2(\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{E})^2+\cdots+a_k(\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{E})^k+\cdots \ \square$$

Како последица добиваме дека се точни, на пример, и следниве равенства:

$$e^{t\mathbf{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k;$$

$$\cos(t\mathbf{A})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}\mathbf{A}^{2k}; \qquad \sin(t\mathbf{A})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{A}^{2k+1}; \tag{33}$$

за секој комплексен број t и секоја квадратна матрица **A**.

9. 4. Вежби

Во 1-5 се претпоставува дека V е даден реален векторски простор и дека $V^{\wedge} = \{\mathbf{a} + i\mathbf{b} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V\}$, каде што i е имагинарна единица, т.е. $i^2 = -1$. Еднаквоста во $V^{\wedge}$ се дефинира со:

$$\mathbf{a} + i\mathbf{b} = \mathbf{c} + i\mathbf{d} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c}, \mathbf{b} = \mathbf{d},$$

собирање со:

$$(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) + (\mathbf{c} + i\mathbf{d}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + i(\mathbf{b} + \mathbf{d}), \tag{34}$$

и множење на комплексен број со елементи од $V^{\wedge}$ со:

$$(\alpha + i\beta)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}) + i(\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}). \tag{35}$$

1. $V^{\wedge}$ е комплексен векторски простор. [5]

2. V може да се смета за подмножество од $V^{\wedge}$, со тоа што ќе се подразбира равенството: $\mathbf{a} + i\mathbf{o} = \mathbf{a}$. Притоа: V не е потпростор од $V^{\wedge}$, но V е потпростор од $V^{\wedge}(I\!R)$.

3. Секоја база на V е база и на $V^{\wedge}$.

4. $(I\!R^n)^{\wedge} = \mathbb{C}^n$.

5. Ако $f: V \to W$ е линеарно пресликување, тогаш и $f^{\wedge}: V^{\wedge} \to W^{\wedge}$ дефинирано со:

$$f^{\wedge}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + i f(\mathbf{b}) \tag{36}$$

е линеарно пресликување.

6. Ако линеарното пресликување $f: I\!R^n \to I\!R^m$ е определено со матрицата A, тогаш со истата матрица е определено и линеарното пресликување $f^{\wedge}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. (Притоа се претпоставува дека во $\mathbb{C}^n$ се избира иста база како и во $I\!R^n$, а истото се однесува и за $\mathbb{C}^m$.)

7. Пресликувањето $g: V^{\wedge} \to V^{\wedge}$ дефинирано со: $g(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = -\mathbf{b} + i\mathbf{a}$ е линеарно, но не постои линеарно пресликување $f: V \to V$, такво што $g = f^{\wedge}$.

8. Да се докажат 2°-6°, (2)-(9), теоремата на Коши-Буњаковски за унитарни простори, и неравенството:

$$\left|\alpha_1\overline{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n\overline{\beta}_n\right| \le \sqrt{|\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2}\sqrt{|\beta_1|^2 + \cdots + |\beta_n|^2}. \tag{37}$$

9. Својствата 16°-20° од VII.4.5 важат и за унитарни простори.

10. Ако $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ е ортонормирана база на $\mathbb{C}^3$, тогаш и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ е таква база, каде што $3\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, 3\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3, 3\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$.

11. Ако $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ е ортонормиран систем вектори од унитарниот простор V и ако:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n, \quad \mathbf{y} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{a}_n,$$

тогаш:

а) $\mathbf{x} \circ \mathbf{a}_k = \alpha_k$, за секој $k = 1, 2, \ldots, n$;

---

5) Во овој раздел нема да пишуваме "Да се докаже дека", т.е. тоа барање ќе го подразбираме

б) $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\alpha_1\overline{\beta}_1+\cdots+\alpha_n\overline{\beta}_n$;

в) $\|\mathbf{x}\|^2=|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_n|^2$;

г) $\|\mathbf{z}\|^2\geq|\gamma_1|^2+\cdots+|\gamma_n|^2$, за секој $\mathbf{z}\in V$, и $m=1,2,\ldots,n$, каде што $\mathbf{z}\circ\mathbf{a}_k=$ $=\gamma_k$, за $k\leq m$.

12. За унитарни простори се точни тврдења аналогни на тврдењата од вежбите 35, 36, 37 од VII.4.6.

13. Ако во $\mathbb{C}^2$ се дефинира норма со:

а) $\|(u,v)\|=\max\{|u|,|v|\}$ или со б) $\|(u,v)\|=|u|+|v|$,

ќе се добие нормиран простор што не е индуциран од унитарниот простор $\mathbb{C}^2$.

14. За секоја комплексна матрица $\mathbf{A}$ од облик $m\times n$ постојат еднозначно определени реални матрици (од ист облик) $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, такви што $\mathbf{A}=\mathbf{B}+i\mathbf{C}$. Притоа (за $m=n$), $\mathbf{A}$ е несингуларна акко постојат реални матрици $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, такви што: $\mathbf{BF}-\mathbf{CG}=\mathbf{E}, \mathbf{BG}+\mathbf{CF}=\mathbf{O}$.

15. Да се докажат тврдењата 6°-12°, 15° и 18°.

16. За секоја комплексна матрица $\mathbf{A}$, точно е равенството:

$$\mathbf{A}^+=(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})^+\mathbf{A}^{\mathrm{H}}.$$

17. Ако се сметаат елементите од $\mathbb{C}^m$ како матрици од облик $m\times 1$ (т.е. m-димензионални вектор колони), тогаш скаларниот производ во $\mathbb{C}^m$ добива облик $\mathbf{b}\circ\mathbf{c}=\mathbf{b}^{\mathrm{H}}\mathbf{c}$, при што на десната страна имаме "обичен" матричен израз. Според тоа $\|\mathbf{b}\|=(\mathbf{b}^{\mathrm{H}}\mathbf{b})^{1/2}$.

18. За која било матрица $\mathbf{A}$ од облик $m\times n$ и m-димензионален вектор-колона $\mathbf{b}$, матричната равенка $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{b}$ има решение.

Д о к а з. $(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^{\mathrm{H}}(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})=\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{Ax}-2\mathbf{b}^{\mathrm{H}}\mathbf{Ax}+\mathbf{b}^{\mathrm{H}}\mathbf{b}$ е ненегативна функција $y(x_1,\ldots,x_n)$ од $x_1,x_2,\ldots,x_n$, па постојат $x_1^0,\ldots,x_n^0$, такви што за $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0=$ $=[x_1^0,\ldots,x_n^0]^{\mathrm{T}}$, $(\mathbf{Ax}_0-\mathbf{b})^{\mathrm{H}}(\mathbf{Ax}_0-\mathbf{b})$ е најмала вредност на таа функција. Според тоа, $x_1^0,\ldots,x_n^0$ се решенија на системот равенки $y_{x_i}=0$, $i=1,2,\ldots,n$. Со средување се добива дека добиениот систем равенки е еквивалентен со матричната равенка $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{b}$.

19. Користејќи го резултатот од вежбите 16 и 18 се извлекува заклучок дека $\mathbf{x}_0=\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ е едно од решенијата на равенката $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{b}$.

20. Да се проверат резултатите добиени во примерите 1 и 2 од V.3.3 со помош на поимот псевдоинверз.

21. Ако $\psi(\lambda)$ определен со (20') е минималниот полином на $\mathbf{A}$, и ако t е ненулти комплексен број тогаш:

а) $(\lambda-t\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-t\lambda_s)^{m_s}=\psi_t(\lambda)$ е минималниот полином на $t\mathbf{A}$.

б) $t\mathbf{A}$ има исти компонентни матрици како и $\mathbf{A}$.

Д о к а з. а) Следува од фактот што $\mathbf{A}$ е корен на $q(\lambda)$ акко $t\mathbf{A}$ е корен на $q(\lambda/t)$. Од а) следува дека: ако $p(\lambda)$ е ИПЛС за $f(\lambda)$ на спектарот од $\mathbf{A}$, тогаш $p(\lambda/t)$ е ИПЛС за $f(\lambda/t)$ на спектарот од $t\mathbf{A}$. Од тоа следува точноста на б).

22. За матриците од примерите 8)-12) да се проверат равенствата:

$$e^{-\mathbf{A}} = (e^{\mathbf{A}})^{-1}, \quad e^{i\mathbf{A}} = \cos\mathbf{A} + i\sin\mathbf{A}, \quad (\cos\mathbf{A})^2 + (\sin\mathbf{A})^2 = \mathbf{E}. \tag{38}$$

23. Нека $g(\lambda) = f(t\lambda)$. Функцијата $g(\lambda)$ е дефинирана на спектарот од $\mathbf{A}$ акко $f(\lambda)$ е дефинирана на спектарот од $t\mathbf{A}$. Во тој случај: $g(\mathbf{A}) = f(t\mathbf{A})$.

Д о к а з. Заклучокот е последица од 21 б).

24. Равенствата (38) се точни за која било матрица $\mathbf{A}$.

Д о к а з. Тврдењето е последица од 31° и резултатот од претходната вежба, ако се имаат предвид и равенствата:

$$e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1, \quad e^{i\lambda} = \cos\lambda + i\sin\lambda, \quad (\cos\lambda)^2 + (\sin\lambda)^2 = 1.$$

25. Нека $g(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ е комплексен полином од k комплексни независни променливи, а $f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)$ се дефинирани на спектарот од матрицата $\mathbf{A}$. Тогаш, функцијата $h(\lambda) = g(f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda))$ е дефинирана на спектарот од $\mathbf{A}$ и притоа: $h(\mathbf{A}) = g(f_1(\mathbf{A}), \ldots, f_k(\mathbf{A}))$.

Д о к а з. Со индукција по k. За $k = 1$, тврдењето е последица од 31°. Потоа, $g(z_1, \ldots, z_k)$ може (на единствен начин) да се претстави во обликот:

$$g(z_1, \ldots, z_k) = g_0(z_2, \ldots, z_k) + z_1 g_1(z_2, \ldots, z_k) + \cdots + z_1^m g_m(z_2, \ldots, z_k),$$

каде што $g_j(z_2, \ldots, z_k)$ е полином од $z_2, \ldots, z_k$, за $j = 0, 1, \ldots, m$. Според индуктивната претпоставка, имаме $g_j(f_2(\mathbf{A}), \ldots, f_k(\mathbf{A})) = h_j(\mathbf{A})$, каде што $h_j(\lambda) = g_j(f_2(\lambda), \ldots, f_k(\lambda))$. Користејќи го уште еднаш 31°, добиваме

$$h(\mathbf{A}) = h_0(\mathbf{A}) + f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A}) + \cdots + f_1(\mathbf{A})^m h_m(\mathbf{A}) = g(f_1(\mathbf{A}), \ldots, f_k(\mathbf{A})).$$

26. Ако матрицата $\mathbf{A}$ има само едноставни корени $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, тогаш нејзините компонентни матрици $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_n$, се определени со $\mathbf{Z}_k = L_k(\mathbf{A})$, каде што полиномот $L_k(\mathbf{A})$ е определен со (25). (Ова тврдење е, имено, последица од 27° и 30°.)

27. Ако $\mathbf{A} = \dfrac{\pi}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, тогаш $\sin\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

28. Ако матриците $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ се определени со:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

тогаш:

$$f(\mathbf{A}) = f(0)\mathbf{E} + f'(0)\mathbf{A}, \quad f(\mathbf{B}) = f(0)\mathbf{E} + f'(0)\mathbf{B} + \frac{1}{2}f''(0)\mathbf{B}^2,$$

$$f(\mathbf{C}) = f(0)\mathbf{E} + f'(0)\mathbf{C} + \frac{1}{2}f''(0)\mathbf{C}^2 + \frac{1}{6}f'''(0)\mathbf{C}^3,$$

при што $f(\lambda)$ е таква што егзистира соодветната десна страна.

29. Ако $\mathbf{H}_n = [h_{ij}]$ е матрица од n-ти ред ($n \geq 2$) таква што $h_{i\,i+1} = 1$, $h_{ij} = 0$ за $j \neq i+1$, и ако постои $f^{(\nu)}(0)$ за $0 \leq \nu \leq n-1$, тогаш $f(\mathbf{H}_n) = \mathbf{S}$, каде

што $\mathbf{S} = [s_{ij}]$ е определена со: $s_{ij} = 0$, за $i > j$, $s_{ii} = f(0)$, $s_{i,i+k} = \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$ за секој $1 \le i$, $1 \le k \le n-i$.

П о м о ш. $\psi(\lambda) = \lambda^n$ е минималниот полином на $\mathbf{H}_n$, од што следува дека

$$g(\lambda) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)\lambda + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\lambda^{n-1}$$

е ИПЛС за $\mathbf{H}_n$.

30. За секој $\lambda \in \mathbb{C}$, таков што $|\lambda| < 1$, точно е равенството:

$$\frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots,$$

а од тоа (според 33°) следува дека: ако $|\lambda_k| < 1$ за секоја карактеристична вредност на матрицата $\mathbf{A}$, тогаш е точно равенството:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^p + \cdots; \tag{38}$$

31. Главната вредност $\ln\lambda$ на логаритамската функција е дефинирана во 4.1 со равенството (7), т.е. со $\ln\lambda = \ln\rho + i\varphi$, каде што $\lambda = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0, -\pi < \varphi < \pi$. За $|\lambda - 1| < 1$ е точно равенството

$$\ln\lambda = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(\lambda - 1)^p,$$

од што (според 33°) следува дека, ако секоја сопствена вредност λ_k на квадратната матрица $\mathbf{A}$ го задоволува неравенството $|\lambda_k - 1| <$, тогаш:

$$\ln\mathbf{A} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}(\mathbf{A} - \mathbf{E})^p. \tag{39}$$

32. Нека L е контурата на едноставна област во рамнината, и нека $\mathbf{A}$ е квадратна матрица со ред n, при што сите (различни) сопствени вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ на $\mathbf{A}$ се во внатрешноста на областа. Потоа, нека $f(\lambda)$ е аналитичка функција во внатрешноста на областа, а и на самата контура L. Според Кошиевата интегрална формула и нејзината последица (в. 9° и 12° од 5.3), за секој $k = 1, \dots, s$ се точни равенствата:

$$f(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}d\lambda, \quad f'(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^2}d\lambda, \dots$$
$$f^{(m_k-1)}(\lambda_k) = \frac{(m_k - 1)!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}d\lambda. \tag{40}$$

Да ја разгледаме функцијата $g(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \lambda}$ каде што α е даден комплексен број различен од сите сопствени вредности на $\mathbf{A}$. Тогаш, според (27), имаме:

$$(\alpha\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = g(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\mathbf{Z}_{k1}}{\alpha - \lambda_k} + \frac{1!}{(\alpha - \lambda_k)^2}\mathbf{Z}_{k2} + \cdots + \frac{(k_k - 1)!}{(\alpha - \lambda_k)^{m_k}}\mathbf{Z}_{km_k}\right]. \tag{41}$$

Заменувајќи во (41) λ наместо α, и множејќи ги двете страни со $f(\lambda)/2\pi i$, и интегрирајќи по кривата L добиваме:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L (\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} f(\lambda)d\lambda = \sum_{k=1}^{s}\left[f(\lambda_k)\mathbf{Z}_{k1} + f'(\lambda_k)\mathbf{Z}_{k2} + \cdots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k)\mathbf{Z}_{km_k}\right]. \quad (42)$$

(Притоа, користени се и равенствата (40).) Десната страна од (42) (според (27)) е $f(\mathbf{A})$, така што имаме:

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi i}\int_L (\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} f(\lambda)d\lambda. \quad (43)$$

(Смислата на линискиот интеграл од левата страна на (42), т.е. десната страна на (43), е објаснета со равенството (18) од 9.2.)

33. Да го разгледаме системот линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \quad (44)$$ [6]

каде што $i = 1,2,\ldots,n$. Ако ставиме $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1\ x_2 \ldots x_n]$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, (44) го добива обликот:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (44')$$ [6]

Да го најдеме решението $\mathbf{x}(t)$ на (44′) што го задоволува почетниот услов $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, под претпоставка дека баранато решение може да се развие во маклоренов ред:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \frac{\dot{\mathbf{x}}_0}{1!}t + \frac{\ddot{\mathbf{x}}_0}{2!}t^2 + \frac{\dddot{\mathbf{x}}_0}{3!}t^3 + \cdots \quad (45)$$

Равенството (44′) ги имплицира следниве равенства:

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \quad \ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0, \ldots, \quad (44'')$$

така што (45) го добива обликот:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \frac{t}{1!}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \cdots = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0. \quad (45')$$

Лесно се проверува дека ако функцијата $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ е определена со (45′), тогаш $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ и $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, т.е. е решение на (44).

34. Да се примени резултатот од претходната вежба на системите ДР од примерот 15) од 8.3 и вежбата 10 од 8.5.

35. Ако во методот на Гревиј (вежба 24 од VII.6.5) операторот "т" (за транспонирање) се замени со операторот "н" (за ермитско транспонирање), ќе се добие соодветен метод за пресметување псевдоинверз на комплексна матрица. Добиениот метод да се примени за матрицата $\mathbf{A}$ од примерот 5).

---

6) $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$, $\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(0), \ldots$

X. МЕТРИЧНИ ПРОСТОРИ

Оваа глава е посветена на метричните простори во кои се обопштува поимот за точка, како и поимот за растојание меѓу две точки. Тоа овозможува да се обопштат повеќе поими и резултати, изучени порано, за функциите од една или повеќе променливи. Кон крајот на главава се докажува значајната теорема на Банах за фиксна точка и се разгледуваат неколку нејзини примени.

При читањето, на читателот му препорачуваме секогаш да ги има предвид конкретните метрични простори: просторот од точки во рамнината и тридимензионалниот простор.

X. 1. Отворени и затворени множества во метрични простори

Во **1.1** се повторува дефиницијата на метрика дадена во V.1.1, а потоа во **1.2** и **1.3** се разгледуваат поимите отворени односно затворени множества во еден метричен простор. Во **1.4** се дефинира општиот поим тополошки простор.

1. 1. Метрични простори

Со цел на потполност, ќе ја повториме дефиницијата за метричен простор дадена во V.1.1.

Нека M е произволно непразно множество, и нека $d:(x,y)\mapsto d(x,y)$ е пресликување од $M\times M$ во множеството на реалните броеви со следниве својства:

(i) аксиома за позитивност и идентичност:

$$(\forall x,y\in M)\ \ d(x,y)\geq 0;\quad d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y;$$

(ii) аксиома за симетрија:

$$(\forall x,y \in M) \quad d(x,y)=d(y,x);$$

(iii) аксиома на триаголник:

$$(\forall x,y,z \in M) \quad d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z).$$

За пресликувањето d велиме дека е ***метрика***, а парот (M,d) го викаме ***метричен простор*** со ***метрика*** d и со ***носач*** M, или просто ***метричен простор***. Обично ќе биде јасно за која метрика се работи, па затоа самото множество M ќе го викаме метричен простор, а ќе пишуваме M наместо (M,d).

Вообичаено е елементите на метричниот простор M да се викаат ***точки***, а за реалниот број $d(x,y)$ тогаш се вели дека е ***растојание*** меѓу точките x и y од M.

Пред да се запознаеме со неколку класи метрички простори, ќе докажеме две неравенства што се последица од аксиомата на триаголник.

1°. *Ако $x_1,\dots,x_n$, $x,y,u,v \in M$ каде што (M,d) е метричен простор, тогаш се точни неравенствата:*

$$d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\dots+d(x_{n-1},x_n), \tag{1}$$

$$|d(x,y)-d(u,v)| \le d(x,u)+d(y,v). \tag{2}$$

Д о к а з. За да се докаже (1), треба аксиомата на триаголник да се примени $n-2$ пати. Потоа, специјални случаи од (1) се неравенките:

$$d(x,y) \le d(x,u)+d(u,v)+d(v,y), \quad d(u,v) \le d(u,x)+d(x,y)+d(y,v),$$

од што лесно се добива (2). □

Подолу, прво ќе повториме еден резултат од V.1.1, а потоа ќе изнесеме и неколку врски меѓу поимите норма и метрика, од кои, покрај другото, ќе се види дека нормираните векторски простори во суштина се специјални метрички простори.

2°. *Ако n е природен број и $d:(x,y) \mapsto d(x,y)$ е пресликување од $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ во $\mathbb{R}$ дефинирано со*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}, \tag{3}$$

*каде што $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$, тогаш $\mathbb{R}^n$ е метричен простор, наречен **евклидски n-димензионален простор**.* □

Лесно се покажува и дека:

3°. *$(\mathbb{R}^n,d_+)$ и $(\mathbb{R}^n,d_{\max})$ се метрички простори, каде што d_+ и $d_{\max}$ се дефинирани со:*

$$d_+(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |x_1-y_1|+\dots+|x_n-y_n|, \tag{3$_+$}$$

$$d_{\max}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}, \tag{3$_{\max}$}$$

при што $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се определени како и во 2°.

4°. *Ако во еден нормиран векторски простор V се дефинира растојание со:*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||x - y||, \tag{4}$$

се добива метричен простор (V,d).

(За оваа метрика велиме дека е ***индуцирана од нормата*** на просторот V.) □

Сите три простори $(\mathbb{R}^n,d)$, $(\mathbb{R}^n,d_+)$ и $(\mathbb{R}^n,d_{\max})$ се индуцирани од соодветни норми, дефинирани во векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ со:

$$||\mathbf{x}||= \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\,, \tag{5}$$

$$||\mathbf{x}||_+ =|x_1|+\cdots+|x_n|, \tag{5$_+$}$$

$$||\mathbf{x}||_{\max} = \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}. \tag{5$_{\max}$}$$

На секое непразно множество може да се дефинира метрика, како што се гледа од следново тврдење:

5°. *Ако M е непразно множество и ако $d(x,y)$ се дефинира со $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = 1$, за кои било $x,y \in M$, такви што $x \neq y$, тогаш (M,d) е метричен простор.*

(За оваа метрика d велиме дека е ***тривијална метрика*** во M). □

Ако (M,d) е метричен простор и S непразно подмножество од M, тогаш во S може да се дефинира метрика d_s со $d_s(x,y) = d(x,y)$. Добиениот метричен простор (S,d_s) го викаме ***потпростор*** од (M,d). Како што се договоривме во почетокот, ако се знае за која метрика се работи, самото множество M го сметаме за метричен простор. Во таа смисла, тогаш секое непразно подмножество S од M се вика ***потпростор***, а притоа ќе пишуваме $d(x,y)$, наместо $d_s(x,y)$. Повеќе од технички причини, и празното подмножество на M ќе го сметаме за потпростор од M.

