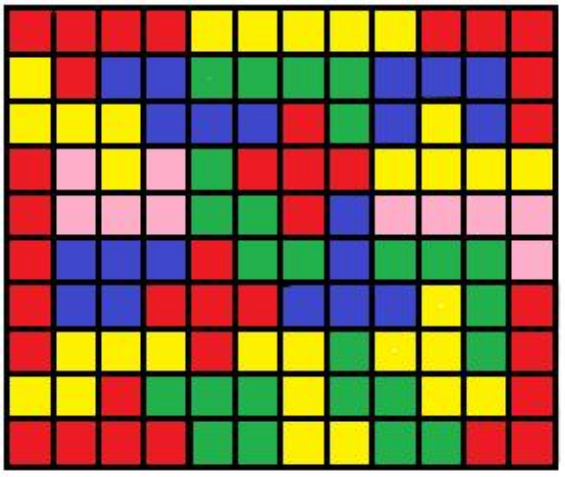
МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 43

Самоил Малчески

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ПЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ



Скопје, 2024

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка подготвителни задачи за натпревари по математика за учениците од петто одделение во основното образование. Збирката содржи 393 решени задачи кои се поделени во четири тематски целини и тоа:

- Аритметика,
- Текстуални задачи,
- Геометрија и
- Логика и комбинаторика.

Во одделните целини задачите не се поделени во посебни параграфи, но сепак истите се групирани според сродноста. Така, во делот Геометрија прво се задачите со отсечки, потоа се задачите за триаголмик, квадрат и правоаголник, за на кај да следат задачите во врска коцка и квадар, а исто така се групирани и задачите со пребројување на геометрски фигури. Слично групирање е направено и во другите три целини.

Во првиот дел од збирката се дадени формулациите на задачите, а во вториот дел за повеќето задачи се дадени целосни решенија, а само кај мал дел се дадени само одговори. На читателот му препорачувам да се обиде самостојно да ја реши секоја задача, а потоа решението кое го добил да го спореди со даденото решение, односно да го проучи даденото решение ако самостојно не успеал да ја реши задачата.

Во оваа пригода сакам да му се заблагодарам на рецензентот д-р Методи Главче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надевам дека оваа збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците за регионалните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што реков, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така и од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидам благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторот
20. мај, 2024 г.

1. АРИТМЕТИКА

1. Бројот 200 запиши го 200 пати едно по друго без растијанија. Колку цифри ќе има добиениот број и колку нули учествуваат во неговиот запис?

2. Бројот 2006 е запишан 2006 пати едно по друго без растијанија. Која цифра се наоѓа на 2006-тото место на така добиениот број?

3. Бројот 179 е запишан 100 пати (без растојание меѓу броевите).
   1) Колку цифри има бројот кој е притоа добиен?
   2) Која цифра е на 179-тото место во така добиениот број?

4. Бројот 2015 е запишан 2015 пати, но така што броевите не се одделени еден од друг.
   а) Колку цифри има така добиениот број?
   б) Која цифра е на 2015-тото место на добиениот број?

5. Пречкртај три цифри на бројот 1465830927 така што со преостанатите цифри (без промена на редоследот) е запишан:
   а) најголемиот можен седумцифрен број,
   б) најмалиот можен парен седумцифрен број.

6. Пречкртај четири цифри на бројот 812998253 така што со преостанатите цифри (без да се менува нивниот редослед) е запишан:
   а) најголемиот можен петцифрен број,
   б) најмалиот можен парен петцифрен број.

7. Во бројот 2545093409 пречкртај три цифри така што со преостанатите цифри (без да се менува нивниот редослед) ќе биде запишан:
   а) најголемиот можен седумцифрен број,
   б) најалиот можен парен седумцифрен број.

8. Пречкртај четири цифри на бројот 6250945068 така што со преостанатите цифри (без да им се менува редоследот) е запишан:
   а) најмалиот можен шестцифрен број,

б) најголемиот можен непарен шестцифрен број.

9. Пред или на крајот на бројот 4709, или меѓу неговите цифри запиши ги цифрите 2 и 5 така што добиениот шестцифрен број ќе биде:
   а) најголем можен,
   б) најмал можен.

10. Пред, или на крајот на бројот 52206, или меѓу неговите цифри запиши ги цифрите 1, 8 и 0 така што добиениот осумцифрен број ќе биде:
   а) најголем можен,
   б) најмал можен.

11. Цифрите a и b може да се пишуваат пред или по сите цифри на бројот 533780 и така се добиваат броевите:
   $ab533780, ba533780, 533780ab, 533780ba, a533780b, b533780a$.
   Кој е најмалиот, а кој е најголемиот број кој се добива од бројот 427457 ако $a = 0$ и $b = 4$?

12. Меѓу две цифри на бројот 68364 запиши ја цифрата 5 така што ќе добиениот шестцифрен број ќе биде:
   а) најголемиот можен,
   б) најмалиот можен.

13. Со помош на цифрите 9, 5, 0, 4, 2 запиши ги најмалиот и најголемиот непарен осумцифрен број во чиј запис ниту една цифра не се појавува повеќе од три пати.

14. Бројот 7525 е добиен од бројот 25 со допишување од лево на трипати поголем двоцифрен број. Опиши со зборови како од бројот 17 се добиени броевите 8517 и 1734 и пресметај колку пати добиените броеви се поголеми од почетниот број 17?

15. Запиши ги најголемиот и најмалиот деветцифрени броеви кај кои збирот на цифрите е 30, а кои се запишани само со некои од цифрите 0, 4 и 5.

16. Марија запишала неколку броеви како што е прикажано во долната табела:

2002	☼☼●●
304	☼☼☼☼▲▲▲
25	☼☼☼☼☼■■
513	☼☼☼■▲▲▲▲▲

Како Марија ќе го запише бројот 4321?

17. Марија запишала неколку броеви како што е прикажано во долната табела:

14	□ □♣♣
203	▼ ▼ ▼▼▼▼♣♣♣
110	▼ □ ▼▼□

Кој број го запишала Марија ако на таблата стоело

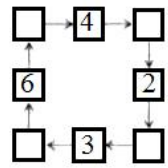
▼ ▼ ▼ ▼ □□□□□

▼▼▼▼▼▼▼▼▼□□□□□♣♣♣♣

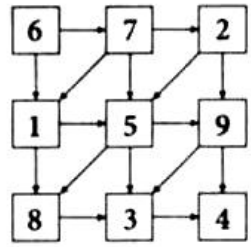
18. Во празните квадратчиња запиши ги броевите 7, 8, 1 и 5 така да одејќи во насока на стрелките го читаме:

а) најголемиот парен петцифрен број,

б) најголемиот непарен шестцифрен број.



19. На цртежот десно е дадена шемата од која е дозволено читање на повеќецифрени броеви во насока на стрелките. На пример, може да се прочита бројот 15834 или бројот 615934, но не може да се прочита бројот 16753 или бројот 3594. Кој е најголемиот, а кој е најмалиот шестцифрен број кој може да се прочита на дозволениот начин?



20. Пред или меѓу цифрите или на крајот на бројот

4 7 0 9

запиши ги цифрите 2 и 5 така што добиениот шестцифрен број ќе биде:

а) најголем можен, б) најмал можен.

21. Пред или меѓу цифрите или на крајот на бројот

5 2 2 0 6

запиши ги цифрите 1, 8 и 0 така што добиениот осумцифрен број ќе биде:
а) најголем можен,
б) најмал можен.

22. Меѓу две цифри на бројот 664422 запиши ја цифрата 3 така што ќе добиениот седумцифрен број ќе биде:
а) најголемиот можен,
б) најмалиот можен.

23. Запиши го најголемиот
а) парен, б) непарен,
седумцифрен број чиј збир на цифри е 42.

24. Запиши го најголемиот:
а) парен, б) непарен
природен број чиј збир на цифри е еднаков на 53.

25. Користејќи ги цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 (секоја точно еднаш) запиши два трицифрени броја така што:
а) нивниот збир е најголемиот можен број,
б) нивниот збир е најмалиот можен број,
в) разликата меѓу поголемиот и помалиот е најголемиот можен број,
г) разликата меѓу поголемиот и помалиот е најмалиот можен број.

26. Запиши ги два петцифрени броја така што ќе ги употребиш сите десет цифри и такви што:
а) нивниот збир е најголемиот можен број,
б) нивниот збир е најмалиот можен број,
в) разликата на поголемиот и помалиот е најголемиот можен број,
г) разликата на поголемиот и помалиот е најмалиот можен број.

27. Ако само три цифри меѓусебно ги заменат местата, тогаш најголемиот број кој може да се добие од бројот 527906 е бројот 957206. Кој е најмалиот број кој може на опишаниот начин да се добие од бројот 651870?

28. Картончиња се запишани два двоцифрени и два едноцифрени броја: 38, 66, 4 и 1. Со составување по две картончиња може да се добие пар трицифрени броеви (на пример 438 и 661). Кој е најмалиот, а кој е најголемиот збир на два така добиени броја?

29. Дали може и како со составување по две од картончињата 66, 59, 90 и 80 да се добијат два четирицифрени броја чија разлика е 2007?

30. Пресметај ги вредностите на изразите:
а) $2563+437\cdot 6$, б) $19755:5-2637$, в) $145\cdot 9+2028:26$.

31. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$A=1325:5+15:5-(99-9:9)\cdot 2-35-30.$$

32. Имаме збир од 8 собирци. Секој непарен собирок ќе го зголемиме за 182. Вториот, шестиот и осмиот собирок ќе ги намалиме за 266. Како треба да се промени четвртот собирок за да збирот остане непроменет?

33. Вредноста на изразот $a+b-c$ е 1512. Колкава ќе биде вредноста на овој израз ако секој број се зголеми за 500?

34. Вредноста на изразот $a\cdot b:c$ е еднаква на 671. Определи ја вредноста на овој израз ако секој од броевите a,b,c се зголеми три пати.

35. Пресметај го збирот:
$$1+3+5+...+2007+2009.$$

36. Пресметај ја вредноста на изразот
$$2009-2007+2005-2003+...+9-7+5-3+1.$$

37. Пресметај го збирот
$$S=1+11+21+31+...+1981+1991+2001+2011.$$

38. Пресметај го збирот
$$A=11+111+211+311+...+1811+1911+2011.$$

39. Дали постојат два последователни природни броја чиј производ е

еднаков на 200920092009...20092009 (бројот 2009 последователно е запишан 2010 пати).

40. Марко собрал три последователни природни броја, а потоа ги собрал следните три броја. Добиените збирови ги помножил и добил број чиј декаден запис завршува на 2023. Дали Марко точно пресметувал?

41. Запиши го бројот 2010 како производ на пет броја од кои секој е помал од 100 (некои множители може да се повторуваат) на пет различни начини.

42. Определи ја цифрата на единиците на производот на 17 седумки.

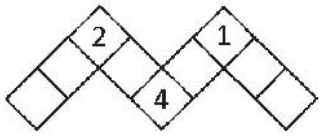
43. Определи ја цифрата на единиците на производот на 18 осумки.

44. Броевите x и y се соодветно најмалиот и најголемиот број од четвртата стотка, кои се деливи со 11. Пресметај ја вредноста на изразот $x-y$.

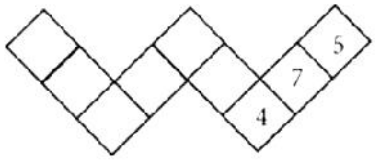
45. Реши ги равенките:
    а) $5\cdot 500\cdot 5000x = 125\cdot 2000\cdot 3000$,
    б) $650+360+790+570=(65+36+79+57)x$.

46. Реши ги равенките:
    а) $31\cdot 400\cdot 7000x = 124\cdot 2000\cdot 14000$,
    б) $6400+3600+4600+5800=(32+29+23+18)x$.

47. Во празните квадратчиња на цртежот десно запиши ги броевите 3, 5, 6, 7, 8 и 9, по еден број во секое квадратче, така што збировите на сите три броја кои се во иста „линија“ се меѓусебно еднакви.

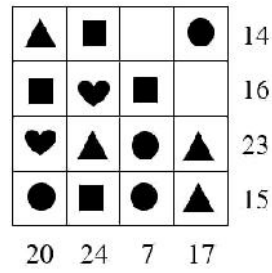


48. Во празните квадратчиња запиши ги броевите 1, 2, 3, 6, 8 и 9 така што збировите на секои три броја впишани во квадратчињата кои се во „една линија“ се меѓусебно еднак-



ви.

49. На цртежот десно е прикажана табела во која во некои полиња се внесени симболи. На секој симбол соодветствува определен број, при што на иси симболи соодветствуваат исти броеви. Броевите десно и долу се еднакви на збировите на броеви кои соодветствуваат на симболите по редици и колони. Определи ги броевите кои соодветствуваат на симболите. (Во празните квадратчиња не е запишано ништо.)



50. Користејќи ја точно еднаш секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, Матео треба да запише два броја чиј збир е 750. Колку различни можности има? Определи ја онаа можност кај која разликата на двата броја е најголема можна?

51. Меѓу дадените броеви, без да го менуваш нивниот редослед, стави знаци на аритметичките операции и загради така што ќе добие точно равенство:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 = 2006\,.$$

52. Меѓу цифрите во долната низа стави знаци за собирање, одземање и множење така што ќе добиеш точно равенство:

$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 = 2010\,.$$

(Дозволено е користење на загради.)

53. Меѓу некои цифри стави некои од знаците за собирање, одземање, множење и делење така што ќе добиеш точно равенство:

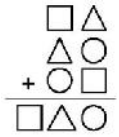
$$9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 = 2020$$

Не е дозволено користење на загради.

54. На таблата се запишани во еден ред неколку природни броеви, при што разликата на секои два соседни броја е еден ист број. Матео ги заменил цифрите со букви (различните цифри со различни букви, а исти цифри со исти букви). Кои се почетните броеви, ако Матео добил:

$$A, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CE}, \overline{FF}$$

55. Под исти фигури се кријат исти цифри, а под различни фигури, различни цифри. Пронајди ги соодветните цифри така што пресметувањето ќе биде точно:



56. Во долниот ребус на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Две букви една до друга претставуваат двоцифрен број. Операциите се реализираат по редови и колони, резултатот на операцијата е во секој ред по знакот =, а резултатот во секоја колона е под линијата. Кои цифри соодветствуваат на буквите.

$$\begin{array}{cccc} AB & - & C & =D \\ + & & : & + \\ A & + & E & =F \\ \hline AA & - & E & =G. \end{array}$$

57. Реши го бројниот ребус $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{ABC}$, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. .

58. Во следните записи замени ги буквите со цифри (различните букви со различни цифри) така што сите три равенства ќе бидат точни:

$$A+B=\overline{CD},\ E+F=G,\ H+I=J\ .$$

59. Ако $\overline{AR}+H+I=\overline{MED}$ и $P\cdot S=F$, која цифра и соодветствува на буквата F ? На различни букви соодветстуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри.

60. Во записот

$$\overline{MK}+\overline{MK}=\overline{AMS}$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно.

61. Во записот

$$\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}=\overline{AMS}$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно.

62. Во записот

$$\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}=\overline{AMS}$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно.

63. Во записот

$$\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}=\overline{AMS}$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно.

64. Дали е можно во записот

$$\overline{LETO}+\overline{LETO}=\overline{ODMOR}$$

да се заменат буквите со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри) така што добиеното равенство ќе биде точно.

65. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{SON}+\overline{SLON}=2006\,.$$

66. Во следните записи замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри) така што двете равенства ќе бидат точни:

$$\overline{AB}\cdot C=\overline{DE},\ \ \overline{FG}\cdot H=\overline{IJ}\,.$$

67. Реши го бројниот ребус

$$\overline{TRI}+\overline{PET}=\overline{OSUM}\,,$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри.

68. Во записот $\overline{MK}\cdot\overline{MK}=\overline{AMS}$ замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што множењето ќе биде точно.

69. Дешифрирај го множењето

$$\begin{array}{r} OSUM \cdot OSUM \\ \hline \quad **** \\ **** \\ **** \\ \hline ******** \end{array}$$

во кое на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Ѕвездичките се заменуваат со било која цифра.

70. Разгледај како е левата табела пополнета, па потоа доврши го пополнувањето на десната табела.

·	8	25
3	24	75
7	56	175

·		
	81	30
	108	

71. Разгледај и воочи го правилото според кое се запишани броевите во долната табела.

·	8	25
3	23	75
7	56	175

На ист начин доврши го пополнувањето со соодветните броеви на следнава табела:

·		
	606	
	505	5000

72. Доврши го пополнувањето со соодветните броеви на следнава табела:

·			
	56		1000
	21	81	

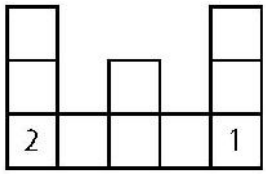
73. Во табела се запишани вкупно 15 броеви (множители и соодветните производи). Учителката Даница избришала 10 броеви и на учениците им задала точно да ги запишат броевите (да ја рекобструираат табелата). Како тоа ќе го направата учениците, ако по бришењето е добиена следнава табела:

·			
	35	63	
		99	44
			404

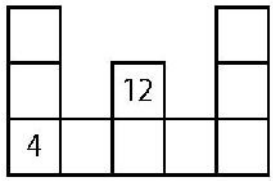
74. а) Колку милијарди треба да додадеш на една милијарда за да добиеш еден билион?
б) Колку нули треба да допишеш на една милијарда за да добиеш еден билион?

75. а) Колку пати треба да се намали еден билион за да се добие една милијарда?
б) Колку нули треба да се избришат за да од десет билиони се добијат сто милијарди?

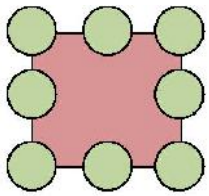
76. Во празните полиња на фигурата прикажана на цртежот десно запиши ги броевите 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што збирот на броевите во секој правец ќе биде еднаков на 14.



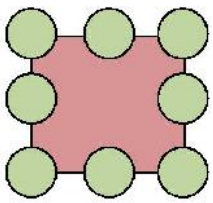
77. Во празните полиња запиши ги броевите 0, 2, 6, 8, 10, 14, 16 и 18 така што збирот на броевите запишани во секој правец ќе биде еднаков на 28.



78. Броевите 1, 2, 3, 4, 6, 7, 14 и 28 запиши ги во празните полиња така што производите на броевите на секоја од четирите страни на квадратот ќе биде еднаков на 84.



79. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 и 20 запиши ги во празните полиња така што производите на броевите на секоја од четирите страни на квадратот ќе бидат меѓусебно еднакви.



80. Во празните полиња на дадената табела запиши броеви така што нивните збирови во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала се меѓусебно еднакви.

	4	
10		
5		7

81. Во празните полиња запиши ги потребните броеви така што ќе добиеш магичен квадрат, т.е. збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков.

11	6	
		8
7		

82. Матео има „шифрарник“ кој е даден во долната табела (цртеж лево), со кој почнал да го пополнува дадениот магичен квадрат (цртеж десно).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
▲	○	□	▼	♠	♣	♥	♦	☺	☼

○○		
○□	○▲	
♦		

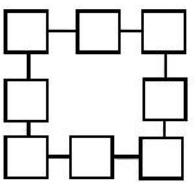
Довршиго пополнувањето кое го започнал Матео.

83. Броевите 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 со специјални знаци се запишани (на секој цифра соодветствува точно еден знак), на различни цифри различни знаци и на исти цифри исти знаци) така што е добиен магичниот квадрат прикажан на цртежот десно. Определи кој знак на која цифра соодветствува.

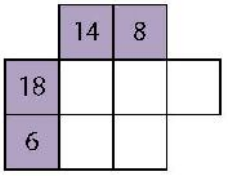
◄♥	◊◄	◄♣
◄●	◄♦	◊□
◊►	◄○	◄♠

84. Определи магичен 3×3 квадрат составен од девет последователни природни броеви, кај кој збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала, т.е. карактеристичниот збир е еднаков на 2007.

85. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 запиши ги во квадратчињата така што збирот на броевите на секоја страна на големиот квадратот е 13.

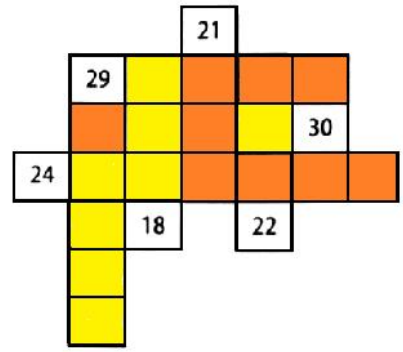


86. Во празните квадратчиња на шемата прикажана на цртежот десно запиши некои од боевите од 1 до 9 така што збирот на броевите запишани во секој ред и секоја колона биде еднаков на бро-

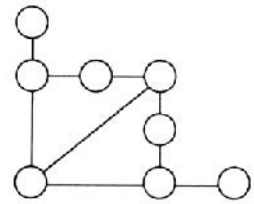


јот запишан во осенченото поле. Броевите кои ги запишуваш не смее да се повторуваат.

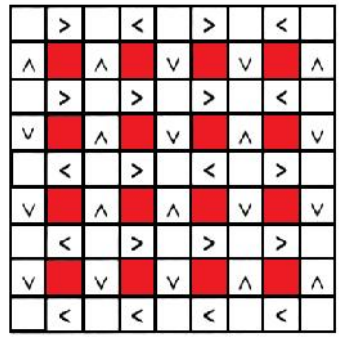
87. Во празните квадратчиња запиши по еден од броевите од 1 до 9 така што:
    - во жолтите квадратчиња се запишани парни броеви, а во портокаловите непарни броеви,
    - збирот во даден ред, односно дадена колона да е еднаков на бројот кој е веќе запишан во тој ред, односно во таа колона.
    - во секој ред и секоја колона некој од броевите е запишан најмногу еднаш.



88. Во кругчињата запиши ги броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, во секое кругче по еден број и во различни кругчиња различни броеви, така што збирот на броевите броеви кои се на иста права е 15.



89. Во празните полиња запиши ги цифрите од 1 до 5 така што да соодветствуваат на знаците $>$ и $<$. Секоја цифра се појавува во секој ред и секоја колона точно еднаш.



90. Во низата броеви
    а) $AABB, CDD, CB, B$,
    б) ABB, CAA, CB, B,

секој член, почнувајќи од вториот, е еднаков на производот на цифрите на претходниот. Определи ја низата. (На исти букви соодветствуваат исти цфири, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.)

91. Со помош на домината

илустрирај го множењето на броевите 551 и 4 така што во првиот ред ќе го запишеш трицифрениот, во вториот ред едноцифрениот број и во третиот ред нивниот производ.

92. Со помош на домината

илустрирај го множењето на броевите 223 и 5 така што во првиот ред ќе го запишеш трицифрениот, во вториот ред едноцифрениот број и во третиот ред нивниот производ.

2. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Новко во тетратката запишал еден двоцифрени еден четирицифрен број и рекол: „Збирот на броевите кои ги запишав е еднаков на 2007, а нивата разлика е најмалата можна.“ Кои броеви ги запишал Новко?

2. Ана рекла: „Замислив еден четирицифрен и еден трицифрен број, чија разлика е 9863 и кои имаат најголем можен збир“. Кои броеви ги замислила Ана и кој е тој најголем можен збир?

3. На еден двоцифрен број од десната страна е допишан двоцифрен број кој е три пати поголем од почетниот двоцифрен број. Така добиениот четирицифрен број е собран со бројот кој е два пати поголем од почетниот двоцифрен број и е добиен бројот 2205. Определи го почетниот двоцифрен број.

4. На еден двоцифрен број од десната страна му е допишан двоцифрен број кој е два пати поголем од почетниот (двоцифрен) број. На така добиениот четирицифрен број му е додаден број кој е 50 пати поголем од почетниот двоцифрен број, по што е добиен збирот 7296. Определи го почетниот двоцифрен број.

5. На еден двоцифрен број од десно му е допишан двоцифрен број кој е два пати поголем од почетниот двоцифрен број. Вака добиениот четирицифрен број е собран со 10 пати поголем број од почетниот број и е добиен бројот 2800. Определи го почетниот број.

6. Разликата на еден трицифрен и еден двоцифрен број е 989. Определи го збирот на овие броеви.

7. Разликата на еден четирицифрен и еден трицифрен број е 9899. Определи го збирот на овие броеви.

8. Третина на бројот $A = 2013$ е еднаква на осмина на бројот B. Определи го бројот B.

9. Петтина од половина на бројот A е еднаква на три осмини од бројот B. Ако $B = 2448$, определи го бројот A.

10. За колку ќе се зголеми бројот 2013 ако меѓу неговите три цифри 0 и 1 се запише една, две или три нули?

11. За колку ќе се зголеми бројот 2014 ако меѓу неговите цифри 0 и 1 се запишат четири нули?

12. Збирот на два броја е 15. Ако поголемиот број се намали за 4, производот на двата броја ќе се намали за 16. Кои се тие броеви?

13. Збирот на два броја е 119, а едниот број е шест пати поголем од другиот број. Кои се тие броеви?

14. Гроздан замислил два броја од кои едниот е пет пати поголем од другиот. Кои броеви ги замислил Гроздан ако нивната разлика е трицифрен број кој се запишува со исти цифри?

15. Збирот на два броја е 2009. Ако првиот се подели со 3, а вториот се зголеми за 3 се добиваат два еднакви броја. Определи ги дадените броеви.

16. Збирот на четири броја е 2340. Ако на првиот број му се додаден 2, од вториот се одземе 2, третиот се помножи со 2 и четвртиот се подели со 2, се добива еден ист број. Кои се тие четири броја?

17. Збирот на четири природни броја е 208. Ако на првиот му се додаде 3, или од вториот број се одземе 3, или третиот број се помножи со 3, или четвртиот број се подели со 3, секогаш се добива ист резултат. Кои се тие броеви?

18. Збирот на четири природни броја е 275. Ако првиот број се зголеми за 4, вториот се намали за 4, третиот се зголеми 4 пати, а четвртиот се намали 4 пати, тогаш се добива еден ист број. Кои се тие броеви?

19. Збирот на три броја е 2010. Ако на првиот број му се додаде 1, од вториот се одземе 2, а третиот се помножи со 3, се добива еден ист

број. Кои се трите броеви?

20. Иван замислил некој број, кој потоа го зголемил за 30 и го добил истиот резултат кога тој број го помножил со 6 и добиениот производ го намалил за 30. Кој број го замислил Иван?

21. Анастасија замислила два броја од кои едниот е 4 пати помал од другиот. Кои броеви ги замислила Анастасија ако нивната разлика е четирицифрен број кој се запишува со исти цифри?