Подолу во овој раздел ќе претпоставуваме дека M е даден метричен простор со метрика d.

За подмножеството S од M велиме дека е ***ограничено***, ако множеството реални броеви

$$\{d(x,y)\,|x,y \in S\}$$

е ограничено, и во тој случај супремумот на тоа множество ќе го викаме ***дијаметар*** на S и ќе го означуваме со $\delta(S)$. Во таа смисла "$\delta(S) = +\infty$" значи исто што и "S не е ограничено".

Да претпоставиме сега дека A, B се подмножества на M. Множеството реални броеви:

$$\{d(x,y)\,|x \in A, y \in B\}, \tag{$*$}$$

е минорирано, па според тоа постои ненегативен реален број $d(A,B)$

што е инфимумот на множеството броеви $(*)$. За $d(A,B)$ велиме дека е ***растојание меѓу множествата*** A, B. Со неколку својства на воведените поими ќе се сретнеме во вежбите 8, 9.

Поимите топка и сфера се дефинираат исто како и кај евклидските простори. Имено ако x_0 е дадена точка од M, а r е позитивен реален број, тогаш множеството $T(x_0;r)$ што се состои од сите точки $x \in M$ такви што $d(x,x_0) < r$ се вика ***отворена топка со центар во*** x_0 ***и радиус*** r. Множеството пак точки $x \in M$, такви што $d(x,x_0) = r$ се вика ***сфера со центар во*** x_0 ***и радиус*** r; ознака: $S(x_0;r)$. ***Затворена топка со центар во*** x_0 ***и радиус*** r е множеството:

$$T[x_0;r] = T(x_0;r) \cup S(x_0;r). \tag{6}$$

Според тоа:

$$\begin{aligned} T(x_0;r) &= \{x \in M \mid d(x_0,x) < r\}, \\ S(x_0;r) &= \{x \in M \mid d(x_0,x) = r\}, \\ T[x_0;r] &= \{x \in M \mid d(x_0,x) \le r\}. \end{aligned} \tag{7}$$

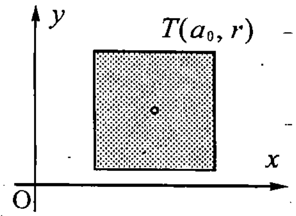
Да ги појасниме воведените поими на неколку примери.

1) Во метричниот простор $\mathbb{R}$, $T(x_0;r)$ е отворениот интервал $(x_0 - r, x_0 + r)$, $T[x_0;r]$ е сегментот $[x_0 - r, x_0 + r]$, а $S(x_0;r)$ е двоелементното множество $\{x_0 - r, x_0 + r\}$.

Во $\mathbb{R}^2$ $T(x_0;r)$, $T[x_0;r]$ и $S(x_0;r)$ претставуваат по ред: внатрешност на круг, круг и кружница, додека во $\mathbb{R}^3$, тие се: внатрешност на топката, топката и сферата соодветно, со центар во x_0 и радиус r.

И поопшто, за евклидскиот простор $\mathbb{R}^n$ поимите топка (затворена или отворена) и сфера дефинирани во V.1 се во согласност со овде дадените дефиниции на овие поими во случај на општи метрични простори.

2) Ако, во $\mathbb{R}^2$ ја разгледаме метриката $d_{\max}$, тогаш $T[\mathbf{a}_0;r]$ е квадратот ограничен со правите: $x = x_0 \pm r$, $y = y_0 \pm r$, каде што $\mathbf{a}_0 = (x_0, y_0)$ (в. црт. 1). $T(\mathbf{a}_0;r)$ е внатрешноста на квадратот, а $S(\mathbf{a}_0;r)$ контурата на квадратот.



Црт. 1

Слично, во $\mathbb{R}^3$ (при метрика $d_{\max}$) $T[\mathbf{a}_0;r]$ е коцка ограничена со рамнините $x = x_0 \pm r$, $y = y_0 \pm r$, $z = z_0 \pm r$; $T(\mathbf{a}_0;r)$ е внатрешноста на коцката, а $S(\mathbf{a}_0;r)$ е контурата, т.е. страните на коцката.

3) Ако d е дискретната метрика во множеството M, тогаш:

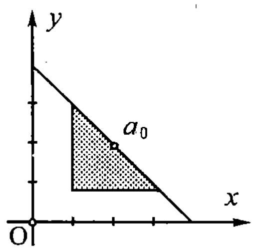
$$S(x_0;r) = 0, \text{ за } r \ne 1; \; S(x_0;1) = M \setminus \{x_0\};$$

$$T(x_0;r) = \{x_0\}, \text{ за } r \le 1; \; T(x_0;r) = M, \text{ за } r > 1;$$

$$T[x_0;r] = \{x_0\}, \text{ за } r < 1; \; T[x_0;r] = M, \text{ за } r \ge 1.$$

Нека (M,d) е метричен простор и $x_0 \in P \subseteq M$.

Ако со $S_P(x_0;r)$, $T_P(x_0;r)$, $T_P[x_0;r]$ ги означиме соодветната сфера, отворена топка, затворена топка во просторот (P,d), тогаш имаме:



Црт. 2

$$\begin{aligned} S_P(x_0;r) &= S(x_0;r)\cap P, \\ T_P(x_0;r) &= T(x_0;r)\cap P, \\ T_P[x_0;r] &= T[x_0;r]\cap P. \end{aligned} \tag{8}$$

Така, ако во примерот 2) ставиме $P=\{(x,y)|\ 0\le x,y,\ x+y\le 4\}$ и ако a_0 е точката со координати $x_0=2$, $y_0=2$, тогаш $T_P[a_0;1]=$ $=\{(x,y)|\ 1\le x,\ y,\ x+y\le 4\}$, а тоа е засенчениот триаголник на црт. 2.

1. 2. Отворени множества

И поимот отворено множество во еден метричен простор M се дефинира слично како и кај евклидските простори. Прво, една отворена топка $T(x_0;\varepsilon)$ со центар x_0 и радиус $\varepsilon>0$ ја викаме ε-околина на x_0. Ако $A\subseteq M$, тогаш една точка $a\in M$ се вика внатрешна точка на A ако постои ε-околина $T(a;\varepsilon)$ таква што $T(a;\varepsilon)\subseteq A$. Од ова следува дека:

6°. *Ако a е внатрешна точка на A, тогаш $a\in A$.* □

Подмножеството U од метричниот простор M го викаме ***отворено множество***, ако секоја точка $x\in U$ е внатрешна точка во U.

Ако се има предвид дека секоја топка е подмножество од M, како и дека во $\varnothing$ нема точки, добиваме дека:

7°. *За секој метричен простор M, множествата M и $\varnothing$ се отворени.* □

Ќе покажеме дека:

8°. *Секоја отворена топка е отворено множество.*

Д о к а з. Нека $x\in T(x_0;r)$ и $d(x,x_0)=\alpha$. Тогаш, $\alpha<r$; да ја разгледаме β-околината $T(x;\beta)$ на точката x, каде што $\beta=r-\alpha$. Ако $y\in T(x;\beta)$ т.е. $d(x,y)<\beta$, имаме:

$$d(x_0,y)\le d(x_0,x)+d(x,y)<\alpha+\beta=r,$$

па $y\in T(x_0;r)$. Според тоа, $T(x,\beta)\subset T(x_0;r)$, т.е. x е внатрешна точка на $T(x_0;r)$. □

За наредното важно својство за отворените множества потребно е да ги обопштиме поимите за унија и пресек од множества. Нека е I

произволно непразно множество и нека на секој елемент $i \in I$ му кореспондира некое множество A_i. Множеството, чиишто елементи се множествата A_i што им кореспондираат на елементите $i \in I$ ќе го означуваме со $\{A_i \mid i \in I\}$ и ќе го викаме ***фамилија од множествата*** A_i, а за I ќе велиме дека е ***индексно множество*** за таа фамилија.

На пример, за $I = \{1,\ldots,n\}$ ја имаме конечната фамилија $\{A_1,\ldots,A_n\}$, а за $I = \mathbb{N}$ фамилијата $\{A_i \mid i \in I\}$ е $\{A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots\}$.

Нека $\{A_i \mid i \in I\}$ е дадена фамилија множества. Множеството S што се состои од сите елементи од множествата A_i, $i \in I$, го викаме ***унија*** на дадената фамилија множества и го означуваме со $S = \bigcup_{i \in I} A_i$, а множеството, пак, P кое се состои од елементите што се заеднички за сите множества A_i, $i \in I$, го викаме ***пресек*** на дадената фамилија и го означуваме со $P = \bigcap_{i \in I} A_i$. Така, значи:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I) x \in A_i, \qquad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I) x \in A_i.$$

Ако $I = \{1,2\}$, ги добиваме познатите поими за унија и пресек од две множества. Во случајот кога $I = \{1,2,\ldots,n\}$, унијата и пресекот ги означуваме со:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \qquad P = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

Нека $\{A_i \mid i \in I\}$ е фамилија подмножества од некое множество M и нека со A_i' го означиме комплементот на A_i во M, т.е. $A_i' = M \setminus A_i$. Слично на доказот за случајот на унија и пресек од две множества, читателот може да ги докаже и следниве (обопштени) ***Де Морганови теореми***, коишто подоцна ќе ги искористиме:

9°. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i', \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$ □

Да ја докажеме сега следнава теорема:

10°. *Нека M е метричен простор. Тогаш:*

а) *Унијата од произволна фамилија отворени подмножества од M е отворено множество во M.*

б) *Пресекот од секоја конечна фамилија отворени подмножества од M е отворено множество во M.*

Д о к а з. а) Нека е $S = \bigcup_{i \in I} A_i$, каде што сите A_i се отворени множества во M, и нека $x \in S$. Тогаш $x \in A_i$ за некој $i \in I$, а бидејќи A_i е отворено множество, постои $r > 0$ таков што $T(x;r) \subseteq A_i$. Од дефиницијата пак за унија следува дека $A_i \subseteq S$ за секој $i \in I$. Така, $T(x;r) \subseteq S$, т.е. за секој $x \in S$ постои околина $T(x;r)$ што се содржи во S, па S навистина е отворено множество.

б) Нека $P = A_1 \cap \ldots \cap A_n$, каде што $A_1, \ldots, A_n$ се отворени множества. За $P = \varnothing$, P е отворено според 7°, па затоа нека постои точка $a \in P$. Тогаш, за секој $i = 1, \ldots, n$, постои $\varepsilon_i > 0$, таков што $T(a;\varepsilon_i) \subseteq A_i$, бидејќи $a \in A_i$ и A_i е отворено. Ако $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ ќе добиеме дека $T(a;\varepsilon) \subseteq P$, т.е. добиваме дека P е отворено. □

За еден метричен простор $(M;d)$ велиме дека е ***дискретен*** акко секое подмножество U од M е отворено. Лесно се покажува дека:

11°. *Секој тривијален метричен простор е дискретен.* □

12°. *Секој конечен метричен простор е дискретен.* □

За метричните простори $(M;d)$ и $(M;d_*)$ велиме дека се ***еквивалентни*** акко и двата простори имаат иста фамилија отворени множества. Следново тврдење се покажува корисно при проверка дали различни метрични простори се еквивалентни.

13°. *Ако $(M;d)$ и $(M;d_*)$ се метрични простори, тогаш следниве две тврдења се еквивалентни:*

а) *$(M;d)$ и $(M;d_*)$ се еквивалентни простори.*

б) $(\forall \varepsilon > 0, a \in M)(\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0) \quad T(a;\varepsilon_1) \subseteq T_*(a;\varepsilon),\ T_*(a;\varepsilon_2) \subseteq T(a;\varepsilon)$. □

Со помош на 13° лесно се покажува дека:

14°. *За секој $n \geq 1$, просторите:*

$$(\mathbb{R}^n;d),\ (\mathbb{R}^n;d_+),\ (\mathbb{R}^n;d_{\max})$$

се еквивалентни. □

1. 3. Затворени множества

Нека A е подмножество од метричниот простор M. За точката $p \in M$ велиме дека е ***точка на згуснување*** на A, ако во секоја нејзина околина $T(p;\varepsilon)$ се содржат бесконечно многу елементи од A. Од дефиницијата непосредно следува дека:

15°. *Ако A е конечно подмножество од M (при што може да биде и $A = \varnothing$), тогаш A нема точка на згуснување.* □

Ќе дадеме сега уште една карактеристика на поимот точка на згуснување.

16°. *Нека е A подмножество од метричниот простор M и нека $p \in M$. Ако во секоја околина $T(p;\varepsilon)$ постои барем една точка $a \in A$, таква што $a \neq p$, тогаш p е точка на згуснување на A.*

Д о к а з. Нека p го има споменатото својство. Ако $\varepsilon > 0$, тогаш постои $a_1 \in A, a_1 \neq p, a_1 \in T(p;\varepsilon)$. Ако $\varepsilon_1 = d(a_1, p)$ тогаш $a_1 \notin T(p;\varepsilon_1)$, па значи постои $a_2 \in A, a_2 \neq p, a_2 \in T(p;\varepsilon_1)$, од што следува $a_1 \neq a_2$. Да претпоставиме дека $a_1, a_2, \dots, a_n$ е низа точки од A различни меѓу себе, а и од p, такви што $d(a_k, p) = \varepsilon_k < \varepsilon_{k-1}$. Тогаш, ниедна од точките $a_1, \dots, a_n$ не припаѓа на $T(p;\varepsilon_n)$ од што, според направената претпоставка за p, следува дека постои $a_{n+1} \in A, a_{n+1} \neq p, a_{n+1} \in T(p;\varepsilon_n)$. Ако се има предвид дека е $\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n$, добиваме дека во $T(p;\varepsilon)$ се наоѓаат навистина бесконечно многу елементи на A, од што и следува заклучокот дека p е точка на згуснување за A. □

За подмножеството F од M велиме дека е ***затворено*** во M ако ја содржи секоја своја точка на згуснување. Од ова и 15° е јасно дека:

17°. *$\varnothing$, M, како и секое конечно подмножество F од M, се затворени во M.*

Исто така:

18°. *Секоја затворена топка $T[p;r]$ е затворено подмножество во M.*

Доказ. Нека $q \notin T[p;r]$, т.е. $\alpha = d(p,q) > r$. Ако ставиме ε $(\alpha - r)/2$, тогаш $T(q;\varepsilon) \cap T[p;r] = \varnothing$, бидејќи од $z \in T(q;\varepsilon) \cap T[p;r]$, би следувало:

$$\alpha = d(p,q) \le d(p,z) + d(z,q) < r + \varepsilon = \frac{1}{2}(r + \alpha) < \alpha,$$

што не е можно. Од сето тоа следува дека ако q не е во $T[p;r]$, тогаш q не е точка на згуснување за $T[p;r]$, па значи $T[p;r]$ е затворено множество. □

Следнава теорема ја дава врската меѓу отворените и затворените подмножества од еден метричен простор.

19°. *Нека е M метрички простор.*

а) *Ако е U отворено подмножество од M, тогаш комплементот $U' = M \setminus U$ е затворено подмножество од M.*

б) *Ако е F затворено подмножество од M, тогаш $F' = M \setminus F$ е отворено подмножество од M.*

Доказ. а) За $U = \varnothing$ имаме $U' = \varnothing' = M$, па според 17°, множеството U' е затворено. Нека $x_0 \notin U'$. Тогаш $x_0 \in U$, па поради тоа што е U' отворено, постои $r > 0$, таков што е $T(x_0;r) \subseteq U$, т.е. $T(x_0;r)$ не содржи ниедна точка од U', па x_0 не е точка на згуснување за U'. Тоа значи дека U' ги содржи сите свои точки на згуснување, па тоа е затворено подмножество од M.

б) Ако $F = M$, тогаш $F' = M' = \varnothing$ е отворено (по дефиниција). Затоа, нека $F \neq M$ и нека $x_1 \in F'$. За да покажеме дека F' е отворено множество, потребно е да покажеме дека постои околина на произволно избраната точка x_1 од F' што целосно се содржи во F'. Да го претпоставиме спротивното, т.е. за секој $r > 0$, $T(x_1;r)$ содржи барем една точка

$y \notin F'$; тогаш $y \in F$ па бидејќи $x_1 \in F'$, имаме $y \neq x_1$. Така добиваме дека секоја околина на x_1 содржи барем една точка од F што е различна од x_1, т.е. x_1 е точка на згуснување за F. Од претпоставката дека F е затворено множество следува дека $x_1 \in F$, што претставува противречност со оглед на изборот на x_1. Со тоа теоремата е докажана. □

Аналогно на теоремата 10°, за затворените множества е точна следнава теорема:

20°. *Нека е M метричен простор. Тогаш:*

а) *Пресекот на која било фамилија $\{F_i \mid i \in I\}$ затворени подмножества од M е затворено множество во M.*

б) *Унијата на секоја конечна фамилија затворени подмножества од M е затворено множество во M.*

Доказ. Ќе го докажеме само делот а), зашто доказот на б) е сличен. Нека $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Според 9° имаме:

$$F' = (\bigcap_{i \in I} F_i)' = \bigcup_{i \in I} F'.$$

Од тоа што се F_i затворени во M, според 19° следува дека F_i' се отворени, а тогаш според 10° имаме дека и нивната унија F' е отворено множество во M. Но, поради $F = (F')'$, пак со оглед на 19°, добиваме дека F е затворено множество во M. □

Нека A е подмножество од метричниот простор M и нека со $\overline{A}$ го означиме множеството што ги содржи сите точки од A и сите точки на згуснување на A. За множеството $\overline{A}$ велиме дека е ***затворање*** (***затворач*** или ***атхеренција***) на A. Секоја точка $a \in \overline{A}$ се вика ***приврзана*** (или ***атхерентна***) ***точка*** за множеството A.

Следната теорема, којашто е директна последица од штотуку изнесената дефиниција, дава уште една карактеристика на затворените множества.

21°. *Подмножеството A е затворено ва метричкиот простор M ако и само ако $A = \overline{A}$.* □

На читателот му препорачуваме сам да ја докаже следнава теорема:

22°. *Нека M е метричен простор. Тогаш:*

а) $(\forall A \subseteq M)\,\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$; б) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$;

в) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; г) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. □

Покрај поимите за внатрешна точка и точка на згуснување на дадено подмножество A од еден метричен простор M се покажува дека е згодно да се воведе уште поим за изолирана, како и за рабна точка. Имено, ***изолирана точка*** на A е секоја точка $a \in A$ што не е точка на згуснување за A. ***Рабна точка*** на A е секоја точка $b \in M$ што е точка на згуснување за A, но не е внатрешна точка на A.

Да разгледаме еден пример.

4) а) Нека $\mathbb{R}$ е обичниот простор на реалните броеви и нека $A = (0,1)$, $B = (0,1]$, $C = [0,1]$. Тогаш $\overline{A} = \overline{B} = \overline{C} = C$. Секоја точка на A е и точка на згуснување, а и внатрешна; 0 и 1 се рабни точки на A; изолирани точки нема.

б) Ако $\mathbb{N}$ е множеството на природните броеви, тогаш секоја точка од $\mathbb{N}$ е изолирана за $\mathbb{N}$; не постојат внатрешни точки ни точки на згуснување за $\mathbb{N}$.

в) Секој реален број е точка на згуснување за множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните броеви, па значи $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$; не постои ни една внатрешна, ниту изолирана точка на $\mathbb{Q}$; секоја точка од $\mathbb{R}$ е рабна за $\mathbb{Q}$.

г) Нека $\mathbb{R}^2$ е метричниот простор на рамнината и нека

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4y + 3) \leq 0\},$$

т.е. A се состои од координатниот почеток, како и од точките на кругот $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$. Тогаш: A е затворено множество, изолирана точка е само (0,0), секоја точка од кругот е точка на згуснување, внатрешни се точките од внатрешноста на кругот, а рабни точки се сите точки од кружницата.

1. 4. Тополошки простори

Една непразна фамилија $\mathscr{T}$, чиишто членови се подмножества од непразното множество S, се вика ***топологија*** на S ако се исполнети следниве три услови:

(i) $\varnothing, S \in \mathscr{T}$;

(ii) $A, B \in \mathscr{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{T}$;

(iii) Ако, за секој $i \in I$, $A_i \in \mathscr{T}$, тогаш $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathscr{T}$.

Во тој случај парот $(S, \mathscr{T})$ се вика ***тополошки простор***.

Имајќи ја предвид 10°, добиваме дека:

23°. *Фамилијата $\mathscr{T}_d$ од сите отворени множества во еден метричен простор е топологија на M.*

(Се вели дека $\mathscr{T}_d$ е ***индуцирана од метриката*** d.) □

И следните две својства се јасни.

24°. *Фамилијата $\mathscr{P}(S)$ од сите подмножества на S е топологија на S, за која велиме дека е* ***дискретна топологија*** *на S.* □

25°. *Фамилијата $\{\varnothing, S\}$ е топологија на S, наречена* ***индискретна топологија.***

(Дискретната и индискретната топологија на S се совпаѓаат ако и само ако $S = \{s\}$ е едноелементно множество.) □

Ако $(S,\mathscr{T})$ е тополошки простор, тогаш подмножеството $B \subseteq S$ се вика затворено ако и само ако комплементот $A = S \setminus B$ од B во S е отворено.