22. Збирот на два броја е 2012. Ако првиот се подели со 4, а другиот се намали за 2 се добиваат два еднакви броја. Кои се тие броеви?

23. Збирот на два броја е 20122012. Ако првиот се зголеми за 201200, а вториот се намали за 20120, се добиваат два еднакви броја. Кои се тие броеви?

24. Збирот на еден број и неговата половина е за 3 помал од двократната вредност на тој број. Кој е тој број?

25. Збирот на еден број и неговите две третини е за 20 помал од трикратната негова вредност. Кој е тој број?

26. Збирот на два броја е 1234567. Ако едниот од нив се зголеми за 2012, а другиот се подели со 2, се добиваат два еднакви броја. Кои се тие броеви?

27. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е еднаков на 624. Разликата е помала од намалителот за 56. Пресметај ги намаленикот намалителот и разликата.

28. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е 4030. Разликата е поголема од намалителот за 2013. Пресметај ги намаленикот, намалителот и разликата.

29. Еден двоцифрен број има 4 десетки. Ако му се додаде бројот 27 ќе се добие број запишан со истите цифри како почетниот број, но во обратен редослед. Кој е тој број?

30. Еден двоцифрен број има 5 десетки. Ако му се додаде бројот 36 се добива бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Кој е тој број?

31. Кои природни броеви можеш да ги намалиш за најголемиот непарен број од третата илјадарка така што ќе добиеш разлика која е помала од најмалиот парен број од втората илјадарка?

32. Збирот на осум последователни природни броеби е еднаков на 92. Кои се тие броеви?

33. Некој број требало да се подели со 24, а по грешка е поделен со 14 и е добиен бројот 72. Колку требало да биде количникот ако немало грешка?

34. Збирот на два броја е 22. Ако поголемиот број се намали за 4, нивниот производ ќе се намали за 28. Кои се тие броеви?

35. Производот на два броја е 2014. Ако едниот од нив се зголеми за 7, тогаш производот ќе биде 2280. Кои се тие броеви?

36. Производот на два броја е 2014. Ако едниот од нив се намали за 14, тогаш производот ќе биде 1482. Кои се тие броеви?

37. Разликата на два броја е 9. Ако помалиот број го зголемиме за 2, нивниот производ ќе се зголеми за 30. Кои се тие броеви?

38. Два броја се разликуваат за 6. Ако на поголемиот број му се додаде 7, а на помалиот број му се додаде 8, тогаш нивниот производ се зголемува за 254. Кои се тие броеви?

39. Производот на три броја е 240. Производот на првиот и вториот број е 60, а производот на првиот и третиот број е 24. Кои се тие броеви ?

40. Колку цифри се употребени за нумерирање на сите страници на книга која има 58 листови, ако нумерирањето започнува со бројот 1?

41. Колку цифри се употребени за нумерирање на непарните страници на

книга која има 124 страници?

42. Колку страни има книга кај која првите три страници не се нумерирани, а преостанатите страници се нумерирани почнувајќи од бројот 1 и за нивното нумерирање се употребени 357 цифри?

43. Колку страници има книга чии први три страници не се нумерирани, а преостанатите се нумерирани почнувајќи од бројот 1 и за нивната нумерација се употребени 417 цифри?

44. За нумерација на страниците на една книга се употребени 210 цифри. Колку листови има книгата ако нумерацијата почнува со бројот 1?

45. Збирка задачи по математика има непарен број страници. За нумерацијата на парните страни на збирката се употребени 364 цифри. Колку цифри се употребени за нумерацијата на целата збирка?

46. Природните броеви од 1 до 9999 се запишани еден по друг без растојание. Така настанал џиновскиот број 12345...9996999799989999. Колку цифри се употребени за запишување на овој број?

47. Првите десет илјади природни броеви се запишани во ред еден по друг без растојание. Така е добиен бројот 123456789...9998999910000. Колку цифри се употребени за запишување на овој број?

48. На стартот на училишниот маратон на натпреварувачите им се поделени броевите 1, 2, 3, ... за чија изработка вкупно се употребени 312 цифри. Колку натпреварувачи имало на стартот на маратонот?

49. Кога се пријавувале за регионалниот натпревар по математика на учениците им се поделени ливчиња со броевите 1, 2, 3, ... за чија изрботка биле употребени 303 цифри. Колку ученици се пријавиле?

50. Пабло запишал 500 последователни природни броеви и притоа употребил вкупно 2015 цифри. Кој е најмалиот број кој притоа го запишал Пабло?

51. Збирот на два броја е 2017. Ако поголемиот број се подели со пома-

лиот се добива количник 3 и остаток 5. Кои се тие броеви?

52. Разликата на два броја е 2017. Ако поголемиот број се подели со помалиот се добива колични 4 и остаток 1. Определи ги овие броеви.

53. Со цифрите 1, 2 и 3 може да се запишат шест трицифрени броеви, така што секоја цифра се јавува точно еднаш во секој од овие броеви. Најди два такви броја чиј збир е 444. Колку решенија има задачата?

54. Со цифрите 1, 2, 3 и 4 можеш да запишеш 24 четирицифрени броеви при што секоја цифра во секој од овие броеви е употребена точно еднаш. Определи два такви броја чиј збир е 7733. Колку решенија има задачата?

55. Определи ги сите броеви од видот $\overline{xyxyxy}$ кои се деливи со 2, така што бројот $\overline{yyxxyx}$ е делив со 5, каде x и y се ненултни цифри.

56. Хокеарска екипа се состои од 6 играчи на мразот и 9 резерви. Секој од овие 15 играчи поминал исто време во игра на мразот (замените не се ограничени). Колку време секој играч поминал на мразот ако нат-преварот траел 30 минути?

57. Матеј стигнал на стадионот 15 минути по 16:48 (16 часот и 48 минути). Во колку часот Матеј тргнал од дома, ако за да стигне до стадионот тој одел 78 минути?

58. Магдалена во библиотека стигнала 23 минути пред 11 часот и 18 минути. Во библиотеката останала 45 минути. Во колку часот Магдалена излегла од библиотеката?

59. Горјан во просек $\frac{1}{3}$ од денот спие, $\frac{1}{4}$ од денот го поминува во училиште, $\frac{1}{10}$ од денот пишува домашни задачи и учи дома, а преостанатото време од денот го поминува во игра, спорт и посетува курс по англиски јазик. Колку време на Горјан му преостанува за играње и преостанатите активности?

60. Два часовника, еден со златни, а другиот со сребрени стрелки, нави-

ени се на пладне во недела на 2 ноември 2023 година и покажувале точно време. Часовникот со златни стрелки оди побрзо половина минута на час, а часовникот со сребрени стрелки работи точно. Кој ден и во колку часот двата часовника повторно за прв пат ќе покажуваат точно време?

61. Два ѕидни часовника се наместени да покажуваат точно време на 21.03.2022 година во 9 часот навечер. Едниот работи точно, а другиот брза по 3 минути на секој час. На кој датум и во колку часот стрелките на двата часовника ќе бидат пак во иста положба како на 21.03.2022 година во 9 часот навечер?

62. Ведран и Ласте истовремено со велосипеди тргнале на пат од Прилеп за Битола. Ведран патувал 2 часа 22 минути и 33 секунди, а Ласте патувал 1 час 50 минути и 2000 секунди. Кој стигнал прва на целта?

63. Кога утрината Алекса тргнал на училиште стрелките на часовникот се поклопувале и биле меѓу 7 и 8. По училиштето, кога Алекса дошол дома меѓу 13 и 14 часот, погледнал на часовникот и видел дека стрелките имаат ист правец, но не се поклопуваат. Колку време поминало откако Алекса тргнал на училиште до враќањето дома?

64. Најдолговечните луѓе живеат преку 100 години, дури и до 138 години. Дали постои човек кој живеел од 1000000 часови? А 2000000 часови?

65. Златен ретривер е раса на кучиња која просечно живее од 10 до 12 години. Дали може да очекуваме дека некој златен ретривер во нормални услови ќе живее 100000 часови? А 150000 часови?

66. Рампо $\frac{1}{10}$ од деновите во месец април ги поминал на одмор во Охрид, $\frac{1}{5}$ на службено патување во Скопје, а остатокот од месецот го поминал во својат град Прилеп. Колку денови во месец април Рампо поминал во Прилеп?

67. Даница и Вера прославуваат роденден во ист ден. Тие заклучиле дела по две години Даница ќе има два пати повеќе години отколку што имала пред две години, а дека по три години Вера ќе има три пати

повеќе години отколку што имала пред три години. Која е постара, Даница или Вера?

68. Дедо и внук заедно имаат 65 години. Внукот има точку месеци колку што дедото има години. Колку години има дедото, а колку внукот?

69. Татко и син заедно имаат 35 години. Синот има два пати повеќе месеци од бројот на татковите години. Колку години има таткото, а колку синот?

70. На едниот тас на вагата има четири еднакви поголеми коцки, а на другиот тас има пет помали еднакви коцки. Вкупната маса на вагата е 720 грама. Определи ја масата на едната мала и едната голема коцка, ако вагата е во рамнотежа.

71. Вкупната маса на чаша наполнета со вода е 300 грама и е еднаква на масата на две празни чаши и тег од 60 грама. Колку е масата на водата во чашата?

72. Тројца рибари заедно уловиле 146 килограми риба. Првиот продал 22 килограми, вториот продал 20 килограми и третиот продал 32 килограми, по што им останале еднакви количества риба. Колку килограми риба уловил секој од тројцата рибари?

73. Слонот Дамбо има 28 пати повеќе килограми од лавот Симба, а Симба има17 пати повеќе килограми од мајмунот Манки. Колку пати Дамбо има поголема маса од Манки. Ако Манки има 14 kg , колку килограми заедно имаат Дамбо, Симба и Манки?

74. Вкупната маса на лубеница, диња и ананас е 12 kg . Ако лубеницата има три пати поголема маса од дињата и ананасот заедно, а дињата има два пати поголема маса од ананасот, определи ја масата на секое овошје одделно.

75. Лубеница и диња имаат вкупна маса 30 kg. Дињата и тег од 3 kg имаат двојно помала маса отколку што е масата на лубеницата. Колку килограми изнесува разликата на масите на лубеницата и дињата?

76. Вкупната маса на лубеницата и дињата кои ги купил Трајко била $6\,kg\ 400\,g$. Масата на лубеницата и на тег од $50\,g$ е еднаква на масата на дињата и на тег од $4\,kg$. Определи ги масите на дињата и лубеницата.

77. Од $5\,kg$ пченица се добива $4\,kg$ брашно, а од $2\,kg$ брашно се добива $3\,kg$ леб. Колку килограми леб се добива од $300\,kg$ пченица?

78. Еден сточар на пазар однесол јаре, теле и овен. Јарето и овенот заедно имале 90 *kg*, јарето и телето 186 *kg*, а овенот и телето 240 *kg*. По колку килограми имало секое животно?

79. Свеќа висока $18\,cm$ рамномерно гори и целата изгорува за три часа. По колку минути од моментот кога е запалена свеќата ќе биде висока $13\,cm$?

80. Растојанието меѓу столбовите на далекуводот е $50\,m$. Колку столбови треба да се постават на растојание од $4800\,m$?

81. Праволиниска ограда е градена со помош на столбови кои меѓусебно се оддалечени по $4\,m$. Колку метри е долга оградата ако истата има 55 столбови?

82. Растојанието меѓу телефонските столбови на една улица долга $1600m$, било $80m$. Заради садење нови дрвца на улицата, столбовите биле разместени така што новото растојание меѓу столбовите е $50m$. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?

83. Трака од сатен се пакуваат во ролни од по $15\,m$. Кој е најмалиот број пакување потребно за 16 марами во форма на триаголник со страни $1\,m, 80\,cm, 80\,cm$ се порабат со таа трака, т.е. траката да се сошие по работ на марамата?

84. Кој е најголемиот број чаршави во форма на правоаголник со димензии $180\,cm$ и $140\,cm$ кои што можат да се порабат со украсна трака долга $80\,m$?

85. Мерачот за поминати километри во автомобилот на дедо Стојан покажува дека автомобилот поминал 176459 километри. По колку километри мерачот за прв пат повторно ќе покажува број на километри кој е запишан со различни цифри?

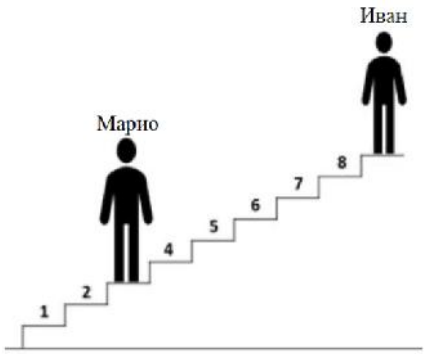
86. Во еден автомобил мерачот на поминатите километри покажува дека тој автомобил поминал 76488 километри. По колку километри прв пат мерашот ќе покажува број кој е запишан само со непарни цифри?

87. Срнчето Бамби за половина секунда скокнува 1 метар, а неговата мајка за 1 секунда скокнува 3 метри. Бамби и мајка му истовремено и од исто место почнале да скокаат кон изворот со вода кој бил оддалечен 240 метри. Колку секунди мајката ќе го чека Бамби кај изворот?

88. Од две места, меѓу кои должината на патот е $210\,km$, истовремено возејќи секој со постојана брзина тргнале во пресрет еден на друг два моторциклисти. Едниот од нив секој час поминувал 5 километри повеќе од другиот. Моторциклистите се сретнале по 2 часа возење. Определи ги брзините на двајцата моторциклисти.

89. Должината на патот меѓу две места е 250 километри. Од двете места еден кон друг истовремено трнале два автомобила. Едниот од нив секој час минува 10 километри повеќе од другиот. Со која брзина се движел секој автомобил, ако по 2 часа патување им останале уште 30 километри до средбата?

90. Марко стои на третото скалило (броејќи од дното на скалите) и тогаш неговата височина заедно со скалилата е еднаква на $2\,m$. Иван кој е $30\,cm$ понизок од Марко, стои на деветтото скалило (броејќи од дното на скалите) и тогаш неговата височина заедно со скалилата е еднаква на $2\,m\,60\,cm$. Сите скалила се со иста височина. Колку е висок Марко, а колку е висок Иван?



91. Кучето Арон гледа болви кои од исто место скокаат право кон него. Има мала и голема болва. Кога големата болва ќе направи 7 еднакви скокови, до Арон и недостасуваат $3\,cm$. Кога малата болва ќе направи 10 еднакви скокови, до Арон и недостасува $1\,cm$. Должината на секој скок изразена во сантиметри е природен број. Ако на почетокот болвите од Арон се оддалечени повеќе од $2\,m$, која е најмалата можна должина на скокот на малата болви?

92. Ана, Мијана и Татјана направиле овошен сок и го туриле во три сада. Бидејќи не биле задоволни од поделбата, Ана половина од својот сок го претурила во садот на Мирјана, потоа Мирјана третина од сокот го претурила во садот на Татјана, а на крајот Татјана четвртина од сокот од својот сад го претурила во садот на Ана. Потоа во секој сад имало по 6 литри сок. Колку литри сок имало во секој сад на почетокот?

93. Илија, сопственик на продавница за овошје, од земјоделецот Павле купил 18 лубеници по 60 денари за една лубеница. Додека ги носел во продавницата му паднале 6 лубеници и се скршиле. По која цена Илија треба да ја продаде секоја од преостанатите лубеници така што ќе ги поврати своите пари?

94. Андријан во текот на мај, јуни, јули и август (вкупно 123 дена) треба на своите соседи да им ја коси тревата и да го полева цвеќето. Тревата треба да ја коси секој шести ден, а цвеќето да го полева секој трет ден. За секое косење на тревата добива по 2 евра и 40 центи, а за секое полевање на цвеќето по 75 центи. Третина од целата своја заработувачка Андријан планира да ја поклони на својата сестра Маја. Колку пари ќе и даде на Маја ако на 1. мај тој косел трева и го полевал цвеќето?

95. Три другари Андреј, Стојан и Методи заедно имаат 2007 денари. Ако Андреј му даде на Стојан 100 денари, а на Методија 60 денари, тогаш сите тројца ќе имаат еднакви суми пари. Колку пари има секое дете?

96. Заедничката заштеда на тројца другари била 1430 денари. Тие одлучиле да задржат еднакви суми пари, а остатокот од парите го дале за купување на поклон на нивната другарка Марија. Марко дал 246 денари, Илија дал 317 денари и Павел дал 294 денари. Колку пари

имало заштедено секое дете?

97. Ана, Јована и Наумка заедно имаат 5724 денари. Ана има два пати помалку денари од парите што заедно ги имаат Наумка и Јована, а Наумка има 500 денари повеќе од Ана. Колку пари има секое девојче?

98. Тројца другари тргнале во лов и се договориле тоа што ќе уловат да го поделат на три еднакви дела. Заедно уловиле само фазан и зајак. Првиот ловец го добил фазанот, а вториот зајакот, при што вториот ловец му дал на првиот 150 денари, а на третиот 500 денари. Колку чини фазанот, а колку зајакот?

99. Таткото на Темјана претходните девет години секој месец имал иста плата, која била 87831 денар. Секој месец тој штедел точно деветтина од платата. Колку пари заштедил таткото на Темјана за овие девет години?

100. Госпоѓите Милена, Цветанка и Марта се здружиле заедно да купат пиперки за ајвар и собрале 3490 денари. Ако Милена имала 270 денари повеќе, а Цветанка 140 денари повеќе, тогаш секоја ќе дадела иста сума на пари. Колку пари дала секоја од трите госпоѓи?

101. Зоран и Весна заедно заштедиле 2024 денари. Притоа петтина на заштедата на Зоран е еднаква на третина на заштеата на Весна. Кој заштедил повеќе пари и за колку?

102. Братот заштедил 2019 денари повеќе од сестрата. Од своите заштеди тие задржале еднакви суми пари, а остатокот го потрошиле за поклон за годишнината на нивните родители. Братот задржал петтина од својата заштеда, а сестрата задржала половина од својата заштеда. Колку пари потрошиле за поклонот на родителите?

103. Драгана за палто, дуксер и чевли платила 16100 денари. Палтото го платила 7400 денари поскапо од дуксерот, а дуксерот и палтото ги платла 7100 денари поскапо од чевлите. Колку платила Драгана за палтото, колку за дуксерот и колку за чевлите?

104. За 6 кокошкини, 3 паткини и 1 гускино јајце треба да се платат 100

денари, а исто толку треба да се платат за 2 кокошкини, 1 паткино и 3 гускини јајца. Колку гускини јајца може да се купат за 100 денари?

105. Ивана отишла на пазар да купи јаболка. За да купи $8\,kg$ јаболка и недостасуваат 15 денари, а ако купи $5\,kg$ јаболка и преостануваат 33 денари. Колку пари чини килограм јаболка? Колку пари имала Ивана?

106. Мајсторот Рампо воведува парно греење, а наплатува така што за својата работа зема половина од цената на потрошениот материјал и за секој ден работа додава уште по 1700 денари. Колку г-нот Јакопетрески платил за работата на мајсторот Рампо, а колку за материјалот, ако вкупно платил 33480 денари, а работата била завршена за 3 дена?

107. На пазар $3\,kg$ грозје чинат колку што чинат $5\,kg$ круши. Лена купила $2\,kg$ грозје, а Елена $3\,kg$ круши. Кој потрошил повеќе пари Лена или Елена?

108. На пазарот $3\,kg$ домати чинат колку $2\,kg$ пиперки, а $2\,kg$ домати колку $1\,kg$ краставици. Мила купила $5\,kg$ домати, Ангелина $3\,kg$ краставици, а Виолета $3\,kg$ пиперки. Која од нив трите потрошила најмногу пари?

109. Од 1. март до 5. март Ратка потрошила $\frac{1}{6}$ од своите пари, Даница потрошила $\frac{1}{5}$ од своите пари и Љубинка потрошила $\frac{1}{4}$ од своите пари. Вечерта на 5. март трите другарки имале еднакви суми пари и вкупно 1800 денари. Колку пари имале девојчињата на 1. март наутро?

110. Раде и Пецо заедно имаат 2009 денари. Ако $\frac{1}{9}$ од парите кои ги има Раде е за 10 денари поголема од $\frac{1}{10}$ од парите кои ги има Пецо, колку пари има секој од нив?

111. Андреј, Бојан и Вангел понеле на екскурзија вкупно 2006 денари. Андреј на екскурзијата потрошил $\frac{3}{4}$ од своите пари, Бојам потрошил

$\frac{5}{6}$ од своите пари и Вангел потрошил $\frac{6}{7}$ од своите пари. Сите тројца од екскурзијата се вратиле со иста сума пари. Колку пари понело секое дете на екескурзијата?

112. Ацо, Војдан и Симон заедно имаат 2016 денари.. Кога Ацо потрошил $\frac{2}{3}$ од своите пари, Војдан потрошил $\frac{3}{4}$ од своите пари и Симон потрошил $\frac{6}{7}$ од своите пари, им останале еднакви суми пари. Колку пари имал секој од нив?

113. Анка, Венда и Симона отишле во слаткарница и вкупно понеле 2016 денари. Анка потрошила $\frac{2}{3}$ од своите пари, Венда потрошила $\frac{3}{4}$ од своите пари и Симона потрошила $\frac{5}{6}$ од своите пари. На Венда и Симона им останале еднакви суми праи, а на Анка и останала сума колку на Венда и Симона заедно. Колку пари имало секое девејќе на почетокот?

114. Двајца кувари за 10 минути испекле 22 палачинки. Колку палачинки ќе испечат четири кувари за еден час, ако сите кувари работат со иста брзина?

115. Тројца моделари можат за 3 дена да направат три модели на еден вид авион. Колку модели на овој авион може да направат 4 моделари за 6 дена?

116. Еден работник може да заврши некоја работа за 4 часа, а друг работник истата таа работа може да ја заврши под истите услови за 12 часа. За колку часа ќе биде завршена работата ако двајцата работници работат заедно?

117. Една работа 6 работници завршуваат за 8 дена. Но, 5 дена по почетокот на работата на тимот му се придружиле уште неколку работници, па така работата е завршена еден ден порано од планираното. Колку работници дошле да помогнат? (Сите работници работат со исто темпо.)

118. Сашо имал три кутии со џамлии. Половина од џамлиите од првата

кутија ги ставил во втората кутија, потоа третина од џамлиите кои се сега во втората кутија ги ставил во третата кутија, а потоа четвртина од џамлиите кои се во третата кутија ги ставил во првата кутија. На крајот во секоја кутија имало по 12 џамлии. Колку џамлии имало во секоја кутија на почетокот?

119. Во една сала има 36 столици. Некои имаат 3 ногалки, а некои 4 ногалки. Вкупниот број ногалки е 127. Колку столици се со 4 ногалки?

120. Во книжара стигнале пет кутии фломастери и на секоја кутија пишувало колку фломастери има: 130, 110, 100, 115 и 105. Во секоја кутија имало фломастери со иста боја: или црвени или сини. Кога се продале сите фломастери од една кутија, се покажало дека сини фломастери останале три пати повеќе од црвени фломастери. Колку сини фломастери останале?

121. За опремување на една детска градинка се купени 144 играчки: автомобилчиња, топки и кукли. Бројот на автомобилчињата е една четвртина од бројот на сите играчки, а на секои четири кукли се купени по пет топки. Колку топки се купени?

122. На три полици вкупно се наредени 400 книги. Ако 10 книги се преместат од втората на третата полица, тогаш на првата и втората полица ќе има еднаков број книги, а на третата полица бројот на книгите ќе биде еднаков на вкупниот број книги кои останале на првата и втората полица. Колку книги има втората полица?

123. Тројца пријатели биле на риболов и секој десетти улов наместо риба бил чевел. Колку риби морале да уловат рибарите за да се „обујат“?

124. Два зајака за 3 дена јадат 24 моркови. Колку моркови ќе изедат 3 зајаци за 5 дена?

125. Три мачки за 4 дена фаќаат 24 глувци. За колку дена 5 мачки ќе фатат 30 глувци?

126. Во Мравовелеград живеат 448 пати повеќе мравки отколку во Мравосело, а 28 пати повеќе мравки отколку што живеат во Мравоград. Ако

во Мравосело живеат 2009 мравки, колку мравки живеат во Мравоград?

127. На еден концерт имало 1645 посетители, момчиња и девојчиња. Во секој ред седеле по 18 девојчиња и 17 момчиња. Колку девојчиња, а колку момчиња биле на овој концерт?

128. На еден екипен натпревар учествувале 1435 ученици од петто, шесто, седмо, осмо и деветто одделение. Во секоја екипа имало 5 ученици од петто, 6 ученици од шесто, 7 ученици од седмо, 8 ученици од осмо и 9 ученици од деветто оделение. Колку ученици имало од секое одделение на натпреварот?

129. Пет бригади со еднаков број акцијаши во секоја бригада тргнале на работна акција. Командантот на акцијата застанал пред акцијашите и ги построил така што во секоја бригада акцијашите биле построени по 8 мина во секој ред. Акцијашот Марко бил во осумнаесеттиот ред во својата бригада, односно во петтиот ред сметајќи од крајот на бригадата. Колку акцијаши имало на оваа работна акција?

130. На една екскурзија имало 60 ученици. Девојчињата се сместени во трикреветни, а момчињата во чеирикреветни соби. Бројот на четирикреветните соби е за еден поголем од бројот на трикреветните соби и сите кревети биле искористени. Колку момчиња и колку девојчиња имало на екскурзијата?

131. Во една овошна градина се засадени 3600 садници: јаболка, круши и сливи. Бројот на крушите е петти дел од бројот на сите садници, а на секои три садници сливи се засадени пет садници јаболка. Колку садници јаболка се засадени во оваа овошна градина?

132. На секое од своите три деца Цветанка им дала еднаков број мандарини. Кога секое дете изело по 4 мандарини, вкупно им останале онолку мандарини колку што секое дете добило на почетокот. Колку мандарини добило секое дете?

133. На секој од своите четири внуци бабата му дала еднаков број јаболка. Кога децата изеле по три јаболка, им останале онолку јаболка колку

што имало секое дете на почетокот. Колку јаболка добило секое дете?

134. Три девојчиња вкупно набрале 480 јаболка. Ако второто девојче му даде на третото 50 јаболка, тогаш второто и третото девојче ќе имаат еднаков број јаболка, а третото ќе има 40 јаболка помалку отколку првите две девојчиња заедно. Колку јаболка набрало третото девојче?

135. Во едно одделение имало 5 навивачи повеќе за Вардар од навивачи за Пелистер. По победата на Пелистер, 3 ученици се премислиле и почнале да навиваат за Пелистер. Која екипа сега има повеќе навивачи и за колку?