Точно е следново својство:

2 6°. *Ако S е нейразно множество, тогаш една нейразна фамилија $\mathscr{T}$ од йодмножества на S се совпаѓа со фамилијата затворени множества во еден тойолошки йростор $(S,\mathscr{T})$ ако и само ако се исполнети следниве услови:*

(i') $\varnothing, S \in \mathscr{T}$;

(ii') $A, B \in \mathscr{T} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{T}$;

(iii') *Ако, за секој* $i \in I$, $B_i \in \mathscr{T}$ *тогаш* $\bigcap_{i \in I} B_i \in \mathscr{T}$. □

1. 5. Вежби [1]

1. Ако во $\mathbb{R}$ се дефинираат "растојанија" со:

$$d_1(x,y) = \sqrt{(x-y)^2}, \quad d_2(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

$$d_3(x,y) = e^{|x-y|} - 1, \quad d_4(x,y) = \sin^2(x,y),$$

тогаш d_1 и d_2 се метрики, а d_3 и d_4 не се метрики.

2. Ако $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е дефинирано со $d(X,Y) = \overline{XY}$, кога X, Y, O лежат на една права, а $d(X,Y) = \overline{XO} + \overline{OY}$, во спротивен случај, тогаш d е метрика во $\mathbb{R}^2$. (Притоа, X, Y,... се елементи од $\mathbb{R}^2$, а $\overline{XY}$ е "обичното" растојание меѓу X и Y; O е координатниот почеток, т.е. (0,0).)

3. Нека M е множеството точки од една кружница и нека $d(A,B)$ е должината на помалиот, а $d_*(A,B)$ на поголемиот од двата лака што ги формираат точките A и B на кружницата. Тогаш, (M,d) е метричен простор, а (M,d_*) не е метричен простор.

4. Ако d е метрика во M, а d_1, d_2, d_3 се дефинирани со:

$$d_1(x,y) = d^2(x,y), \; d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}, \; d_3(x,y) = d(x,y)/[1+d(x,y)],$$

тогаш d_2 и d_3 се метрики, но d_1 не мора да е метрика. (d_1 не е метрика ако, на пример, $M = \mathbb{R}, d(x,y) = |x-y|$. Ако d го задоволува условот

$$(\forall x,y,z \in M)[d^2(x,y) + d^2(y,z) \geq d^2(x,z)],$$

тогаш d_1 ќе биде метрика.)

5. Ако d е метрика во M, при што $|M| \geq 2$, тогаш множеството реални броеви $\{d(x,y) \mid x,y \in M, x \neq y\} = K$ ги има следниве својства:

(i) $K \neq \varnothing$ и $(\forall \alpha \in K)$ $\alpha > 0$;

1) Во формулацијата на вежбите се изоставуваат изрази од облик "да се докаже", и (по правило) не се даваат докази, односно во некои случаи се наведуваат кратки упатства

(ii) Ако K е конечно множество, тогаш просторот е дискретен; но, просторот може да биде дискретен и во случај кога K е бесконечно. (На пример, ако $(\mathbb{Z},d)$ се разгледува како потпростор од $(\mathbb{R},d)$, тогаш $K=\mathbb{N}$.)

(iii) Ако инфимумот на K е позитивен реален број, тогаш просторот е дискретен. И во овој случај обратното тврдење не е точно. (На пример, ако $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е потпросторот од $(\mathbb{R},d)$, тогаш $K = \{(n-m)/nm \mid n,m \in \mathbb{N}, m<n\}$ има инфимум нула, но сепак (M,d) е дискретен. (Да се види и вежба 14.)

6. Ако $M \neq \varnothing$ и пресликувањето $d: M \times M \to \mathbb{R}$ ги задоволува условите:

а) $(\forall x,y,z \in M)\, d(y,z) \le d(x,y)+d(x,z)$,

б) $(\forall x,y \in M)\, [d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y]$,

тогаш d е метрика во M.

7. Нека $(M_1,d_1),\dots,(M_n,d_n)$ се метрични простори и $M = M_1 \times \cdots \times M_n$. Нека $d, d_+, d_{\max}$ се дефинирани со:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [d_1(x_1,y_1)^2+\cdots+d_n(x_n,y_n)^2]^{1/2}, \tag{9}$$

$$d_+(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_1(x_1,y_1)+\cdots+d_n(x_n,y_n), \tag{9$_+$}$$

$$d_{\max}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\{d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n)\} \tag{9$_{\max}$}$$

Тогаш, (M,d), (M,d_+), $(M,d_{\max})$ се метрични простори. За $M_1=\cdots=M_n=\mathbb{R}$, $d_i(x,y)=|x-y|$, (M,d) е евклидскиот простор $(\mathbb{R}^n,d)$, а другите два простори се совпаѓаат со просторите $(\mathbb{R}^n,d_+)$, $(\mathbb{R}^n,d_{\max})$ од тврдењето 3°.

(Точноста на тврдењето за d_+ и $d_{\max}$ е јасно, додека за d се користи неравенството

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2) \ge (a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2,$$

што е последица од неравенството:

$$x^2y^2+u^2v^2 \ge 2xyuv.)$$

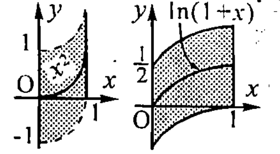
8. Во секој метричен простор се точни неравенствата:

$$\delta(T(x_0;r)) \le \delta(T[x_0;r]) \le 2r,$$

при што се можни сите четири случаи: $<,<;\quad =,<;\quad <,=;\quad =,=$.

9. Ако A и B се подмножества од еден метричен простор M, тогаш $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow d(A,B)=0$, но можно е равенството $d(A,B)=0$ и за $A\cap B=\varnothing$.

10. Множеството $C[0,1]$ од сите непрекинати функции [2] на сегментот $[0,1]$, е метричен простор во однос на метриката $d(x(t),y(t)) = НГВ|x(t)-y(t)|$ во $[0,1]$. Притоа, на пример, имаме:



Црт. 3 и 4

а) $d(t,t^2)=\frac{1}{4}, d(e^t,t)=e-1, d(t^2-t+1, 2t^3+1+\frac{t^2}{2})=\frac{5}{2}$.

б) 1-околината на t^2 е засенчениот дел од црт.3, а 1/2-околината на $\ln(1+t)$ е на црт. 4.

11. Пресек на бесконечно многу отворени множества не мора да биде

---

2) "Функција" (овде и натаму) значи "реална функција", ако не е инаку назначено

отворено множество, а, во иста смисла, унија на бесконечно многу затворени множества не мора да биде затворено.

(На пример, ако $A_n = (-1/n, 1/n)$, тогаш: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \{0\}$ не е отворено, а за $B_n = [0, 1-1/n]$ $B_1 \cup B_2 \cup \ldots = [0,1)$ не е затворено.)

12. Во евклидскиот простор $\mathbb{R}^n$ е точно равенството $\overline{T(x_0;r)} = T[x_0;r]$, но тоа равенство не е точно во секој метричен простор.

(На пример, ако $M = \{a,b,c,d\}$ е тривијалниот метричен простор, тогаш $T(a;1) = \{a\} = \overline{T(a;1)}$, но $T[a;1] = \{a,b,c,d\}$.)

13. Секој конечен потпростор од метричен простор е дискретен, но може и бесконечен потпростор да е дискретен.

(На пример, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ се дискретни потпростори од евклидскиот простор $\mathbb{R}$, а овој не е дискретен.)

14. Просторот (M,d) е дискретен ако и само ако

$$(\forall x \in M)(\exists \varepsilon > 0)(\forall y \in M)[y \neq x \Rightarrow d(x,y) \geq \varepsilon]. \qquad (*)$$

(Условот $(*)$ е еквивалентен со тврдењето дека за секој $a \in M$ множеството $K_a = \{d(x,a) \mid x \in M, x \neq a\}$ има позитивен инфимум.)

15. Ако P е потпростор од метричниот простор M, тогаш A е отворено, а B е затворено во P ако и само ако $A = P \cap U$, $B = P \cap F$, каде што U е отворено, а F е затворено во M.

16. Два метрични простори се еквивалентни ако и само ако имаат иста фамилија затворени множества.

17. Евклидскиот простор $\mathbb{R}^n$ е еквивалентен со просторите $(\mathbb{R}^n, d_+)$, $(\mathbb{R}^n, d_{\max})$ дефинирани во 3°. Поопшто, сите три метрични простори (M,d), (M,d_+), $(M,d_{\max})$ дефинирани во вежбата 7 се еквивалентни.

18. Постојат еквивалентни метрични простори (M,d), (M,d_*), такви што M е ограничено множество во првиот, а неограничено во вториот простор.

(На пример, евклидскиот простор $\mathbb{R}$ е еквивалентен со просторот $(\mathbb{R}, d_2)$ дефиниран во вежбата 1, а притоа: $\delta_2(\mathbb{R}) = 1$, $\delta(\mathbb{R}) = +\infty$.)

19. Нека (M,d) е метричен простор и $A, B \subseteq M$. За A и B велиме дека се ***раздвоени*** (т.е. ***сепарирани***) ако се точни равенствата $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$. Точни се следните својства.

а) Ако A и B се раздвоени, тогаш $A \cap B = \varnothing$, но две дисјунктни подмножества од M можат и да не бидат раздвоени.

б) Ако $d(A,B) > 0$, тогаш A и B се раздвоени, но обратното (во општ случај) не важи. (На пример, множествата $A = (-\infty, 0)$ и $B = (0, +\infty)$ се раздвоени во $\mathbb{R}$, а сепак $d(A,B) = 0$.)

в) Ако $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, каде што A и B се раздвоени, тогаш и A_1, B_1 се раздвоени.

г) Нека и двете множества A, B се затворени или и двете се отворени. Тогаш, A и B се раздвоени ако и само ако се дисјунктни, т.е. $A \cap B = \varnothing$.

д) Ако отвореното (затвореното) множество C е унија од раздвоени множества A, B, тогаш и двете множества A, B се отворени (затворени).

ѓ) Ако A е раздвоено и од B и од C, тогаш A е раздвоено и од $A \cup B$.

д) Ако D е унија од n $(n \geq 2)$ две по две раздвоени множества, тогаш D е унија и од две раздвоени множества.

20. Нека (M,d) и (M,d_*) се еквивалентни метрички простори и нека $A,B \subseteq M$. Множествата A, B се раздвоени во еден од тие простори ако и само ако се раздвоени и во другиот. (Ова се однесува и на поимот сврзано (односно несврзано) множество, што се разгледува во вежбите 20-24.)

21. Ако едно подмножество A од метричен простор M е унија од две непразни раздвоени множества, тогаш велиме дека A е ***несврзано.*** Во спротивниот случај се вели дека A е ***сврзано.***

а) Просторот M е сврзан ако и само ако M е единственото непразно подмножество од M што е и затворено и отворено.

б) Едно непразно подмножество A од M е сврзано во M ако не постојат отворени подмножества U_1 и U_2 од M такви што $A \subseteq U_1 \cup U_2$ и $A \cap U_1$, $A \cap U_2$ се непразни.

в) $\varnothing$ е сврзано множество во M.

г) Ако A е сврзано, тогаш и $\overline{A}$ е сврзано.

д) Ако A е сврзано и $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, тогаш и B е сврзано.

ѓ) Ако две сврзани множества не се раздвоени, тогаш нивната унија е сврзано множество.

е) Ако две сврзани множества имаат непразен пресек тогаш и нивната унија е сврзано множество.

ж) Ако $\{A_i \,|\, i \in I\}$ е фамилија од сврзани подмножества и ако пресекот на фамилијата е непразен, тогаш и унијата на таа фамилија е сврзано множество.

з) Ако $A \subseteq M$ е такво што, за кои било $x,y \in A$, постои сврзано подмножество од M во кое се содржат x и y, тогаш A е сврзано.

22. Ако M е метричен простор, тогаш постои еднозначно определена фамилија непразни подмножества $\{C_i \,|\, i \in I\}$ од M со следните својства:

1) C_i е сврзано множество, за секој $i \in I$.

2) $C_i \cap C_j = \varnothing$ за секои $i,j \in I$, такви што $i \neq j$.

3) За секоја точка $a \in M$, постои $i \in I$, таква што $a \in C_i$.

4) Ако B е сврзано подмножество од M и $C_i \subseteq B$, тогаш $C_i = B$.

(За секое од множествата C_i велиме дека е ***компонента на сврзаност за*** M.)

23. За просторот M велиме дека е ***потполно несврзан*** ако едноелементните подмножества од M се единствените непразни сврзани подмножества од M. Секој дискретен простор е потполно несврзан простор.

24. За едно непразно подмножество A од метричниот простор M велиме дека е потполно несврзано ако е потполно несврзан метричниот потпростор определен со A. (На пример, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ се потполно несврзани во евклидскиот простор $\mathbb{R}$.)

25. Едно непразно подмножество A е сврзано во евклидскиот простор $\mathbb{R}$ ако и само ако A има еден од следните облици:

1) $A = \mathbb{R}$; 2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le c\}$; 3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$;

4) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid c \le x\}$; 5) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid c < x\}$;

6) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$; 7) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$;

8) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$; 9) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Притоа a, b, c (за дадено A) се фиксни.

(Со други зборови, интервалите се единствените сврзани множества во $\mathbb{R}$)

26. Ако C е множеството точки во $\mathbb{R}^2$ определено со:

$$C = \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\} \cup \{(x,y) \mid y = \sin\frac{1}{x},\ x \le \frac{1}{\pi}\},$$

тогаш C е сврзано во $\mathbb{R}^2$.

27. Ако го означиме со $Top(n)$ бројот на различните топологии на множеството $\{1,2,\dots,n\}$, тогаш:

$$Top(1) = 1, \quad Top(2) = 4, \quad Top(3) = 26.$$

28. Ако $(S;\mathcal{T})$ е тополошки простор и $B \subseteq S$ е такво што $S \setminus B \in \mathcal{T}$, тогаш велиме дека B е ***затворено*** множество во просторот. Според тоа, $\varnothing$ и S се затворени. Уште повеќе, точно е и својството $20°$, при што треба (M,d) да се замени со $(S;\mathcal{T})$.

Во вежбите 28-29 претпоставуваме дека $(S;\mathcal{T})$ е тополошки простор.

29. Ако $A \subseteq S$, и ако $\overline{A}$ е пресекот од сите затворени подмножества F, такви што $A \subseteq F$, тогаш:

а) $A \subseteq \overline{A}$; б) $\overline{A}$ е затворено множество;

в) Ако F е затворено такво што $A \subseteq F$ тогаш $\overline{A} \subseteq F$;

г) A е затворено множество акко $\overline{A} = A$.

30. Ако $A, B \subseteq S$, тогаш $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Притоа, можно е стриктно неравенство.

(На пример, ако во $\mathbb{R}$ топологијата $\mathcal{T}$ е индуцирана од обичната евклидска метрика, тогаш имаме $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R}$, каде што A е множеството рационални, а B множеството ирационални броеви.)

31. Поимите: а) раздвоени множества, б) сврзано множество се осмислени во еден тополошки простор, а освен тоа точни се сите својства наведени во вежбите 18 и 20.

32. Нека $(S_1;\mathcal{T}_1)$ и $(S_2;\mathcal{T}_2)$ се тополошки простори и нека $S_1 \times S_2 = S$, а $\mathcal{T}$ се состои од сите подмножества U на S, такви што проекцијата U_1 од U на S_1 и U_2 од U на S_2 се отворени во $(S_1;\mathcal{T}_1)$ односно во $(S_2;\mathcal{T}_2)$. (Притоа, проекци-

јата U_1 од U во S_1 се дефинира со $U_1 = \{x_1 \in S_1 | (\exists x_2 \in S_2)(x_1,x_2) \in U\}$.) Тогаш, $(S;\mathcal{T})$ е тополошки простор. Ако, притоа $(M_i;\mathcal{T}_i)$ е топологијата индуцирана од метриката d_i и ако d, d_+, $d_{\max}$ е некоја од метриките на $M = M_1 \times M_2$ дефинирани во вежбата 7, тогаш тополошкиот простор $(M;\mathcal{T})$ е индуциран од секоја од тие три метрики.

X. 2. Комплетни и компактни простори

Во разделот 2.1 се дефинира поимот конвергентна низа во општ метричен простор, а во 2.2 и поимот комплетен простор, како простор во кој секоја фундаментална низа е конвергентна. Компактните простори се предмет на 2.3, а на крајот во 2.4 се врши куса дискусија на поимот конвергенција во нормирани векторски простори.

2. 1. Конвергентни низи во метричен простор

Сличноста на дефинициите (како и на соодветните својства и докази) за конвергентни низи, во I.4, V.3, VIII.3 и IX.6 се должи на фактот што $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}$ се специјални метрични простори. Овде ќе се задржиме на конвергентни низи во произволни метрични простори. Докажите на многу нивни својства се слични на соодветните докази во I.4, па затоа нив обично ќе ги изоставаме или ќе правиме само куси коментари.

Како во претходниот параграф ке сметаме дека (M,d) е даден метричен простор без да го споменуваме тоа специјално.

За бесконечната низа точки од M,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

што накусо ќе ја означуваме со x_n, ќе велиме дека има ***граница*** x и ќе пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

ако и само ако, за кој било позитивен реален број ε, во ε-околината $T(x;\varepsilon)$ се наоѓаат безброј многу членови од низата, а само конечно многу - надвор од таа околина.

Секоја низа што има граница се вика ***конвергентна низа***, а во спротивниот случај - ***дивергентна***. Според тоа:

$$1°.\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow d(x,x_n) < \varepsilon]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0. \ \square$$

Притоа, $d(x,x_n) = a_n$ се стреми кон нула според дефиницијата на граница во $\mathbb{R}$, или пак сметајќи го $\mathbb{R}$ за метричен простор со метрика $d(x,y) = |x-y|$.

Да претпоставиме дека x и y се различни точки од M. Ако $d(x,y)=2\varepsilon$, тогаш $T(x;\varepsilon)\cap T(y;\varepsilon)=\varnothing$ од што следува дека x и y не можат да бидат граници на иста конвергентна низа x_n. Според тоа:

2°. *Границата на една конвергентна низа е еднозначно определена.* □

Ќе го докажеме и следново својство:

3°. (**Лема за непрекинатост на метриката.**) *Ако x, y се граници на низите x_n, y_n - соодветно, тогаш $d(x,y)$ е граница на низата реални броеви $d(x_n,y_n)$.*

Д о к а з. Ако $\varepsilon>0$, тогаш постојат $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ такви што:

$$n \geq n_1 \Rightarrow d(x,x_n) < \varepsilon/2; \quad n \geq n_2 \Rightarrow d(y,y_n) < \varepsilon/2.$$

За $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$, имајќи го притоа предвид и неравенството (2) од 1.1, добиваме:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y) < \varepsilon. \ \square$$

За точката $a\in M$ велиме дека е ***точка на натрупување*** на низата x_n ако за секој реален број $\varepsilon>0$ во ε-околината на a има бесконечно многу членови од низата. Ако x_n е конвергентна низа, тогаш нејзината граница е и (единствена) точка на натрупување. Примерите на низи од реални броеви разгледани во I.4 покажуваат дека една низа x_n што не е конвергентна може да има повеќе точки на натрупување, а може да нема и ниедна.

Ако x_n е дадена низа точки, а $n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots$ монотоно растечка низа природни броеви, тогаш за низата x_{n_k} велиме дека е ***подниза*** од x_n. Ќе докажеме сега едно својство што е обопштување на посл. 2 од I.4.8.

4°. *Точката $a\in M$ е точка на натрупување на низата x_n ако и само ако x_n има подниза со граница a.*

Д о к а з. Ако a е граница на некоја подниза од x_n, јасно е дека a е точка на натрупување за x_n. Да претпоставиме дека a е точка на натрупување на x_n. Тогаш, за секој $k\in\mathbb{N}$, постои $m\in\mathbb{N}$, таков што $d(x_m,a)<1/k$, па нека (на пример) $n_k=m$ е најмалиот број со тоа својство. Тогаш, поднизата x_{n_k} има граница a. □

Во својствата што сега ќе ги докажеме ќе видиме каква врска постои меѓу поимите за конвергенција, точки на згуснување и затворени множества. Притоа $A\subseteq M$.

5°. *Точката $a\in M$ е точка на згуснување за A ако и само ако постои низа $a_n\in A$ со граница a, при што $a_n\neq a$, за секој $n\in\mathbb{N}$.*

Д о к а з. Ако a_n е низа точки од A со граница различна од сите членови на низата, тогаш a е точка на згуснување за A според дефиницијата на овој поим.

Ако a е точка на згуснување за A, тогаш, за секој $n \in \mathbb{N}$, во $1/n$-околината на a постои точка $a_n \neq a$. Од тоа следува дека a е граница на низата a_n. □

6°. *Точката $a \in M$ му припаѓа на затворачот од едно множество $A \subseteq M$ ако и само ако постои низа $a_n \in A$ со граница a.*

Д о к а з. Нека $a \in \overline{A}$; ако $a \in A$, тогаш a е граница на низата чијшто секој член е a; ако $a \notin A$, тогаш a е точка на згуснување за A, па заклучокот следува од 5°.

Обратно, нека a е граница на низа $a_n \in A$. Ако $a \in A$, тогаш $a \in \overline{A}$, поради $A \subseteq \overline{A}$. За $a \notin A$, пак се применува 5°. □

Од тукушто докажаното тврдење, ако се има предвид 21° од 1.3, добиваме:

7°. *Непразното подмножество A од M е затворено ако и само ако на A му припаѓа границата на секоја конвергентна низа чиишто членови се во A.* □

Да го обопштиме и поимот за фундаментална низа.