136. На конференција за печат на која присуствувале новинари и спортисти, имало вкупно 20 учесници. Првиот новинар направил интервју со пет спортисти, вториот новинар направил интервју со шест спортисти, третиот со седум, и така по ред до последниот новинар кој направил интервју со сите спортисти. Колку спортисти имало на оваа конференција за печат?

137. Сите 29 ученици од едно одделение играле шах така што противници во секоја партија биле момче и девојче. Мирјана играла со четири момчиња, Николина со пет момчиња, Снежана со шест момчиња, итн. редоследно до последното девојче кое играло со секое момче во тоа одделение. Колку момчиња има во тоа одделение?

138. Во еден дел на Зоолошката градина се сместени зајаци, птици и змии. Децата избројале 24 глави, 14 крила и 62 нозе. Колку животни има од секој вид?

139. Патувајќи на летување Горјан од автобусот на една ливада видел 25 животни, меѓу кои имало коњи, крави, овци и кози. Крави имало три пати повеќе од коњи, а овци имало два пати повеќе од кози. Горјан забележал дека сите коњи не биле со иста боја. Колку животни имало на ливадата од секој вид?

140. Тројца другари Бојан, Јован и Максим собираат сликчиња од фудбалери. Бојан има три пати повеќе сликчиња од Јован, а Јован има два пати повеќе сликчиња од Максим. Колку сликчиња има секое дете,

ако Бојан и Максим заедно имаат 210 сликчиња?

141. Драган има два пати помалку сликички од Бојан, а Стефан има два пату помалку сликички од Драган. Сите заедно имаат 714 сликички. Колку сликички има секое дете?

142. На натпревар по математика учествувале 46 ученици. Бројот на учениците кои се пласирале пред Милан е четири пати помал од бројот на учениците кои се пласирале по Милан. Кое место на натпреварот го освоил Милан?

143. Тренерите Иван и Марко означиле две шумски патеки. Катерина ги поминала двете патеки, при што направила 2024 чекори со иста должина. Ако на патеката на Иван направела 204 помалку, а на патемката на Марко 24 чекори повеќе, тогаш на двете патеки ќе направела еднаков број чекори. Колку чекори Катерина направила на патеката на Иван, а колку на патеката на Марко?

144. Три другарки Ана, Вера и Теа заедно имаат 180 музички цедиња. Ако Теа и даден на Ана $\frac{1}{6}$ од своите цедиња, а Вера и даде на Ана $\frac{1}{5}$ од своите цедиња, тогаш сите девојчиња ќе имаат еднаков број цедиња. Колку цедиња има секое девојче?

145. Во училишната кујна стигнале 200 чаши. Поголемите чаши се пакувани во кутии од по 4, а помалите во кутии од по 6 чаши. Притоа се испорачани 5 пакувања големи чаши повеќе од пакувања мали чаши. Колку биле мали, а колку големи чаши?

146. Пет деветтини од присутните на еден роденден биле момчиња. Кога четири момчиња отшле на тренинг, останале еднаков број момчиња и девојчиња. Колку присутни имало на почетокот на роденденската прослава?

147. Коњ и мазга оделе еден покрај друг и носеле тежок товар. Коњот постојано ја молел мазгата да земе барем една вреќа од неговиот грб. „Ако јас земам од тебе една вреќа ќе носам два пати повеќе вреќи отколку што ќе носиш ти“, рекла мазгата, и додала: „Ако ти земеш една вреќа од мене, ќе носиме еднаков број вреќи.“ Колку вреќи носел

коњот, а колку носела мазгата?

148. Во една фирма работат пет пати повеќе жени од мажи, а бројот на жените е за 480 поголем од бројот на мажите. Колку луѓе вкупно работата во оваа фирма?

149. Во едно одделение има два пати повеќе момчиња од девојчиња. Ако на училиште не дојдат три девојчиња, тогаш бројот на момчињата ќе биде три пати поголем од бројот на девојчињата. Колку ученици има во тоа одделение?

150. На баба Темјана ѝ дошле внуците на гости, па сака да им подели колачи. Ако на секој внук му даде по 5 колачи, ќе и недостасуваат 3 колачи. Ако на секој внук му даде по 4 колачи, ќе и останат 3 колачи. Колку внуци има баба Темјана?

151. Баба Анѓа им дели колачи на своите внуци. Ако на секого му даде по 4 колачи, ќе и останат 2 колачи, а ако на секого му дава по 5 колачи, ќе и недостасува еден колач. Колку колачи и колку вници има баба Анѓа?

152. Ана, Јана и Дана заедно имале 140 сликички. Ана и дала на Дана четвртина од своите сликички, а Јана и дала на Дана десеттина од своите сликички. Тогаш Ана и Јана имале еднаков број сликички, а Дана имала 40 сликички помалку од Ана и Јана заедно. Колку сликички имала Дана пред да добие сликички од Ана и Јана?

153. На две гранки имало 25 врапчиња. Кога од првата гранка на втората гранка ќе прелетаат 5 врапчиња, а потоа од втората ќе одлетаат 7 врапчиња, тогаш на првата гранка ќе има два пати повеќе врапчиња отколку на втората гранка. Колку врапчиња имало на почетокот на секоја гранка?

154. Три седмини од вкупниот број ученици на едно одделение се девојчиња. Ако дојдат уште четири девојчиња, тогаш во одделението ќе има еднаков број момчиња и девојчиња. Колку вкупно ученици има во моментот во одделението?

155. Јана и Лана купиле кеса бонбони. Прво заедно изеле $\frac{2}{3}$ од бонбоните, а потоа секоја од нив изела уште по една бонбона. Другиот ден заедно изеле $\frac{1}{2}$ од преостанатите бонбони и им останале уште 3 бонбони. Колку бонбони имало во кесата на почетокот?

156. Во саботата Музејот на современата уметност (МСУ) имал 468 посетители. Во неделата МСУ го посетиле два пати повеќе мажи и шест пати повеќе жени отколку во саботата, така што имало вкупно 2024 посетители. Колку мажи и колку жени го посетиле МСУ?

157. Бабата на Ана месила колачи. Ана првиот ден изела половина од сите колачи и уште половина од еден колач, вториот ден изела половина од преостанатите колачи и уште половина од еден колач, третиот ден изела половина од преостанатите колачи и уште половина колач. За четвртиот ден и преостанале 3 колачи. Колку колачи месила бабата на Ана?

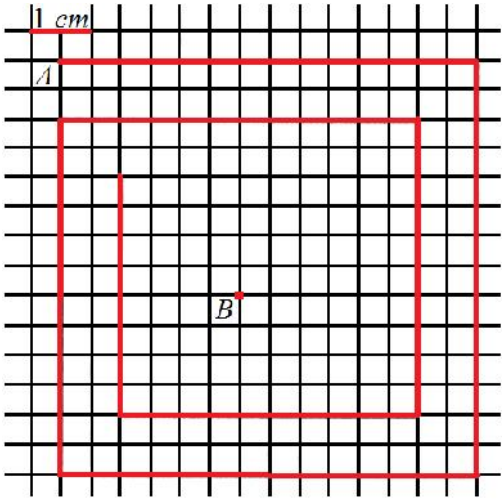
158. Милан, Јован и Драган заедно имаат вјупно 180 џамлии. Милан на Драган му дал шестина од своите џамлии, а Јован му дал на драган петтина од своите џамлии. Потоа секое дете имало еднаков број џамлии. Колку џамлии имало секое дете на почетокот?

159. Во една паралелка има 24 ученици. Во оваа паралелка бројот на момчињата е еднаков на $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата. Колку момчиња и колку девојчиња има во паралелката?

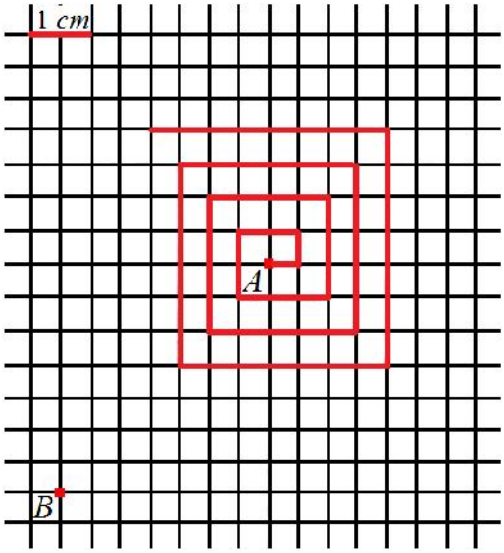
160. На почетокот на состанокот на „Веселата дружина“ бројот на присутните членови бил пет пати поголем од бројот на отсутните. За време на состанокот стигнал уште еден член на дружината, па сега бројот на присутните бил шест пати поголем од бројот на отсутните. Колку членови има „Веселата дружина“?

3. ГЕОМЕТРИЈА

1. Користејќи го правилото според кое е нацртан дел од искршената линија продолжи го цртањето на оваа линија така што таа ги поврзува точките A и B, а потоа пресметај ја нејзината должина.



2. Користејќи го правилото според кое е нацртан дел од искршената линија продолжи го цртањето на оваа линија така што таа ги поврзува точките A и B, а потоа пресметај ја нејзината должина.



3. Точките A,B,C и D се наоѓаат на една права. Растојанието меѓу точките A и B е $2\,m$, меѓу A и C е $24\,cm$, меѓу B и D е $7\,dm$, а меѓу C и D е $246\,cm$. Определи го растојанието меѓу точките B и C.

4. Точките A,B,C и D лежат на една права. Растојанието меѓу точките A и B е $3\,m$, меѓу точките A и C е $56\,cm$, меѓу точките B и D е $11\,dm$. Колку е најголемото, а колку најмалото растојание меѓу точките C и D?

5. На една права се нанесени точките A,B,C,D,E по тој редослед. Растојанието меѓу средните точки на отсечките AB и DE е 16 *cm*, а растојанието меѓу средните точки на отсечките BC и CD е 6 *cm*. Пресметај ја должината на отсечката AE.

6. Со две прави подели даден триаголник на:
   а) три триаголници,
   б) два триаголници и два четириаголници,
   в) два триаголници, еден четириаголник и еден петаголник.

7. Со две прави подели правоаголник на:
   а) два триаголника и два петаголника,
   б) два триаголника,еден четириаголник и еден петаголник.

8. Над секоја страна на даден правоаголник, надвор од него, конструираме рамностран триаголник. Да се пресмета периметарот на добиената фигура ако периметарот на правоаголникот е 72 *cm*.

9. Даден е рамностран триаголник со плоштина $6cm^2$. Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на добиената фигура.

10. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AB}=\overline{AC}$) кракот AC е продолжен преку темето A до точка D, така што периметарот на триаголникот BAD е $16\,cm$. Пресметај ја основата BC на триаголникот ABC, ако периметарот на триаголникот BCD е $29\,cm$.

11. Произволна точка во внатрешноста на квадрат е подеднакво оддалечена од двете спротивни страни и тоа $3x+1$ и $5x-7$ соодветно, мерени во *cm*. Определи го периметарот на квадратот.

12. Андреј нацртал правоаголник чија една страна е подолга од другата за $3\,cm$. Потоа над двете пократки страни на правоаголникот нацртал по два рамнострани триаголници чии страни се еднакви (вид цртеж). Периметарот на добиената фигура е еднаков на $78\,cm$. Определи го периметарот на почетниот правоаголник.

13. Правоаголник $ABCD$ со должини на страни $8\,cm$ и $5\,cm$ со отсечка MN е поделена на два четириаголника со еднакви периметри од по $20\,cm$. Определи ја должината на отсечката MN.

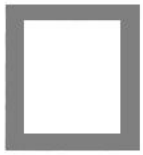
14. Правоаголник и квадрат имаат еднакви периметри. Должината на страната на квадратот е $6\,cm$. Едната страна на правоаголникот е долга $4\,cm$. Колку е долга другата страна на правоаголникот?

15. Кога едната страна на правоаголникот ќе се зголеми за $48\,cm$, се добива квадрат со периметар $2008\,cm$. Определи ја должината на страната на квадратот и периметарот на почетниот правоаголник.

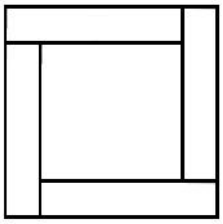
16. Кога едната страна на правоаголникот се зголеми за $8\,cm$, а другата се зголеми за $6\,cm$, се добива квадрат чиј периметар е три пати поголем од периметарот на почетниот правоаголник. Определи ја должината на страната на добиениот квадрат.

17. Надворешната страна на квадратна рамка е со должина $50\,cm$, а нејзината внатрешна површина има плоштина $1600\,cm^2$. Пресметај ја ширината на рамката.

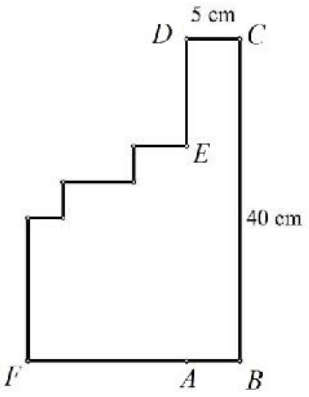
18. Една рамка има секаде иста ширина (види цртеж). Вкупната должина на надворешниот раб на рамката е за $40\,cm$ поголема од вкупната должина на внатрешниот раб на рамката. Определи ја ширината на рамката.



19. Од четири еднакви (складни) правоаголници, секој со периметар 2012 сантиметри (мерните броеви на должините на страните се изразени во цели броеви сантиметри), направене е фигура како на цртежот десно. Ако периметарот на оваа фигура (збирот на периметрите на двата квадрати) е 8000 сантиметри, пресметај ги должините на страните на овие правоаголници.

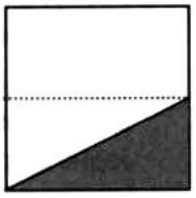


20. Ана почнала да црта правоаголник $ABCD$ почнувајќи од точката A. Ги нацртала отсечките AB, BC и CD. Цртајќи ја отсечката DA дошла до точката E и наместо отсечката нацртала седум отсечки во низа и така дошла до точката A, како што е прикажано на цртежот десно. Секоја отсечка која ја нацртала е нормална на претходната нацртана отсечка.

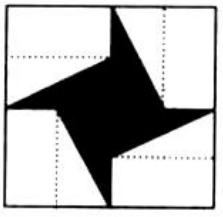


На цртежот се прикажани должините на две отсечки $\overline{BC} = 40\,cm$ и $\overline{CD} = 5\,cm$. Определи ја должината на отсечката FA ако периметарот на добиената фигура е $140\,cm$.

21. Квадрат со страна $8\,cm$ е поделен на два еднакви правоаголника. Потоа е обоен еден дел од квадратот. Определи ја плоштината на обоениот дел.

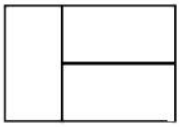


22. Квадрат со страна $16\,cm$ е поделен на четири еднакви квадрати. Секој од овие квадрати е поделен на два еднакви правоаголника. Потоа е обоен по еден дел од некои од овие правоаголници.

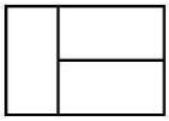


ници, со што е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Определи ја плоштината на оваа фигура.

23. Три мали правоаголници се наредени така што формираат нов правоаголник (цртеж десно). Периметарот на секој од малите правоаголници е $60\,cm$. Определи ја плоштината на големиот правоаголник.



24. Три мали складни правоаголници се наредени како на цртежот десно со што е добиен поголем правоаголник. Периметарот на поголемиот правоаголник е еднаков на $200\,cm$. Колкава е плоиштината на еден од малите правоаголници?



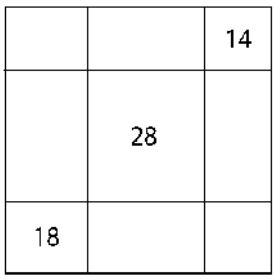
25. Периметарот на правоаголникот е $8\,dm\,4\,cm$. Пресметај ја плоштината на овој правоаголник ако едната негова страна е два пати подолга од другата.

26. Квадрат со три прави е поделен на четири еднакви правоаголници. Периметарот на еден од така добиените правоаголници е еднаков на $30\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

27. Квадрат е поделен со четири прави на пет еднакви правоаголници. Периметарот на еден така добиен правоаголник е еднаков на $24\,cm$. Определи ја плоштината на овој квадрат.

28. Квадрат е поделен на пет еднакви правоаголници со четири паралелни прави. Збирот на периметрите на тие правоаголници е 96 *cm*. Определи го периметарот на квадратот.

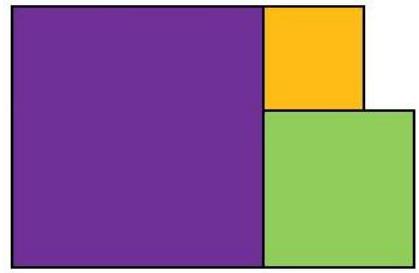
29. Квадратот даден на цртежот десно е поделен на девет правоаголника. Броевите запишани во трите правоаголници се еднакви на нивните паремитри. Определи ја должината на страната на дадениот квадрат и пресметај го неговиот периметар.



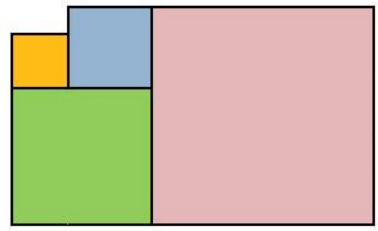
30. При заградување на плац со правоаголен облик се поставени по 5 столбови на пократките страни, а по 11 столбови на подолгите страни. Растојанието меѓу секои два соседни столба е $4\,m$. Определи ги должината на целата ограда и плоштината на плацот.

31. Во еден забавен парк околу површина со правоаголен облик се поставени два реда жици со разнобојни светилки. Жицата е затегната на столбови кои се распоредени долж правоаголникот на растојание две метра. На подолгата страна на правоаголникот има 11 столбови, а на пократката има 6 столбови. Определи ја должината на жицата со сијалици и плоштината на праваоголникот.

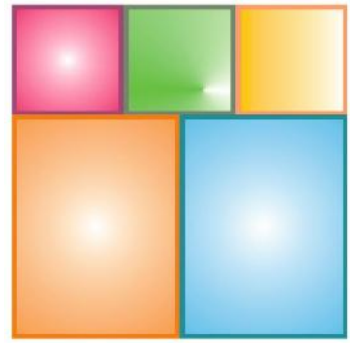
32. На цртежот десно се дадени три квадрати. Периметарот на жолтиот квадрат е $28\,cm$, а периметарот на зелениот квадрат е $44\,cm$. Пресметај го периметарот на целата фигура.



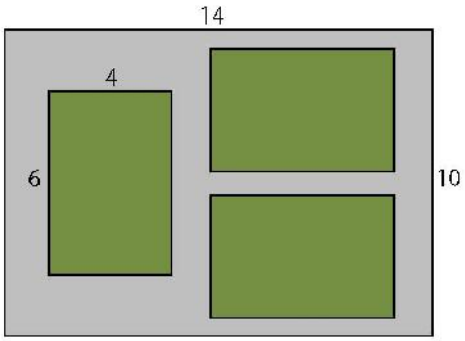
33. На цртежот десно периметарот на жолтиот квадрат е еднаков на $16\,cm$, а периметарот на зелениот квадрат е еднакв на $40\,cm$.Определи го периметарот на целата фигура.



34. На плажа 5 другарки ги ставиле крпите како на цртежот десно, со што формирале квадрат. Јована, Ивана и Катерина имаат еднакви крпи во форма на квадрат и секоја од овие крпи има периметар $320\,cm$. Ана и Јана имаат еднакви крпи во форма на правоаголник. Определи го периметарот на крпата на Ана.



35. Зелените површини на малите паркови, кој е претставен на цртежот десно, се три површини со еднакви плоштини. Што е поголемо, плоштината на бетонските патеки околу зелените површини или плоштината на зелените површини? Должините се изразени во метри.



36. Правоаголник со плоштина $2013\,cm^2$ чија една страна е долга $33\,cm$, е поделен (паралелно на страните) на најмал број квадрати со исти или различни страни. На колку квадрати е поделен овој правоаголник?

37. Ако едната страна на правоаголникот се зголеми за $3\,cm$, а другата се намали за $2\,cm$, се добива квадрат со плоштина $81\,cm^2$. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

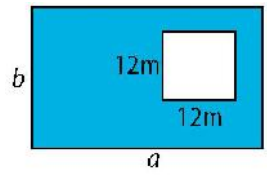
38. Страната AB на правоаголникот $ABCD$ е за $2\,cm$ подолга од страната BC. Ако подолгата страна се зголеми за $1\,cm$, а пократката се зголеми за $3\,cm$, плоштината на новиот правоаголник ќе биде поголема од плоштината на правоаголникот $ABCD$ за $41\,cm^2$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

39. Правоаголникот со страни $6\,cm$ и $9\,cm$ подели го на три еднакви правоаголници. Определи ги сите можни решенија и најди кој правоаголник ќе има најголем периметар.

40. Од 40 исти квадрати со должина на страна $a=1\,cm$ треба да се состави правоаголник, при што квадратите не се преклопуваат и меѓу нив нема празнини. Колку правоаголници може да се состават и кој од така добиените правоаголници има најмал периметар?

41. Плац во форма на правоаголник е заграден со жичана ограда. Стол-

бовите на оградата се поставени по работ на плацот понувајќи од едно теме и се на растојание $5\,m$ еден од друг. Во секое теме на плацот има по еден столб. На плацот е изградена куќа чиј теме е во форма на квадрат со должина на страна $12\,m$. Колкава е плоштината на дворот ако за оградување на плацот се потрошени 14 столбови?



42. Од правоаголник со должина $2013\,cm$ и ширина $1\,cm$ со сечење и составување без да има преклопувања е формиран најмал број квадрати чии страни се со должини, изразени во сантиметри, природни броеви. Пресметај го збирот на периметрите на добиените квадрати.

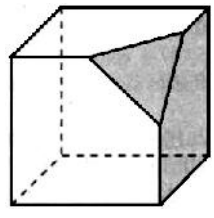
43. Шаховската табла е составена од 64 еднакви квадратни полиња. Плоштината на секое поле е еднаква на $9\,cm^2$. Пресметај го периметарот на целата табла.

44. Ако сите полиња на шаховската табла се наредат едно до друго се добива правоаголник со периметар $260\,cm$. Определи ја плоштината на шаховската табла.

45. При планирањето на изградбата ба еден стан, идните сопственици побарале квадратната соба со плоштина $16\,m^2$ да се замени со правоаголна, така што должината на едната страна да се зголеми за 20%, а должината на другата страна да се намали за 20%. Тие се надевале дека со оваа измена ќе ја зголемат плоштината на дневната соба. Дали сопствениците биле во право?

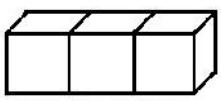
46. Ако едната страна на правоаголникот се зголеми за 8 *cm*, се добива квадрат со периметар 6,8 *dm*. Колкав е периметарот на правоаголникот изразен во сантиметри?

47. Во секое теме на коцката се сечат три раба. Ако ги земеме средините на тие рабои и го отсечеме делот од коцката како на цртежот десно и тоа го направиме за секое теме на коцката ќе добиеме ново тело. Колку темиња, рабови и ѕидови има вака до-



биеното тело?

48. Три еднакви коцки се поставени една до друга (цртеж десно) и така е добиен квадар со плоштина $350\,cm^2$. Определи ја плоштината на едната коцка?



49. Кога квадар со плоштина $1400\,cm^2$ ќе се расече на три дела, се добиваат три еднакви коцки. Определи ја плоштината на една таква коцка.

50. Квадар со плоштина $1408\,cm^2$ е пресечен на пет дела, со што се добиени пет еднакви коцки. Определи ја плоштината на една таква коцка.

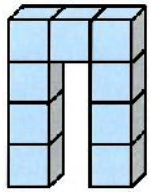
51. Шест еднакви коцки се наредени така што е формиран квадар. Ако плоштината на една коцка е $24\,cm^2$, определи ја плоштината на добиениот квадар.

52. Волуменот на квадарот кој е направен со поврзување на 4 еднакви коцки е $500\,cm^3$. Колкава е неговата плоштина?

53. Волуменот на квадарот кој е составен од 18 еднакви коцки е еднаков на $144\,cm^3$. Определи ја неговата плоштина.

54. Од еднакви коцки со должина на раб еднаква на $2\,cm$, со лепење на ѕидовите на соседните коцки е добиено телото прикажано на цртежот десно. Пресметај ги плоштината и волуменот на ова тело.

55. Од девет еднакви коцки, со нивно лепење е направено телото прикажано на цртежот десно. Работ на коцките е $3\,cm$. Пресметај ги волуменот и плоштината на добиеното тело.



56. Колку различни квадари може да се направат од 212 еднакви коцки со должина на раб $1\,cm$?

57. Колку различни квадари може да се направат од 30 еднакви коцки со раб $1\,cm$?

58. Обоен дрвен квадар чии рабиви се $20\,cm, 13\,cm$ и $7\,cm$ е расечен на четири еднакви квадари чии рабови се $5\,cm, 13\,cm$ и $7\,cm$. Колкава е вкупната плоштина на необоените делови?

59. Квадар од дрво со рабови $6\,cm, 8\,cm$ и $9\,cm$ е обоен со црвена боја. Кога овој квадар ќе го поделиме на три еднакви квадари со должини на рабови $6\,cm, 8\,cm$ и $3\,cm$, колкава е плоштината на необоените ѕидови.

60. Должините на рабовите на дрвен квадар се еднакви на $4\,cm, 6\,cm$ и $8\,cm$. Квадарот е обоен во сина боја. Потоа квадарот е пресечен на два еднакви квадари така што плоштината на необоените ѕдови на тие два квадари е $48\,cm^2$. Определи ги должините на рабовите на новодобиените квадари.

61. Еден ѕид на квадарот е квадрат со плоштина $25\,dm^2$. Неговиот соседен ѕид има плоштина $5\,dm^2$. Пресметај го волуменот на овој квадар.

62. Квадар од дрво со должини на рабови $5\,cm, 6\,cm, 8\,cm$ е обоен со сина боја. Како треба да се расече овој квадар на четири еднакви квадари така што вкупната плоштина на необоените делови ќе биде најмала можна?

63. Два ѕида на квадарот се квадрати со плоштина $144\,cm^2$. Секој од преостанатите четири ѕида има плоштина еднаква на $\frac{2}{3}$ од плоштината на ѕидот кој е квадрат. Определи го волуменот на овој квадар.

64. Должините на рабовите на еден квадар се $5\,cm, 8\,cm$ и $10\,cm$. Сите ѕи-

дови на квадарот се обоени со сина боја. Квадарот е пресечен два пати и се добиени четири еднакви квадари така што плоштината на необоените ѕидови на добиените четири квадари е еднаква на $180\ cm^2$. Определи ги должините на рабовите на добиените квадари.