Имено, за низата $x_n \in M$ велиме дека е ***фундаментална*** (или ***кошиева***) ако е исполнет следниов услов:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N})[m,n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon]. \tag{1}$$

Ќе покажеме дека:

8°. *Секоја конвергентна низа во M е и фундаментална.*

Д о к а з. Нека x е границата на конвергентната низа x_n и нека ε е даден позитивен реален број. Ако $n_0 \in \mathbb{N}$ е таков што $n \geq n_0 \Rightarrow d(x,x_n) < \varepsilon/2$, тогаш: $m,n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon$. □

Дека обратното не мора да важи се гледа од следниов едноставен пример.

1) Да го разгледаме потпросторот $M = \{x \mid 0 < x < 1\}$ од $\mathbb{R}$. Низата $x_n = 1 - 1/n$ е фундаментална во M но не е конвергентна во M.

Сепак, фундаменталните низи во еден метричен простор имаат некои својства на конвергентните, на пример, тие се ограничени; притоа, за низата x_n во M велиме дека е ***ограничена***, ако множеството $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено. Ќе покажеме дека:

9°. *Секоја фундаментална низа x_n во M е ограничена.*

Д о к а з. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$ е таков што $d(x_n,x_m) < 1$ за $n,m \geq n_0$, и нека λ е најголемиот од броевите $d(x_i,x_j)$ каде што $i,j \leq n_0$. Тогаш $d(x_m,x_n) \leq \lambda + 1$, за кои било $m,n \in \mathbb{N}$. □

Како последица од 8° и 9° добиваме:

10°. *Секоја конвергентна низа е ограничена.* □

Се надеваме, на читателот нема да му биде тешко да го докаже следново тврдење:

11°. *Ако фундаменталната низа* x_n *има точка на натрупување* x, *тогаш низата е конвергентна, а (имено)* x *е нејзината граница.* □

Имајќи го предвид својството 13° од 1.1 добиваме дека е точна следнава теорема:

12°. *Нека* (M,d) *и* (M,d_*) *се еквивалентни метрични простори. Тогаш:*

а) *Ако* x_n *има граница (односно точка на натрупување)* x *во еден од тие простори, тогаш истото важи и во другиот.*

б) *Низата* x_n *е фундаментална во* (M,d) *ако и само ако е фундаментална во* (M,d_*). □

2. 2. Комплетни простори

За метричниот простор M велиме дека е ***комплетен*** ако и само ако *секоја фундаментална низа во* M *е конвергентна.*

Според основниот кошиев критериум (т.е. Т.1 од I.4.9) евклидскиот простор $\mathbb{R}$ е комплетен, а точно е и следново поопшто тврдење:

13°. *За секој* $n \geq 1$, *евклидскиот простор* $\mathbb{R}^n$ *е комплетен.*

Д о к а з. Нека a_k е фундаментална низа во $\mathbb{R}^n$. Тогаш (в. вежба 11 од V.1.3) секоја компонентна низа на a_k е фундаментална, па (според споменатиот основен кошиев критериум од I.4.9) е и конвергентна. Според Т.1 од V.1.3, a_k е конвергентна. □

Од примерот 1) се гледа дека постојат метрични простори што не се комплетни. Но, точно е следново тврдење:

14°. *Секој простор* (M,d) *е потпростор од комплетен простор* $(M^\wedge,d^\wedge)$, *таков што* $\overline{M} = M^\wedge$.

Ќе дадеме само скица на доказот. Нека $C(M)$ е множеството фундаментални низи во (M,d). Ако $x_n, y_n \in C(M)$ се такви што $d(x_n,y_n)$ има граница нула, тогаш ќе велиме дека x_n и y_n се **еквивалентни** и ќе пишуваме $x_n \sim y_n$. Според тоа, со релацијата $\sim$, $C(M)$ се дели на дисјунктни класи, така што една класа се состои од сите фундаментални низи y_n што се еквивалентни со дадена фундаментална низа x_n. Да го означиме со $M^\wedge$ множеството од сите такви класи. Во $M^\wedge$ дефинираме метрика $d^\wedge$ на следниов начин. Ако $\mathbf{x},\mathbf{y} \in M^\wedge$ и $x_n \in \mathbf{x}$, $y_n \in \mathbf{y}$, тогаш

$$d^\wedge(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n). \tag{2}$$

Притоа, егзистенцијата на десната страна од (2) се покажува на тој начин што ќе се покаже дека низата $d(x_n,y_n)$ е фундаментална во $\mathbb{R}$. Исто така, потребно е да покажеме и дека, ако x_n, x'_n, y_n, y'_n се фундаментални низи такви што:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0, \tag{3}$$

тогаш:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n), \tag{4}$$

од што ќе следува дека пресликувањето $d^\wedge : M^\wedge \times M^\wedge \to \mathbb{R}$ е добро дефинирано. Потоа, се покажува дека $d^\wedge$ е метрика во $M^\wedge$. Да претпоставиме дека $(\mathbf{x}_k)$ е фундаментална низа во $M^\wedge$. Според тоа, за секој k, $\mathbf{x}_k$ е класата од сите фундаментални низи еквивалентни со дадена фундаментална низа x_{nk} во M. Ја формираме следнава низа во M:

$$(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, \dots) = (x_{nk}; n \in \mathbb{N})$$

Тогаш, добиената низа е фундаментална, па ако класата фундаментални низи еквивалентни со неа ја означиме со $\mathbf{x}$, добиваме дека $\mathbf{x}$ е граница на дадената фундаментална низа во $M^\wedge$. Со тоа би се комплетирал доказот на тврдењето дека просторот $(M^\wedge, d^\wedge)$ е комплетен, а би преостанало да се образложи тврдењето дека "(M,d) е потпростор од $(M^\wedge, d^\wedge)$ таков што $\overline{M} = M^\wedge$." За таа цел би требало претходно да се покаже дека: "ако $\mathbf{x} \in M^\wedge$ и ако постои низа (во M) $x_n \in \mathbf{x}$ што е конвергентна, тогаш секоја низа $y_n \in \mathbf{x}$ е конвергентна (во M) со иста граница како и x_n." Потоа, ако $x \in M$, ќе сметаме дека $x = \mathbf{x}$ каде што $\mathbf{x}$ е множеството од сите конвергентни низи во M што имаат граница x. На крајот ќе треба да се докаже дека за кои било $x, y \in M$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M^\wedge$ такви што $x = \mathbf{x}$, $y = \mathbf{y}$ имаме $d(x,y) = d^\wedge(\mathbf{x},\mathbf{y})$ од што ќе следува дека (M,d) е потпростор од $(M^\wedge, d^\wedge)$. Заклучокот $\overline{M} = M^\wedge$ ќе следува од тоа што секој елемент $\mathbf{x}$ од $M^\wedge$ е граница (во $M^\wedge$) на секоја низа $x_n \in \mathbf{x}$. □

За подмножеството A од M велиме дека е ***комплетно подмножество*** во метричниот простор (M,d) ако соодветниот простор (A,d) е комплетен. Притоа, и празното подмножество ќе го сметаме за комплетно.

Во примерот 1) видовме дека подмножество од комплетен простор не мора да биде комплетно, а може да биде комплетно подмножество од простор што не е комплетен, како што се гледа од следниов пример:

2) $\mathbb{Q}$ не е комплетно подмножество во евклидскиот простор $\mathbb{R}$, бидејќи, на пример, низата $(1+1/n)^n$ е фундаментална, но не е конвергентна. Да покажеме дека $\mathbb{N}$ е комплетно подмножество во потпросторот $\mathbb{Q}$ од $\mathbb{R}$. Навистина, нека x_n е фундаментална низа во $\mathbb{N}$. Тогаш, постои $k \in \mathbb{N}$, таков што $|x_s - x_t| < 1$, за кои било $s,t \geq k$. Од тоа следува дека $x_s = x_t$, па значи $x_k = x_{k+1} = \dots = x_{k+m} = \dots$, од што следува дека $x_k = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Во еден комплетен простор нема разлика меѓу комплетно подмножество и затворено множество, како што се гледа од следново тврдење:

15°. *Ако (M,d) е комплетен простор и $A \subseteq M$, тогаш A е комплетно ако и само ако A е затворено.*

Д о к а з. Дека секое комплетно множество $A \subseteq M$ е затворено следува од 7°. Обратно, ако A е затворено множество и ако x_n е фундаментална низа во A, тогаш таа е фундаментална и во M, па има граница $x \in M$. Од тоа (пак според 7°) следува дека $x \in A$, т.е. дека A е комплетно. □

Во овој раздел ќе докажеме уште едно тврдење познато како ***теорема на Кантор.***[1]

16°. *Нека $T_n = T[a_n; r_n]$ е низа затворени топки во комплетниот метричен простор (M,d), такви што: $r_n \to 0$ за $n \to +\infty$ и $T[a_{n+1}; r_{n+1}] \subseteq \subseteq T[a_n; r_n]$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Тогаш, постои единствена точка што им припаѓа на сите топки од дадената низа.*

Д о к а з. Нека низата точки x_n е таква што $x_n \in T_n$. За $m > n$, имаме $x_m \in T_m \subseteq T_n$, од што следува дека $d(x_m, x_n) \le d(x_m, a_n) + d(a_n, x_n) \le 2r_n$. Ако $\varepsilon > 0$, тогаш постои n_0, таков што $r_n < \varepsilon$, за $n \ge n_0$, па добиваме дека $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, за $n, m \ge n_0$. Со тоа покажавме дека низата x_n е фундаментална, па и конвергентна. Ако a е границата на низата x_n, тогаш, за секој $k \in \mathbb{N}$, $a \in T_k$, бидејќи a е граница на низата $x_{k+n} \in T_k$, при што T_k е затворено множество. Да претпоставиме дека и $b \in T_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Тогаш:

$$d(a,b) \le d(a,x_n) + d(x_n,b) \le 2r_n,$$

од што следува дека $d(a,b) = 0$, т.е. $a = b$. □

2. 3. Компактни простори

За еден метричен простор (M,d) велиме дека е ***компактен*** ако *секоја низа x_n во M има барем една точка на натрупување.*

Како последица од 11° го добиваме и следново својство:

17°. *Секој компактен простор е комплетен.* □

Но, обратното не важи, како што се гледа од следново својство:

18°. *Евклидскиот простор $\mathbb{R}$ е комплетен, но не е компактен.*

Д о к а з. Ако x_n е (стриктно) растечка и неограничена низа во $\mathbb{R}$ (на пример, $x_n = n$), тогаш x_n нема точка на натрупување. □

Бесконечните дискретни простори се друга класа комплетни простори што не се компактни, а имено:

19°. *Тривијалниот простор (M,d) е комплетен за секое множество M, а компактен ако и само ако M е конечно множество.*

---

1) Георг Кантор (*Georg Ferdinand Ludvig Philipp Cantor*, 1845-1918), германски математичар (роден во Петроград)

Д о к а з. Прво, низата x_n е фундаментална ако и само ако постои n_0, таков што $x_{n_0+k} = x_{n_0}$, од што следува дека таа низа е конвергентна со граница x_{n_0}. Ако M е конечно множество, тогаш во секоја низа $x_n \in M$, барем еден елемент $a \in M$ се повторува бесконечно многу пати во низата, па според тоа a е точка на натрупување на низата. Но, ако M е бесконечно множество, тогаш постои низа x_n во M во која сите членови се различни, а таква низа нема точка на натрупување. □

Од следното својство (покрај другото) следува и дека во 19° може зборот "тривијален" да се замени со "дискретен".

20°. *Нека (M,d) и (M,d_*) се еквивалентни простори. Ако еден од тие простори е: а) комплетен, б) компактен, тогаш истото својство го има и другиот.*

Д о к а з. Да се примени 12°. □

За едно подмножество K од M велиме дека е ***компактно множество*** во метричниот простор (M,d), ако соодветниот метричен простор (K,d) е компактен. И празното подмножество го сметаме за компактно, а и уште повеќе (како последица од 19°, 20°, според 12° од 1.2) имаме:

20°. *Секое конечно подмножество од еден метричен простор е компактно.* □

Да докажеме и дека:

21°. *Секое компактно подмножество од еден метричен простор е затворено и ограничено.*

Д о к а з. Едно компактно подмножество е затворено според 7°. Да претпоставиме дека K е неограничено подмножество во еден метричен простор. Тогаш, постои низа $a_n \in K$, таква што $d(a_n, a_m) > 2$, за кои било $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Тогаш, низата a_n нема точка на натрупување во K. □

Дека едно затворено и ограничено подмножество од еден метричен простор не мора да е компактно следува од 19°, бидејќи ако M е бесконечно множество, тогаш M е затворено и ограничено во тривијалниот простор (M,d), но не е компактно. Сепак, за евклидските простори важи и обратното тврдење, како што се гледа од следнава теорема:

22°. *Ако $n \geq 1$, тогаш подмножеството K од $\mathbb{R}^n$ е компактно ако и само ако K е затворено и ограничено.*

Д о к а з. Прво, нека K е затворено и ограничено подмножество од $\mathbb{R}$. Ако a_n е низа во K, тогаш таа е ограничена, па според теоремата на Болцано-Вајерштрас (Т.1 во I.4.8) постои точка на натрупување $a \in \mathbb{R}$. Според 4° и 7° од тоа следува дека $a \in K$, т.е. дека K е компактно.

Нека K е ограничено и затворено подмножество од $\mathbb{R}^n$, каде што

$n \geq 2$ и нека $\mathbf{a}_k = (a_{k1},\dots,a_{kn})$ е низа точки од K. Тогаш, $a_{k1},\dots,a_{kn}$ се ограничени подниզи од $\mathbb{R}$, па (според гореспоменатата теорема на Болцано-Вајерштрас) за секој $i = 1,\dots,n$ постои точка на натрупување на низата a_{ki}. Од тоа следува дека $\mathbf{a} = (a_1,a_2,\dots,a_n)$ е точка на натрупување на низата $\mathbf{a}_k$, па (според 4° и 7°) $\mathbf{a} \in K$. Од тоа следува дека K е компактно. □

2. 4. Конвергентни низи и редови во нормирани векторски простори

Во овој раздел ќе претпоставуваме дека $(V;\|\ \|)$ е нормиран векторски простор.[2] Во тој случај, со (4) од 1.1, на V се гради структура на метричен простор $(V;d)$, па затоа и велиме дека V е ***нормиран метричен простор***. Според тоа, како што и споменавме во 1.1, сите поими и резултати за метрични простори важат и за V, па тоа се однесува и за дефинициите и тврдењата од претходните три раздели. Притоа, тврдењата 1° и 3° ги добиваат следниве форми:

1'. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow \|x - x_0\| < \varepsilon]$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x - x_0\| = 0. \ \square$$

3'. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \|x - y\|$. □

Уште повеќе, имитирајќи соодветни докази за конвергентност на низи во $\mathbb{R}$ (в. I.4.5), лесно се докажуваат следниве две тврдења:

23°. *Ако α_n, β_n се конвергентни низи од скалари, а $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}_n$ конвергентни низи од вектори со граници $\alpha,\beta,\mathbf{x},\mathbf{y}$, соодветно, тогаш и низата $\alpha_n\mathbf{x}_n + \beta_n\mathbf{y}_n$ е конвергентна со граница $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$.* □

24°. *Нека нормата во V е индуцирана со скаларен производ. Ако $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{b}_n$ се конвергентни низи со граници $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ соодветно, тогаш и низата (скалари) $\mathbf{a}_n \circ \mathbf{b}_n$ е конвергентна со граница $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$.* □

Еден нормиран векторски простор се вика ***банахов***[3] ***простор***[4], ако е комплетен како метричен простор.

13'. *За секој $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ е банахов простор.* □

Да разгледаме уште еден интересен пример на банахов простор што е специјален случај на просторот што ќе биде предмет на 3.2.

2) Полето скалари е $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

3) Стефан Банах (*Stefan Banach*, 1892-1945), полски математичар.

4) Тогаш, за $C \subseteq B$ се вели дека е ***банахов потпростор*** од B ако C е векторски потпростор, што е комплетно подмножество од метричниот простор B.

3) Нека $C[0,1]$ е множеството реални функции непрекинати на сегментот $[0,1]$. Ако $f,g \in C[0,1]$, $c \in \mathbb{R}$ тогаш $|f|, cf, f+g \in C[0,1]$ од што следува дека $C[0,1]$ е векторски простор, и нормиран, каде што:

$$\|f\| = \max\{|f(x)| \; |x \in [0,1]\}.$$

(Да се види и теоремата на Вајерштрас: Т.4 од I.5.6.) Да претпоставиме дека f_n е фундаментална низа во $C[0,1]$. Тоа значи дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што

$$n,m \geq n_0 \Rightarrow (\forall x \in [0,1]) \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Од $(*)$ следува, дека низата $f_n(x)$ е фундаментална за секој $x \in [0,1]$, па значи постои функција $f(x)$ дефинирана на $[0,1]$, таква што $f(x)$ е граница на $f_n(x)$, за секој $x \in [0,1]$. Според теоремата 3° од VIII.3, $f_n(x)$ конвергира рамномерно кон функцијата $f(x)$ на $[0,1]$, па според првиот дел од Т.1 во VIII.3 добиваме дека $f \in C[0,1]$ и дека f е граница на дадената фундаментална низа. Со тоа докажавме дека $C[0,1]$ е навистина банахов простор. (Сосема е јасно дека ист резултат би се добил и кога би работеле со множеството функции $C[a,b]$ непрекинати во даден (кој било) сегмент $[a,b]$, при $a < b$.)

Поимот конвергентен ред во еден нормиран простор V се дефинира на потполно ист начин како во VIII.1.1, односно IX.3.1.

Имено, нека $\mathbf{a}_n$ е низа во V и нека $\mathbf{s}_n = \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n$. Ако низата $\mathbf{s}_n$ е конвергентна во V, тогаш нејзината граница $\mathbf{s}$ се вика ***збир на редот***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n; \quad \text{пишуваме: } \mathbf{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n. \qquad (5)$$

На читателот нема да му биде тешко да формулира (и докаже) својства што се обопштувања на 2°, 3°, 4° и 5° од VIII.1.1. Обопштувањето на 1° од VIII.1.1, за нормирани простори, го има следниов облик:

25°. *Ако V е банахов простор, тогаш редот (5) е конвергентен акко: за секој $\varepsilon > 0$ постои n_0 таков што:*

$$n \geq n_0, k \geq 1 \Rightarrow |\mathbf{a}_{n+1} + \cdots + \mathbf{a}_{n+k}| < \varepsilon. \quad \square$$

Задоволувајќи се со кажаното за конвергентни редови во општи нормирани простори, подолу ќе направиме неколку забелешки за ***низи*** (и ***редови***) ***од матрици***, при што ќе работиме со реални матрици, а, се разбира, секој поим, односно резултат, се пренесува на комплексни матрици.

Воочуваме, прво, дека множеството (реални) матрици од облик $m \times n$ може да се идентификува со евклидскиот простор $\mathbb{R}^{mn}$. Според тоа, имаме и три норми $\| \;\|, \| \;\|_+, \| \;\|_{\max}$ дефинирани со:

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \right)^{1/2} \tag{6}$$

$$\|\mathbf{A}\|_+ = \sum_i \sum_j |a_{ij}| \tag{6+}$$

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} = \max\{|a_{ij}| \mid i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n\} \tag{6_{max}}$$

каде што $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. (Види (5), (5+) и ($5_{\max}$) од 1.1.) Освен тоа, сите овие три норми се еквивалентни во таа смисла што соодветните метрики индуцирани од нив се еквивалентни. (Види 13° од 1.2.) Според тоа, при избор на која било од тие три норми точно е следново тврдење:

26°. *Ако* $\mathbf{A}_k$ *е низа матрици од облик* $m \times n$ *и ако* $\mathbf{A}_k = [a_{ij}(k)]$, *тогаш* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *е граница на дадената низа ако и само ако* a_{ij} *е граница на низата* $a_{ij}(k)$, *за секои* $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$. □

Од ова следува дека поимот за граница на низа од матрици дефиниран во IX.9.2 е во согласност со поопштиот поим за граница на низа во метричен простор.

2. 5. Вежби

1. Ако низите a_n, b_n, c_n во метричниот простор[5] M се поврзани со релациите: $c_n = a_{2n-1}, b_n = a_{2n}$ при што b е граница на b_n, c е граница на c_n, тогаш:

(i) b и c се точки на натрупување на a_n,

(ii) a_n е конвергентна ако и само ако $b = c$ и притоа b е граница на a_n.

2. Ако $a, b \in M$ и ако a е граница на низата a_n, тогаш $d(a,b)$ е граница на низата $d(a_n, b)$.

3. За низата a_n велиме дека е ***скоро константа*** акко постои n_0, таков што $a_{n_0} = a_{n_0+k}$, за секој $k \in \mathbb{N}$. Секоја таква низа е конвергентна со граница a_{n_0}.

4. Ако M е дискретен простор, тогаш: низата a_n е конвергентна ако и само ако е скоро константа.

5. Може една низа a_n да е ограничена, а да нема точка на натрупување, а исто така можно е неограничена низа да има точка на натрупување.

6. Нека (M_1, d_1), (M_2, d_2) се метрични простори, $M = M_1 \times M_2$ и (M, d), (M, d_+), $(M, d_{\max})$ се просторите дефинирани во вежбата 7 од 1.5. Тогаш, $\mathbf{a}_n \in M$ е конвергентна во едниот од тие простори ако и само ако е конвергентна во другите два простора. Притоа, низата $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n})$ има граница $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, ако и само ако a_i е граница на a_{in}, за $i = 1,2$.

---

5) За натаму ако не е инаку речено, ќе сметаме дека (M,d) е даден метричен простор

7. Нека M е множеството од сите ограничени, а P од сите конвергентни низи од реални броеви. Ако дефинираме норма $\| \ \|$ во M со: $\|\mathbf{a}\| = \sup\{|a_1|, |a_2|, \ldots\}$, а собирањето на низи и множење на низа со реален број на вообичаен начин, тогаш M е банахов простор, а P банахов потпростор од M.

(До исти резултати би се дошло ако $\mathbb{R}$ се замени со $\mathbb{C}$; а и воопшто со кој било банахов простор.)

8. Нека M е множеството од сите полиномни функции со реални коефициенти и нека во M е дефинирана метрика d со:

$$d(f,g) = [(a_0 - b_0)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2]^{1/2},$$

каде што:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n .$$

Тогаш (M,d) е метричен простор што не е комплетен.

(Имено, ако ставиме $f_n(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^{n-1}$ добиваме фундаментална низа што не е конвергентна.)

9. Множеството полиномни функции P е векторски потпростор од банаховиот простор $C[0,1]$, но P не е и банахов потпростор од $C[0,1]$, бидејќи (на пример) со $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ е определена фундаментална низа f_n, чијашто граница е функцијата $f(x) = e^x$.

10. Ако A и B се компактни подмножества од M, тогаш и $A \cap B$, $A \cup B$ се компактни.

11. Ако A и B се непразни подмножества од M при што B е компактно, тогаш: $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$.

12. За една фамилија отворени подмножества $\{U_i \mid i \in I\}$ од M велиме дека е ***отворена покривка*** на M ако нивната унија е M. M е компактен простор ако и само ако за секоја отворена покривка $\{U_i \mid i \in I\}$ на M, постојат $i_1, i_2, \ldots, i_n$ такви што $M = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n}$.

13. Ако x_n, y_n се две низи во еден компактен простор (M,d), такви што $d(x_n, y_n) < 1/n$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш тие низи се конвергентни и имаат иста граница.

14. x е граница на низата x_n ако и само ако за секое отворено множество U на M такво што $x \in U$ е исполнет условот:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U]. \tag{7}$$

15. Ако A е реална матрица од облик $m \times n$, а B од облик $n \times p$, тогаш се точни неравенствата:

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|, \quad \|\mathbf{AB}\|_+ \leq \|\mathbf{A}\|_+ \cdot \|\mathbf{B}\|_+, \tag{8}$$

каде што $\| \ \|$ е определена со (6), а $\| \ \|_+$ со (6_+).

Што се однесува за нормата $\| \ \|_{\max}$ (определена со ($6_{\max}$)), можни се сите три односи. (На пример, ако $a_{11} = b_{11} = 1$, $a_{ij} = 0 = b_{rs}$, за $(i,j) \neq (1,1), (r,s) \neq (1,1)$,

тогаш $\|\mathbf{AB}\|_{\max} = \|\mathbf{A}\|_{\max} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\max}$. Во случај да е $a_{ij} = 1 = b_{rs}$, ќе имаме:
$\|\mathbf{AB}\|_{\max} = n > 1 = \|\mathbf{A}\|_{\max} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\max}$; во случај пак кога $A \neq 0, B \neq 0$, но $AB = 0$ ќе важи другиот знак за неравенство.)

16. ***Банахова алгебра*** $\mathcal{A}$ е структура во која (покрај условите за банахов простор) е определена операција множење на вектори, таква што $(\mathcal{A},+,\cdot)$ е асоцијативен прстен (но не задолжително и комутативен), таков што за кој било скалар α и вектори $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ се точни равенствата

$$\alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b})$$

и неравенството

$$\|\mathbf{ab}\| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|.$$

(Така, некомутативна банахова алгебра чинат квадратните матрици со ред $(n \geq 2)$, каде што нормата е $\|\ \|$ или $\|\ \|_+$, но не и за $\|\ \|_{\max}$. Реалните броеви се пример на комутативна банахова алгебра, а комплексните броеви на друга таква алгебра.)

17. Ако a_n е низа во банаховиот простор B, таква што редот $\|a_1\| + \|a_2\| + \cdots$ е конвергентен, тогаш и редот $a_1 + a_2 + \cdots$ е конвергентен во B. За овие редови се пренесуваат некои од својствата на апсолутно конвергентните редови, специјално кај комутативните банахови алгебри. (Да се види VIII.2.2.)

18. Нека $(S,\mathcal{T})$ е тополошки простор. За точката $x \in S$ велиме дека е ***граница*** на низата x_n точки од S ако за секое отворено множество $U \in \mathcal{T}$, такво што $x \in U$, е исполнет условот (7). За разлика од метричните простори, една низа во тополошки простор може да има и повеќе од една граница. На пример, ако $\mathcal{T} = \{\varnothing, S\}$, а S има барем два различни елементи, тогаш секој $x \in S$ е граница на секоја низа $x_n \in S$.

19. Тополошкиот простор $(S,\mathcal{T})$ се вика ***хаусдорфов*** ако за кои било две различни точки $p,q \in S$ постојат $U,V \in \mathcal{T}$ такви што $p \in U, q \in V$ и $U \cap V = \varnothing$. Секој метричен тополошки простор е хаусдорфов.

20. Ако просторот $(S,\mathcal{T})$ е хаусдорфов, тогаш една низа $x_n \in S$ има најмногу една граница.

X. 3. Непрекинати пресликувања

Во 3.1 се дефинира поимот непрекинато пресликување, се покажуваат неколку општи својства и се дискутира за согласноста на новиот поим на непрекинатост со поимот за непрекината функција. Во 3.2 се испитува фамилијата непрекинати реални функции со компактен домен, а во 3.3 се формулираат повеќе резултати поврзани со поимот непрекинато пресликување.

3. 1. Непрекинати пресликувања на метрични простори

Во овој раздел ќе претпоставуваме дека M и M' се метрични простори со метрики d, d' соодветно, а f пресликување од M во M'. Да повториме (в. на пример, вежби 2 и 3 од I.1.3): ако $A \subseteq M, B' \subset M'$ тогаш

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, \tag{1}$$

се состои од сликите на елементите што му припаѓаат на A, а (во иста смисла)

$$f^{-1}(B') = \{x \mid f(x) \in B'\} \tag{1'}$$

е множеството на сите елементи од M чиишто слики се во B'. (Притоа, за $f(x) \in M'$ велиме дека е ***слика*** на $x \in M$.)

Ако x_n е низа во M, тогаш нејзината слика $f(x_n)$ е низа во M'.

Ќе го обопштиме овде поимот за непрекината функција. Имено, за $f: M \to M'$ ќе велиме дека е ***непрекинато пресликување*** (со ***домен*** M и ***кодомен*** M') кога е исполнет следниов услов:

(*) Ако x_n е конвергентна низа во M со граница x, тогаш и нејзината слика $f(x_n)$ е конвергентна низа во M' со граница $f(x)$.

Во следново тврдење се изнесуваат уште неколку карактеристични својства на непрекинатите пресликувања.

1°. *Ако f е пресликување од M во M', тогаш следниве услови се еквивалентни:*

(*i*) *f е непрекинато;*

(*ii*) $(\forall x \in M)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in M)[d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon]$

(*iii*) *за секое отворено подмножество U' од M', $f^{-1}(U')$ е отворено во M;*

(*iv*) *за секое затворено подмножество B' од M', $f^{-1}(B')$ е затворено во M.*

Д о к а з. Ќе докажеме само дека се еквивалентни (*i*) и (*ii*), а преостанатиот дел му го препуштаме на читателот.

Нека е исполнет условот (*i*) и нека $x \in M$, а ε е позитивен реален број. Треба да покажеме дека постои позитивен реален број δ, таков што од $d(y,x) < \delta$ следува $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Да претпоставиме дека тоа не е точно, дека за секој $\delta > 0$ постои $y \in T(x;\delta)$, таков што $d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Според тоа, за секој $n \in \mathbb{N}$, постои $x_n \in T(x; 1/n)$, таков што $d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$. Во тој случај x_n би била низа во M со граница x, таква што $f(x)$ не е граница на низата $f(x_n)$, што противречи на (*i*).

Да претпоставиме сега дека е исполнет условот (*ii*). Нека x_n е низа во M со граница x. Треба да покажеме дека $f(x)$ е граница на $f(x_n)$. Навистина, ако $\varepsilon > 0$, според (*ii*), постои $\delta > 0$, таков што $f(T(x;\delta)) \subseteq T(f(x);\varepsilon)$. Од друга страна, x е граница на x_n, па постои $n \geq n_0$ таков што: $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in T(x;\delta)$, а од тоа следува дека:
$n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in T(f(x);\varepsilon)$, т.е. $f(x)$ е граница на $f(x_n)$. □

Јасно е дека:

2°. *Ако d е тривијалната метрика во M, а (M', d') кој било метрички простор, тогаш секое пресликување f од M во M' е непрекинато.* □

Користејќи го 2°, лесно се добива пример на непрекинато пресликување кај кое: слика од затворено (отворено) множество не мора да биде затворено (отворено). Тоа се гледа, имено, од следниов пример:

1) Нека d е тривијалната метрика во $I\!R$, а d' обичната (т.е. евклидската) метрика во $I\!R$. Тогаш секое пресликување $f: I\!R \to I\!R$ е непрекинато од $(I\!R, d)$ во $(I\!R, d')$, па такво е и единичното пресликување $e: x \mapsto x$. Секое подмножество од $I\!R$ е и отворено и затворено во $(I\!R, d)$, па такво е и $A = (0,1]$, но $A = e(A)$ не е ни отворено ни затворено во $(I\!R, d')$.

Во следните две тврдења претпоставуваме дека f е непрекинато пресликување од (M, d) во (M', d').

3°. *Ако K е компактно подмножество од M, тогаш $K' = f(K)$ е компактно подмножество во M'.*

Д о к а з. Нека x'_n е низа точки во K', а x_n е низа во K таква што $x'_n = f(x_n)$. Од компактноста на K (имајќи го притоа предвид и 4° од 2.1) следува дека постои конвергентна подниза x_{n_k} од x_n. Ако x е границата на x_{n_k}, тогаш $x' = f(x)$ е точка на натрупување на x'_n. Од тоа следува дека и K' е компактно. □

4°. *Ако множеството S е сврзано во M, тогаш $S' = f(S)$ е сврзано во M'.*

Д о к а з. Да претпоставиме дека S' е несврзано во M', од што (види и вежба 21 од 1.5) следува дека постојат отворени подмножества U'_1, U'_2 такви што $S' \subseteq U'_1 \cup U'_2, S' \cap U'_1 \neq \varnothing, S' \cap U'_2 \neq \varnothing$. Од тоа би следувало дека $U_1 = f^{-1}(U'_1)$ и $U_2 = f^{-1}(U'_2)$ се отворени множества во M, такви што $S \subseteq U_1 \cup U_2, S \cap U_1 \neq \varnothing, S \cap U_2 \neq \varnothing$, што би било во спротивност со фактот дека S е сврзано во M. □

З а б е л е ш к а. Во претходните два раздела спомснавме дека соодветните поими за општи метрички простори (растојание, топка, сфера, отворено множество,..., конвергентни низи...) се во согласност со порано воведените поими (со исти називи) за специјалните метрички простори какви што се евклидските простори. За поимот сврзано множество имаме две дефиниции што во општ случај не се еквивалентни, но сепак областите во $I\!R^n$ се сврзани множества и во смисла на дефиницијата од вежбата 21 од 1.5. (Да се види, на пример, Copson §63, стр. 95-96.)

Поимот за *непрекината функција* е еден од најважните што е разгледан во претходните три книги, па е затоа природно да се постави прашањето дали секој вид непрекината функција е специјално непрекинато пресликување во смисла на дефиницијата од овој раздел.

Одговорот е само делумно точен. Имено, една реална функција f со домен $I\!R^n$ е **непрекината во целиот домен** акко е непрекината како пресликување од (метричниот простор) $\mathbb{R}^n$ во (метричниот простор) $\mathbb{R}$. Истото важи и во случај на комплексна функција од една реална (односно комплексна) променлива.

Но, ситуацијата е малку поинаква кога доменот $D \neq \mathbb{R}^n$, на пример кога $f: D \to \mathbb{R}$ е реална функција од една променлива, со домен D што е вистинско подмножество од $\mathbb{R}$. Притоа, секако, треба прво да се договориме што ќе значи функцијата $f: D \to \mathbb{R}$ да е непрекинато пресликување. Во овој случај се наметнува следниов договор: ќе сметаме дека f е ***непрекината функција*** ако f е непрекинато пресликување од потпросторот D (на $\mathbb{R}$) во $\mathbb{R}$.

Да забележиме дека (ако во D има изолирани точки) може да се случи овој договор да не е во согласност со дефиницијата за непрекината функција дадена во I.5.3. Така, на пример, функцијата:

2) $f(x) = (x^2(x-1))^{1/2}$

има домен $D = \{0\} \cup [1, +\infty)$ и е непрекината како пресликување од D во $\mathbb{R}$, но таа има прекин за $x = 0$, во смисла на дефиницијата од I.5.3.

И поопшто, ако поимот ***функција*** f (со домен $D \subseteq M$) од метричниот простор (M, d) во (M', d') се дефинира како пресликување $f: D \to M'$, при што "функцијата f е непрекината на D" значи: "*f е непрекинато пресликување од просторот (D, d) (како потпростор од (M, d)) во просторот (M', d')*", тогаш оваа дефиниција за непрекинатост е во согласност со сите порано дефинирани поими за непрекинатост само во случаите кога D нема изолирани точки. (Во вежбите 10 и 11 ќе бидат разгледани уште неколку прашања од овој вид.)

3. 2. Непрекинати реални функции со компактен домен

Во овој раздел ќе претпоставуваме дека K е даден компактен простор со метрика d, $\mathbb{R}$- евклидскиот простор од реални броеви, а $C(K)$ - множеството на сите непрекинати пресликувања од K во $\mathbb{R}$.

Секое ограничено и затворено подмножество од евклидскиот простор $\mathbb{R}^n$ е компактно (в. 2° од 2.3), а од тоа следува дека сите општи резултати што овде ќе ги добиеме важат и за реални функции од n реални променливи со ограничени и затворени домени. Така, тврдењата 5° и 6° што ќе бидат прво докажани се обопштувања на Т.4 и Т.5 од I.5.6, односно на Т.6 од V.1.6.

5° (***Теорема на Вајерштрас***). *Ако $f \in C(K)$, тогаш:*

$$(\exists a, b \in K)(\forall x \in K) \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b). \tag{2}$$

Д о к а з. Прво, според 3°, $K' = f(K)$ е компактно подмножество од $\mathbb{R}$, па (ако се има предвид и 21° од 2.3) K' е затворено и ограничено подмножество од $\mathbb{R}$. Ако α е инфимумот на K', тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$, постои $x_n' \in K'$, таков што: $\alpha \leq x_n' < \alpha + (1/n)$, па α е граница на низата x_n' точки од K', од што следува дека $\alpha \in K'$; според тоа, $\alpha = f(a)$ за некој $a \in K$. Слично, ако β е супремумот на K' во $\mathbb{R}$, постои $b \in K$, таков што $\beta = f(b)$. □

6° (*Теорема за рамномерна непрекинатост*). *Ако* $f \in C(K)$, *тогаш*:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in K)\,[d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]. \tag{3}$$

Д о к а з. Да претпоставиме дека (3) не е точно, т.е. дека: постои $\varepsilon > 0$, таков што, постојат низи x_n, y_n во K со својството:

$$d(x_n, y_n) < 1/n, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \tag{3'}$$

за секој $n \in \mathbb{N}$. Од првиот услов во (3'), ако се има предвид компактноста на K (в. вежба 13 од 2.5) се добива дека низите x_n, y_n се конвергентни со иста граница $c \in K$. Тоа повлекува дека низите реални броеви $f(x_n)$, $f(y_n)$ имаат иста граница $f(c)$, што е во спротивност со второто неравенство во (3'). □

Ќе обопштиме неколку резултати од VIII.3.1. Притоа ќе претпоставиме дека f_n е низа во $C(K)$. Тогаш, за секој $x \in K$,

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{4}$$

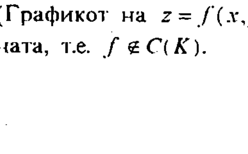
е низа реални броеви. Ако низата (4) е конвергентна за секој $x \in M$, тогаш ставајќи:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \tag{5}$$

за секој $x \in K$, добиваме пресликување $f: K \to \mathbb{R}$; од следниов пример се гледа дека не мора f да е непрекинато пресликување, т.е. не мора да биде $f \in C(K)$.

3) Нека K е квадратот

$$\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}. \tag{6}$$



Црт. 1

Ако ставиме $f_n(x,y) = x^n + y^n$, добиваме низа f_n во $C(K)$, таква што: $f_n(x,y)$ е конвергентна за секоја точка $(x,y) \in K$. Имено, границата $f(x,y)$ е определена со:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{за } 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{за } 0 \leq x < 1,\ y = 1 \\ 1 & \text{за } x = 1,\ 0 \leq y < 1 \\ 2 & \text{за } x = y = 1. \end{cases} \tag{7}$$

(Графикот на $z = f(x,y)$ е претставен на црт. 1.) Гледаме дека $f(x,y)$ е прекината, т.е. $f \notin C(K)$.

За низата f_n во $C(K)$ велиме дека ***рамномерно*** (или ***униформно***) ***конвергира*** кон $f:K \to I\!R$ ако е исполнет следниов услов:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in I\!N)(\forall x \in K, n \in I\!N)[n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon]. \tag{8}$$

Следново тврдење е обопштување на 1° од VIII.3.1.

7°. *Ако f_n конвергира рамномерно кон f, тогаш, за секој $x \in K$ е точно равенството* (5), *и притоа $f \in C(K)$.*

Д о к а з. Точноста на првиот дел од тврдењето е јасно, а вториот дел се покажува на потполно ист начин како и првиот дел од спомената теорема 1° од VIII.3.1. □

Доказот на следново својство е ист како кај соодветното својство на реални функции од една реална променлива, а притоа не е битна компактноста на K.

8°. *Ако $f,g \in C(K)$, $\lambda \in I\!R$ тогаш:* λf, $|f|$, $f+g$, $fg \in C(K)$. □

Користејќи ја теоремата 5°, ќе дефинираме норма во $C(K)$ со:

$$\| f \| = \max\{\, |f(x)| \mid x \in K \}. \tag{9}$$

Главен резултат на овој раздел е следнава теорема:

9°. *$C(K)$ е банахов простор.*

Д о к а з. Според 8°, $\lambda f, f+g \in C(K)$ за секои $\lambda \in I\!R$, $f,g \in C(K)$, од што следува дека $C(K)$ е векторски простор. Потоа, според 5°, за секој $f \in C(K)$, $\|f\|$ е добро дефиниран ненегативен реален број, којшто е нула само ако $(\forall x \in K)\, f(x) = 0$. Јасно е и својството на триаголник, т.е. дека:

$$\| f+g \| \leq \| f \| + \| g \|. \tag{10}$$

за секои $f,g \in C(K)$. Од сето тоа следува дека $C(K)$ е нормиран векторски простор. Преостанува да се покаже дека секоја фундаментална низа во $C(K)$ е конвергентна. Подолу ќе дадеме само скица на доказот. (Да истакнеме дека резултатот од примерот 3) од 2.4 е специјален случај од теоремата што ја докажуваме.)

Нека f_n е фундаментална низа во $C(K)$, а тоа значи дека е исполнет следниов услов:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in I\!N)(\forall n,k \in I\!N)[n \geq n_0 \Rightarrow \|f_{n+k} - f_n\| < \varepsilon]. \tag{11}$$

Имајќи го предвид (9), добиваме:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in I\!N)(\forall n,k \in I\!N, x \in K)[n \geq n_0 \Rightarrow |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon], \tag{11'}$$

од што следува дека постои пресликување $f:K \to I\!R$. такво што (5) важи за секој $x \in K$. Потоа, нека ε е даден позитивен реален број и нека (11″) е добиено кога во (11′) ставиме $\varepsilon/2$ наместо ε. Ако во (11″) k се стреми кон $+\infty$, ќе се добие дека е исполнет условот (8) за рамномерна конвергенција од f_n кон f, а тоа (според 7°) повлекува дека $f \in C(K)$.

Имаме, значи,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in K)[n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon], \qquad (12)$$

а од ова следува:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow \|f - f_n\| < \varepsilon], \qquad (12')$$

т.е. дека f е граница на низата f_n во нормираниот простор $C(K)$. □

Да воочиме дека од горниот доказ се добива точноста и на следново својство:

10°. *Низата f_n се стреми кон f во $C(K)$ ако и само ако f_n конвергира рамномерно кон f на компактниот простор K.* □

Подолу ќе формулираме поопшт поим за конвергентна низа пресликувања, како и неколку резултати во врска со нив. Притоа, ќе претпоставуваме дека T е непразно множество, а (M,d) метричен простор.

Нека $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ е бесконечна низа пресликувања од T во M, таква што за секој $t \in T$ низата:

$$f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots \qquad (4')$$

е конвергентна во (M,d). Тогаш, со:

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t), \qquad (5')$$

е определено пресликување f од T во M.

За низата f_n велиме дека ***конвергира рамномерно*** кон f ако е исполнет следниов услов:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall t \in T, n \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow d(f(t), f_n(t)) < \varepsilon]. \qquad (8')$$

На читателот нема да му биде тешко да го докаже следново тврдење:

11°. *Ако низата пресликувања $f_n : T \to M$ конвергира рамномерно кон $f : T \to M$, тогаш низата (4′) е конвергентна за секој $t \in T$ и притоа е точно равенството (5′).* □

Следново тврдење е обопштување на 7°.