65. Дрвен квадар со должини на рабови $8\ cm, 12\ cm$ и $14\ cm$ е обен со црвена боја. Потоа квадарот е расечен на шест еднакви квадари со должини на рабови $8\ cm, 4\ cm$ и $7\ cm$. Пресметај ја плоштината на необоените делови.

66. Дрвен квадар со рабови $15\ cm, 10\ cm$ и $8\ cm$ е обоен со црвена боја, а потоа е расечен на шест еднакви квадари со рабови $5\ cm, 10\ cm$ и $4\ cm$. Колкава е вкупната плоштина на необоените ѕидови на новите квадари?

67. Вкупната должина на сите рабови на еден квадар е $448\ cm$. Периметарот на еден негов ѕид, чиј еден раб е два пати подолг од другиот, е $126\ cm$. Определи ја плоштината на овој квадар.

68. Вкупната должина на рабовите на еден квадар е $28\ cm$. Едниот ѕид на тој квадар е квадрат. Должината на страната на тој ѕид изразена во сантиметри е природен број. Определи ја плоштината на овој квадар.

69. Квадар од дрво со рабови $16\ cm, 18\ cm$ и $9\ cm$ е обоен со сина боја. Кога овој квадар ќе го поделиме на четири еднакви квадари со должини на рабови $4\ cm, 18\ cm$ и $9\ cm$, колкава е вкупната плоштина на необоените делови?

70. Два складни квадари формираат коцка. Определи ја плоштината на оваа коцка, ако пократкиот раб на квадарот е $5\ cm$.

71. Три складни квадари формираат коцка. Определи ја плоштината на таа коцка ако пократкиот раб на еден квадар е $3\ cm$.

72. Со лепење на 4 еднакви дрвени квадари со рабови $16\ cm, 16\ cm$ и $4\ cm$ е составена коцка. Пресметај ја плоштината на оваа коцка.

73. Со лепење на шест еднакви дрвени квадари со рабови $12\,cm$, $6\,cm$ и $4\,cm$ е составена коцка. Пресметај ја плоштината на оваа коцка.

74. Мајсторот Ненад прави аквариум од стакло (без поклопец) со димензии $30\,cm, 35\,cm$ и $50\,cm$. Колку најмалку стакло му е потребно на Ненад за да го направи акваруиумот?

75. Кутија во форма на квадар е без поклопец. Еден ѕид на кутијата има рабови со должини $60\,cm$ и $50\,cm$, а друг ѕид со рабови со должини $60\,cm$ и $40\,cm$.

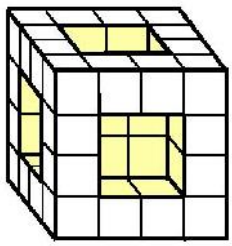
    а) Определи ги должините рабовите на третиот ѕид на кутијата.

    б) Определи ја плоштината на кутијата ако недостасува ѕид чија плоштина е најмала.

76. Ако едниот раб на квадарот се намали за $2\,cm$, другиот за $4\,cm$, а третиот за $6\,cm$ се добива коцка со плоштина еднаква на $568\,cm^2$ помала од плоштината на квадарот. Пресметај ги плоштините на коцката и квадарот.

77. Ако едниот раб на коцката се зголеми за $1\,cm$, другиот за $2\,cm$ и третиот за $3\,cm$ се добива квадар чија плоштина е за $262\,cm^2$ поголема од плоштината на коцката. Пресметај ги плоштините на коцката и квадарот.

78. Плоштината на една коцка е еднаква на $96\,cm^2$. Од 40 такви еднакви коцки е составено тело прикажано на цртежот десно. Имено, прво од 64 коцки е направена голема коцка, а потоа на секој ѕид од средината се извадени по 4 коцки. Определи ја плоштината на вака добиеното тело.



4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Меѓу петте зборови

   АЛКА, БРОД, ВРЕМЕПЛОВ, ГРУГ, КРАК

   четири задоволуваат некоја законитост, а еден збор не ја задоволува таа законитост, т.е. е прекуброен. Кој е тој збор?

2. Димитар изјавил: „Завчера се уште немав 11 години, а следната година ќе наполнам 13 години.“ Дали оваа изјава може да е вистинита?

3. Седат Марко и Илија, Едно од децата вели: „Јас сум Марко.“ Другото дете вели: „Јас сум Илија.“ Познато е дека барем еден од нив лаже. Кое од двете деца е Марко, а кое е Илија?

4. Пред почетокот на шаховски турнир секој учесник за себе прогнозирал кое место ќе го освои. Михајло прогнозирал дека ќе го освои последното место. По завршувањето на турнирот се покажало дека сите, се разбира освен Михајло, освоиле полошо место отколку што прогнозирале. Притоа немало двајца учесници кои освоиле ист број поени, што значи дека немало поделба на местата. Кое место го освоил Михајло?

5. Во еден извештај од шаховски турнир во списанието Шах-мат е објавен следниов распоред за пласман на натпреварувачките:
   1) Севда Борисовска,
   2) Ангела Максимоска,
   3) Наташа Маркоска.

   Во следниот број е извршена исправка. Констатирано е дека ниту едно име ниту презиме не соодветствува на дадениот распоред, а исто така ниту едно име не соодветствува на напишаното презиме. Се знае само дека прва била шахистката која се викала Ангела. Кој е точниот редослед на пласманот на шахистките?

6. Меѓу пет момчиња се водел ваков разговор.
   Ацо: *Јас знам да ја решам оваа задача*.
   Борис на Ацо: *Не знаеш*.

Владимир на Борис: *Не си во право*.
Гаврил на Владимир: *Ти не си во право*.
Драган: *Гаврил лаже*.
Познато е дека повеќе од половината деца рекле вистина. Дали Ацо знае да ја реши задачата?

7. Една година во месец јануари имало четири понеделници и четири петоци. Во кој ден бил 1. јануари?

8. Во една година имало пет саботи во месецот мај. Кој од следниве денови не можел да се појави пет пати во тој месец:
а) среда, б) четврток, в) петок, г) недела, д) понеделник

9. Една година имало пет среди во октомври. Кој од следниве денови не може да се појави пет пати во тој месец:
а) понеделник, б) вторник, в) четврток, г) петок, д) сабота?

10. Шест последователни месеци мај, јуни, јули, август, септември и октомври се такви што збирот на деновите во првите три месеци е еднаков на збирот на деновите во последните три месеци (по 92 дена). Колку има уште последователни шест месеци со истото својство?

11. Дали може месеците да се поделат во две групи, по 6 последователни, така што во секоја група ќе има еднаков број денови?

12. Тројца пријатели сакаат да поделат 7 полни, 7 наполнети до половина чаши лимунада и 7 празни чаши така што секој ќе добие еднаков број чаши и исто количество лимунада. Како тоа може да го направат, а притоа да нема претурање на лимунада од една во друга чаша?

13. Горјан на полицата има 3 различни пара чевли. Ако без да гледа, од полицата зема еден по еден чевел, колку најмалку чевли мора да земе, за да биде сигурен дека извадил еден пар соодветни чевли?

14. Во платнена вреќичка се наоѓаат 4 црвени, 5 сини и 6 бели топчиња. Матеј без да гледа вади топчиња од кутијата. Колку топчиња мора да извади за да биде сигурен дека извадил најмалку по едно топче од секоја боја?

15. Во платнена вреќа има по пет црвени, сини и бели топчиња. Лерка без да гледа вади топчиња од вреќата. Колку топчиња треба да извади за да биде сигурна дека извадила 5 топчиња од една боја?

16. Во сад се наоѓаат 42 бомбони и тоа 12 чоколадн, 14 перминт и 16 овошни бомбони. Сите бомбони се со иста форма и се завиткани во иста заштитна хартија така што со допир не може да се разликуваат. Кој е најмалиот број бомбони што треба да ги земеме за да сме сигурни дека сме зеле до секој вид по една бомбона?

17. Андреј имал три еднакви пара волнени и три еднакви пара кожни ракавици. Пред тргнување на училиште Андреј, без да гледа од фиоката вади една по една ракавица. Колку ракавици треба да извади Андреј за да е сигурен дека извадил еден пар соодветни ракавици?

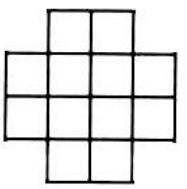
18. Дали може часовникот да се подели на четири делови така што збирот на броевите во секој дел да е еднаков на 15?

19. На колку начини сума од 100 денари може да се исплати со монети од 2 и 5 денари?

20. Јане има два песочни часовника. Во првиот песекот истекува од едниот во другиот дел за 7 минути, а во вториот за 4 минути. Како Јане со помош на овие два часовника ќе измери време од:
    а) 60 минути, б) 10 минути.

21. Седиштата на вртелешката се означени со броевите 1, 2, 3, ... Ангел и Олгица седат на спротивните страни на вртелешката. Ангел седи на седиштето со број 12, а Олгица на седиштето со број 5. Колку седишта има вртелешката?

22. Во квадратчињата на фигурата прикажана на цртежот десно запиши ги првите дванаесет природни броеви така што било кои два последователн броја нема да се соседни ниту водорамно, ниту вертикално, ниту дијагонално.

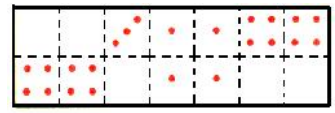


23. Марко ги распоредил броевите 1, 2, ..., 8 во темињата на една коцка. Кога ги пресметал збировите добиени по секој ѕид, забележал дека сите збирови се еднакви.
    а) Колку изнесува секој таков збир?
    б) Најди едно распоредување на броевите 1, 2, ..., 8 во темињата на коцка кое ја го има саканото својство.

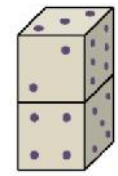
24. На три купчиња се наоѓаат 11, 7 и 6 жетони редоследно. Дозволено е од едно купче да се преместат на друго купче онолку жетони колку што таму веќе има. Како со три преместувања да се изедначи бројот на жетоните во сите три купчиња?

25. Матеј расекол пист хартија на три дела. Еден од добиените делови повторно го расекол на три дела. Постапката ја поворил 7 пати. Колку вкупно делови добил Матеј?

26. Домината се наредени во кутија. Броевите (точките) видливи во горниот ред се распоредени како на цртежот десно. Притоа на цртежот не се прикажани границите меѓу домината. Определи го распоредот на домината во горниот ред.



27. Станадардна коцка за играње е коцка кај која збирот на бројот на точките запишани на секои два спротивни ѕида е еднаков на 7. Две стандардни коцки се ставени една над друга, како на цртежот десно. Збирот на бројот на точките кои се на долната страна на горната коцка и оние кои се на горната страна на долната коцка е помал од 10. Колку точки има на долната страна на долната коцка?



28. Во иста улица од иста страна се наоѓаат пекара и книжарница. Од едната страна на пекарата има уште 27 куќи, а од другата страна 13 куќи. Книжарницата е во куќата која е точно на средина на улицата. Колку куќи има меѓу пекарата и книжарницата?

29. Кога учениците од училиштето тргнале кон паркот учителката им рекла да одат по тројца во секој ред. Стојан, Симон и Станко забе-

лежале дека нивната тројка е шеста од почетокот на колоната и е шеста од крајот на колоната. Колку ученици оделе во паркот?

30. Датумот 5. мај 2055. година може да се запише во видот 5.5.55. Колку датуми има во XXI век кои на ваков начин може да се запишат само со користење на една цифра.

31. Фудбалската екипа Победа одиграла три натпревари: еден победила, еден изгубила и еден одиграла нерешено. На овие натпревари екипата дала три гола и примила еден гол. Со кој резултат завршил секој од трите натпревари?

32. Фудбалска екипа одиграла шест натпревари: два победила, два изгубила и два одиграла нерешено. На овие натпревари екипата дала 3 годла, а примола 2 гола. Со кој резултат завршил секој од шесте натпревари?

33. Во Фудбалскиот куп на Република Македонија учествуваат 507 екипи. Купот се игра по системот да екипата која го изгубила натпреварот (во регуларниот тек на натпреварот или по изведување на пенали) испаѓа од натамошното натпреварување. Колку натпревари треба да се одиграат за да се добие победник на Купот?

34. За еден број ќе врлиме дека е *растечки* (*опаѓачки*), ако секоја цифра (земена како едноцифрен број) е за еден поголема (помала) од цифрата запишана десно од неа. Пресметај за колку се повеќе опаѓачките од растечките броеви.

35. Определи *растечки* број чија третина е природен број поголем од 100 и помал од 2000.

36. Определи го бројот на сите шестцифрени броеви чиј производ на цифри е 30 и кои се помали од 122000.

37. Запиши ги сите парни петцифрени броеви помали од 12000 кај кои производот на цифрите е 16.

38. Запиши ги сите парни петцифрени броеви кај кои производот на

цифрите е 18.

39. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои збирот на цифрите е еднаков на 5 и кои се поголеми од 3000. Колку од овие броеви се парни?

40. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои збирот на цифрие е поголем од 33? Колку од овие броеви се непарни?

41. Палиндром е оној број кој исто се чита како од лево кон десно, така и од десно кон лево. На пример, палиндроми се 34243 и 777. Колку има четирицифрени палндроми?

42. Дали има повеќе петцифрени или шестцифрени броеви палиндроми?

43. Колку четирицифрени броеви постојат чија почетна и крајна цифра е 3?

44. Определи го бројот на сите четирицифрени непарни броеви чиј збир на цифри е 12, а збирот на цифрата на десетките и цифрата на единиците е 5.

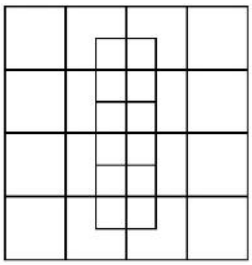
45. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците.

46. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците.

47. На колку начини четири пријателки Анкица, Гордана, Иванка и Милица може меѓусебно да поделат 11 исти чоколади така што секоја девојка ќе добие најмалку две чоколади?

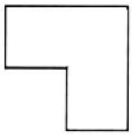
48. Павлина има црни триаголни плочки од кои направила четири фигури како на долниот цртеж. Ако продолжи да прави фигури, колку црни триаголници ќе има 15. фигура повеќе од 10. фигура во низата?

49. Колку квадрати се прикажани на цртежот десно?

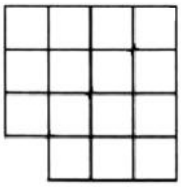


50.

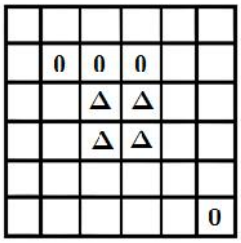
51. Квадрат е поделен на четири еднакви квадрати, а потоа еден од малите квадрати е исечен, со што е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Подели ја оваа фигура на 2, 3 и 4 еднакви делови.



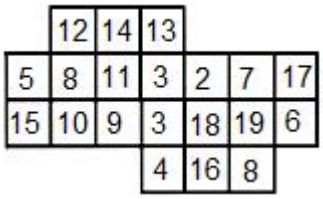
52. Квадрат е поделен на 16 еднакви квадрати. Потоа еден од аголните мали квадрати е исечен и е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Подели ја оваа фигура на 2, 3, 5 еднакви делови.



53. Расечи го квадратот на 4 еднакви делови така што во секој дел ќе има по едно триаголниче и по едно кругче.



54. Фигурата прикажана на цртежот десно подели ја на четири еднакви делови (по форма) така што збирот на броевите во секој од добиените делови е еднаков.



55. Правоаголник со димензии $9\,cm$ и $4\,cm$ треба да се расече на три правоаголници така што од нив ќе се состави квадрат. Прикажи го бараното расекување? Определи го периметарот на добиениот квадрат.

56. Обој едно од најмалите квадратчиња прикажани на цртежот десно.

а) Колку квадратчиња имаат еднаква плоштина со обоеното квадратче?

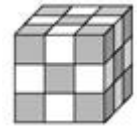
б) Колку квадрати имаат 4 пати поголема плоштина од обоеното квадратче?

в) Колку квадрати имаат 2 пати поголема плоштина од обоеното квадратче?

г) Колку вкупно квадрати има на дадениот цртеж?

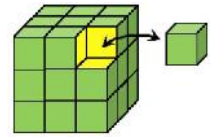
57. Коцка е составена од 8 мали сини коцки, а потоа е обоено со црвена боја. Кога коцката се исушила, Матеј ги оделил сите мали коцки. Дали постои мала коцка која има повеќе сино обоени отколку црвено обоени ѕидови?

58. Коцка со раб $3\,cm$ е составена од бели и сиви коцки чии рабови се $1\,cm$. Секои две соседни коцки се различно обоени (цртеж десно). Колку коцки се сиви?



59. Една голема коцка е составена од 13 зелени и 14 жолти мали коцки. Малите коцки се наредени така што секои две соседни коцки се со различна боја. Која боја има коцката која е во средината на големата коцка? (Соседни се коцките кои имаат заеднички ѕид.)

60. Голема коцка е составена од 27 мали жолти коцки, а потоа целата е обоена во зелена боја. Потоа коцката е растуреа. Колку мали коцки ќе имаат:



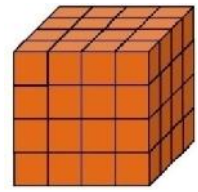
а) три жолти и три зелени ѕидови,

б) четири жолти и две зелени ѕидови,

в) пет жолти и еден зелен ѕид,

г) само жолти ѕидови?

61. Коцка со раб $4\,cm$ е целосно обоена, а потоа е расечена на коцки со раб $1\,cm$ (цртеж десно).



а) Колку коцки имаат три обоени ѕида?

б) Колку коцки имаат два обоени ѕида?

в) Колку коцки имаат еден обоен ѕид?

г) Колку коцки воопшто не се обоени?

62. Учителката на секој член на ликовната секција му дала по една коцка. Нивна задача била да ја обојат коцката така што секоја страна биде обоена со една боја: или жолта или зелена. Кога ја завршиле работата забележале дека секој својата коцка ја обоил различно од другите. Бидејќи коцките многу им се допаднале, учениците ја замолиле учителката и таа да обои една коцка со истите бои и на истиот начин, но така што нејзината коцка да се разликува од веќе обоените. На нивно големо жалење учителката тоа не можела да го направи. Колку ученици имала оваа ликовна секција?

63. Едно училиште треба да испрати тричлена делегација за договор во врска со организирањето на спортските игри во градот. Предложени се: атлетичарите Анка, Ацо и Ања, кошаркарите Катерина, Коста и Ксенија и одбојкарите Олгица и Огнен. Членовите на делегацијата треба да се занимаваат со различни спортови и меѓусебно да се согласуваат. Врз основа на направената анкета јасно е кој со кого не сака да соработува:
    1) Анка не соработува со Ксенија и Катерина,
    2) Катерина и Коста не сакаат да соработуваат со Ацо,
    3) Ксенија соработува само со Анка, Олгица или Ацо,
    4) Олгица не ги сака Анка и Катерина бидејќи ја оговарале,
    5) Коста и Ања се скарани.

    Испиши ги сите можности за состав на делегацијата.

64. Организаторите на меѓународниот еколошки камп треба да состават тимови кои ќе се грижат за здравјето на учесниците. Секој тим треба да има лекар, болничар и возач. На списокот има тројца лекари (Леонид, Лариса и Ленка), тројца болничари (Борис, Бојан и Бранко) и двајца возачи (Ване и Велко). Организаторот зане де постои несогласување меѓу некои кандидати. Од оправдани причини во ист тим не може да се: Леонид и Бојан, Леонид и Велко, Лариса и Бранко, Борис и Ване, Ленка и Ване, Бојан и Велко. Кои тимови може да ги состави организаторот на кампот?

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. АРИТМЕТИКА

1. Бројот 200 запиши го 200 пати едно по друго без растијанија. Колку цифри ќе има добиениот број и колку нули учествуваат во неговиот запис?
   Решение. Во записот на бројот 200200200...200 „групата“ цифри 200 се повторува три пати, што значи дека тој има $3 \cdot 200 = 600$ цифри. Бидејќи две од овие три цифри 0, заклучуваме дека во записот на овој број се содржат $2 \cdot 200 = 400$ нули.

2. Бројот 2006 е запишан 2006 пати едно по друго без растијанија. Која цифра се наоѓа на 2006-тото место на така добиениот број?
   Решение. Имаме $2006 = 4 \cdot 501 + 2$. Според тоа, на 2004-тото место се наоѓа цифрата 6, на 2005-тото место е цифрата 2 и на 2006-тото место е цифрата 0.

3. Бројот 179 е запишан 100 пати (без растојание меѓу броевите).
   1) Колку цифри има бројот кој е притоа добиен?
   2) Која цифра е на 179-тото место во така добиениот број?
   Решение. 1) Бројот 179 има три цифри. Ие се запишани 100 пати, па затоа добиениот број има $3 \cdot 100 = 300$ цифри.
   2) Бидејќи $179 = 3 \cdot 59 + 2$, во добиениот број на 179-тото место се наоѓа втората цифра на бројот 179, односно цифрата 7.

4. Бројот 2015 е запишан 2015 пати, но така што броевите не се одделени еден од друг.
   а) Колку цифри има така добиениот број?
   б) Која цифра е на 2015-тото место на добиениот број?
   Решение. а) Бројот 2015 има 4 цифри. Тие се запишани 2015 пати, па затоа новодобиениот број има $4 \cdot 2015 = 8060$ цифри.
   б) Имаме $2015 = 4 \cdot 503 + 3$, што значи дека на 2015-тото место се наоѓа третата цифра од записот на бројот 2015, односно цифрата 1.

5. Пречкртај три цифри на бројот 1465830927 така што со преостанатите цифри (без промена на редоследот) е запишан:

а) најголемиот можен седумцифрен број,
б) најмалиот можен парен седумцифрен број.

Решение. а) Од првите четири цифри ја оставаме „најголемата“, т.е. цифрата 6, што значи дека ги пречкртуваме цифрите 1 и 4. Откако ја определивме првата цифра на бројот, бараме да и следната цифра биде најголемата можна од преостанатите седум цифри. По цифрата 6 следува цифрата 5, по која е цифрата 8, па затоа треба да ја пречкртаме цифрата 5 и го добиваме бројот 6830927.

б) За да добиеме парен број мора да ја пречкртаме цифрата 7 која е цифра на единиците на даденият број. Сега најмалиот број го добиваме кога одејќи од лево кон десно пречкртуваме две цифри така што ќе добиеме најмал може број запишан со првите четири цифри. Јасно, тоа се цифрите 6 и 8, па го добиваме бројот 1453092.

6. Пречкртај четири цифри на бројот 812998253 така што со преостанатите цифри (без да се менува нивниот редослед) е запишан:
а) најголемиот можен петцифрен број,
б) најмалиот можен парен петцифрен број.

Решение. а) Аналогно како во претходната задача, одејќи од лево кон десно, прво треба да ги пречкратме првите три цифри, а потоа да ја пречкртаме првата цифра која е помала од цифрата која е одма по неа. Така го добиваме бројот 99853.

б) Аналогно како во претходната задача прво треба да ги прецртаме последните непарни цифри од десно со што го добиваме бројот 8129982. Сега, од лево пречкртуваме две цифри така што последователно ќе останат најмалите можни цифри во растечки редослед, што значи дека ги пречкртуваме цифрите 8 и 9 и го добиваме бројот 12982.

7. Во бројот 2545093409 пречкртај три цифри така што со преостанатите цифри (без да се менува нивниот редослед) ќе биде запишан:
а) најголемиот можен седумцифрен број,
б) најалиот можен парен седумцифрен број.

Решение. а) Одејќи од лево кон десно пречкртуваме една по една цифра така што остануваат по пречкртување на три цифри остануваат најголемите можни цифри. Јасно, треба да ги пречкртаме цифрите 2, 4 и 0 и така го добиваме најголемиот можен седумцифрен број 5593409.

б) За да добиеме парен број мора да ја пречкртаме цифрата на единиците,т.е. цифрата 9 која е непарна. Сега, бараниот брј се добива

кога одејќи од лево кон десно ги пречкртуваме најголемите можни две цифри, а тоа се цифрите 5 и 5, па го добиваме бројот 2409340.

8. Пречкртај четири цифри на бројот 6250945068 така што со преостанатите цифри (без да им се менува редоследот) е запишан:
а) најмалиот можен шестцифрен број,
б) најголемиот можен непарен шестцифрен број.
Решение. а) Најмалиот можен шестцифрен број се добива ако гледајќи од лево кон десно се редоследно остануваат најмалите можно цифри. Не можеме да ги прецртаме првите три цифри, бидејќи тогаш треба да ја прецртаме и цифрата 0, но добиениот број не е најмал можен. Ако ги прецртеме цифрите 6 и 5, тогаш е јасно дека следната цифра која треба да ја прецртаме е 9, а потоа и цифрата 5. Така го добиваме бројот 204068.
б) За да добиеме непарен број мора да ги прецртаме цифрите 8, 6 и 0 кои се на крајот на десната страна на дадениот број. Така го добиваме бројот 6250945. Треба да прецртаме уште една цифра со што ќе го добиеме најголемио можен број. Јасно, треба да ја прецраме првата цифра по која низата цифри гледајќи од лево на десно прв пат расте, а тоа е цифрата 2. Така го добиваме бројо 650945.

9. Пред или на крајот на бројот 4709, или меѓу неговите цифри запиши ги цифрите 2 и 5 така што добиениот шестцифрен број ќе биде:
а) најголем можен,
б) најмал можен.
Решение. а) Бидејќи $5 > 4$, а $2 > 0$ цифрата 5 треба да е пред цифрата 4, а цифрата 2 пред цифрата 0. Најголемиот број кој така се добива е: 547209.
б) Бидејќи $2 < 4$, а $5 < 7$, цифрата 2 треба да е пред цифрата 4, а цифрата 5 пред цифрата 7. Најмалиот број кој така се добива е 245709.

10. Пред, или на крајот на бројот 52206, или меѓу неговите цифри запиши ги цифрите 1, 8 и 0 така што добиениот осумцифрен број ќе биде:
а) најголем можен,
б) најмал можен.
Решение. а) Бидејќи $8 > 5$ и $1 > 0$, цифрата 8 треба да се запише пред цифрата 5, а цифрата 1 пред цифрата 0. Цифрата 0 треба да се запише на крајот на бројот. Најголемиот можен осумцифрен број е 85221060.

б) Бидејќи $0<5$ и $1<5$, цифрите 0 и 1 треба да се запишат пред цифрата 5, а цифрата 8 по сите други цифри. Број не може да почнува со 0, па затоа најмалиот можен осумцифрен број е 10522068.

11. Цифрите a и b може да се пишуваат пред или по сите цифри на бројот 533780 и така се добиваат броевите:

$ab533780, ba533780, 533780ab, 533780ba, a533780b, b533780a$.

Кој е најмалиот, а кој е најголемиот број кој се добива од бројот 427457 ако $a=0$ и $b=4$?

Решение. *Прв начин*. Јасно, цифрата 0 не може да ја запишеме така што ќе биде прва од лево. Најмалиот број се добива ако лево пред бројот запишеме цифри така што двоцифрениот почеток е помал од 42. Јасно, тоа е бројот 40427457. Најголем број се добива ако од лево пред бројот запишеме цифри така што двоцифрениот почеток е поголем од 42. Јасно, тоа е бројот 44274570.

Втор начин. Јасно, цифрата 0 не може да ја запишеме така што ќе биде прва од лево. Така се добиваат броевите: 40427457, 44274570, 42745740 и 42745704. Најмалиот од овие четири броја е 40427457, а најголемиот е 44274570.

12. Меѓу две цифри на бројот 68364 запиши ја цифрата 5 така што ќе добиениот шестцифрен број ќе биде:

а) најголемиот можен,

б) најмалиот можен.

Решение. а) Гледајќи од лево кон десно цифрата 5 ја запишуваме пред првата цифра од која таа е поголема. Така го добиваме бројот 685364.

б) Гледајќи од лево кон десно цифрата 5 ја запишуваме меѓу две цифри и тоа пред првата цифра од која цифрата 5 не е поголема. Така го добиваме бројот 658364.

13. Со помош на цифрите 9, 5, 0, 4, 2 запиши ги најмалиот и најголемиот непарен осумцифрен број во чиј запис ниту една цифра не се појавува повеќе од три пати.

Решение. При запишување на најголемиот број треба да ги употребиме најголемите цифри и истите да ги запишуваме најмногу три пати во опаѓачки редослед. Но, бројот треба да е непарен, па затоа помалата непарна цифра мора да е на местото не единиците. Така го добиваме бројот 99955445.

Аналогно, при запишување на најмалиот број треба последователно да ги употребуваме дозволение парни цифри и истите да ги запишуваме во опаѓачки редослед, со тоа што најмалата непарна цифра ќе биде цифра на единиците. Така го добиваме бројот 20002245.

14. Бројот 7525 е добиен од бројот 25 со допишување од лево на трипати поголем двоцифрен број. Опиши со зборови како од бројот 17 се добиени броевите 8517 и 1734 и пресметај колку пати добиените броеви се поголеми од почетниот број 17?
Решение. Бројот 8517 е добиен од бројот 17 така што од лево му е допишан пет пати поголем број, а бројот 1734 е добиен од бројот 17 така што од десно му е допишан два пати поголем број. Бројот 8517 е $8517:17=501$ пати поголем од почетниот број, а бројот 1734 е $1734:17=102$ пати поголем од почетниот број.

15. Запиши ги најголемиот и најмалиот деветцифрени броеви кај кои збирот на цифрите е 30, а кои се запишани само со некои од цифрите 0, 4 и 5.
Решение. Бидејќи
$$30=4+4+4+4+4+5+5+0+0=5+5+5+5+5+5+0+0+0,$$
најголемиот таков број е 555555000, а најмалиот таков број е 400444455.

16. Марија запишала неколку броеви како што е прикажано во долната табела:

2002	☼☼●●
304	☼☼☼☼▲▲▲
25	☼☼☼☼☼■■
513	☼☼☼■▲▲▲▲▲

Како Марија ќе го запише бројот 4321?
Решение. Очигледно е дека Марија единиците ги означува со симболот ☼, десетките со симболот ■, стотките со симболот ▲ и илјадитите со симболот ●. Според тоа, бројот 4321Марија ќе го запише како: ☼■■▲▲▲●●●●.

17. Марија запишала неколку броеви како што е прикажано во долната табела:

14	□ □♣♣
203	▼ ▼ ▼▼▼▼♣♣♣
110	▼ □ ▼▼□

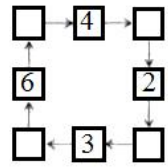
Кој број го запишала Марија ако на таблата стоело

▼ ▼ ▼ ▼ □□□□□

▼▼▼▼▼▼▼▼▼□□□□□♣♣♣♣

Решение. Очигледно Марија единиците ги означувала со симболот ♣, десетките со □□ и стотките со ▼▼▼. Според тоа, на таблата бил запишан бројот 454.

18. Во празните квадратчиња запиши ги броевите 7, 8, 1 и 5 така да одејќи во насока на стрелките го читаме:



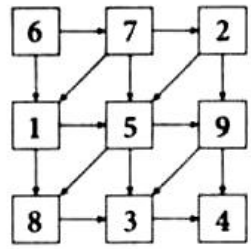
а) најголемиот парен петцифрен број,

б) најголемиот непарен шестцифрен број.

Решение. а) Броевите може да се запишат така што ќе се прочита бројот 76548.

б) Броевите во овој случај може дасе запишат така што ќе се прочита бројот 847253.

19. На цртежот десно е дадена шемата од која е дозволено читање на повеќецифрени броеви во насока на стрелките. На пример, може да се прочита бројот 15834 или бројот 615934, но не може да се прочита бројот 16753 или бројот 3594. Кој е најголемиот, а кој е најмалиот шестцифрен број кој може да се прочита на дозволениот начин?



Решение. Лесно се проверува дека шестцифрени броеви може да се прочитаат само ако првата цифра е 6 или 7. Најмалиот шестцифрен број кој може да се прочита е 615834, а најголемиот е 725934.

20. Пред или меѓу цифрите или на крајот на бројот

4 7 0 9

запиши ги цифрите 2 и 5 така што добиениот шестцифрен број ќе

биде:
а) најголем можен,
б) најмал можен.

Решение. а) Јасно, цифрата 5 треба да ја запишеме пред првата цифра од која таа е поголема, а истото треба да го направиме и со цифрата 2. Значи, цифрата 5 мора да е запишана на пред бројот, а потоа цифрата 2 мора да е пред цифрата 0, па така најголемиот можен број е 547209.

б) За да го добиеме најмалиот цифрата 2 треба да ја запишеме пред првата цифра од која таа е помала, а истото треба да го направиме и со цифрата 5. Така го добиваме најмалиот можен број 245709.

21. Пред или меѓу цифрите или на крајот на бројот

5 2 2 0 6

запиши ги цифрите 1, 8 и 0 така што добиениот осумцифрен број ќе биде:
а) најголем можен,
б) најмал можен.

Решение. а) Решаваме на потполно аналоген начин како во претходната задача и го добиваме бројот 85221060.

б) Решаваме на потполно аналоген начин како во претходната задача и го добиваме бројот 10522068.

22. Меѓу две цифри на бројот 664422 запиши ја цифрата 3 така што ќе добиениот седумцифрен број ќе биде:
а) најголемиот можен,
б) најмалиот можен.

Решение. а) Гледајќи од лево кон десно цифрата 3 ја запишуваме пред првата цифра од која таа е поголема. Така го добиваме бројот 6644322.

б) Гледајќи од лево кон десно цифрата 3 ја запишуваме меѓу две цифри и тоа пред првата цифра од која цифрата 3 не е поглема. Така го добиваме бројот 6364422.

23. Запиши го најголемиот
а) парен, б) непарен,
седумцифрен број чиј збир на цифри е 42.

Решение. За да бројот биде најголем, неговиот декаден запис треба да почнува со најголем можен број цифри 9. Бидејќи $4 \cdot 9 < 42 < 5 \cdot 9$,

првите четири цифри ќе бидат 9. Понатаму, $42-4\cdot 9=6$, па затоа збирот на преостанатите три цифри ќе биде 6. Притоа цифрата на стотките треба да биде најголема можна, па затоа:

а) ако бројот е парен, тогаш цифрите на единиците и десетките се 0, а цифрата на стотките е 6 и бараниот број е 9999600,

б) ако бројот е непарен, тогаш цифрата на единиците мора да е непарна, па во овој случај го добиваме бројот 9999501.

24. Запиши го најголемиот:

а) парен, б) непарен

природен број чиј збир на цифри е еднаков на 53.

Решение. За да бројот биде најголем, неговиот декаден запис треба да почнува со најголем можен број цифри 9. Бидејќи $5\cdot 9<53<6\cdot 9$, добиваме дека првите пет цифри ќе бидат 9, а збирот на другите цифритреба да е $53-45=8$. Понатаму, цифрта на единиците треба да биде најмала можна за да преостанатите ц, а преостанатите цифри треба да бидат еднакви на 0.

а) Ако бројот е парен, неговата цифра на единиците мора да е парна, што значи 0, па бараниот број е 99999800.

б) Ако бројот е непарен, неговата цифра на единиците мора да е непарна,шро значи 1, па бараниот број е 99999701.

25. Користејќи ги цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 (секоја точно еднаш) запиши два трицифрени броја така што:

а) нивниот збир е најголемиот можен број,

б) нивниот збир е најмалиот можен број,

в) разликата меѓу поголемиот и помалиот е најголемиот можен број,

г) разликата меѓу поголемиот и помалиот е најмалиот можен број.

Решение. а) Збирот е најголем ако првите цифри на собирците се 6 и 5, а вторите се 4 и 3. Такви се, на пример, броевите 642 и 531, чиј збир е 1173.

б) Збирот е најмал ако првите цифри на собирците се 1 и 2, а вторите цифри се 3 и 4. Такви се, на пример, броевите 246 и 135, чиј збир е 381.

в) Разликата ќе биде најголема ако намаленикот е најголемиот можен број, а намалителот е најмалиот можен број. Во случајов тоа се броевите 654 и 123, па разликата е 531.

г) Разликата ќе биде најмала кога цифрите на стотки се два последо-

вателни броја, а преостанатите четири цифри се распределени така што двоцифрениот завршеток на намалителот е најголемиот можен број, а двоцифрениот завршеток на намаленикот е најмалиот можен број. Лесно се гледа дека тоа се броевите 412 и 365, при што разликата е 47.

26. Запиши ги два петцифрени броја така што ќе ги употребиш сите десет цифри и такви што:
а) нивниот збир е најголемиот можен број,
б) нивниот збир е најмалиот можен број,
в) разликата на поголемиот и помалиот е најголемиот можен број,
г) разликата на поголемиот и помалиот е најмалиот можен број.
Решение. а) Збирот ќе биде најголем кога во собирците првите цифри се 8 и 9, вторите се 6 и 7, третите се 4 и 5, четвртите се 2 и 3 и петтите се 0 и 1. Такви, на пример, се броеви 97531 и 86420, при што збирот е 183951.
б) Збирот ќе биде најмал кога во собирците првите цифри се 1 и 2, вторите се 3 и 0, третите се 4 и 5, четвртите се 6 и 7, петтите се 8 и 9. На пример, такви се броевите 20468 и 13579, при што збирот е 34047.
в) За да разликата биде што е можно поголема, намаленикот треба да е што е можно поголем, а намалителот треба да е што е можно помал. Така ги добиваме броевите 98765 и 10234, па разликата е 88531.
г) Разликата ќе биде најмала кога цифрите на десетилјадитите ќе бидат двете последователни цифри 5 и 4, останатите цифри на намаленикот ќе бидат 0, 1, 2 и 3, во овој редослед, а останатите цифри на намалителот ќе бидат 9, 8, 7 и 6, во овој редослед. Така ги добиваме броевите 50123 и 49876, а нивната разлика е 247.

27. Ако само три цифри меѓусебно ги заменат местата, тогаш најголемиот број кој може да се добие од бројот 527906 е бројот 957206. Кој е најмалиот број кој може на опишаниот начин да се добие од бројот 651870?
Решение. Тоа е бројот 150876. За да цифрата 1 дојде на прво место истата ја заменуваме со цифрата 6, а потоа цифрата 6 ја заменуваме со цифрата 0, односно со шестата цифра.

28. Картончиња се запишани два двоцифрени и два едноцифрени броја: 38, 66, 4 и 1. Со составување по две картончиња може да се добие пар

трицифрени броеви (на пример 438 и 661). Кој е најмалиот, а кој е најголемиот збир на два така добиени броја?

Решение. Најмалиот збир се добива ако за цифрите на стотките ги избереме броевите 1 и 3, т.е. ако ги формираме броевите 384 и 166 и тогаш го добиваме збирот $384+166=550$.

Најголемиот збирго добиваме ако за цифрите на стотките ги избереме 4 и 9 (со вртење на картончето 66 добиваме 99), т.е. најголемиот збир е $428+991=1429$.

29. Дали може и како со составување по две од картончињата 66, 59, 90 и 80 да се добијат два четирицифрени броја чија разлика е 2007?

Решение. Ако првото и третото картонче ги завртиме, добиваме: 99, 59, 06 и 80. Сега можеме да ги добиеме броевите 8006 и 5999,при што важи $8006-5999=2007$.

30. Пресметај ги вредностите на изразите:

а) $2563+437\cdot 6$, б) $19755:5-2637$, в) $145\cdot 9+2028:26$.

Решение. а) Имаме: $2563+437\cdot 6=2563+2622-5185$.

б) Имаме: $19755:5-2637=3951-2637=1314$.

в) Имаме: $145\cdot 9+2028:26=1305+78=1383$.

31. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$A=1325:5+15:5-(99-9:9)\cdot 2-35-30.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}A&=1325:5+15:5-(99-9:9)\cdot 2-35-30\\&=265+3-(99-1)\cdot 2-35-30\\&=268-98\cdot 2-35-30\\&=268-196-35-30\\&=72-35-30\\&=37-30\\&=7.\end{aligned}$$

32. Имаме збир од 8 собирци. Секој непарен собирок ќе го зголемиме за 182. Вториот, шестиот и осмиот собирок ќе ги намалиме за 266. Како треба да се промени четвртот собирок за да збирот остане непроменет?

Решение. Со дадената промена на седумте собирци збирот се зго-

лемува за $4 \cdot 182 = 728$, а се намалува за $3 \cdot 266 = 798$. Според тоа, за да истот остане непроменет осмиот собирок треба да го зголемиме за $798 - 728 = 70$.

33. Вредноста на изразот $a + b - c$ е 1512. Колкава ќе биде вредноста на овој израз ако секој број се зголеми за 500?
Решение. Бидејќи секој од собирците a и b се зголемува за 500 збирот $a + b$ се зголемува за 1000. Кога намалителот c се зглемува за 500, збирот се намалува за 500. Според тоа, изразот $a + b - c$ се зголемува за $1000 - 500 = 500$. Значи, вредноста на изразот ќе биде 2012.

34. Вредноста на изразот $a \cdot b : c$ е еднаква на 671. Определи ја вредноста на овој израз ако секој од броевите a, b, c се зголеми три пати.
Решение. Имаме, $a \cdot b : c = (a \cdot b) : c$. Кога секој од броевите a и b ќе се зголеми 3 пати, производот $a \cdot b$ ќе се зголеми 9 пати. Кога c ќе се зголеми 3 пати (делител) количникот $(a \cdot b) : c$ ќе се намали 3 пати. Според тоа, вредноста на изразот ќе биде $(671 \cdot 9) : 3 = 2013$.

35. Пресметај го збирот:
$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2007 + 2009 .$$
Решение. Во дадениот збир има 1005 собирци. Збирот на првиот и последниот број е еднаков на збирот на вториот и претпоследниот број итн. е еднаков на 502-риот и 503-тиот број, односно
$$1 + 2009 = 3 + 2007 = \ldots = 1003 + 1007 = 2010 .$$
За собирокот 1005 немаме соодветен пат, па затоа
$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + 2007 + 2009 &= (1 + 2009) + (3 + 2007) + \ldots (1003 + 1007) + 1005 \\ &= 502 \cdot 2010 + 1005 \\ &= 1010025. \end{aligned}$$

36. Пресметај ја вредноста на изразот
$$2009 - 2007 + 2005 - 2003 + \ldots + 9 - 7 + 5 - 3 + 1 .$$
Решение. Во дадениот израз има вкупно 1005 броеви. Разликите на првите два, вторите два итн. (има 502 такви парови) се еднакви и изнесуваат
$$2009 - 2007 = 2005 - 2003 = \ldots = 9 - 7 = 5 - 3 = 2 .$$
Значи,
$$2009 - 2007 + 2005 - 2003 + \ldots + 9 - 7 + 5 - 3 + 1 = 502 \cdot 2 + 1 = 1005 .$$

37. Пресметај го збирот

$$S = 1 + 11 + 21 + 31 + ... + 1981 + 1991 + 2001 + 2011.$$

Решение. Ако на секој собирок му ја избришеме цифрата на единиците, ги добиваме броевите 0, 1, 2, 3, 4, ...,198, 199, 200, 201. Значи, во збирот имаме 202 собирци. Користејќи ги својствата на собирањето и множењето, добиваме:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 11 + 21 + 31 + ... + 1981 + 1991 + 2001 + 2011 \\ &= (1 + 2011) + (11 + 201) + (21 + 1991) + (31 + 1981) + ... + (1001 + 1011) \\ &= 101 \cdot 2012 = 100 \cdot 2012 + 2012 = 203212. \end{aligned}$$

38. Пресметај го збирот

$$A = 11 + 111 + 211 + 311 + ... + 1811 + 1911 + 2011.$$

Решение. Во збирот A имаме вкупно 21 собиротк. Од својствата на собирањето и множењето добиваме

$$\begin{aligned} A &= 11 + 111 + 211 + 311 + ... + 1811 + 1911 + 2011 \\ &= 11 + (111 + 2011) + (211 + 1911) + ... + (1011 + 1111) \\ &= 11 + 10 \cdot 2122 = 11 + 21220 = 21231. \end{aligned}$$

39. Дали постојат два последователни природни броја чиј производ е еднаков на 200920092009...20092009 (бројот 2009 последователно е запишан 2010 пати).

Решение. Од два последователни броја точно еден е парен. Производ на два броја од кои едниот е парен е парен број. Значи, не постојат два последователни броја чиј производ е 200920092009...20092009 (бројот 2009 последователно е запишан 2010 пати).

40. Марко собрал три последователни природни броја, а потоа ги собрал следните три броја. Добиените збирови ги помножил и добил број чиј декаден запис завршува на 2023. Дали Марко точно пресметувал?

Решение. Не. Ако првиот од шесте броја е непарен број, тогаш збирот на првите три броја е парен, а ако првиот број е парен, тогаш збирот на последните три броја е парен број. Според тоа, меѓу двата добиени збира едниот мора да е парен број, па затоа и нивниот производ е парен број.

41. Запиши го бројот 2010 како производ на пет броја од кои секој е

помал од 100 (некои множители може да се повторуваат) на пет различни начини.

Решение. Бидејќи $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, добиваме:

$$2010 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67,$$
$$2010 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 67,$$
$$2010 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 67,$$
$$2010 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 67,$$
$$2010 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 30 \cdot 67.$$

42. Определи ја цифрата на единиците на производот на 17 седумки.

Решение. Знаеме дека ако цифрата на единиците на два броја е 1, тогаш и цифрата на единиците на нивниот производ е еднаква на 1. Сега, бидејќи

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 7}_{17 \text{ множители}} = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot 7$$
$$= 2401 \cdot 2401 \cdot 2401 \cdot 2401 \cdot 7,$$

добиваме дека цифрата на единиците на производот на 17 седумки е 7.

43. Определи ја цифрата на единиците на производот на 18 осумки.

Решение. Имаме $8 \cdot 8 = 64$ и $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4096$. Понатаму, производот на два броја чија цифра на единиците е 6 има цифра на единиците 6, а на броеви со цифри на единиците 4 и 6 производот има цифра на единиците 4. Конечно,

$$\underbrace{8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8}_{18 \text{ осумки}} = (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 8)$$
$$= 4096 \cdot 4096 \cdot 4096 \cdot 4096 \cdot 64$$
$$= \ldots 6 \cdot 64 = \ldots 4,$$

што значи дека производот на 18 осумки има цифра на единиците 4.

44. Броевите x и y се соодветно најмалиот и најголемиот број од четвртата стотка, кои се деливи со 11. Пресметај ја вредноста на изразот $x - y$.

Решение. Имаме $300 = 27 \cdot 11 + 3$, па затоа најмалиот број од четвртата стотка делив со 11 е бројот 308. Понатаму, $400 = 36 \cdot 11 + 4$, па затоа најголемиот број од четвртата стотка делив со 11 е бројот 396. Конечно, бараната разлика е $396 - 398 = 88$.

45. Реши ги равенките:

а) $5\cdot 500\cdot 5000x = 125\cdot 2000\cdot 3000$,

б) $650+360+790+570=(65+36+79+57)x$.

Решение. а) Почетната равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$5\cdot 5\cdot 100\cdot 5\cdot 1000x = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 2\cdot 1000\cdot 3\cdot 1000,$$
$$100x = 2\cdot 3\cdot 10\cdot 100,$$
$$x = 60.$$

б) Почетната равека последователно е еквивалентна на равенките:

$$65\cdot 10+36\cdot 10+79\cdot 10+57\cdot 10=(65+36+79+57)x,$$
$$(65+36+79+57)\cdot 10=(65+36+79+57)x$$
$$x=10.$$

46. Реши ги равенките:

а) $31\cdot 400\cdot 7000x = 124\cdot 2000\cdot 14000$,

б) $6400+3600+4600+5800=(32+29+23+18)x$.

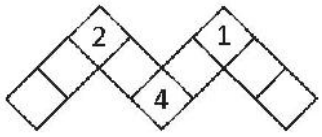
Решение. а) Последователно добиваме:

$$31\cdot 400\cdot 7000x = 124\cdot 2000\cdot 14000,$$
$$31\cdot 4\cdot 100\cdot 7\cdot 1000x = 31\cdot 4\cdot 2\cdot 1000\cdot 7\cdot 2\cdot 1000,$$
$$x = 2\cdot 10\cdot 2,$$
$$x = 40.$$

б) Последователно добиваме

$$6400+3600+4600+5800=(32+29+23+18)x,$$
$$200(32+29+23+18)=(32+29+23+18)x,$$
$$x=200.$$

47. Во празните квадратчиња на цртежот десно запиши ги броевите 3, 5, 6, 7, 8 и 9, по еден број во секое квадратче, така што збировите на сите три броја кои се во иста „линија“ се меѓусебно еднакви.

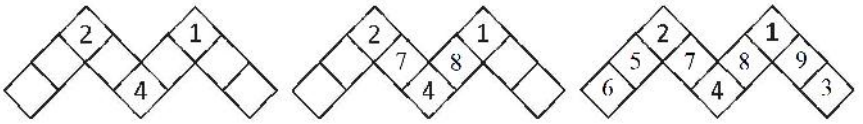


Решение. Збирот на сите четири збирови по „линиите“ може да се добие со собирање на сите запишани броеви од 1 до 9 и додавање на броевите 2, 4 и 1 кои се јавуваат по два пати. Бидејќи

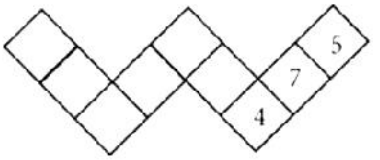
$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+(2+4+1)=45+7=52,$$

добиваме дека збирот на броевите запишани во една линија е еднаков

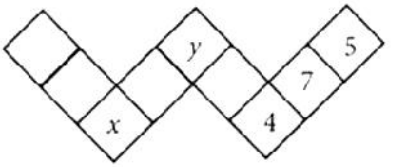
на $52:4=13$. Значи во квадратчето меѓу броевите 2 и 4 треба да е бројот 7, а во квадратчето меѓу броевите 4 и 1 треба да е бројот 8. Во „линијата“во која е познат само бројот 2 треба да се запиашт броеви чиј збир е 11, а во „линијата“ во која е само бројот 1 треба да се запишат броеви чиј збир е 12. Задачата има 4 решенија, а едно од нив е дадено на долниот цртеж десно.

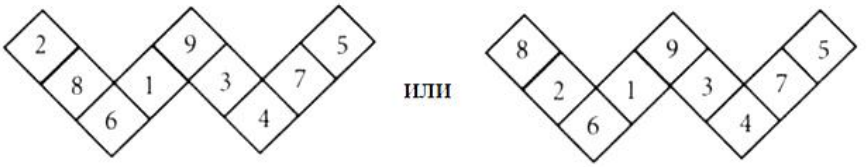


48. Во празните квадратчиња за-пиши ги броевите 1, 2, 3, 6, 8 и 9 така што збировите на секои три броја впишани во квадратчињата кои се во „една линија“ се меѓусебно еднакви.

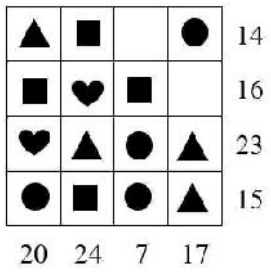


Решение. Ако преостанатите два броја кои два пати се собираат ги означиме со x и y (цртеж десно), тогаш важи $45+4+x+y=4\cdot 16$, односно $x+y=15$. Последнот е можно само ако $x=6, y=9$ или $x=9, y=6$. Бараните решенија соодветно се





49. На цртежот десно е прикажана табела во која во некои полиња се внесени симболи. На секој симбол соодветствува определен број, при што на иси симболи соодветствуваат исти броеви. Броевите десно и долу се еднакви на збировите на броеви кои соодветствуваат на симболите по редици и колони. Определи ги броевите кои соодветствуваат на симболите. (Во празните квадратчиња не е запишано ништо.)



Решение. Во првата колона има едно срце повеќе од првиот ред, па како $20-14=6$, заклучуваме дека на срцето соодветствува бројот 6.
Збирот во вториот ред е 16, па како има едно срце заклучуваме дека збирот на двата квадрати е $16-6=10$, што значи дека на еден квадрат соодветствува бројот $10:2=5$.
Бидејќи збирот во третата колона е 7 и има еден квадрат и два круга заклучуваме дека збирот на броевите на двата круга е $7-5=2$. Значи, на еден круг соодветствува бројот $2:2=1$.
Бидејќи збирот во четвртата колона е 17 и имаме еден круг и два триаголника, на двата триаголника соодветствува збирот $17-1=16$, па затоа на еден триаголник соодветствува бројот $16:2=8$.