12°. *Нека (T,d_*) и (M,d) се метрични простори, а $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ низа непрекинати пресликувања од (T,d_*) во (M,d). Ако низата f_n конвергира рамномерно кон $f : T \to M$, тогаш и f е непрекинато пресликување од (T,d_*) во (M,d).*

Д о к а з. Нека t_0 е даден елемент од T, а ε даден позитивен реален број. Од рамномерната конвергенција следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon / 3$, за секој $t \in T$ и $n \geq n_0$. Нека m е природен број поголем од n_0. Од непрекинатоста на f_m следува дека постои $\delta > 0$ таков што:

$$d_*(t, t_0) < \delta \Rightarrow d(f_m(t), f_m(t_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогаш, ако $t \in T$ е таков што $d(t,t_0) < \delta$, точно е следново неравенство:

$$d(f(t),f(t_0)) \leq d(f(t),f_m(t)) + d(f_m(t),f_m(t_0)) + d(f_m(t_0),f(t_0)) < \varepsilon,$$

од што и следува бараниот заклучок. □

3. 3. Вежби

1. Ако (M,d), (M',d'), (M'',d'') се метрични простори, а $f{:}M \to M'$, $g{:}M' \to M''$ се непрекинати пресликувања, тогаш и $gf{:}M \to M''$ е непрекинато.

2. Ако (M,d) е метричен простор, тогаш метриката $d{:}M \times M \to \mathbb{R}$ е непрекинато пресликување од секој од метричните простори $(M \times M,d)$, $(M \times M,d_+)$, $(M \times M,d_{\max})$ во евклидскиот простор на $\mathbb{R}$. (Да се види вежба 7 од 1.5.)

3. Нека (M,d) и (M,d_*), односно (M',d') и (M',d'_*) се еквивалентни метрични простори, и нека $f{:}M \to M'$. Тогаш, f е непрекинато од (M,d) во (M',d') ако и само ако е непрекинато од (M,d_*) во (M',d'_*).

4. Ако f и g се непрекинати пресликувања од (M,d) во (M',d'), тогаш множеството $A = \{x \in M \,|\, f(x) = g(x)\}$ е затворено во M.

5. Нека (M,d) е компактен простор, а $f{:}M \to M'$ непрекинато пресликување од (M,d) во (M',d'). Ако A е затворено во (M,d), тогаш $f(A)$ е затворено во (M',d').

6. За пресликувањето $f{:}M \to M'$ велиме дека е ***константно*** ако $(\forall x,y \in M)\, f(x) = f(y)$. Секое константно пресликување од метричниот простор (M,d) во метричкиот простор (M',d') е непрекинато.

7. Ако f е непрекинато пресликување од метричниот простор (M,d) во метричниот простор (M',d') и ако a' е фиксен елемент од M', тогаш $A = \{x \in M \,|\, f(x) = a'\}$ е затворено во (M,d).

8. Ако f е непрекинато пресликување од (M,d) во евклидскиот простор $\mathbb{R}$ и $f(a) > 0$, тогаш постои $r > 0$, таков што $f(x) > 0$ за секој $x \in T(a;r)$.

9. Нека (M,d) и (M',d') се метрични простори и $f{:}M \to M'$ е дадено пресликување. Следните три услови се еквивалентни:

(i) f е непрекинато.

(ii) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, за секое $A \subseteq M$.

(iii) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, за секое $B \subseteq M'$.

(iv) $\overline{f^{-1}(B^0)} \subseteq (f^{-1}(\overline{B}))^0$, за секое $B \subseteq M'$.

(Притоа, B^0 е множеството внатрешни точки на B.)

10. Нека (M,d), (M',d') се метрични простори, $f{:}M \to M'$ и $a \in M$, $A \subseteq M$. Велиме дека f е ***непрекинато во точката*** a, ако е исполнет условот:

$(*')$ Ако a_n е низа во M со граница a, тогаш $f(a_n)$ е низа во M' со граница $f(a)$.

Ако f е непрекинато во секоја точка $a \in A$, тогаш велиме дека f е ***непрекинато*** на A.

Точни се следниве тврдења:

а) f е непрекинато во точката a акко:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in M)[d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(a),f(x)) < \varepsilon].$$

б) f е непрекината на A акко пресликувањето $f_A: A \to M'$ е непрекинато од (A,d) во (M',d'), каде што $(\forall x \in A) f_A(x) = f(x)$.

в) Овде дадениот поим за "непрекинатост во точка" се совпаѓа со порано воведениот соодветен поим (в. I.5.1, V.1.6, IX.4.1) ако и само ако a не е изолирана точка во доменот на f.

11. Нека (M,d) и (M',d') се метрични простори и a е точка во M, а f е пресликување од M во M'. Велиме дека $f(x)$ ***се стреми кон*** a' кога x се стреми кон a, пишуваме $\lim f(x) = a'$, за $x \to a$, ако е исполнет следниов услов:

(**) За секоја конвергентна низа x_n во M со граница a, низата $f(x_n)$ во M' има граница a'.

Точни се следниве тврдења:

а) f е непрекината во $a \in M$ акко $\lim f(x) = f(a)$, кога $x \to a$.

б) Ако $g: M' \to M''$, каде што (M'',d'') е метричен простор и ако: $\lim f(x) = a'$ за $x \to a$, $\lim g(x') = a''$ за $x' \to a'$ тогаш $\lim g(f(x)) = a''$ за $x \to a$.

в) Овде дадениот поим за граница се совпаѓа со поимот за граница на функција воведен порано акко a не е изолирана точка во доменот на функцијата.

12. Ако f и g се непрекинати пресликувања од (M,d) во (M',d') и ако $(\forall x \in A) f(x) = g(x)$, каде што A е подмножество од M такво што $\overline{A} = M$, тогаш $(\forall x \in M) f(x) = g(x)$, т.е. $f = g$.

13. Нека (M,d) и (M',d') се метрични простори, $A \subseteq M$, $a \in \overline{A}$, и $f: M \to M'$. Велиме дека $f(x)$ ***се стреми кон*** a' кога x се стреми кон a во A ако е исполнет следниот услов:

(**$'$) за секоја низа x_n во A што има граница a, низата $f(x_n)$ има граница a'. Тогаш пишуваме

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = a'. \tag{13}$$

Да претпоставиме сега дека f е пресликување од A во M', каде што $\overline{A} = M$. Постои најмногу едно непрекинато пресликување $g: M \to M'$ такво што $(\forall x \in A) g(x) = f(x)$. Тоа е исполнето ако и само ако за секоја точка $a \in A$ постои границата (13).

14. Ако K е компактен метричен простор и ако $C(K)^*$ е множеството од сите непрекинати пресликувања од K во $\mathbb{C}$, тогаш сите својства од 3.2 остануваат во сила, по соодветни преводи или без никакви измени.

(Имено, во 5°, треба f да се замени со $|f|$, а 6°-10° остануваат и формално исти.)

15. Ако се има предвид и операцијата множење на пресликувања, тогаш $C(K)$ и $C(K)^*$ се комутативни банахови алгебри.

16. Нека (M,d), (M',d') се метрични простори и $f: M \to M'$ пресликување, такво што $P' = f(M)$. Дефинираме пресликување $g: M \to P'$ со $g(x) = f(x)$, за секој $x \in M$. Ако $S \subseteq M$, тогаш дефинираме $f_S : S \to M'$ со $f_S(x) = f(x)$, за секој $x \in S$. Тогаш:

а) f е непрекинато $\Leftrightarrow$ g е непрекинато;

б) f е непрекинато $\Rightarrow f_S$ е непрекинато.

17. Нека $(M_1,d_1), (M_2,d_2)$ се метрични простори и (M,d) нивниот директен производ дефиниран во вежбата 7 од 1.5. Ако $F : M \to M_2$, $f_1 : M_1 \to M_1$ $f_2 : M_2 \to M_2$ се непрекинати пресликувања, тогаш и пресликувањето $G : M \to M_2$ дефинирано со $(\forall x_1 \in M_1, x_2 \in M_2)\, G(x_1,x_2) = F(f_1(x_1), f_2(x_2))$ е непрекинато.

18. Може едно биективно пресликување $f : M \to M'$ да е непрекинато, а инверзното пресликување да не е непрекинато. (На пример, ако $(\mathbb{R},d)$ е тривијалниот простор на $\mathbb{R}$, тогаш единичното пресликување $e : x \mapsto x$ е непрекинато во евклидскиот простор $\mathbb{R}$, но $e^{-1} = e : x \mapsto x$ не е непрекинато.)

19. За биективното пресликување $f : M \to M'$ велиме дека е ***хомеоморфизам*** од (M,d) во (M',d') ако и двете пресликувања f и f^{-1} се непрекинати.

Ако $f : M \to M'$ е биекција, тогаш следните услови се еквивалентни:

i) f е хомеоморфизам;

ii) за секое отворено множество U во (M,d), отворено е и $f(U)$ во (M',d');

iii) за секое затворено множество B во (M,d), затворено е и $f(B)$ во (M',d').

20. Ако $f : M \to M'$ е биективно непрекинато пресликување од компактниот метричен простор (M,d) во метричниот простор (M',d'), тогаш f е хомеоморфизам.

21. За пресликувањето $f : M \to M'$ велиме дека е ***изометрија*** од (M,d) во (M',d') ако $(\forall x,y \in M)\, d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$. Секоја изометрија е непрекинато инјективно пресликување, а секоја сурјективна изометрија е хомеоморфизам. Постојат хомеоморфизми што не се изометрии. (На пример, $f : x \mapsto x^3$ е хомеоморфизам од евклидскиот простор $\mathbb{R}$ во себе, но не е изометрија.)

22. Ако m и n се природни броеви, тогаш:

$$f : (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) \mapsto ((x_1,\ldots,x_m),(y_1,\ldots,y_n))$$

е изометрија од $\mathbb{R}^{m+n}$ во $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

23. Нека (M,d) и (M',d') се метрични простори и f хомеоморфизам од (M,d) во (M',d'). Ако во M дефинираме метрика d_* со:

$$d_*(x,y) = d'(f(x),f(y))$$

се добива метричен простор (M,d_*) еквивалентен со (M,d) и притоа f е изометрија од (M,d_*) во (M',d').

24. За едно пресликување $f : S \to S'$ велиме дека е ***непрекинато*** од тополошкиот простор $(S;\mathcal{T})$ во тополошкиот простор $(S';\mathcal{T}')$ ако е исполнет следниов услов: за секоја точка $x \in S$ и $U' \in \mathcal{T}'$, таква што $f(x) \in U'$, постои $U \in \mathcal{T}$ такво што $x \in U$ и $f(U) \subseteq U'$.

Следниве искази се еквивалентни:

а) f е непрекинато;

б) за секој $U' \in \mathscr{T}'$, $f^{-1}(U') \in \mathscr{T}$.

в) за секое затворено множество B' во $(S';\mathscr{T}')$, $f^{-1}(B)$ е затворено во $(S;\mathscr{T})$.

25. Поимот хомеоморфизам кај тополошки простори се воведува на ист начин како и кај метрични простори (вежба 19), а лесно се покажува дека и во овој случај условите $i)$, $ii)$ и $iii)$ се еквивалентни.

X. 4. Теорема за неподвижна точка и примена

Теоремата за неподвижна точка (позната и како Банахова теорема за фиксна точка) е еден од најпопуларните резултати во математиката, зашто наоѓа примена во разни области од математиката. Во **4.1** се докажуваат две варијанти на оваа теорема, а во **4.2** таа се применува за добивање метод за приближно решавање на системи линеарни равенки. Во **4.3** односно во **4.4** теоремата на Банах се користи за докажување на теоремата за егзистенција и единственост на решение на диференцијална равенка од прв ред односно на имплицитно зададена функција.

4. 1. Теорема за неподвижна точка

Ќе изнесеме овде две варијанти на теоремата за неподвижна точка, а како илустрација на нејзината примена ќе разгледаме два примера. Претходно, ќе воведеме два поима.

Нека $f{:}M \to M$ е пресликување од еден метричен простор M во себе. Ако постои точка $c \in M$ таква што

$$c = f(c), \tag{1}$$

тогаш c се вика ***неподвижна*** или ***фиксна*** точка за пресликувањето f. Така, на пример, ако $M = [0,2] \subset \mathbb{R}$ и f е дефинирано со: $f(x) = 2/(1+x)$, тогаш точката 1 е неподвижна за f.

(Инаку, едно пресликување $f{:}M \to M$ може да има и повеќе неподвижни точки, а може да нема ниедна.)

Секое пресликување $f{:}M \to M$ за кое е исполнет условот

$$(\exists q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1)(\forall u,v \in M) \quad d(f(u), f(v)) \le q d(u,v), \tag{2}$$

се вика ***контракција*** или ***стегање*** на метричкиот простор M; бројот q се вика ***коефициент на контракцијата*** f.

Во случај да се работи за банахов простор, неравенството во условот за контракција (2) го добива следниов облик:

$$\|f(u) - f(v)\| \le q\|u-v\|. \tag{2'}$$

Во врска со овие поими, ќе ја докажеме следнава важна теорема (наречена ***теорема на Банах за фиксна точка***):

1°. *Секоја контракција на еден комплетен метрички простор има една и само една фиксна точка.*

Попрецизно, ќе го докажеме следново тврдење, од коешто 1° е последица.

1'. *Ако M е комплетен метричен простор, а $f: M \to M$ го задоволува условот (2) и ако x_0 е произволна точка од M, тогаш низата x_n точки од M, формирана на следниов начин*

$$x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots \tag{3}$$

е конвергентна и нејзината граница x е единствената неподвижна точка на f. Притоа, за секој $n \in \mathbb{N}$, е точно неравенството:

$$d(x, x_n) \le q^n d(x, x_0) \tag{4}$$

Доказ. Од (2) и (3) следува:

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \le q d(x_1, x_0) = q d(f(x_0), x_0),$$
$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \le q d(x_2, x_1) \le q^2 d(f(x_0), x_0).$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d(x_{s+1}, x_s) \le q^s d(f(x_0), x_0), \dots$$

Од ова добиваме:

$$d(x_{n+k}, x_n) \le d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \le$$
$$\le (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \dots + q^n) d(f(x_0), x_0)$$

т.е

$$d(x_{n+k}, x_n) < \frac{q^n}{1-q} d(f(x_0), x_0). \tag{5}$$

Поради $0 < q < 1$, десната страна од последново неравенство може да се направи произволно мала ако $n \ge n_0, k \in \mathbb{N}$, каде што n_0 е доволно голем природен број. Од тоа следува дека низата x_n е фундаментална, па значи и конвергентна, бидејќи просторот M е (по претпоставка) комплетен.

Нека x е границата на низата x_n. Имаме:

$$\begin{aligned} d(f(x), x) &\le d(f(x), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x) \\ &= d(f(x), f(x_n)) + d(x_{n+1}, x) \\ &\le q d(x, x_n) + d(x_{n+1}, x) \end{aligned}$$

Ако пуштиме во десната страна n да се стреми кон $+\infty$, добиваме $d(f(x), x) \le 0$, т.е $d(f(x), x) = 0$, а тоа е можно само ако $f(x) = x$. Со тоа покажавме дека границата x на низата (3) е неподвижна точка на f.

Имајќи го предвид и (2) добиваме дека:

$$d(x, x_n) = d(f(x), f(x_{n-1})) \le q d(x, x_{n-1}) \le \dots \le q^n d(x, x_0),$$

т.е точноста на (4).

Ако е точно и равенството $f(x^*) = x^*$, тогаш, според (2), имаме:

$$d(x, x^*) = d(f(x), f(x^*)) \le q d(x, x^*),$$

а тоа, поради $0 < q < 1$, е можно само ако $d(x, x^*) = 0$, т.е. $x = x^*$. □

Да разгледаме една примена на докажаната теорема.

2°. *Ако $f(x)$ е функција од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ диференцијабилна за секој $x \in \mathbb{R}$ и ако постои $q \in \mathbb{R}$, таков што $0 < q < 1$ и*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ |f'(x)| \leq q,$$

тогаш равенката $x = f(x)$ има едно и само едно решение.

Д о к а з. Треба да го докажеме само условот за контракција. Според теоремата за средна вредност (Т.1, II.3.3), ако u и v се реални броеви, постои реален број c меѓу нив, таков што:

$$|f(u) - f(v)| = \left| f'(c) \right| |u - v| \leq q|u - v|.$$

Со тоа покажавме дека е исполнет условот за контракција, од што следува и заклучокот на теоремата. □

Да разгледаме два примера.

1) Ако се има предвид дека $\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + 1\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ (за секој $x \in \mathbb{R}$), добиваме дека равенката $x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + 1$ има едно и само едно решение.

2) Лесно се проверува дека и равенката $x = \sqrt{x} + 2$ има единствено решение $x = 4$, но функцијата $f(x) = \sqrt{x} + 2$ не ги задоволува условите од теоремата 2°. Имено, $f(x)$ е дефинирана само за $x \geq 0$, а освен тоа $|f'(x)|$ може да биде и број поголем од 1. (На пример, $f'(1/16) = 2$.)

Но, и без да се знае решението, лесно се покажува дека надвор од сегментот $[3,6]$ не постои решение на равенката, како и дека: $x \in [3,6] \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \in [3,6]$. Според тоа, со $f(x) = \sqrt{x} + 2$ е определено пресликување од комплетниот метричен простор $M = [3,6]$, во M. Притоа, имаме $f'(x) = 1/2\sqrt{x} < 1/3$, за секој $x \in M$, така што можеме да ја примениме теоремата 2°.

З а б е л е ш к а 1. За разлика од формулацијата на 1°, каде што само е констатирана егзистенцијата и единственоста на неподвижната точка на f, во формулацијата на 1′ е изнесена и постапка за наоѓање на таа точка. Таа постапка е позната како ***метод на последователни приближувања***, или ***метод на прости итерации***. Имено, за доволно голем $n \in \mathbb{N}$, може да се смета за приближно точно равенството $x = x_n$, а неравенството (4) може да се искористи за оценка на грешката (в. вежба 1). Како во овој, така и во следните раздели, нас ќе нè интересира, главно, егзистенцијата и единственоста на соодветна неподвижна точка, а читателот може да консултира поспецијализирани книги за методот на итерации, како, на пример, Трпеновски и Целакоски, Гл. 2-4.

4. 2. Примена кај системите линеарни равенки

Во теоремата на Кронекер-Капели (в. 7° во VII.5.3) е формулиран нужен и доволен услов за егзистенција и единственост на решение на систем линеарни равенки. Овде, со цел да ја илустрираме примената на резултатите од претходниот раздел, ќе се задржиме на систем од n линеарни равенки со n непознати од следниов облик:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + +a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + +a_{2n}x_n + b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + +a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned} \tag{6}$$

каде што a_{ij} и b_i се дадени броеви. Ако ставиме $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = [b_1\ b_2 \cdots b_n]$, $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1\ x_2 \cdots x_n]$, тогаш системот (6) можеме да го претставиме со следнава матрична равенка

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}. \tag{6'}$$

Според тоа, решавањето на системот (6) се сведува на наоѓање неподвижна точка на пресликувањето $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, дефинирано со

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{$*$}$$

при што елементите од $\mathbb{R}^n$ ги сметаме за вектор-колони, т.е. за матрици од обликот $n \times 1$.

Избирајќи за матрична норма $\| \ \|$ или $\| \ \|_+$ (да се види (6), (6+) од 2.4 и 15 од 2.5), добиваме дека се точни неравенствата:

$$\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \| = \| \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \| \le \| \mathbf{A} \| \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|, \tag{7}$$

$$\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \|_+ = \| \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \|_+ \le \| \mathbf{A} \|_+ \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_+ . \tag{7+}$$

Од тоа, ако се има предвид дека со нормата $\| \ \|$ е индуцирана евклидската метрика во $\mathbb{R}^n$, а со $\| \ \|_+$ метриката d_+ (при што и двете метрики се еквивалентни), како последица од 1° се добива следнава теорема:

3°. *Ако матрицата* $\mathbf{A}$ *задоволува барем едно од неравенствата:*

$$\| \mathbf{A} \|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 < 1 \tag{8}$$

$$\| \mathbf{A} \|_+ = \sum_{i,j} |a_{ij}| < 1, \tag{8+}$$

тогаш равенката $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ *има единствено решение и притоа низата* $\mathbf{x}_n$ *определена со:*

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}, \ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \tag{9}$$

конвергира кон решението на таа равенка, за кое било $\mathbf{x}_0$. □

Да разгледаме еден едноставен пример.

3) Ако $\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, тогаш (8+) не важи, но затоа пак (8) важи. Земајќи,

на пример, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$, добиваме:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{b},\ \mathbf{x}_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{b}+\mathbf{b},\ \mathbf{x}_3 = \frac{3}{8}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{b}+\mathbf{b},$$

$$\mathbf{x}_4 = \frac{7}{16}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{b}+\mathbf{b},\dots,\mathbf{x}_n = \frac{2^{n-1}-1}{2^n}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{b}+\mathbf{b},$$

од што следува дека:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{b}+\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\mathbf{b}$$

е единственото решение на равенката $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$.

Се разбира, до истото решение можевме да дојдеме и со директно решавање, бидејќи равенката $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$ е еквивалентна со $(\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}$, т.е.

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

од што следува:

$$\mathbf{x} = 4\cdot\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\mathbf{b}.$$

Како што видовме во вежбата 15 од 2.5, не важи соодветното неравенство за ($7_{\max}$), т.е. дека може да биде точно и неравенството од облик $\|\mathbf{Az}\|_{\max} > \|\mathbf{A}\|_{\max}\cdot\|\mathbf{z}\|_{\max}$. Затоа, не може да се формулира соодветен услов ($8_{\max}$) во 4°. Сепак, постои можност да се дефинираат следниве две норми кај матриците:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{\|\mathbf{a}_1\|,\dots,\|\mathbf{a}_n\|\},\quad \|\mathbf{A}\|_2 = \max\{\|\mathbf{a}_1\|_+,\dots,\|\mathbf{a}_n\|_+\}, \tag{9}$$

каде што $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ се вектор-редиците на матрицата $\mathbf{A}$. Според тоа, ако $\mathbf{x}$ е n-димензионална вектор-колона, имаме $\|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_{\max}$. Лесно се покажува дека, ако $\mathbf{A}$ е матрица од облик $m\times n$, а $\mathbf{x}$ е n-димензионален вектор, тогаш

$$\|\mathbf{Ax}\|_{\max} \le \|\mathbf{A}\|_1\cdot\|\mathbf{x}\|_{\max},\quad \|\mathbf{Ax}\|_{\max} \le \|\mathbf{A}\|_2\cdot\|\mathbf{x}\|_{\max}, \tag{10}$$

така што ги добиваме следните неравенства соодветни на (7) и (7_+):

$$\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})\|_{\max} \le \|\mathbf{A}\|_1\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\max}; \tag{$7_{1\max}$}$$

$$\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})\|_{\max} \le \|\mathbf{A}\|_2\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\max}. \tag{$7_{2\max}$}$$

Притоа, f е определено како и погоре, т.е. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}+\mathbf{b}$.

Имајќи ги предвид ($7_{1\max}$) и ($7_{2\max}$) ја добиваме и следнава последица од 1°:

4°. *Ако матрицата* $\mathbf{A}$ *задоволува некој од условите*:

$$(\forall i\in\{1,2,\dots,m\})\ \sum_j a_{ij}^2 < 1 \tag{$8_{1\max}$}$$

$$(\forall i\in\{1,2,\dots,m\})\ \sum_j \|a_{ij}\| < 1, \tag{$8_{2\max}$}$$

тогаш равенката $\mathbf{x} = \mathbf{Ax}+\mathbf{b}$ *има единствено решение.* □

Јасно е дека се точни следниве импликации:

$$(8_+) \Rightarrow (8),\ (8_+) \Rightarrow (8_{2\max}),\ (8) \Rightarrow (8_{1\max}),\ (8_{2\max}) \Rightarrow (8_{1\max}). \qquad (**)$$

Од тоа следува дека е доволно да се проверува само условот ($8_{1\max}$).

Да разгледаме еден пример.

4) Ако $A = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, тогаш:

за $a = 3/5$ е исполнет само ($8_{1\max}$),
за $a = 1/4$ не важи само ($8+$).

Забелешка 2. Постои можност да се примени теоремата за неподвижна точка и на линеарен систем $x_r = a_{r1}x_1 + \cdots + a_{r2}x_r + \cdots$ $(r = 1,2,\ldots)$ од бесконечно многу равенки со бесконечно непознати. (Да се види, на пример, Copson §75, стр, 118-121.)

4. 3. Локална теорема за неподвижна точка

Во 4.1 (забелешка 1) спомeнавме дека теоремата за неподвижна точка, т.е. 1° (односно 1′), се применува за приближно решавање равенки. За оценката на грешката се користи (4), но притоа е потребно претходно да знаеме ограничен интервал што го содржи бараното решение на равенката. Тврдењето што ќе го докажеме сега ги отклонува овие недостатоци на 1′, а и уште повеќе (во 4.4) ќе биде применета за докажување на теоремата за егзистенција и единственост на решение на диференцијална равенка од прв ред при дадени почетни услови, т.е. на Т.1 од VI.1.4.

5° (**Локална теорема за неподвижна точка**). *Нека M е комплетен метричен простор, а f пресликување од отворената топка $U = T(a;r)$ во M, таква што:*

$$d(a,f(a)) < r\cdot(1-q), \tag{11}$$

$$d(f(u),f(v)) \le q\cdot d(u,v), \tag{2''}$$

за кои било $u,v \in U$, при што q е даден позитивен реален број помал од 1. Ако се стави $x_0 = a$, тогаш со (3) е определена конвергентна низа точки во M, а нејзината граница x е единствената неподвижна точка на f. Притоа, за секој $n \in \mathbb{N}$, е точно неравенството:

$$d(x,x_n) \le q^n r. \tag{4'}$$

Доказ. Треба прво да покажеме дека низата (3) е добро дефинирана. Навистина, од $x_1 = f(a)$, според (11), следува дека:

$$d(a,x_1) = d(a,f(a)) \le r(1-q) < r,$$

т.е. $x_1 \in U$. Да претпоставиме дека $x_k \in U$ за секој $k \le n$. Од $x_n \in U$ следува $x_{n+1} = f(x_n) \in M$, а преостанува да покажеме дека $x_{n+1} \in U$. За таа цел, воочуваме дека: ако $1 \le s \le n$, тогаш:

$$d(x_s, x_{s+1}) = d(f(x_{s-1}), f(x_s)) \le q \cdot d(x_{s-1}, x_s),$$

од што (користејќи го притоа и (11)) се добива:

$$d(x_s, x_{s+1}) \le q^s d(x_0, x_1) = q^s d(a, f(a)) < q^s r(1-q). \qquad (*)$$

Од $(*)$ следува:

$$\begin{aligned} d(a, x_{n+1}) &\le d(a, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_n, x_{nn}) \le \\ &\le (1 + q + \cdots + q^n) d(a, f(a)) < \qquad (**) \\ &< (1 - q^{n+1}) r < r, \end{aligned}$$

т.е. дека $x_{n+1} \in U$. Од $(*)$, на потполно ист начин како и при доказот на 1′, се покажува дека:

$$d(x_{n+k}, x_n) < q^n r, \qquad (5')$$

за кои било $k, n \in \mathbb{N}$, од што следува дека низата (3) е фундаментална во M, па значи е и конвергентна во M. Ако x е границата на x_n, тогаш имаме $d(a, x) = \lim\limits_{n\to\infty}(a, x_n)$, па (според $(**)$) добиваме:

$$d(a, x) = \lim_{n\to\infty}(a, x_{n+1}) \le \frac{1}{1-q} d(a, f(a)) < r,$$

т.е. дека $x \in U$.

Потоа, на потполно ист начин како и во доказот на 1′ се добива дека x е единствена неподвижна точка на f, како и дека е точно неравенството (4′), за секој $n \in \mathbb{N}$. □

З а б е л е ш к а 3. За разлика од 1°, каде што f е пресликување од M во M, а условот (2) е задоволен за кои било $u, v \in M$, во 5° се претпоставува дека f е пресликување од U во M, па според тоа во (2′) u и v се кои било $u, v \in U$. Освен тоа овде се појавува и новиот услов (11), од кој следува дека a "не е далеку" од $f(a)$. Потоа, (4′) претставува оценка на грешката што се прави во приближното равенство $x = x_n$. Да истакнеме и дека f може да биде пресликување од M во M, но условот за контракција (2) (односно (2′)) да биде задоволен само за точките од U, а тоа е, имено, и причината тврдењето 5° да се вика "локална теорема за неподвижна точка".

Да се вратиме на примерот 2). Ако ставиме $a = 6$ и $U = (3,9)$, ќе имаме $f(x) = 1/2\sqrt{3} < 1/3$ за $x \in U$, па значи, исполнет е условот за контракција при $q = 1/3$. Поради $f(6) = \sqrt{6} + 2$, имаме

$$d(a, f(a)) = |\sqrt{6} + 2 - 6| = |4 - \sqrt{6}| < 3 \cdot \frac{2}{3} = r(1-q).$$

Според тоа, ако ја формираме низата x_n со: $x_1 = f(6), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$, добиваме дека границата на оваа низа е 4, т.е. решението на равенката $x = \sqrt{x} + 2$ е $x = 4$.

Според (4′), ставајќи $x \approx x_n$ правиме грешка што не е поголема од 3^{1-n}.

Својството 5° е специјален случај од следнава ***локална теорема за неподвижна точка со параметар***:

6°. *Нека (M,d) е комплетен метричен простор, а U отворената топка со центар во $a \in M$ и радиус $r > 0$. Нека T е непразно множество и $F:(t,x) \mapsto F(t,x)$ пресликување од $T \times U$ во M такво што:*

$$d(a,F(t,a)) < r(1-q) \tag{11'}$$

$$d(F(t,u),F(t,v)) \le q \cdot d(u,v), \tag{2'''}$$

за секои $t \in T$, $u,v \in U$, каде што q е даден реален број таков што $0 < q < 1$. Постои еднозначно определено пресликување $f:T \to M$, такво што е точно равенството:

$$f(t) = F(t,f(t)), \tag{12}$$

за секој $t \in T$.

Доказ. Нека t е кој било (но фиксиран) елемент од T и нека пресликувањето $f_t:U \to M$ е дефинирано со:

$$f_t(x) = F(t,x). \tag{13}$$

Јасно е дека f_t ги задоволува условите (11) и (2′), од што според 5° следува дека постои $x_t \in U$, такво што:

$$x_t = f_t(x_t) = F(t,x_t).$$

Ставајќи $f(t) = x_t$ добиваме дека $f:T \to M$ е пресликување со бараните својства. □

Во 4.5 ќе ја искористиме следнава појака варијанта на 6°.

7°. *Нека се исполнети сите услови од 6° и нека $f:T \to X$ е пресликувањето што го задоволува равенството (12). Ако се додаде и претпоставката дека (T,d_*) е метричен простор и дека $F:T \times U \to M$ е непрекинато пресликување, тогаш и f е непрекинато.*

Доказ. Како и во доказот на 6°, да претпоставиме дека $t \in T$. Тогаш (имајќи ја предвид и теоремата 5°), добиваме дека $f(t)$ е граница на низата $f_n(t)$, каде што $f_0(t) = F(t,a)$, $f_{k+1}(t) = F(t,f_k(t))$; покрај тоа, имаме и:

$$d(f(t),f_n(t)) \le q^n r \tag{4''}$$

Ако се има предвид дека $0 < q < 1$ и дека десната страна на (4″) не зависи од t, добиваме дека низата $f_n(t)$ конвергира рамномерно кон $f(t)$. Покрај тоа, фактот што F е непрекинато пресликување од $T \times U$ во M, имплицира дека и $f_n:T \to X$ е непрекинато пресликување, за секој $n \in \mathbb{N}$. Од сето тоа (според 12° од 3.2) следува заклучокот дека $f:T \to X$ е непрекинато. □

4. 4. Егзистенција и единственост на решението на диференцијална равенка од прв ред

Во VI.1.4 ја формулиравме т.н. теорема за егзистенција и единственост на решението на диференцијална равенка од прв ред при даден почетен услов:

$$y' = F(x,y), \text{ при услов } y(x_0) = y_0.$$

Овде ќе го докажеме тој резултат, користејќи ја локалната теорема за неподвижна точка, т.е. својството 5°.

Во тврдењата 8° и 9° ќе претпоставуваме дека $F(x,y)$ е дадена реална функција од две реални променливи со следните својства.

а) $F(x,y)$ е непрекината на правоаголникот:

$$D = \{(x,y) | a-\gamma \le x \le a+\gamma, b-\delta \le y \le b+\delta\}, \tag{14}$$

каде што a,b,γ,δ се дадени реални броеви, при што $\gamma,\delta > 0$.

б) Постои позитивен реален број L, таков што:

$$|F(x,u) - F(x,v)| \le L|u-v|, \text{ [1]} \tag{15}$$

за кои било $(x,u),(x,v) \in D$.

Ќе го докажеме следново тврдење.

8°. *Ако се исполнети а) и б), тогаш постои позитивен број $\beta \le \gamma$, таков што постои точно едно пресликување $g \in C[a-\beta, a+\beta]$ што го задоволува равенството:*

$$g(x) = b + \int_a^x F(t, g(t))dt, \tag{16}$$

за секој $x \in [a-\beta, a+\beta]$.

Доказ. Од а) следува дека $|F(x,y)|$ е непрекината на D, па од компактноста на D следува дека постои точка $(u_0,v_0) \in D$, таква што $\mu = |F(u_0,v_0)|$ е најголемата вредност од $|F(x,y)|$ на D. За $\mu = 0$, јасно е дека постои единствено $g \in C[a-\gamma, a+\gamma]$ што го задоволува равенството (16), за секој $x \in [a-\gamma, a+\gamma]$; g е, имено, определено со: $g(x) = b$, за секој $x \in [a-\gamma, a+\gamma]$. Затоа, да претпоставиме дека $\mu > 0$, и да избереме позитивен број β, таков што:

$$\beta \cdot (\mu + L\delta) < \delta, \quad \beta < \gamma. \tag{17}$$

Ставајќи:

$$L\beta = q, \tag{18}$$

1) Неравенството (15) е познато како *липшицов* [2] *услов.*

2) Рудолф Липшиц (*Rudolph Otto Sigismund Lipschitz*, 1832-1903), германски математичар

добиваме:

$$\beta\mu < \delta(1-q), \quad 0 < q < 1. \tag{17'}$$

Да го разгледаме банаховиот простор $C(K)$, каде што $K=[a-\beta,a+\beta]$. Од технички причини, за натаму, ќе претпоставуваме дека $a=b=0$. (За образложение да се види вежба 12.)

Подолу, нултиот елемент од $C(K)$ ќе го означуваме со o, т.е. $o(x)=0$, за секој $x\in[-\beta,\beta]=K$.

Да ја разгледаме отворената топка $T_0=T(o;\delta)\subseteq C(K)$. Според тоа, T_0 се состои од сите $h\in C(K)$ такви што $|h(x)|<\delta$, за секој $x\in K$.

Ако $h\in T(o;\delta)$, тогаш со:

$$g(x)=\int_0^x f(t,h(t))\,dt \tag{16'}$$

е определено непрекинато пресликување $g:K\to I\!R$, т.е. $g\in C(K)$. Според тоа, со (16') е определено пресликување $\xi:T_0\to C(K)$. Ќе покажеме дека пресликувањето ξ ги задоволува и другите услови од 5° (за $M=C(K)$), т.е. дека важат следниве неравенства:

$$\|\xi(o)\|\le\delta(1-q), \quad \|\xi(h_1)-\xi(h_2)\|\le q\|h_1-h_2\|. \tag{19}$$

за секои $h_1,h_2\in T_0$. Навистина, ако $x\in K$, $h_1,h_2\in T_0$ тогаш

$$|\xi(h_1(x))-\xi(h_2(x))|\le\left|\int_0^x|f(t,h_1(t))-f(t,h_2(t))|\,dt\right|$$

$$\le L\left|\int_0^x|h_1(t)-h_2(t)|\,dt\right|\le L\beta\|h_1-h_2\| = q\|h_1-h_2\|.$$

т.е. $|\xi(h_1(x))-\xi(h_2(x))|\le q\|h_1-h_2\|$, па значи исполнето е второто неравенство од (19).

Ако се има предвид дека:

$$\xi(o)(x)=\int_0^x F(t,0)\,dt, \tag{16''}$$

за секој $x\in K$, добиваме дека:

$$\|\xi(o)\| \le \left|\int_0^x F(t,0)\,dt\right| \le \mu\beta < \delta(1-q).$$

т.е го добивме и првото неравенство од (19). □

9°. *Нека функцијата $F(x,y)$ ги задоволува условите а) и б). Постои позитивен број $\beta<\gamma$ и диференцијабилна функција $y(x)$ со домен $K=[a-\beta,a+\beta]$, таква што*

$$y(a)=b \tag{20}$$

и

$$y'(x)=F(x,y(x)) \tag{21}$$

за секој $x\in[a-\beta,a+\beta]$.

Д о к а з. Конјункцијата на (20) и (21) е еквивалентна со равенството

$$y(x) = b + \int_a^x F(t, y(t))dt, \qquad (16''')$$

па заклучокот следува од $8°$. □

Без да се извршат битни измени во доказот, лесно се добива следнава **теорема за егзистенција и единственост на решение на систем диференцијални равенки од прв ред.**

9'. *Нека $F_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,F_n(t_1,x_1,\dots,x_n)$ е низа реални функции непрекинати на затвореното подмножество G од $\mathbb{R}^{n+1}$ што се состои од сите точки $(t,\mathbf{x}) = (t,x_1,\dots,x_n)$, такви што:*

$$a-\gamma \le t \le a+\gamma, \quad b_i - \delta \le x_i \le b_i + \delta,$$

за секој $i \in \{1,2,\dots,n\}$, каде што a, b, γ и δ се дадени реални броеви, такви што $\gamma,\delta > 0$. Покрај тоа се претпоставува дека постои позитивен реален број L таков што

$$|F(t,\mathbf{x}) - F(t,\mathbf{y})| \le L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,$$

за кои било точки $(t,\mathbf{x}),(t,\mathbf{y}) \in G$. Тогаш, за некој позитивен реален број $\beta \le \gamma$, постои единствена низа диференцијабилни функции $f_1(t),\dots,f_n(t)$ со домен $[a-\beta, a+\beta]$ такви што:

$$f_j(a) = b_j, \qquad (20')$$

$$\frac{d}{dt}f_j(t) = F_j(t, f_1(t),\dots,f_n(t)) \qquad (21')$$

за секој $t \in [a-\beta, a+\beta]$, $j = 1,2,\dots,n$. □

4. 5. Егзистенција на имплицитни функции

Локалната теорема за неподвижна точка со параметар (т.е. $6°$) се користи и за докажување егзистенција на имплицитно дадени функции од различни видови.

Пред сè, се воочува дека и самата теорема $6°$ кажува дека, при исполнувањето на условите на теоремата, со равенката:

$$x = F(t,x) \qquad (22)$$

е определено еднозначно пресликување $f: T \to X$, такво што е исполнето (12), за секој $t \in T$. Природно е да речеме дека f е определено ***имплицитно*** (т.е ***посредно***) со помош на (22). Подолу ќе се задржиме на случајот кога F е реална функција од две реални променливи и ќе ја докажеме повторно теоремата 2 од V.2.7. За таа цел, ќе ја покажеме прво следнава теорема:

10°. *Нека $F(t,x)$ е реална функција од две реални променливи со* *домен D што е отворено подмножество S од $\mathbb{R}^2$, при што се исполнети следниве услови:*

(i) *F има непрекинат извод F_x во D.*

(ii) *Постои точка $(a,b) \in D$, таква што*

$$F(a,b) = b, \quad F_x(a,b) = 0. \tag{23}$$

Тогаш, за некој позитивен реален број γ, постои единствена функција $f(t)$ чиј домен е интервалот $T = (a-\gamma, a+\gamma)$, таква што $f(a) = b$, а за секој $t \in T$ е точно равенството (12) од 4.3. Притоа, функцијата $f(t)$ е непрекината во T.

Д о к а з. Нека q е позитивен реален број помал од 1. Од равенството $F_x(a,b) = 0$ и непрекинатоста на F_x следува дека постојат позитивни реални броеви γ_1 и δ такви што:

$$D_1 = \{(t,x) |\ a-\gamma_1 < t < a+\gamma_1,\ b_0 - \delta < x < b_0 + \delta\} \subseteq S,$$

и притоа $|F_x(t,x)| \le q$, за секоја точка $(t,x) \in D_1$. Користејќи го ова неравенство, со помош на теоремата на Лагранж, добиваме дека

$$|F(t,x) - F(t,y)| \le q|x-y|, \tag{2^{iv}}$$

за секои $(t,x),(t,y) \in D_1$.

Од непрекинатоста на F, и равенството $F(a,b) = b$, следува дека $F(t,b) \to b$ кога $t \to a$. Според тоа, постои $\gamma_2 > 0$, таква што: $|F(t,b) - b| < \delta(1-q)$ за секој $t \in (a-\gamma_2, a+\gamma_2)$.

Да ставиме $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, $T = (a-\gamma, a+\gamma)$, $U = (b-\delta, b+\delta)$. Тогаш, имаме:

$$|F(t,b) - b| < \delta(1-q),$$

за секој $t \in T$, а освен тоа F е непрекинато пресликување од $T \times U$ во $\mathbb{R}$. До бараниот заклучок доаѓаме со примена на 6° и 7°. □

Како последица од 10° се добива и споменатата теорема 2 од V.2.7, а тоа е, имено, следнава теорема:

11°. *Нека $F(t,x)$ го задоволува условот (i), а и условот (ii*) што се добива кога во (ii), (23) се замени со:*

$$F(a,b) = 0, \quad F_x(a,b) \ne 0. \tag{24}$$

Тогаш, за некој позитивен реален број γ постои единствена непрекината функција $f(t)$ со домен $T = (a-\gamma, a+\gamma)$, таква што

$$f(a) = b, \quad F(t, f(t)) = 0, \tag{25}$$

за секој $t \in T$.

Д о к а з. Можеме да сметаме дека $F_x(a,b) = 1$, бидејќи за $F_x(a,b) = k \ne 1$ би можеле да работиме со функцијата $k^{-1}F$. Тогаш, функцијата $G(t,x)$ дефинирана со: $G(t,x) = x - F(t,x)$ ги задоволува условите од $10°$, па според тоа за некој $\gamma > 0$, постои единствена непрекината функција $f(t)$ со домен T, таква што $f(a) = b$ и:

$$f(t) = G(t, f(t))$$

за секој $t \in T$. Од тоа следува дека:

$$F(t, f(t)) = f(t) - G(t, f(t)) = 0$$

за секој $t \in T$. □

Забелешка 4. Ако во (i) се претпостави дека е непрекинат и изводот F_t, во $10°$ се добива дека $x(t)$ има непрекинат извод определен со $\dot{x} = F_t + F_x \cdot x$, т.е. $\dot{x} = F_t / (1 - F_x)$. Истиот заклучок важи и во $11°$, со тоа што сега $\dot{x} = -F_t / F_x$.

Теоремата $10'$ што ќе ја формулираме подолу е обопштување на $10°$, и се докажува формално на потполно ист начин како и нејзиниот специјален случај.

$10'$. *Нека* $\mathbf{F}(\mathbf{t},\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{t},\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{t},\mathbf{x}))$ *е низа од n реални непрекинати функции во отворено подмножество S од $\mathbb{R}^{m+n}$, при што е употребена ознаката:*

$$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{26}$$

Притоа, претпоставуваме дека се исполнети следниве услови:

i') За секои $j,s = 1, \ldots, n$, во S постои и е непрекинат парцијалниот извод $F_{j,s}$ на F_j по x_s.

ii'') Постои точка $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in S$, таква што:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{O}. \tag{23'}$$

каде што $\mathbf{A}(\mathbf{t},\mathbf{x}) = [a_{js}(\mathbf{t},\mathbf{x})]$ е матрична функција определена со:

$$a_{js} = F_{j,s}. \tag{27}$$

Тогаш, за некој позитивен реален број γ, постои единствена низа непрекинати функции:

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}) = (f_1(\mathbf{t}), \ldots, f_n(\mathbf{t}))$$

чијшто домен е топката $T_0 \subset \mathbb{R}^m$ со центар $\mathbf{a}$ и радиус γ, таква што:

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \quad \text{и} \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{t}, \mathbf{f}(\mathbf{t})), \tag{28}$$

за секој $t \in T_0$. □.