50. Користејќи ја точно еднаш секоја од цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, Матео треба да запише два броја чиј збир е 750. Колку различни можности има? Определи ја онаа можност кај која разликата на двата броја е најголема можна?
Решение. Ако еден од броевите е двоцифрен или едноцифрен, тогаш другиот број треба да е четирицифрен или петцифрен, па збирот ќе биде поголем од 750. Значи, двата броја треба да се трицифрени.
Бидејќи цифрата на единиците на збирот е 0, единствена можност е цифрите на единиците на собирците да се 4 и 6. Притоа од собирањето на единиците имаме преност 1, па како ни останууваат цифрите 1, 2, 3 и 5, за цифрата на десетките на збирот да е 5 единствена можност е цифрите на десетките на собирците да се 1 и 3. Конечно, цифрите на стотките на собирците се 2 и 5. Така, имаме

Поголемиот број	536	534	516	514
Помалиот број	214	216	234	236
Разлика	322	318	282	278

Значи, вкупно се 4 можности, а најголемата разлика се добива за броевите 536 и 214.

51. Меѓу дадените броеви, без да го менуваш нивниот редослед, стави знаци на аритметичките операции и загради така што ќе добие точно равенство:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8=2006.$$

Решение. Едно од можните решенија е

$$1\cdot 2\cdot(3+4\cdot 5\cdot(6\cdot 7+8))=2006.$$

52. Меѓу цифрите во долната низа стави знаци за собирање, одземање и множење така што ќе добиеш точно равенство:

$$9\ \ 8\ \ 7\ \ 6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1 = 2010\,.$$

(Дозволено е користење на загради.)

Решение. Имаме: $2010 = 503 \cdot 4 - 2$ и како $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ добиваме

$$(9 \cdot 8 \cdot 7 - 1) \cdot 4 - 2 = 2010\,,$$

па затоа

$$(9 \cdot 8 \cdot 7 - 6 + 5) \cdot 4 - 3 + 2 - 1 = 2010\,.$$

53. Меѓу некои цифри стави некои од знаците за собирање, одземање, множење и делење така што ќе добиеш точно равенство:

$$9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 = 2020$$

Не е дозволено користење на загради.

Решение. Имаме:

$$999 + 999 + 99 : 9 + 99 : 9 = 2020,$$
$$9999 : 9 + 99 \cdot 9 + 9 + 9 - 9 + 9 = 2020,$$
$$9999 : 9 + 99 \cdot 9 + 9 \cdot 9 : 9 + 9 = 2020.$$

54. На таблата се запишани во еден ред неколку природни броеви, при што разликата на секои два соседни броја е еден ист број. Матео ги заменил цифрите со букви (различните цифри со различни букви, а исти цифри со исти букви). Кои се почетните броеви, ако Матео добил:

$$A, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CE}, \overline{FF}$$

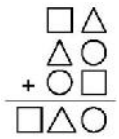
Решение. Бидејќи вториот и третиот број имаат иста цифра на десетките заклучуваме дека разликата е помала или еднаква на 9. Збирот на два едноцифрени броја е помал од 20, па затоа $B = 1$. Слично заклучуваме дека $C = 2$ и $F = 3$. Значи,

$$A, 12, \overline{1D}, \overline{2E}, 33\,.$$

Според тоа, ако со d ја означиме разликата меѓу два последователни броја, имаме $33 - 12 = 3d$, т.е. $d = 7$. Конечно, запишаните броевис е:

$$5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33.$$

55. Под исти фигури се кријат исти цифри, а под различни фигури, различни цифри. Пронајди ги соодветните цифри така што пресметувањето ќе биде точно:



Решение. Од десната колона следува дека под □ и △ се цифри чиј збир е 10. Тоа значи дека од десната колона на средната имаме пренос 1 десетка. Збирот на цифрите на левата колона е поголем од 10, но е помал од 20, бидејќи под ○ е број помал од 9 (цифра). Според тоа, под □ е цифрата 1, па затоа под △ е цифрата $10-1=9$. Сега, од левата колона следува дека под ○ е цифрата 8, Значи,

$$\begin{array}{r} 19 \\ 98 \\ +\ 81 \\ \hline 198 \end{array}$$

56. Во долниот ребус на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Две букви една до друга претставуваат двоцифрен број. Операциите се реализираат по редови и колони, резултатот на операцијата е во секој ред по знакот =, а резултатот во секоја колона е под линијата. Кои цифри соодветствуваат на буквите.

$$\begin{array}{ccccc} AB & - & C & = & D \\ + & & : & & + \\ A & + & E & = & F \\ \hline AA & - & E & = & G. \end{array}$$

Решение. Од првата колона за збирот на единиците имаме $B+A=A$, па затоа $B=0$. Сега, во првиот ред разликата на двоцифрен и едноцифрен број е едоцифрен број, па затоа $A=1$. Понатаму, од втората колона имаме $C:E=E$, па затоа $C=E\cdot E$. Значи, можни се два случаја $E=2, C=4$ или $E=3, C=9$. Но, C не може да е 9, бидејќи тогаш $D=1=A$, како и A. Значи, $C=4, E=2$. Тогаш $D=10-4=6$, $F=1+2=3$ и $G=11-9=9-6+3$. Значи

$$\begin{array}{ccccc} 10 & - & 4 & = & 6 \\ + & & : & & + \\ 1 & + & 2 & = & 3 \\ \hline 11 & - & 2 & = & 9. \end{array}$$

57. Реши го бројниот ребус $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{ABC}$, во кој на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. .

Решение. Од $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{ABC}$, следува $10C+B=89A$. Од последното равенство добиваме $A=1$, $B=9$ и $C=8$, па бараниот збир е $19+98+81=198$.

58. Во следните записи замени ги буквите со цифри (различните букви со различни цифри) така што сите три равенства ќе бидат точни:

$$A+B=\overline{CD},\ E+F=G,\ H+I=J\ .$$

Решение. Како што можеме да видиме во трите равенства се употребени сите десет цифри. Сега, бидејќи цифрите се различни, единствена можност е 0 да е цифра на единиците на двоцифрениот збир. Но, збир на два едноцифрени броја е помал од 20, па затоа

$$A+B=10,\ E+F=G,\ H+I=J\ .$$

Некои решенија се:

$$4+6=10,\ 2+7=9,\ 3+5=8,$$
$$3+7=10,\ 4+5=9,\ 2+6=8,$$

а другите се добиваат со замена на местата на едноцифрените собирци во равенствата на дадените решенија.

59. Ако $\overline{AR}+H+I=\overline{MED}$ и $P\cdot S=F$, која цифра и соодветствува на буквата F ? На различни букви соодветстуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри.

Решение. Од $P\cdot S=F$ е јасно дека F може да биде само 6 или 8, при што $2\cdot 3=6, 2\cdot 4=8$. Сега, ако $F=8$, тогаш мора да е $A=9, M=1$, па ни остануваат цифрите 0, 3, 5, 6 и 7 и треба да важи $\overline{9R}+H+I=\overline{1ED}$. Збирот на три од броевите 0, 3, 5, 6 и 7 е поголем од 8, а е помал од 18, па како мора да е $R+H+I\geq 10$ заклучуваме дека $E=0$, односно $\overline{9R}+H+I=\overline{10D}$. Последното значи дека $R+H+I=10+D$ и цифрите R,H,I,D се 3, 5, 6 и 7 во некој редослед. Меѓутоа, збирот на било кои три од овие четири броја не дава двоцифрен број чија цифра на единиците е четвртиот број (Зошто?), па затоа во овој случај немаме решение на задачата.

Ако $F=6$, тогаш бидејќи $M=1$, добиваме $\overline{AR}+H+I=\overline{1ED}$, па

затоа $A=8$ или $A=9$. Ако $A=8$, тогаш мора да е $E=0$, па затоа $R+H+I=20+D$ и цифрите R,H,I,D се цифрите 4, 5, 7, 9 во некој редослед. Последното не е можно, бидејќи

$$R+H+I\le 9+7+5<20+4\le 20+D.$$

Останува $A=9$, па како и во овој случај мора да е $E=0$, добиваме $R+H+I=10+D$ и цифрите R,H,I,D се цифрите 4, 5, 7, 8 во некој редослед. Сега, лесно се добива дека $D=7$ и цифрите R,H,I се цифрите 4, 5, 8 во некој редослед. Така имаме шест решенија на задачата, од кои едно е $94+5+8=107, 2\cdot 3=6$. Испиши ги преостанатите пет решенија.

60. Во записот

$$\overline{MK}+\overline{MK}=\overline{AMS}$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно.

Решение. Имаме:

$$95+95=190,\quad 96+96=192,\quad 97+97=194,\quad 98+98=196.$$

61. Во записот

$$\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}=\overline{AMS}$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно.

Решение. Збир на три двоцифрени броја е трицифрен број, па затоа $A=1$ или $A=2$. За $A=1$ имаме $M=4$ или $M=5$, па затоа можни решенија се:

$$49+49+49=147,$$
$$52+52+52=156,$$
$$53+53+53=159.$$

За $A=2$ е $M=9$, па решенија се

$$97+9797=291,$$
$$98+98+98=294.$$

Според тоа, бројниот ребус има пет решенија.

62. Во записот

$$\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}=\overline{AMS}$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а

исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно.

Решение. Задачата има четири решенија и тоа:

$$34+34+34+34=136,\quad 65+65+65+65=260,$$
$$67+67+67+67=268,\quad 98+98+98+98=392.$$

63. Во записот

$$\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}+\overline{MK}=\overline{AMS}$$

замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што собирањето ќе биде точно.

Решение. Ребусот можеме да го запишеме во видот $5\cdot\overline{MK}=\overline{AMS}$, од каде добиваме

$$50M+5K=100A+10M+S,$$
$$S=5(8M+K-20A).$$

Јасно, $S=0$ или $S=5$.

Ако $S=0$, тогаш $K=4(5A-2M)$, па затоа $K=4$ или $K=8$. Ако $K=4$, добиваме $5A=2M+1$, од каде наоѓаме $M=2, A=1$ или $M=7, A=3$. Ако $K=8$, добиваме $5A=2M+2$, од каде наоѓаме $M=4, A=2$ или $M=9, A=4$

Ако $S=5$, тогаш $1=8M+K-20A$, па затоа $K=4(5A-2M)+1$ од каде следува $K=1$ или $K=9$. Ако $K=1$, добиваме $5A=2M$, од каде наоѓаме $M=5, A=2$ или $M=7, A=3$. За $K=9$, имаме $5A=2M+2$, од каде наоѓаме $M=5, A=2$.

Според тоа, решенијата на дадениот ребус се:

$$24+24+24+24+24=120,$$
$$48+48+48+48+48=240,$$
$$49+49+49+49+49=245,$$
$$74+74+74+74+74=370,$$
$$98+98+98+98+98=490.$$

64. Дали е можно во записот

$$\overline{LETO}+\overline{LETO}=\overline{ODMOR}$$

да се заменат буквите со цифри (исти букви со исти цифри, а различни букви со различни цифри) така што добиеното равенство ќе биде точно.

Решение. Не. Ако е тоа можно, тогаш мора да е $O=1$, што значи

$R=2$. Бидејќи $T+T$ е парен број и немаме пренос, следува дека O мора да е парна цифра, што противречи на $O=1$.

65. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{SON}+\overline{SLON}=2006.$$

Решение. Бидејќи $2O$ и $2N$ се парни броеви, а преносот од $2N$ може да биде најмногу 1, добиваме дека од $2N$ не може да има пренос, па затоа $2N<10$, од каде следува $2N=6$, т.е. $N=3$. Јасно, $S=1$, бидејќи во спротивно левата страна ќе биде поголема од 2200.
Сега, $2O$ има цифра на единици 0, па затоа $O=0$ или $O=5$. За $O=0$ добиваме $L=9$, а за $O=5$ добиваме $L=8$. Конечно, бројниот ребус има две решенија и тоа: $103+1903=2006$ и $153+1853=2006$.

66. Во следните записи замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри) така што двете равенства ќе бидат точни:

$$\overline{AB}\cdot C=\overline{DE},\ \overline{FG}\cdot H=\overline{IJ}.$$

Решение. Имаме: $15\cdot 4=60$ и $29\cdot 3=87$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

67. Реши го бројниот ребус

$$\overline{TRI}+\overline{PET}=\overline{OSUM},$$

во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри.

Решение. Задачата има голем број решенија. Некои од нив се:

$235+862=1097,\ 254+782=1036,\ 263+782=1045,\ 283+762=1045,$
$296+742=1038,\ 325+743=1068,\ 345+723=1068,\ 359+683=1042,$
$364+893=1257,\ 382+693=1075,\ 408+954=1362,\ 436+854=1290,$
$456+834=1290,\ 468+904=1372,\ 482+594=1076,\ 508+965=1473,$
$567+835=1402,\ 573+495=1068,\ 584+725=1309,\ 593+475=1068,$
$608+926=1534,\ 632+946=1578,\ 652+746=1398,\ 653+826=1479,$
$683+726=1409,\ 705+687=1392,\ 723+867=1590,\ 735+907=1642,$
$745+937=1682,\ 763+827=1590,\ 804+568=1372,\ 826+708=1534,$
$852+638=1490,\ 864+508=1372,\ 869+458=1327,\ 904+679=1583,$
$908+349=1257,\ 925+809=1734,\ 965+309=1274,\ 976+409=1385.$

68. Во записот $\overline{MK}\cdot\overline{MK}=\overline{AMS}$ замени ги буквите со цифри (различни букви со различни цифри, а исти букви со исти цифри) така што множењето ќе биде точно.

Решение. Производот на два исти двоцифрени броја треба да е еднаков на трицифрен број. Најмалиот двоцифрен број е 10, и тој помножен сам со себе е трицифрен број. Најголемиот двоцифрен број кој помножен сам со себе дава трицифрен број е бројот 31. Значи, $10<\overline{MK}<31$. Заради даденото равенство ги исклучуваме броевите 11, 22 и сите двоцифрени броеви чија цифра на единиците е 0, 1, 5 или 6. Така останува да ги провериме броевите 12, 13, 14, 17, 18, 19, 23, 24, 27, 28 и 29. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $23\cdot 23=529$.

69. Дешифрирај го множењето

$$\begin{array}{r} \underline{OSUM\cdot OSUM} \\ **** \\ **** \\ **** \\ \hline ******** \end{array}$$

во кое на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви исти цифри. Ѕвездичките се заменуваат со било која цифра.

Решение. Бидејќи во вториот ред ѕвездички имаме поместување за две места, заклучуваме дека $U=0$. Понатаму, мора да е $O=3$, бидејќи ако $O<3$, тогаш крајниот производ ќе биде седумцифрен број, а ако $O>3$, тогаш третиот делимичен производ (третиот ред на ѕвездички) ќе биде петцифрен број. Од исти причини и цифрите S и M не се поголеми од 3, а бидејќи се различни од $A=0$ и $O=3$, едната од нив мора да е 1, а другата 2. Мора да важи $S=2, M=1$, бидејќи $3102^2=9622404$ е седумцифрен број. Значи, одговорот е $3201^2=10246401$.

70. Разгледај како е левата табела пополнета, па потоа доврши го пополнувањето на десната табела.

·	8	25
3	24	75
7	56	175

·		
	81	30
	108	

Решение. Јасно, сите можители во втората табела се поголеми од 1. Бидејќи $81 = 3 \cdot 27$ и $30 = 3 \cdot 10$ во првото поле на првата колона е бројот 3. Сега е јасно дека во второто и третото поле на првиот ред се броевите 27 и 10. Понатаму, од $108 : 27 = 4$ во второто поле на првата колона е бројот 4 и на крајот во волното десмо поле е бројот $4 \cdot 10 = 40$. Долу е прикажана пополнетата втора табела.

·	27	10
3	81	30
5	108	40

71. Разгледај и воочи го правилото според кое се запишани броевите во долната табела.

·	8	25
3	23	75
7	56	175

На ист начин довврши го пополнувањето со соодветните броеви на следнава табела:

·		
	606	
	505	5000

Решение. Јасно, во секое бело поле е запишан производот на броевите во портокаловите полиња од редот и колоната во кое е белото поле. Имаме $505 = 5 \cdot 101$ и $5000 = 5 \cdot 1000$, па добиваме дека во третиот ред множителот е 5, а во втората колона множителот е 101 (бидејќи $606 = 6 \cdot 101$). Пополнетата табела е:

·	101	1000
6	606	6000
5	505	5000

72. Довврши го пополнувањето со соодветните броеви на следнава табела:

·			
	56		1000
	21	81	

Решение. Од $56 = 7 \cdot 8$ и $21 = 7 \cdot 3$ следува дека првиот број во втората колона е 7, а првите броеви во вториот и третиот ред се 8 и 3, соодветно. Сега лесно се добива дека бараното пополнување е како во следнава табела:

·	7	17	125
8	56	216	1000
3	21	81	375

73. Во табела се запишани вкупно 15 броеви (множители и соодветните производи). Учителката Даница избришала 10 броеви и на учениците им задала точно да ги запишат броевите (да ја рекобструираат табелата). Како тоа ќе го направата учениците, ако по бришењето е добиена следнава табела:

·			
	35	63	
		99	44
			404

Решение. Од $35=5\cdot 7, 63=7\cdot 9, 99=9\cdot 11$ и $44=4\cdot 11$ следува

·	5	9	4
7	35	63	
11		99	44
			404

Понатаму, $404:4=101$, па сега лесно се добива бараното пополнување на табелата:

·	5	9	4
7	35	63	28
11	55	99	44
101	505	909	404

74. а) Колку милијарди треба да додадеш на една милијарда за да добиеш еден билион?

б) Колку нули треба да допишеш на една милијарда за да добиеш еден билион?

Решение. Еден билион има 1000 милијарди. Тоа значи:

а) На една милијарда треба да се додадат 999 милијарди за да се добие еден билион.

б) На една милијарда трба да и се допишат три нули за да се добие еден билион.

75. а) Колку пати треба да се намали еден билион за да се добие една милијарда?

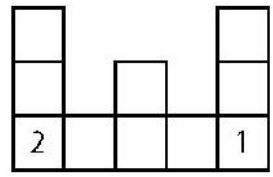
б) Колку нули треба да се избришат за да од десет билиони се добијат

сто милијарди?

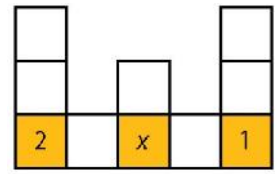
Решение. а) Еден билион има илјади милијарди, па за да од него се добие една милијарда, тој треба да се намали 1000 пати.

б) Десет билиони во својот запи содржат 13 нули, а 100 милијардни содржат 11 нули. Затоа треба да избришеме 2 нули.

76. Во празните полиња на фигурата прикажана на цртежот десно запиши ги броевите 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 така што збирот на броевите во секој правец ќе биде еднаков на 14.



Решение. Бидејќи броевите треба да се распоредат на четири правци така што во секој правец збирот да биде еднаков на 14, добиваме дека вкупниот збир ќе биде еднаков на $4\cdot 14=56$. Три полиња се наоѓаат и на хоризонталниот и на вертикалните правци и во нив се запишам броеите $2, x, 1$, па затоа овие броеви треба два пати да ги собереме. Значи,

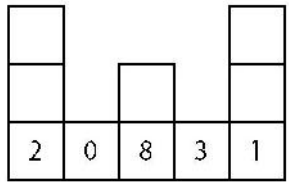


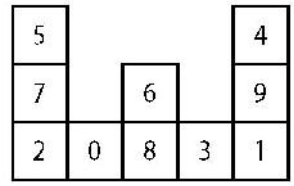
$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+(2+x+1)=56,$$

$$48+x=56,$$

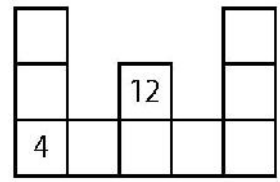
$$x=8.$$

Збирот на петте броја на хоризонталниот правец треба да 14, а веќе имаме збир $2+8+1=11$, па затоа во празните полиња треба во некој редослед да се броевите 0 и 3 (цртеж долу лево). Јасно, над бројот 8 мора да е бројот 6, па остануваат броебите 4, 5, 7 и 9. Значи,над 2 мора да се во некој редослед броевите 5 и 7, а над 1 мора да се во некој редослед броевите 4 и 9. Едно пополнување е прикажано на цртежот долу десно.

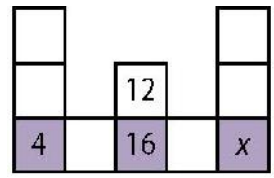




77. Во празните полиња запиши ги броевите 0, 2, 6, 8, 10, 14, 16 и 18 така што збирот на броевите запишани во секој правец ќе биде еднаков на 28.

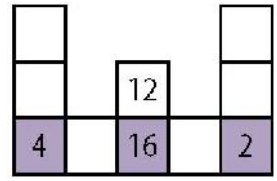


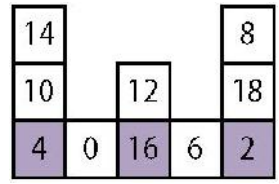
Решение. Јасно, под бројот 12 треба да е запишан бројот $28-12=16$. Збирот на броевите во сите четири правци е еднаков на $4\cdot 28=112$. Понатаму, три броја 4, 16 и x се наоѓаат во пресекот на два правци, па затоа треба во збирот 112 два пати да ги собереме. Така добиваме



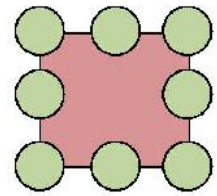
$$0+2+4+6+8+10+12+14+16+18=(4+16+x)=112,$$
$$110+x=112,$$
$$x=2.$$

Збирот на трите броја кои се во обоените полиња на долниот ред е еднаков на $4+16+2=22$. Затоа во белите полиња треба да се запишат два броја чиј збир е едаков на 6. Единствена можност е да се запишат броевите 0 и 6 во некој редослед (цртеж десно). Сега, првиот и третиот вертикален правец треба да се дополнат со броевите 8, 10, 14 и 18 така што збирот во секој правец ќе биде 28. Тоа е можно само во првиот правец се запишат броевите 10 и 14, а во вториот правец броевите 8 и 18 (во некој редослед). Еден распоред на броевите е прикажан на цртежот десно.



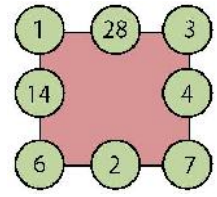


78. Броевите 1, 2, 3, 4, 6, 7, 14 и 28 запиши ги во празните полиња така што производите на броевите на секоја од четирите страни на квадратот ќе биде еднаков на 84.

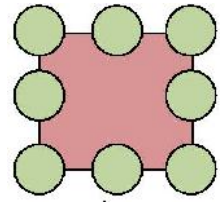


Решение. Бидејќи $84:28=3$, на една страна на квадратот мора да се броевите 1, 28 и 3 и тоа така што бројот 28 мора да е на средина.

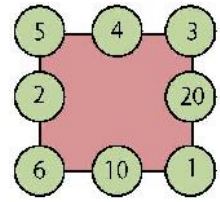
Понатаму, на другата страна каде шо е бројот 1 мора да се броевите 14 и 6 (бидејќи од преостанатите броеви производот на два броја е 84 само ако тоа се броевите 14 и 6). Сега е јасно дека бројот 7 мора да е во четвртото теме, па местата на броевите 2 и 4 се еднаозначно определени (цртеж десно).



79. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 и 20 запиши ги во празните полиња така што производите на броевите на секоја од четирите страни на квадратот ќе бидат меѓусебно еднакви.



Решение. Бидејќи само броевите 3 и 6 се деливи со 3, а имаме четири производи кои треба да се еднакви, овие два броја мора да се во две спротивни темиња. Сега, заради деливоста со 4 мора во средината на страните кои го содржат темето со бројот 6 да се наоѓаат броевите 2 и 10, а додека во средните на другите две страни да е броевите 10 и 20. Потоа, од деливоста со 5 мора во едно теме да е бројот 5. Сега, лесно се добива распоредот на роевите прикажан на цртежот десно.



80. Во празните полиња на дадената табела запиши броеви така што нивните збирови во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала се меѓусебно еднакви.

	4	
10		
5		7

Решение. Ако во колоната во која се дадени два броја третиот број го означиме со x (цртеж долу лево), добиваме дека збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала треба да е $x+10+5=x+15$. Според тоа, бројот запишан во средното поле на едната дијагонала е еднаков на $x+15-(x+7)=8$. Понатаму, бројот запишан горното десно поле е еднаков на $x+15-(x+4)=11$ (цртеж долу десно).

x	4	
10		
5		7

x	4	11
10	8	
5		7

Збирот на броевите запишана на една дијагонал е еднаков на $5+8+11=24$, што значи дека збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на другата дијагонала треба да е 24. Според тоа, $x=24-15=11$. Пополнетата табела е прикажана на цртежот десно.

9	4	11
10	8	6
5	12	7

81. Во празните полиња запиши ги потребните броеви така што ќе добиеш магичен квадрат, т.е. збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја

11	6	
		8
7		

дијагонала ќе биде еднаков.

Решение. Ако редот во кој се дадени два броја го до-полниме со x (цртеж долу лево), тогаш збирот на броевите во тој ред ќе биде $11+6+x=17+x$. Сега во долното квадратче на третата колона треба да го запишеме бројот $17+x-(8+x)=9$, а во централното поле на квадратот треба да го запишеме бројот $17+x-(7+x)=10$, цртеж долу десно.

11	6	x
		8
7		

11	6	x
	10	8
7		**9**

Збирот на броевите на дијагоналат е $11+10+9=30$, па затоа $x=30-17=13$. Пополнетиот магичен квадрат е прикажан ан цртежот десно.

11	6	**13**
12	**10**	8
7	**14**	**9**

82. Матео има „шифрарник“ кој е даден во долната табела (цртеж лево), со кој почнал да го пополнува дадениот магичен квадрат (цртеж десно).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
▲	○	□	▼	♠	♣	♥	♦	☺	☼

○○		
○□	○▲	
♦		

Довршиго пополнувањето кое го започнал Матео.

Решение. На долниот цртеж во квадратот (1) се прикажани дешифрирани дадените броеви. Во квадратот (2) е прикажано довршеното пополнување на магичниот квадрат во кој збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е 30. Во квадратот (3) се прикажани шифрираните броеви на магичниот квадрат.

(1)

11		
12	10	
7		

(2)

11	6	13
12	10	8
7	14	9

(3)

○○	♥	○▼
○□	○▲	☺
♦	○♠	☼

83. Броевите 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 со специјални знаци се запишани (на секој цифра соодветствува точно еден знак), на различни цифри различни знаци и на исти цифри исти знаци) така што е добиен магичниот квадрат

◄♥	◊◄	◄♣
◄●	◄♦	◊□
◊►	◄○	◄♠

прикажан на цртежот десно. Определи кој знак на која цифра соодветствува.

Решение. Карактеристичниот број на магичниот квадрат е

$$\frac{24+25+26+...+32}{3}=84.$$

Цифрата 2 се јавува седум пати, па затоа нејзе и соодветствува знакот ◄. Цифрата 3 се јавува три пати, па затоа нејзе и соодветствува знакот ◊. Понатаму, бројот 28 мора да е во централното квадратче на магичниот квадрат, па затоа на цифрата 8 и соодветствува знакот ○, на цифрата 0 знакот □, на цифрат 1 знакот ► итн. Во долната табела се дадени соодветствата на цифрите и знаците.

□	►	◄	◊	○	♣	●	♥	♦	♠
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

84. Определи магичен 3×3 квадрат составен од девет последователни природни броеви, кај кој збирот на броевите во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала, т.е. карактеристичниот збир е еднаков на 2007.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи $2007:3=669$, средниот од деветте последователни броеви е 669, па затоа деветте броеви се: 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672 и 673. Магичен квадрат е прикажан на цртежот десно.

672	665	670
667	669	671
668	673	666

Втор начин. Карактеристичниот збир на магич-ниот квадрат составен од броевите броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 е 15. Бидејќи $(2007-15):3=664$, ако на секој од овие броеви му се додаде бројот 664 се добива магичен квадрат составен од последователни броеви, чиј карактеристичен збир е 2007. На долниот цртеж е прикажано како се добива овој магичен квадрат.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

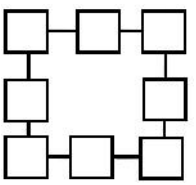
+

664	664	664
664	664	664
664	664	664

=

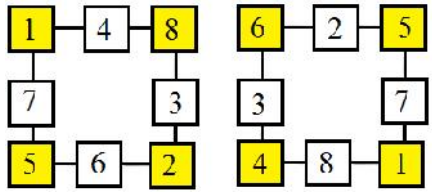
672	665	670
667	669	671
668	673	666

85. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 запиши ги во квадратчињата така што збирот на броевите на секоја страна на големиот квадратот е 13.

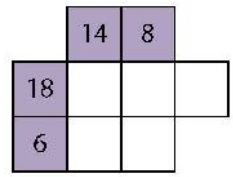


Решение. Бидејќи $1+2+3+4+5+6+7+8=36$, а збирот на броевите на сите четири страни на голе-

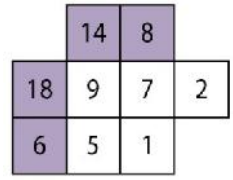
миот квадрат треба да е $4 \cdot 13 = 52$, збирот на броевите во жолтите квадратчиња кои два пати се јавуваат во збирот еднаков на 56 треба да е $56 - 36 = 16$. На долните цртежи се дадени две решенија на задачата.



86. Во празните квадратчиња на шемата прикажана на цртежот десно запиши некои од боевите од 1 до 9 така што збирот на броевите запишани во секој ред и секоја колона биде еднаков на бројот запишан во осенченото поле. Броевите кои ги запишуваш не смее да се повторуваат.

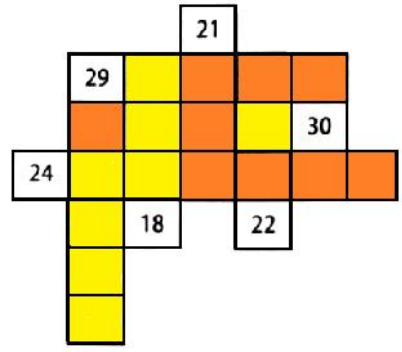


Решение. Бидејќи збирот во вториот ред е 6, собирците може да се 1 и 5, или 2 и 4. Бидејќи збирот во првата колона е 14, во првиот случај собирците може да се 9 и 5, а во вториот случај не постои број од 1 до 9 кој собран со 2 или со 4 дава збир 14. Значи, во првата колона се броевите 9 и 5, а во првиот ред се броевте5 и 1. Сега е јасно дека во вората колона се броевите 7 и 1, а во првиот ред се броевите 9, 7 и 2. Пополнетата шема е прикажана на цртежот десно.

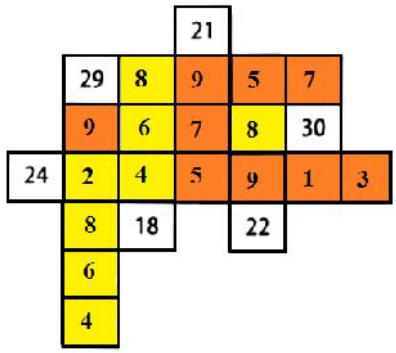


87. Во празните квадратчиња запиши по еден од броевите од 1 до 9 така што:

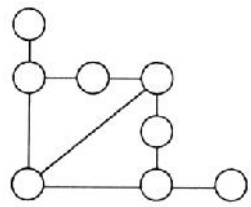
- во жолтите квадратчиња се запишани парни броеви, а во портокаловите непарни броеви,
- збирот во даден ред, односно дадена колона да е еднаков на бројот кој е веќе запишан во тој ред, односно во таа колона.
- во секој ред и секоја колона некој од броевите е запишан најмногу еднаш.



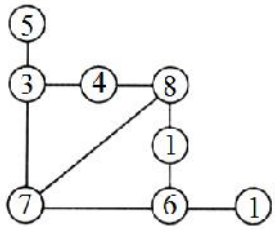
Решение. Едно решение на задачата е:

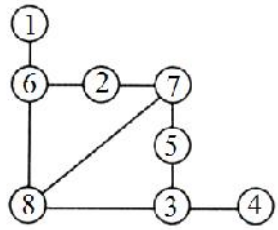


88. Во кругчињата запиши ги броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, во секое кругче по еден број и во различни кругчиња различни броеви, така што збирот на броевите броеви кои се на иста права е 15.

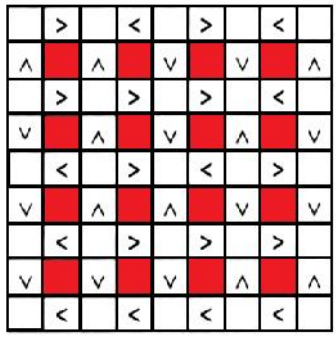


Решение. Задачата има повеќе решенија, но како на дијагоналата има само две кругчиња, во нив мора да се запишани броевите 7 и 8. Подолу се прикажани две решенија на задачата.

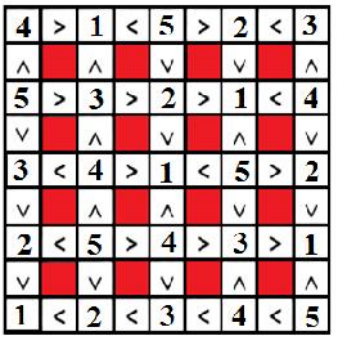




89. Во празните полиња запиши ги цифрите од 1 до 5 така што да соодветствуваат на знаците $>$ и $<$. Секоја цифра се појавува во секој ред и секоја колона точно еднаш.



Решение. Јасно, во последниот ред од лево кон десно треба да се запишани броевите 1, 2, 3, 4 и 5. Понатаму, во првата колона оддолу нагоре треба да се запишани броевите 1, 2, 3, 5 и 4. Понатаму, во вториот ред оддолу нагоре мора редоследно да се запишани броевите 2, 5, 4, 3, и 1, отн. Пополнетата фигура е прикажана на цртежот десно.



90. Во низата броеви

а) $AABB, CDD, CB, B$,

б) ABB, CAA, CB, B,

секој член, почнувајќи од вториот, е еднаков на производот на цифрите на претходниот. Определи ја низата. (На исти букви соодветствуваат исти цфири, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.)

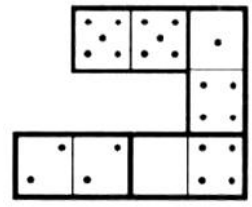
Решение. а) Заради последните два броја важи $C = 1$. Понатаму, меѓу броевите поглеми од 100, а помали од 200, а кои имаат две еднакви последни цифри само бројот 144 е еднаков на производот на два еднакви броја $A \cdot B$. Од тука добиваме $D = 4$, па затоа $B = 6$. Сега лесно се добива дека $A = 2$. Значи, низата е 2266, 144, 16, 6.

б) На сличен начин како во решението под а) добиваме дека бараната низа е 466,144, 16, 6. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

91. Со помош на домината

илустрирај го множењето на броевите 551 и 4 така што во првиот ред ќе го запишеш трицифрениот, во вториот ред едноцифрениот број и во третиот ред нивниот производ.

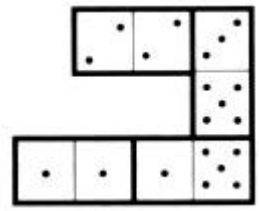
Решение. Имаме, $551 \cdot 4 = 2204$. Јасно, бројот 551 се добива со поставување хоризонтално на четвртото домино и вертикално на третото домино, со што е илустриран и вториот множител. Конечно, со првите две домина го илустрираме производот 2204 (цртеж десно).



92. Со помош на домината

илустрирај го множењето на броевите 223 и 5 така што во првиот ред ќе го запишеш трицифрениот, во вториот ред едноцифрениот број и во третиот ред нивниот производ.

Решение. Имаме, $223 \cdot 5 = 1115$. Јасно, бројот 223 се добива со поставување хоризонтално на второто домино и вертикално на четвртото домино, со што е илустриран и вториот множител. Конечно, со првото и третото домино го илустрираме производот 1115 (цртеж десно).



2. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. Новко во тетратката запишал еден двоцифрени еден четирицифрен број и рекол: „Збирот на броевите кои ги запишав е еднаков на 2007, а нивата разлика е најмалата можна.“ Кои броеви ги запишал Новко?
   Решение. Разликата на двата броја е најмала можна ако Новко го запишал најголемиот можен намалител, односно најголемиот двоцифрен број. Тоа е бројот 99, па затоа вториот број кој го запишал Новко е $2007 - 99 = 1908$.

2. Ана рекла: „Замислив еден четирицифрен и еден трицифрен број, чија разлика е 9863 и кои имаат најголем можен збир“. Кои броеви ги замислила Ана и кој е тој најголем можен збир?
   Решение. Најголемиот збир се добива кога едниот собирок е најголемиот можен четирицифрен број. Тоа е бројот 9999 и тогаш другиот собирок е $9999 - 9863 = 136$. Значи, Ана ги замислила броевиет 9999 и 136, а најголемиот можен збир е $9999 + 136 = 10135$.

3. На еден двоцифрен број од десната страна е допишан двоцифрен број кој е три пати поголем од почетниот двоцифрен број. Така добиениот четирицифрен број е собран со бројот кој е два пати поголем од почетниот двоцифрен број и е добиен бројот 2205. Определи го почетниот двоцифрен број.
   Решение. Ако на почетниот број од десно му допишеме две нули, тогаш се добива број кој е 100 пати поголем од почетниот број. Затоа ако од десно му допишеме број кој е три пати поголем од почетниот број се добива број кој е 103 пати поголем од почетниот број. Кога на овој број ќе му додадеме број кој е два пати поголем од почетниот број, се добива број кој е 105 пати поголем од почетниот број. Значи, почетниот број е $2205 : 105 = 21$.

4. На еден двоцифрен број од десната страна му е допишан двоцифрен број кој е два пати поголем од почетниот (двоцифрен) број. На така добиениот четирицифрен број му е додаден број кој е 50 пати поголем од почетниот двоцифрен број, по што е добиен збирот 7296. Определи

го почетниот двоцифрен број.

Решение. Нека бараниот двоцифрен број е x. Кога на него од десно ќе се допише двоцифрен број кој е двапати поголем од почетниот ќе се добие бројот $102x$. Сега кога на добиениот број ќе се додаде број кој е 50 пати поголем од почетниот двоцифрен број се добива бројот $102x + 50x = 152x$. Значи, $152x = 7296$, па затоа $x = 7296 : 152 = 48$.

5. На еден двоцифрен број од десно му е допишан двоцифрен број кој е два пати поголем од почетниот двоцифрен број. Вака добиениот четирицифрен број е собран со 10 пати поголем број од почетниот број и е добиен бројот 2800. Определи го почетниот број.

   Решение. Ако почетниот двоцифрен број е $\overline{ab}$, тогаш со допишување од десно на двоцифрен број $\overline{cd}$ кој е два пати поголем од почетниот број се добива бројот $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100\overline{ab} + 2\overline{ab} = 102\overline{ab}$. Кога на овој број ќе му се додаде број кој е 10 пати поголем од почетниот број се добива бројот $102\overline{ab} + 10\overline{ab} = 112\overline{ab}$. Според тоа, $112\overline{ab} = 2800$, од каде добиваме $\overline{ab} = 2800 : 112 = 25$.

6. Разликата на еден трицифрен и еден двоцифрен број е 989. Определи го збирот на овие броеви.

   Решение. Ако трицифрениот број е помал или еднаков на 998, тогаш за да се добие разлика 989 намалителот мора да е помал или еднаков на $998 - 989 = 9$, т.е. едноцифрен број.

   Значи, трицифрениот број е 999, а двоцифрениот број е $999 - 989 = 10$. Нивниот збир е $999 + 10 = 1009$

7. Разликата на еден четирицифрен и еден трицифрен број е 9899. Определи го збирот на овие броеви.

   Решение. Најголемиот четирицифрен број е 9999, а најмалиот трицифрен број е 100, па како $9999 - 100 = 9899$ заклучуваме дека бројот 9899 може да е разлика на еден четирицифрен и еден трицифрен бројсамо ако броевите се 9999 и 100. Според тоа, збирот на двата броја е $9999 + 100 = 10099$.

8. Третина на бројот $A = 2013$ е еднаква на осмина на бројот B. Определи го бројот B.

   Решение. Третина од бројот $A = 2013$ е еднаква на $2013 : 3 = 671$. Зна-

чи, бројот B е 8 пати поголем од бројот 671, т.е. $B = 8 \cdot 671 = 5368$.

9. Петтина од половина на бројот A е еднаква на три осмини од бројот B. Ако $B = 2448$, определи го бројот A.

Решение. Осмина од бројот B е $2448 : 8 = 306$. Значи, три осмини од бројот B е $3 \cdot 306 = 918$. Според тоа, половина од бројот A е еднаква на $918 \cdot 5 = 4590$, па затоа бројот A е еднаков на $4590 \cdot 2 = 9180$.

10. За колку ќе се зголеми бројот 2013 ако меѓу неговите три цифри 0 и 1 се запише една, две или три нули?

Решение. Ако меѓу цифрите 0 и 1 се запише една 0, се добива бројот 20013, па разликата меѓу него и дадениот број е

$$20013 - 2013 = 20000 + 13 - (2000 + 13) = 20000 - 2000 = 18000.$$

Ако меѓу цифрите 0 и 1 се запишат две 0, се добива бројот 200013, па разликата меѓу него и дадениот број е

$$200013 - 2013 = 200000 + 13 - (2000 + 13) = 200000 - 2000 = 198000.$$

Ако меѓу цифрите 0 и 1 се запишат три 0, се добива бројот 2000013, па разликата меѓу него и дадениот број е

$$\begin{aligned} 2000013 - 2013 &= 2000000 + 13 - (2000 + 13) \\ &= 2000000 - 2000 = 1998000. \end{aligned}$$

11. За колку ќе се зголеми бројот 2014 ако меѓу неговите цифри 0 и 1 се запишат четири нули?

Решение. Ако меѓу цифри 0 и 1 на бројот 2014 се запишат четири нули го добиваме бројот 20000014. Сега

$$\begin{aligned} 20000014 - 2014 &= (20000000 + 14) - (2000 + 14) \\ &= 20000000 - 2000 = 19998000. \end{aligned}$$

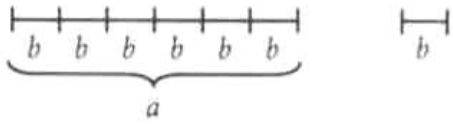
Значи, бројот 2014 се зголемува за 19998000 кога меѓу неговите цифри 0 и 1 се запишат четири нули.

12. Збирот на два броја е 15. Ако поголемиот број се намали за 4, производот на двата броја ќе се намали за 16. Кои се тие броеви?

Решение. Кога поголемиот број се намалува за 4, производот се намалува за четририкратната вредност на помалиот број, што е еднакво на 16. Значи, помалиот број е $16 : 4 = 4$, а поголемиот е $15 - 4 = 11$.

13. Збирот на два броја е 119, а едниот број е шест пати поголем од другиот број. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви се a и b ($a > b$). Според условот на задачата $a = 6b$, цртеж десно, и $a + b = 119$. Значи,



$6b + b = 119$, т.е. $7b = 119$, па затоа $b = 119 : 7 = 17$ и $a = 119 - 17 = 102$.

14. Гроздан замислил два броја од кои едниот е пет пати поголем од другиот. Кои броеви ги замислил Гроздан ако нивната разлика е трицифрен број кој се запишува со исти цифри?

Решение. Ако помалиот број го означиме со x, тогаш поголемиот број е $5x$, па затоа нивната разлика е $4x$. Според тоа, разликата е трицифрен број кој е делив со 4 и се запишува со исти цифри. Значи, разликата е или 444 и 888 (другите трицифрени броеви запишани со исти цифри не се деливи со 4). Според тоа, Гроздан ги замислил броевите 111 и 444,или броевите 222 и 1110.

15. Збирот на два броја е 2009. Ако првиот се подели со 3, а вториот се зголеми за 3 се добиваат два еднакви броја. Определи ги дадените броеви.

Решение. Нека при делењето на првиот број со 3 се добива бројот x. Тогаш броевите се $3x$ и $x - 3$, па затоа важи $3x + x - 3 = 2009$, од каде добиваме $x = 503$. Според тоа, првиот број е $3 \cdot 503 = 1509$, а вториот број е $503 - 3 = 500$.

16. Збирот на четири броја е 2340. Ако на првиот број му се додаден 2, од вториот се одземе 2, третиот се помножи со 2 и четвртиот се подели со 2, се добива еден ист број. Кои се тие четири броја?

Решение. Нека бараните броеви се a, b, c, d. Од условот на задачата имаме $a + 2 = b - 2 = 2c = d : 2$, па затоа $a = 2c - 2, b = 2c + 2, d = 4c$. Со замена во $a + b + c + d = 2340$, добиваме

$$(2c - 2) + (2c + 2) + c + 4c = 2340, \text{ т.е. } 9c = 2340.$$

Значи, $c = 260$ и другите три броја се $a = 518, b = 522$ и $d = 1040$.

17. Збирот на четири природни броја е 208. Ако на првиот му се додаде 3, или од вториот број се одземе 3, или третиот број се помножи со 3,

или четвртиот број се подели со 3, секогаш се добива ист резултат. Кои се тие броеви?

Решение. Нека броевите се a,b,c,d. Од условот на задачата следува $a+3=b-3=3c=\frac{d}{3}$. Според тоа, $a=3c-3, b=3c+3, d=9c$, па затоа $3c-3+3c+3+c+9c=208$, од каде добиваме $16c=208$, т.е. $c=13$. Значи, бараните броеви се $3\cdot 13-3=36, 3\cdot 13+3=42, 13$ и $9\cdot 13=117$.

18. Збирот на четири природни броја е 275. Ако првиот број се зголеми за 4, вториот се намали за 4, третиот се зголеми 4 пати, а четвртиот се намали 4 пати, тогаш се добива еден ист број. Кои се тие броеви?

Решение. Нека броевите се a,b,c,d. Од условот на задачата следува $a+4=b-4=4c=\frac{d}{4}$. Според тоа, $a=4c-4, b=4c+4, d=16c$, па затоа $4c-4+4c+4+c+16c=275$, од каде добиваме $25c=275$, т.е. $c=11$. Значи, бараните броеви се $4\cdot 11-4=40, 4\cdot 11+4=48, 11$ и $16\cdot 11=176$.

19. Збирот на три броја е 2010. Ако на првиот број му се додаде 1, од вториот се одземе 2, а третиот се помножи со 3, се добива еден ист број. Кои се трите броеви?

Решение. Нека $a+b+c=2010$. Според условот $a+1=b-2=3c$, па добиваме $a=3c-1$, $b=3c+2$. Според тоа,

$$(3c-1)+(3c+2)+c=2010$$

и затоа $7c=2009$, т.е. $c=287$. Другите два броја се $a=860$ и $b=863$.

20. Иван замислил некој број, кој потоа го зголемил за 30 и го добил истиот резултат кога тој број го помножил со 6 и добиениот производ го намалил за 30. Кој број го замислил Иван?

Решение. Нека Иван го замиуслил бројот x. Според условот на задачата $x+30$ е еднакво на $6x-30$, т.е. $x+30=6x-30$. Значи, $6x-x=30+30$, од каде добиваме $5x=60$, односно $x=12$.

21. Анастасија замислила два броја од кои едниот е 4 пати помал од другиот. Кои броеви ги замислила Анастасија ако нивната разлика е четирицифрен број кој се запишува со исти цифри?

Решение. Ако помалиот број го означиме со x, тогаш поголемиот број е $4x$. Нивната разлика е $4x-x=3x$. Значи, разликата е четири-

цифрен број кој е делив со 3 и се запишува со исти цифри. Според тоа, разликата може да е некој од броевите 3333, 6666 и 9999. Имено, со непосредна проверка се докажува дека броевите 1111, 2222, 4444, 5555, 7777 и 8888 не се деливи со 3. Оттука следува дека Анастасија можела да ги замисли броевите 1111 и 4444, или 2222 и 8888, или 3333 и 13332.

22. Збирот на два броја е 2012. Ако првиот се подели со 4, а другиот се намали за 2 се добиваат два еднакви броја. Кои се тие броеви?
Решение. Ако бројот кој го добиваме при делење на првиот број со 4, односно при намалување на вториот број за 2, го означиме со x, тогаш добиваме дека првиот број е $4x$, а вториот број е $x+2$. Според тоа, $4x+x+2=2012$, односно $x=402$. Значи, првиот собирок е 1608, а вториот е 404.

23. Збирот на два броја е 20122012. Ако првиот се зголеми за 201200, а вториот се намали за 20120, се добиваат два еднакви броја. Кои се тие броеви?
Решение. Нека a и b се бараните броеви. Тогаш
$$a+b=20122012 \text{ и } a+201200=b-20120.$$
Според тоа, $a+221320=b$, па затоа важи $a+a+221320=20122012$. Од последната равенка наоѓаме $a=9950346$ и затоа $b=10171666$.

24. Збирот на еден број и неговата половина е за 3 помал од двократната вредност на тој број. Кој е тој број?
Решение. *Прв начин*. Со x да ја означиме половината од непознатиот број. Тогаш непознатиот број е $2x$, а двократната вредност на тој број е $4x$. Според тоа, $2x+x+3=4x$. Значи, $x=3$, па непознатиот број е $2x=6$.
Втор начин. Ако од двократната вредност на непознатиот број ги одземеме самиот број и половината од тој број ќе ни остане половина од непознатиот број. Според тоа, половината од непознатиот број е еднаква на 3. Конечно, непознатиот број е 6.

25. Збирот на еден број и неговите две третини е за 20 помал од трикратната негова вредност. Кој е тој број?
Решение. Со x да ја означиме третината од непознатиот број. Тогаш $2x$ се две третини од тој број, $3x$ е непознатиот број и $9x$ е трикрат-

ната вредност на непознатиот број. Според тоа, $3x+2x+20=9x$, од каде добиваме $x=5$. Значи, непознатиот број е $3\cdot 5=15$.

26. Збирот на два броја е 1234567. Ако едниот од нив се зголеми за 2012, а другиот се подели со 2, се добиваат два еднакви броја. Кои се тие броеви?

Решение. Нека a и b се бараните броеви. Тогаш $a+b=1234567$ и $a+2012=b:2$. Според тоа, $b=2a+4024$, па затоа

$$a+2a+4024=1234567,$$
$$3a=1230543,$$
$$a=410181$$

и $b=2\cdot 410181+4024=820386$.

27. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е еднаков на 624. Разликата е помала од намалителот за 56. Пресметај ги намаленикот намалителот и разликата.

Решение. Нека a е намаленикот, b е намалителот и $c=a-b$ е разликата. Имаме $a+b+c=624$, односно $a+b+a-b=624$, од каде добиваме $2a=624$, т.е. $a=312$. Понатаму, $b=c+56$, па ако замениме во $a+b+c=624$ добиваме $312+c+c+56=624$, односно $2c=256$. Значи, $c=128$ и конечно $b=128+56=184$.

28. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е 4030. Разликата е поголема од намалителот за 2013. Пресметај ги намаленикот, намалителот и разликата.

Решение. Нека a е намаленикот, b е намалителот и c е разликата. Имаме $a+b+c=4030$ и како $b+c=a$, добиваме $a+a=4030$, т.е. $a=2015$. Понатаму, $c=b+2013$, па затоа $2015+b+b+2013=4030$, од каде добиваме $2b=2$, т.е. $b=1$. Значи, $c=1+2013=2014$. Конечно, намаленикот е 2015, намалителот е 1 и разликата е 2014.

29. Еден двоцифрен број има 4 десетки. Ако му се додаде бројот 27 ќе се добие број запишан со истите цифри како почетниот број, но во обратен редослед. Кој е тој број?

Решение. Двоцифрениот број кој има 4 десетки може да се запише во видот $40+x$, каде $x\le 9$. Ако на овој број се додаден 27, се добива бројот $40+x+27=67+x$. Двоцифрениот број $67+x$ има цифра на

единиците 4, а цифра на десетките x, па затоа тој е еднаков на $10x+4$. Според тоа, $10x+4=67+x$, од каде добиваме $9x=63$, односно $x=7$. Значи, бараниот број е 47.

30. Еден двоцифрен број има 5 десетки. Ако му се додаде бројот 36 се добива бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Кој е тој број?

Решение. Двоцифрениот број кој има 5 десетки и x единици е $50+x$, каде $x\le 9$. Ако на овој број му се додаде бројот 36 се добива збирот $50+x+36=86+x$, кој е еднаков на бројот $10x+5$. Според тоа, $10x+5=86+x$, од каде добиваме $9x=81$, односно $x=9$. Значи. Бараниот број е 59.

31. Кои природни броеви можеш да ги намалиш за најголемиот непарен број од третата илјадарка така што ќе добиеш разлика која е помала од најмалиот парен број од втората илјадарка?

Решение. Најголемиот непарен број од третата илјадарка е 2999, а најмалиот парен број од втората илјадарка е 1002. Од условот на здачата следува $0<x-2999<1002$, од каде добиваме $2999<x<4001$. Според тоа, $x\in\{3000,3001,...,3999,4000\}$.

32. Збирот на осум последователни природни броеби е еднаков на 92. Кои се тие броеви?