Следното обопштување на $11°$ е последица од $10'$.

$11'$. *Нека се исполнети претпоставките од $10'$ со тоа што $(23')$ се заменува со:*

$$F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0, \quad \det \mathbf{A}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq 0 \tag{23''}$$

Тогаш важи истиот заклучок како и во $10'$, со тоа што (25) ќе се замени со:

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a}), \quad F(\mathbf{t}, \mathbf{f}(\mathbf{t})) = 0. \tag{28'}$$

Д о к а з. Ако $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{E}_n$, тогаш 11′ се добива ако 10′ се примени на $\mathbf{G} = \mathbf{x} - \mathbf{F}$. Но, ако $\mathbf{A}_0 \neq \mathbf{E}$, тогаш треба 10′ да се примени на $\mathbf{H} = \mathbf{x} - \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{F}$. □

З а б е л е ш к а 5. Ако во 10′ (односно 11′) се претпостави егзистенција и непрекинатост на парцијалните изводи од F по $t_1, t_2, \ldots, t_m$, тогаш постојат и парцијалните изводи на f по $t_1, \ldots, t_m$.

4. 6. Вежби

1. Нека низата x_n е дефинирана како при доказот на 1′. Според (4) ставајќи $x = x_n$ правиме грешка што не е поголема од $q^n \cdot d(x, x_0)$, па за да ја оцениме грешката, треба да знаеме позитивен број r и точка x_0 во M, такви што $d(x, x_0) \leq r$. Во примерот 1), скицирајќи ја кривата $2y = \operatorname{arctg} x + 2$, добиваме дека за $x_0 = 1$ имаме $d(x, x_0) < \pi/4$, така што ја добиваме следната оценка на грешката: $|x - x_n| < \pi/2^{n+2}$.

2. Ако низата x_n е дефинирана како при доказот на 5°, тогаш според (4′), ставајќи $x \approx x_n$, правиме грешка што не е поголема од $q^n r$.

Така, во примерот 2) имаме $q = 1/3$, $r = 3$, па $d(x, x_0) < 1/3^{n-1}$. Во тој пример немаме потреба од приближно решавање, бидејќи го знаеме точното решение $x = 4$. Но, знаејќи ја границата, можеме да определиме приближна вредност:

$$x_n = 2 + (2 + (2 + (\cdots(2 + (2 + 6^{1/2})^{1/2})\cdots)^{1/2})^{1/2})^{1/2}.$$

Според тоа, ставајќи:

$$2 = (2 + (2 + (2 + 6)^{1/2})^{1/2})^{1/2},$$

сигурни сме дека правиме грешка помала од 1/27.

3. Можно е (M, d) и (M, d_*) да се еквивалентни комплетни простори, и пресликувањето $f: M \to M$ да е контракција во (M, d), но да не е контракција во (M, d_*), како што се гледа од примерот 4).

4. Ако квадратната матрица од n-ти ред $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ задоволува некој од условите (8), (8+), ($8_{1\max}$), ($8_{2\max}$), тогаш $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ е несингуларна, но може $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ да е несингуларна, а да не е задоволен ни еден од тие услови.

5. Еден систем од n линеарни равенки со n непознати е еднозначно решлив ако и само ако е еквивалентен со систем равенки од облик (6), каде што матрицата $\mathbf{A}$ го задоволува условот (8). (Навистина, ако $\mathbf{B}$ е квадратна матрица таква што равенката $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ има еднозначно определено решение $\mathbf{x}_0$, тогаш таа равенка е еквивалентна со равенката $\mathbf{x} = \mathbf{Ox} + \mathbf{x}_0$.)

6. Нека $g(x)$ е функција во интервалот $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$ во кој постои точно еден број c таков што $g(c) = 0$. Тогаш постојат броевите $a \in \mathbb{R}, r > 0, q \in (0,1)$ и пресликување $f: (a - r, a + r) \to \mathbb{R}$, такви што $c = \lim x_n$, каде што x_n е низа во $(a - r, a + r)$ добиена, како при доказот на 5°. (Навистина, доволно е да се стави $f(x) = (x + c)/2$, $a = c$, $q = 1/2, r > 0$.)

7. Ако $\mathbf{A}$ е квадратна матрица од n-ти ред таква што $|\lambda|<1$ за секоја нејзина сопствена вредност λ, тогаш равенката (6′) има единствено решение. Притоа, решението е граница на низата x_n, каде што $\mathbf{x}_0=\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_{n+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_n+\mathbf{b}$. Имено, од направената претпоставка следува дека $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ е несингуларна матрица и притоа $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^n+\cdots$, од што следува дека:

$$\mathbf{x}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^n+\cdots)\mathbf{b}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b},$$

па:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}&=\mathbf{A}(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^n+\cdots)\mathbf{b}+\mathbf{b}\\&=(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^n+\cdots)\mathbf{b}=\mathbf{x}.\end{aligned}$$

(Да се види и 30 од IX.9.4.)

8. Ако U, M, f, a, r, q се како во 5°, тогаш постои единствено пресликување $g\colon T[a;r]\to T[a;r]$, такво што $(\forall x\in U)g(x)=f(x)$ и притоа:

$$(\forall u,v\in T[a;r])\,d(g(u),g(v))\le q\cdot d(u,v).$$

Со други зборови, секоја примена на локалната теорема 5° индуцира соодветна примена на теоремата 1°.

9. Теоремата 6° ја нарековме локална теорема за неподвижна точка со параметар. На потполно ист начин се покажува дека е точна и следнава *"нелокална" теорема за неподвижна точка со параметар.*

Нека F е пресликување од $T\times M$ во M, каде што T е непразно множество, а (M,d) комплетен метричен простор. Покрај тоа, претпоставуваме дека постои реален број $q\in(0,1)$, таков што (2‴) е точно за кои било $t\in T$, $u,v\in M$. Тогаш постои единствено пресликување $f\colon T\to M$, такво што (12) важи за секој $t\in T$. (Имено, при дадени t и $x_0\in M$ се става $x_1=F(t,x_0)$, а потоа $x_{k+1}=F(t,x_k)$ и се добива дека $f(t)=\lim_{k\to\infty}x_k$ го има бараното својство.)

10. Пред формулирањето на 9′ нагласивме дека се работи за теорема во врска со систем диференцијални равенки, но диференцијалните равенки не се експлицитно наведени.

Се работи, имено, за следниов систем диференцијални равенки:

$$\dot{x}_j=F(t,x_1,\ldots,x_n),\tag{21″}$$

при почетни услови

$$x_j(a)=b_j,\tag{20″}$$

за $j=1,2,\ldots,n$

11. Диференцијалната равенка:

$$\frac{d^nx}{dt^n}=F\left(t,\frac{dx}{dt},\ldots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

при почетни услови:

$$x(a)=b_1,\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=a}=b_2,\ldots,\left(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)_{t=a}=b_n,\tag{20‴}$$

може да се сведе на систем диференцијални равенки:

$$\begin{aligned}\frac{dx_n}{dt}&=F(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),\\\frac{dx_r}{dt}&=x_{r+1},\ \text{за}\ r=1,2,\ldots,n-1,\end{aligned}\tag{21‴}$$

при што:

$$x = x_1, \frac{dx}{dt} = x_2, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = x_n. \tag{29}$$

Од тоа следува дека како последица од $9'$ се добива теорема за егзистенција и еднозначност на решение на диференцијалната равенка (22) при почетните услови (20‴).

12. При докажувањето на $8°$, ние го докажавме специјалниот случај $8'$, што се добива кога во $8°$ се стави $a = b = 0$. За да го комплетираме доказот на $8°$, да претпоставиме дека $F(x,y)$ ги задоволува условите а) и б) од **4.4** и да дефинираме функција $G(x,y)$ со:

$$G(x,y) = F(x+a, y+b).$$

Тогаш, $G(x,y)$ ги задоволува соодветните услови а) и б), при што $a = b = 0$. Според $8'$, постои еднозначно определена функција g_* со домен $[-\beta,\beta]$:

$$g_*(x) = \int_0^x G(u, g_*(u))\,dt,$$

за секој $x \in [-\beta,\beta]$. Според тоа:

$$g_*(x) = \int_0^x F(u+a, g_*(u)+b)\,dt. \tag{16*}$$

Ако во (16*) ја извршивме смената $t = u + a$ и $g(x) = g_*(x-a)+b$, добиваме дека g го задоволува равенството (16).

ЛИТЕРАТУРА

Blanuša D.: *Laplaceova transformacija*; Zagreb 1963

Гантмахер Ф.Р.: *Теория матриц*; Москва 1988

Demidovič B.P. (redaktor) i drugi: *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*; Zagreb 1974 (превод од руски)

Kaplan W., Lewis D.J.: *Calculus and linear algebra*; John Wiley and Sons, New York 1971

Карчицка Д.: *Конечнодимензионални векторски простори*; Скопје 1985

Copson E.T.: *Metric spaces*; Cambridge University Press, 1968

Kreyszig E.: *Advanced engineering mathematics*; John Wiley and Sons, New Jork 1967

Курош А.Г.: *Курс Высшей алгебры*; Москва 1975

Курош А.Г.: *Лекции по общей алгебре*; Москва 1962

Ланкастер П.: *Теория матриц*; Москва 1982 (превод од англиски)

Малцев А.И.: *Основы линейной алгебры*; Москва 1970

Mitrinović D.S.: *Kompleksna analliza*, Beograd 1971

Обрешков Н.: *Висша алгебра*; София 1963

Perić V.: *Algebra I* (Prsteni i moduli; Linearna algebra); Sarajevo 1980

Рао С.Р.: *Линейные статискические методы и их применения*; Москва 1968 (превод од англиски)

Романовский П.И.: *Ряды Фурье, аналитические функции, преобразование Лапласа*; Москва 1964

Толстов Г.П.: *Курс математического анализа*, том II, Москва 1957

Трпеновски Б., Целакоски Н.: *Елементи од нумеричката математика*; Скопје 1992

Фихтенгольц Г.М.: *Курс дифференцијального и интегрального исчисения*, *том* I *и* II; Москва 1966

Целакоски Н.: *Задачи по линеарна алгебра*; Скопје 1985

Целакоски Н.: *Диференцијални равенки*; Скопје 1989

Чупона Ѓ.: *Предавања по алгебра*, *кн.* I; Скопје 1968

Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н.: *Предавања по виша математика*, *кн.* I, II, III; Скопје 1984

Шилов Г.Е.: *Математический анализ* (*Конечномерные линейные пространства*, Москва 1969; *Функции одного переменного, част* 3, Москва 1970)

ПОКАЗАТЕЛ НА ИМИЊА И ПОИМИ

Абел 136
Акко 16
Алгебра, банахова 327
Алгоритам, Грам-Шмитов 78
Апсциса на конвергенција 259
Аргумент на комплексен број 183

База 55, 57
–, стандардна 55
Банах 323
Бесел (*Фридрих Вилхелм*, 1784-1846) 152
Број, комплексен 180
–, –, имагинарен 181
–, –, конјугиран 181
Буњаковски (*Виктор Јаковлевич*, 1804-1889) 48

Вајерштрас (*Карл*, 1815-1897) 131, 241, 330
Вандермонд 29
Вектори 41
–, заемно нормални 48
–, колинеарни 51
–, неколинеарни 51
Вектор-колона 2, 41, 60
Вектор-редица 2, 41, 60
Вектор, карактеристичен 103
–, сопствен 103, 105, 172
Вредност, апсолутна 182
–, карактеристична 102
–, сопствена 102, 105, 172
Виет (*Франсоа*, 1540-1603) 195

Гама-функција 154
Гаус (*Карл Фридрих*, 1777-1855) 90,152
Грам 78
Граница на функционална низа 129

Даламбер 116
Дел, имагинарен 180
–, реален 180
Детерминанта 20
–, вандермондова 29
–, долнотриаголна 35
– на матрица 20
– на систем равенки 32
Дијаметар на множество 303
Димензија 56
–, бесконечна 57
Дирихле (*Петер Густав Лежен*, 1805-1859) 161
Должина на вектор 48, 280

Елемент
–, нулти 40
–, на матрица 1
Ермит 145

Жордан (*Камиј*, 1838-1922)

Закони за кратење 43
Затворање 309
Затворач 309
Збир на ред 112, 237, 324

Извод 196, 209
Изометрија 336
Изоморфизам 47
Инверзија 8, 19
–, десна 8
–, лева 8
–, обопштена 9
Интеграл
–, линиски 225
–, на Френсел 258
–, неопределен 196
–, определен 197
–, фурјеов 271
Интервал на конвергенција 137, 241
ИПЛС 290

Јадро на пресликување 50

Кантор (*Георг*, 1845-1918) 321
Кардано 192
Кватерниони 189
Кели 100
Коефициент
– на контракција 337
– на тригонометриски ред 159
–, фурјеов 162

Колона на матрица 1
Комбинација, линеарна 53
Комплемент, алгебарски 28
Компонента
– на матрица 294
– на сврзаност 314
Конволуција 274
Контракција 337
Корен
– на комплексен број 184
– на полином 98
–, примитивен, на единицата 185
Коши (*Огисӣ Луи*, 1789-1857) 48, 117, 227
Крамер 33
Кронекер 86
Критериум
–, Даламберов 116
–, интегрален 117
–, Кошиев 117
–, Лајбницов, 121
–, Маклорен - Коши 117
– на Вајерштрас 131, 241
– на Дирихле 163
–, основен Кошиев 110
–, Рабеов 120
Круг на конвергенција 241

Лајбниц (*Гоӣфрид Вилхелм фон*, 1646-1716) 121
Лежандр (*Адриен Мари*, 1752-1833) 147
Лема, Жорданова 253
Липшиц 345
Лиувил 235
Лоран 245

Маклорен (*Колин*, 1698-1746) 117, 140
Матрица 1
–, адјунгирана 30
–, горно триаголна 20
–, единична 4
–, елементарна 91
–, ермитска 283
– за премин 62
–, идемпотентна 11
–, инверзна 5
–, инволуторна 11
–, карактеристична 100
–, квадратна 5
–, колонична 2
–, комплексна 278
–, кососиметрична 11
– на линеарно пресликување 59
– на систем линеарни равенки 84
–, несингуларна 5
–, нилпотентна 11
–, нулта 3
–, ортогонална 11
–, правоаголна 1
–, проширена 84
–, редична 2
–, реципрочна 30
–, симетрична 6, 11
–, сингуларна 6
–, скаларна 107
–, спротивна 3
–, столбична 2
–, транспонирана 4
Матрици
–, еднакви 2
–, еквивалентни 83
Метод, Гаусов 90
– на последователни приближувања 339
– на прости итерации 339
– на раздвојување на променливите 170
– на Фробениус 151
– на Фурје 170
Метрика 302
– индуцирана од норма 303
–, тривијална 303
Минор 27, 81
Множества
–, раздвоени 313
–, сепарирани 313
Множество, затворено 308, 315
–, компактно 322
–, несврзано 314
–, ограничено 303
–, ортогонално 168
–, ортонормирано 168

Множество, затворено
–, отворено 305
–, сврзано 314
Моавр (*Абрахам де*, 1667-1754) 183
Модул на комплексен број 182
Морган (*Август де*, 1806-1871) 306

Неравенство
– на Коши-Буњаковски 48
– на триаголник 281
Низа, бројна 128
–, дивергентна 316
–, конвергентна 236, 239, 316
–, кошиева 318
–, ограничена 318
–, од матрици 287, 324
–, од парцијални суми 112, 235
–, рамномерно конвергентна 129, 239, 332, 333
–, скоро константна 325
–, униформно конвергентна 129, 239, 332
–, фундаментална 318
Низи, еквивалентни 319
Норма
– на вектор 280
– на комплексен број 182
– на матрица 286, 297
Носач 302

Обвивка, линеарна 45
Обинв 9
Оригинал 259
Оска, имагинарна 182
–, реална 182
Остаток 250
– на ред 118

Пермутација
–, непарна 21
–, парна 21
Подниза 317
Подмножество, комплетно 320
–, линеарно независно 57
Покривка, отворена 326
Пол 249
Поле со карактеристика два 40
Полином 202
–, ермитски 147
–, интерполационен (на Лагранж-Силвестер) 290
–, карактеристичен 100, 269
–, лежандров 150
–, матричен 98
–, минимален 99
Потпростор 44, 303
–, банахов 323
–, генериран од множество 45
Правило, Крамерово 33
Пресликување
–, константно 334
–, конформно 218
–, линеарно 45
–, непрекинато 326, 334, 336
–, нулто линеарно 60
Признак на Дирихле 161
Производ 45
–, на редови 126
–, скаларен 47, 280
Простор, векторски 41
–, –, банахов 323
–, –, комплексен 278
–, –, комплетен 319
–, –, нормиран 323
–, –, потполно несврзан 314
Простор, тополошки 310
–, –, хаусдорфов 327
Псеудоинверз 10

Рабе 120
Равенка
–, алгебарска 190
–, биномна 190
–, бранова 170
–, карактеристична 200
–, квадратна 190
–, линеарна 190
–, матрична 7
–, симетрична 191
–, триномна 190
Равенка, диференцијална
–, беселова 153
–, гаусова 152
–, ермитова 145

Равенка, диференцијална
–, лежандрова 148
–, линеарна 199
–, нехомогена линеарна 200
–, хипергеометриска 152
–, хомогена линеарна 200
Равенства, Виетови 195
Разложување, скелетно 79, 284
Ранг на матрица 81
Ранг на систем вектори 79
Ред, бесконечен 112
–, алтернативен 121
–, апсолутно конвергентен 122
–, биномен 142
–, броен 128
–, дивергентен 112, 237
–, конвергентен 112, 237
–, лоранов 245
–, маклоренов 140
–, наизменичен 121
–, ограничен 113
–, од косинуси 164
–, од матрици 287, 324
–, од синуси 164
–, семиконвергентен 123
–, со позитивни членови 114
–, степенен 135
–, тејлоров 140, 243
–, тригонометриски 159
–, условно конвергентен 123
–, функционален 131
–, –, конвергентен 131
–, –, рамномерно конвергентен 131
–, фурјеов 162
–, –, комплексна форма на 270
–, хармониски 116
–, хипергеометриски 121, 153
–, хиперхармониски 121
Редица на матрица 1
Резидуум 250
Решение
– на алгебарски равенки 190
–, нулто 33, 87
–, тривијално 33,87
Риман (*Георг*, 1826-1866) 124
Родригез (*Олинде*, 1794-1851) 150
Ротација 206

Систем
–, координатен 61
–, линеарни равенки 7, 84
–, –, скаларна форма на 89
–, ортогонален 64
–, ортонормиран 65
Слика (лапласова трансформација) 259
Спектар 272
Стегање 337
Столбец на матрица 1
Суми, парцијални (на ред) 112
Сфера 304

Тејлор (*Брук*, 1685-1731), 140, 243
Тело, некомутативно 179
Теорема за егзистенција
– на лапласова трансформација 259
– на ортогонална база 65
– и еднозначност на псевдоинверз 285
– и единственост на решение на систем ДР 345
Теорема за
– диференцирање на оригиналот 269
– единственост на оригиналот 264
– инверзна лапласова трансформација 264
– интегрирање на оригиналот 269
– комплексна транслација 260
– линеарност 260
– периодичен оригинал 261
– придушување 260
– рамномерна непрекинатост 331
– реална транслација 260
– фиксна точка 337, 342, 344, 351
Теорема на
– Абел 136, 241
– Банах 337
– Вајерштрас 330
– Де Морган 306
– Кантор 321
– Коши-Буњаковски 48
– Кронекер-Капели 86

Теорема на
– Лиувил 235
– Риман 124
– Хамилтон-Кели 100
Теорема, основна
–, –, за остатоците 250
–, –, на алгебрата 203, 236
–, –, на Коши 227
Теорема, локална, за неподвижна точка 342, 344
Теорема, нелокална, за неподвижна точка со параметар 351
Топка
–, затворена 304
–, отворена 304
Топологија 310
–, дискретна 310
–, индискретна 310
Точка 302
–, атхерентна 309
–, изолирана 249, 309
–, на згуснување 307
–, на натрупување 317
–, неподвижна 337
–, приврзана 309
–, рабна 309
–, сингуларна 249
–, –, есенцијална 249
–, –, привидна 249
–, фиксна 337
Трага на матрица 101
Транспозиција 21
–, ермитска 286
Трансформација
–, елементарна 80, 83
–, инверзна лапласова 264
–, инверзна фурјеова 272
–, лапласова 259
–, линеарна 47
–, фурјеова 271
Услов, Липшицов 345
Услови
–, гранични 171
–, Коши-Риманови 213
– на Дирихле 161
–, почетни 171

Форма, комплексна, на фурјеов ред 270
Форма, тригонометриска, на комплексен број 183
Формула
– за конечно нараснување 211
–, Кошиева интегрална 230
–, Моаврова 183
– на Родригез 150
Формули, Ојлерови 198
Функција 330
–, аналитична 140, 216
–, беселова 154
–, експоненцијална 197
–, дефинирана на спектарот од матрица 290
–, диференцијабилна 211
–, комплексна 196, 201
–, лежандрова 149
–, логаритамска 202
–, непрекината 330
–, полиномна 202, 282
–, рационална 202
–, сопствена 172
–, тригонометриска 202
Фурје 162

Хамилтон 100
Хаусдорф (*Феликс*, 1868-1942) 327
Хомоморфизам 336
Хомотетија 206

Член на детерминанта 20

Шмит 78