Решение. *Прв начин*. Нека најмалиот од бараните броеви го означиме со x. Тогаш бараните броеви се $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6$ и $x+7$. Од условот на задачата следува

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)=92,$$

т.е. $8x+28=92$, од каде добиваме $x=(92-28):8=64:8=8$. Според тоа, бараните броеви се 8, 9 , 10, 11, 12, 13, 14 и 15.

Втор начин. Збирот на првите осум природни броеви е

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36.$$

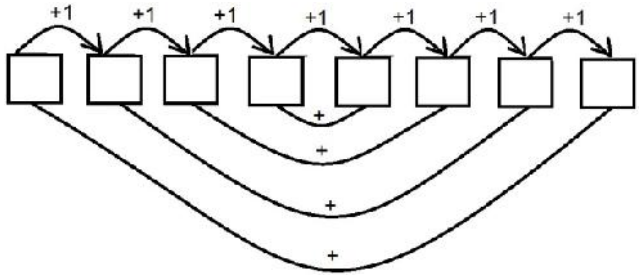
Ако секој собирок го заменуваме со следниот природен број, тогаш збирот на новите осум последователни броеви се зголемува за 8 и ова важи за секои на опишаниот начин новодобиени осум последователни природни броеви. Бидејќи $(92-36):8=56:8=7$, заклучуваме дека постапката треба да ја повториме седум пати, што значи дека треба

седум пати првиот собирот да го замениме со следниот природен број. Така ги добиваме низите броеви

$$2,3,4,5,6,7,8,9;$$
$$3,4,5,6,7,8,9,10;$$
$$4,5,6,7,8,9,10,11;$$
$$5,6,7,8,9,10,11,12;$$
$$6,7,8,9,10,11,12,13;$$
$$7,8,9,10,11,12,13,14;$$
$$8,9,10,11,12,13,14,15$$

што значи дека бараните броеви се 8, 9 , 10, 11, 12, 13, 14 и 15.

Трет начин. Вториот број е за 1 поголем од првиот, а седмиот е за 1 помал од осмиот. Затоа збирот на првиот и осмиот од бараните броеви е еднаков на збирот на вториот и седмиот број.



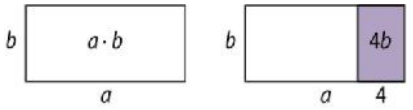
Аналогно заклучуваме дека овој збир е еднаков на збирот на третиот и шестиот број, како и на збирот на четрвтиот и петтиот број. Според тоа, имаме 4 парови броеви со еднакви збирови, па затоа збирот на броевите во секој пар е еднаков на $92:4=23$. Но, четвртиот и петтиот број се два последователни броја, па како $11+12=23$, заклучуваме дека тоа се броевите 11 и 12. Сега, лесно се добива дека бараните броеви се 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 и 15.

33. Некој број требало да се подели со 24, а по грешка е поделен со 14 и е добиен бројот 72. Колку требало да биде количникот ако немало грешка?

Решение. Дадениот број е еднаков на $72\cdot 14=1008$. При делење на овој број со 24 се добива бараниот количник кој е еднаков на $1008:24=42$.

34. Збирот на два броја е 22. Ако поголемиот број се намали за 4, нивниот производ ќе се намали за 28. Кои се тие броеви?

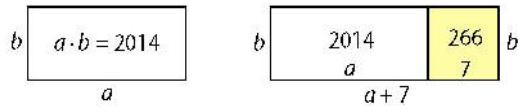
Решение. Бараните броеви може да се претстават како должини на страни на некој правоаголник, а нивниот производ како плоштина на тој правоаголник. Нека a е подолгата, а b пократката страна.



Кога подолгата страна се намалува за 4, плоштината се намалува за $4b$. Затоа $4b=28$, од каде добиваме $b=7$. Сега, од $a+b=22$, добиваме $a=22-b=22-7=15$. Значи, бараните броеви се 7 и 15.

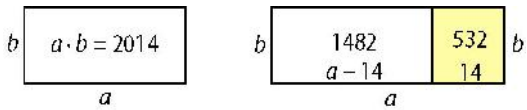
35. Производот на два броја е 2014. Ако едниот од нив се зголеми за 7, тогаш производот ќе биде 2280. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви се a и b. Нивниот производ може да се претстави како плоштина на правоаголник со страни a и b (цртеж десно). Ако едната страна се зголеми за 7, тогаш плоштината се зголемува за $2280-2014=266$. Значи, $7b=266$, па затоа $b=266:7=38$. Сега, $a=2014:38=53$. Конечно, бараните броеви се 38 и 53.



36. Производот на два броја е 2014. Ако едниот од нив се намали за 14, тогаш производот ќе биде 1482. Кои се тие броеви?

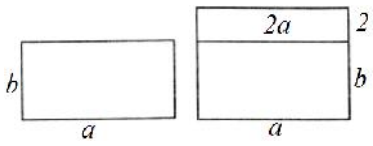
Решение. Производот на броевите a и b може да се представи како плоштина на правоаголник со страни a и b.



Ако едната страна се намали за 14, тогаш плоштината се намалува за $2014-1482=532$. Според тоа, $14b=532$, па затоа $b=532:14=38$. Сега, $a=2014:38=53$. Значи, бараните броеви се 53 и 38.

37. Разликата на два броја е 9. Ако помалиот број го зголемиме за 2, нивниот производ ќе се зголеми за 30. Кои се тие броеви?

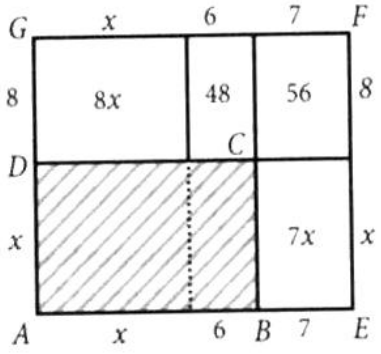
Решение. Нека бараните броеви се должини на страни на правоаголник. Нека поголемата страна е a, а помалата е b. Ако ја зголемиме помалата



страна за 2, плоштината на правоаголникот ќе се зголеми за $2a$, а ова според условот на задата е еднакво на 30. Значи, $2a=30$, од каде добиваме $a=15$. Понатаму, $a-b=9$, т.е. $15-b=9$, од каде добиваме $b=6$.

38. Два броја се разликуваат за 6. Ако на поголемиот број му се додаде 7, а на помалиот број му се додаде 8, тогаш нивниот производ се зголемува за 254. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви $x+6$ и x се должините на страните на правоаголникот $ABCD$ (цртеж десно). Ако поголемиот број $x+6$ се зголеми за 7, а помалиот x се зголеми за 8, се добива правоаголникот $AEFG$, чија плоштина е за 254 поголема од плоштината на правоаголникот $ABCD$. Затоа



$$8x+48+56+7x=254, \text{ т.е. } 15x+104=254.$$

Решението на последната равенка е $x=10$. Значи, бараните броеви се $x=10$ и $x+6=16$.

39. Производот на три броја е 240. Производот на првиот и вториот број е 60, а производот на првиот и третиот број е 24. Кои се тие броеви ?

Решение. Нека бараните броеви се a,b и c. Од условот на задачата следува дека

$$a\cdot b\cdot c=240, a\cdot b=60, a\cdot c=24.$$

Тогаш од $(a\cdot b)\cdot c=240$ и $a\cdot b=60$ имаме $60\cdot c=240$ односно $c=4$. Заради $a\cdot c=24$ добиваме $a=24:4=6$. Сега, бидејќи $a\cdot b=60$ добиваме $b=60:6=10$. Конечно, бараните броеви се 4, 5 и 10.

40. Колку цифри се употребени за нумерирање на сите страници на книга која има 58 листови, ако нумерирањето започнува со бројот 1?

Решение. Бидејќи секој лист има по 2 страници, книгата има $2\cdot 58=116$ страници. Со едноцифрени броеви се нумерирани 9 страници, при што се употребени 9 цифри. Со двоцифрени броеви се нумерирани 90 страници, при што се употребени $2\cdot 90=180$ цифри. Со

трицифрени броеви се нsмерирани $116-99=17$ страници и за тоа се употребени $3\cdot 17=51$ цифра. Според тоа, за нумерирање на книгата вкупно се употребени $9+180+51=240$ цифри.

41. Колку цифри се употребени за нумерирање на непарните страници на книга која има 124 страници?
Решение. Има 5 непарни едноцифрени броеви за кои се употребени 5 цифри. Понатаму, има 45 непарни двоцифрени броеви за кои се употребени $2\cdot 45=90$ цифри. Има 12 трицифрени непарни броеви помали од 124, за кои се употребени $3\cdot 12=36$ цифри. Според тоа, за нумерирање на непарните страници на книга која има 124 страници се употребени $5+90+36=131$ цифра.

42. Колку страни има книга кај која првите три страници не се нумерирани, а преостанатите страници се нумерирани почнувајќи од бројот 1 и за нивното нумерирање се употребени 357 цифри?
Решение. Првите три страници не се нумерирани. За нумерирање на следните 9 страници се употребени 9 цифри, а за нумерирање на следните 90 страници се употребени $2\cdot 90=180$ цифри. Според тоа, за нумерирање на страниците со трицифрени броеви се употребени $357-(9+180)=357-189=168$ цифри. Значи, имаме $168:3=56$ страници кои се нумерирани со трицифрени броеви. Конечно, книгата има $3+9+90+56=158$ страници.

43. Колку страници има книга чии први три страници не се нумерирани, а преостанатите се нумерирани почнувајќи од бројот 1 и за нивната нумерација се употребени 417 цифри?
Решение. Првите три страници не се нумерирани. За нумерирање на следните 9 страници се употребени 9 цифри. За нумерирање на следните 90 страници се употребени 180 цифри. Останууваат $417-9-180=228$ цифри кои се употребени за трицифрени броеви. Тоа значи $228:3=76$ трицифрени броеви. Според тоа, книгата има $3+9+90+76=178$ страници.

44. За нумерација на страниците на една книга се употребени 210 цифри. Колку листови има книгата ако нумерацијата почнува со бројот 1?
Решение. За едноцифрените броеви се употребени 9 цифри, за двоцифрените 180 цифри и за пишување на трицифрени броеви оста-

нуваат $210-(9+180)=21$ цифра. Значи, имаме $21:3=7$ трицифрени броеви. Според тоа, книгата има $9+90+7=106$ страници, односно $106:2=53$ листови.

45. Збирка задачи по математика има непарен број страници. За нумерацијата на парните страни на збирката се употребени 364 цифри. Колку цифри се употребени за нумерацијата на целата збирка?
Решение. За нумерација на првите 4 едноцифрени парни страници потребни се 4 цифри. За нумерација на 45 двоцифрени парни страници потребни се 90 цифри. Значи, остануваат $164-(4+90)=270$ цифри за нумерација на трицифрените парни страници. Според тоа, книгата има $270:3=90$ трицифрени парни страници. Парни страници има $4+45+90=139$. Парните и непарните страници наизменично се менуваат, па како последната страница е непарна, добиваме дека непарни страници има 140. Значи, збирката вкупно има 279 страници. Од нив 9 се едноцифрени, 90 се двоцифрени и 180 се трицифрени, па вкупниот број цифри со кои се нумерирани страниците е еднаков на $9+2\cdot 90+3\cdot 180=729$.

46. Природните броеви од 1 до 9999 се запишани еден по друг без растојание. Така настанал џиновскиот број 12345...9996999799989999. Колку цифри се употребени за запишување на овој број?
Решение. За пишување на едноцифрените броеви се употребени $9\cdot 1=9$ цифри. За двоцифрените броеви се употребени $90\cdot 2=180$ цифри. За трицифрените броеви се употребени $900\cdot 3=2700$ цифри и за четирицифрените броеви се употребени $9000\cdot 4=36000$ цифри. Значи, бројот е запишан со $9+180+2700+36000=38889$ цифри.

47. Првите десет илјади природни броеви се запишани во ред еден по друг без растојание. Така е добиен бројот 123456789...9998999910000. Колку цифри се употребени за запишување на овој број?
Решение. За едноцифрените броеви се употребени 9 цифри, за двоцифрените 180 цифри, за триацифрените 2700 цифри, за четирицифрените 36000 цифри и за единствениот петцифрен број 5 цифри. Зачни, вкупно се употребени $9+180+2700+36000+5=38894$ цифри.

48. На стартот на училишниот маратон на натпреварувачите им се поделени броевите 1, 2, 3, ... за чија изработка вкупно се употребени 312

цифри. Колку натпреварувачи имало на стартот на маратонот?

Решение. Имаме 9 едноцифрени и 90 двоцифрени броеви за кои се потребни $9+180=189$ цифри. Значи, за изработка на трицифрените броеви остануваат $312-189=123$ цифри. Според тоа, изработени се $123:3=41$ двоцифрен број. Значи, на стартот бројот на натпреварувачите бил $9+90+41=140$.

49. Кога се пријавувале за регионалниот натпревар по математика на учениците им се поделени ливчиња со броевите 1, 2, 3, ... за чија изрботка биле употребени 303 цифри. Колку ученици се пријавиле?

Решение. Едноцифрените броеви се запишани со 9 цифри, а двоцифрените со 180 цифри. Значи, за запишување на трицифрените се употребени $303-189=114$ цифри. Според тоа, имаме $114:3=38$ трицифрени броеви. Последното значи дека на регионалниот натпревар се пријавиле $9+90+38=137$ ученици.

50. Пабло запишал 500 последователни природни броеви и притоа употребил вкупно 2015 цифри. Кој е најмалиот број кој притоа го запишал Пабло?

Решение. Ако сите броеви се четирицифрени, тогаш Пабло ќе употребел 2000 цифри, односно $2015-2000=15$ цифри помалку. Овие 15 цифри се употребени за запишување на првите 15 петцифрени броеви, т.е. на броевите

10000, 10001, 10002, ..., 10013, 10014.

Значи, четирицифрени броеви се последните $500-15=485$ цифри, а најмалиот од нив е бројот $10000-485=9515$.

51. Збирот на два броја е 2017. Ако поголемиот број се подели со помалиот се добива количник 3 и остаток 5. Кои се тие броеви?

Решение. Нека малиот број е m, а големиот е n. Тогаш $n=3m+5$ и $m+n=2017$. Според тоа, $m+(3m+5)=2017$, од каде добиваме $4m=2012$. Значи, $m=2012:4=503$ и $n=3\cdot 503+5=1514$.

52. Разликата на два броја е 2017. Ако поголемиот број се подели со помалиот се добива колични 4 и остаток 1. Определи ги овие броеви.

Решение. Нека помалиот број е m, а поголемиот е n. Имаме $n=4m+1$ и $n-m=2017$. Според тоа, $4m+1-m=2017$, од каде добиваме $3m=2016$, односно $m=672$. Сега, $m=4\cdot 672+1=2689$. Зна-

чи, броевите се 2689 и 672.

53. Со цифрите 1, 2 и 3 може да се запишат шест трицифрени броеви, така што секоја цифра се јавува точно еднаш во секој од овие броеви. Најди два такви броја чиј збир е 444. Колку решенија има задачата?
Решение. Јасно, на местото на единиците двата броја треба да има цифри чиј збир е 4, а истото важи и за местата на десетките и стотките. Според тоа, кај двата броја цифрата 2 треба да има иста позиција, а на секоја друга позиција е парот цифри 1 и 3. Но, 2 може да е цифра на единиците, десетките и стотките, што значи дека задачата има три решенија и тоа:
$$123+321=231+213=132+312=444.$$

54. Со цифрите 1, 2, 3 и 4 можеш да запишеш 24 четирицифрени броеви при што секоја цифра во секој од овие броеви е употребена точно еднаш. Определи два такви броја чиј збир е 7733. Колку решенија има задачата?
Решение. Јасно, на местото на единиците двата броја треба да има цифри чиј збир е 3, а истото важи и за цифрите кои се на местата на десетките на двата број. Единствени такви цифри е 1 и 2, па двата броја се од видот $\overline{xy12}$ и $\overline{xy21}$. Сега бидејќи цифрата на стотките и цифрата на илјадитите на збирот е 7, добиваме дека $\overline{xy}=34$ или $\overline{xy}=43$. Според тоа, задачата има две решенија и тоа:
$$4312+3421=4321+3412=7733.$$

55. Определи ги сите броеви од видот $\overline{xyxyxy}$ кои се деливи со 2, така што бројот $\overline{yyxxyx}$ е делив со 5, каде x и y се ненултни цифри.
Решение. Бидејќи $\overline{xyxyxy}$ е делив со 2, тој е парен број. Притоа $y\neq 0$, па затоа $y\in\{2,4,6,8\}$. Понатаму, бројот $\overline{yyxxyx}$ е делив со 5 и како $x\neq 0$ заклучуваме дека $x=5$. Според тоа, бараните броеви се: 525252, 545454, 565656 и 585858.

56. Хокеарска екипа се состои од 6 играчи на мразот и 9 резерви. Секој од овие 15 играчи поминал исто време во игра на мразот (замените не се ограничени). Колку време секој играч поминал на мразот ако натпреварот траел 30 минути?

Решение. Во секој момент на мразот има по 6 играчи, па како натпреварот траел 30 минути бројот на минутите кои играчите го поминале на мразот е еднаков на $6 \cdot 30 = 180$ минути. Но, на мразот секој од 15-те играчи поминале еднакво време, што значи дека секој играч поминал $180 : 15 = 12$ минути.

57. Матеј стигнал на стадионот 15 минути по 16:48 (16 часот и 48 минути). Во колку часот Матеј тргнал од дома, ако за да стигне до стадионот тој одел 78 минути?

Решение. Матеј на стадионот стигнал во

$$16\,h\,48\,\min + 15\,\min = 16\,h\,63\,\min = 17\,h\,3\,\min .$$

Тој од дома тргнал во

$$17\,h\,3\,\min - 78\,\min = 16\,h\,63\,\min - 1\,h\,18\,\min = 15\,h\,45\,\min .$$

58. Магдалена во библиотека стигнала 23 минути пред 11 часот и 18 минути. Во библиотеката останала 45 минути. Во колку часот Магдалена излегла од библиотеката?

Решение. Магдалена во библиотеката стигнала во

$$11\,h\,18\,\min - 23\,\min = 10\,h\,78\,\min - 23\,\min = 10\,h\,55\,\min ,$$

а од библиотеата излегла во

$$10\,h\,55\,\min + 45\,\min = 10\,h\,100\,\min = 11\,h\,40\,\min .$$

59. Горјан во просек $\frac{1}{3}$ од денот спие, $\frac{1}{4}$ од денот го поминува во училиште, $\frac{1}{10}$ од денот пишува домашни задачи и учи дома, а преостанатото време од денот го поминува во игра, спорт и посетува курс по англиски јазик. Колку време на Горјан му преостанува за играње и преостанатите активности?

Решение. Горјан во просек дневно спие $24 : 3 = 8$ часа, на училиште е $24 : 4 = 6$ часа, а во пишување домашни задачи и учење дома поминува $(24 \cdot 60) : 10 = 144\,\min = 2\,h\,24\,\min$. Според тоа, за играње и други активности во текот на еден ден во просек му преостануваат

$$24\,h - 8\,h - 6\,h - 2\,h\,24\,\min = 8\,h - 24\,\min = 7\,h\,36\,\min .$$

60. Два часовника, еден со златни, а другиот со сребрени стрелки, навиени се на пладне во недела на 2 ноември 2023 година и покажувале точно време. Часовникот со златни стрелки оди побрзо половина ми-

нута на час, а часовникот со сребрени стрелки работи точно. Кој ден и во колку часот двата часовника повторно за прв пат ќе покажуваат точно време?

Решение. Двата часовника повторно ќе покажуваат исто време по 12 часа. Бидејќи во 12 часа има $60 \cdot 12 = 720$ минути, а часовникот со златни стрелки оди половина минута на час, за да тој отиде понапред 12 часа му се потребни $720 \cdot 2 = 1440$ часови, што значи $1440 : 24 = 60$ денови. Значи, двата часовника прв пат повторно ќе покажуваат точно време на 1 јануари 2024 година.

61. Два ѕидни часовника се наместени да покажуваат точно време на 21.03.2022 година во 9 часот навечер. Едниот работи точно, а другиот брза по 3 минути на секој час. На кој датум и во колку часот стрелките на двата часовника ќе бидат пак во иста положба како на 21.03.2022 година во 9 часот навечер?

Решение. За да стрелките повторно се во иста положба, часовникот кој брза треба да постигне предност од 12 часа. Дванаесет часа се 720 минути. Значи на часовникот кој брза му се потребни 720 : 3 = 240 часа. Но, 240 часа се 10 дена. Часовни-ците ќе бидат во иста положба на 31.03.2022 во 9 часот навечер.

62. Ведран и Ласте истовремено со велосипеди тргнале на пат од Прилеп за Битола. Ведран патувал 2 часа 22 минути и 33 секунди, а Ласте патувал 1 час 50 минути и 2000 секунди. Кој стигнал прва на целта?

Решение. Од $2000 = 33 \cdot 60 + 20$ следува дека Лсте патувал 1 час $50 + 33 = 83$ минути и 20 секунди, односно патувал 2 часа 23 минути и 20 секунди. Според тоа, Ласте патувал подолго од Ведран и тоа за $60 + 20 - 33 = 47$ секунди.

63. Кога утрината Алекса тргнал на училиште стрелките на часовникот се поклопувале и биле меѓу 7 и 8. По училиштето, кога Алекса дошол дома меѓу 13 и 14 часот, погледнал на часовникот и видел дека стрелките имаат ист правец, но не се поклопуваат. Колку време поминало откако Алекса тргнал на училиште до враќањето дома?

Решение. Од тргнувањето на училиште, до враќањето од училиште часовната стрелка се наоѓала пред бројот 8 и се поместила пред бројот 14. Бидејќи стрелките во двата случаја имаат ист правец заклучуваме дека минутната стрелка во двата случаја била во иста положба, што

значи дека изминале цел број часови. Според тоа, откако Алекса тргнал на училиште до враќањето дома поминале $14-8=6$ часа.

64. Најдолговечните луѓе живеат преку 100 години, дури и до 138 години. Дали постои човек кој живеел од 1000000 часови? А 2000000 часови?
Решение. Бидејќи $115\cdot 365\cdot 24+28\cdot 24=1008672$, во 115 последователни години, од кои 28 се престапни, има $1008672>1000000$ часови, што значи дека постои човек кој живеел повеќе од 1000000 часови. Понатаму, за 2000000 треба да изминат 228 години 56 дена и 8 часа (целосно се броени деновите во престапните години), што значи дека не е можно некој човек да живеел 2000000 часови.

65. Златен ретривер е раса на кучиња која просечно живее од 10 до 12 години. Дали може да очекуваме дека некој златен ретривер во нормални услови ќе живее 100000 часови? А 150000 часови?
Решение. Бидејќи $12\cdot 365\cdot 24+3\cdot 24=4383\cdot 24=105192$ во 12 последователни години, од кои 3 се пресапни, има $105192>100000$ часови можеме да очекуваме дека некој златен ретривер ќе живее 100000 часови, но не можеме да очекуваме дека ќе има златен ретривер кој ќе живее 150000 часови.

66. Рампо $\frac{1}{10}$ од деновите во месец април ги поминал на одмор во Охрид, $\frac{1}{5}$ на службено патување во Скопје, а остатокот од месецот го поминал во својат град Прилеп. Колку денови во месец април Рампо поминал во Прилеп?
Решение. Месецот април има 30 денови, што значи дека Рампо $30:10=3$ дена бил во Охрид и $30:5=6$ дена бил во Скопје. Значи, Рампо во Прилеп бил $30-(3+6)=21$ ден.

67. Даница и Вера прославуваат роденден во ист ден. Тие заклучиле дела по две години Даница ќе има два пати повеќе години отколку што имала пред две години, а дека по три години Вера ќе има три пати повеќе години отколку што имала пред три години. Која е постара, Даница или Вера?
Решение. Нека Даница има x години, а Вера y години. Тогаш
$$x+2=2(x-2) \text{ и } y+3=3(y-3),$$

од каде добиваме $x=6$ и $y=6$. Значи, Даница и Вера се врснички.

68. Дедо и внук заедно имаат 65 години. Внукот има точку месеци колку што дедото има години. Колку години има дедото, а колку внукот?
Решение. *Прв начин*. Бидејќи една година има 12 месеци, а бројот на месеците на внукот е еднаков на бројот на годините на дедото, дедото е 12 пати постар од внукот. Значи, дедото и внукот заедно имаат 13 пати повеќе години отколку што има внукот. Според тоа, внукот има $65:13=5$ години, а дедото има $65-5=60$ години.
Втор начин. Нека x е бројот на месеците на внукот. Тогаш дедото има $12x$ месеци. Дедото и внукот заедно имаат $65\cdot 12$ месеци, па затоа $x+12x=65\cdot 12$, т.е. $13x=65\cdot 12$, па затоа $x=(65\cdot 12):13=60$. Значи, внукот има 60 месеци, а дедото има 60 години.

69. Татко и син заедно имаат 35 години. Синот има два пати повеќе месеци од бројот на татковите години. Колку години има таткото, а колку синот?
Решение. *Прв начин*. Нека таткото има x години. Тогаш синот има $2x$ месеци, а таткото има $12x$ месеци. Таткото и синот заедно имаат $12\cdot 35=420$ месеци, па затоа $2x+12x=420$, од каде добиваме $x=30$. Значи, таткото има 30 години, а синот има $35-30=5$ години.
Втор начин. Од $12:2=6$ и од тоа што синот има два пати повеќе месеци отколку што таткото има години следува дека таткото е шест пати постар од синот. Значи, збирот на нивните години е седум пати поголем од годините на синот, па затоа синот има $35:(6+1)=5$ години. Конечно, таткото има $35-5=30$ години.

70. На едниот тас на вагата има четири еднакви поголеми коцки, а на другиот тас има пет помали еднакви коцки. Вкупната маса на вагата е 720 грама. Определи ја масата на едната мала и едната голема коцка, ако вагата е во рамнотежа.
Решение. Бидејќи вагата е во рамнотежа, на секој тас имаме еднакви маси. Но, вкупната маса е 720 грама, па затоа на секој тас имаме по $720:2=360$ грама. На едниот тас имаме 4 големи коцки, па затоа масата на една голема коцка е $360:4=90$ грама. На другиот тас имаме 5 мали коцки, па затоа масата на една мала коцка е $360:5=72$ грама.

71. Вкупната маса на чаша наполнета со вода е 300 грама и е еднаква на масата на две празни чаши и тег од 60 грама. Колку е масата на водата во чашата?

Решение. Масата на две празни чаши е еднаква на $300-60=240$ грама. Значи, масата на една празна чаша е еднаква на $240:2=120$ грама, па затоа масата на водата е $300-120=180$ грама.

72. Тројца рибари заедно уловиле 146 килограми риба. Првиот продал 22 килограми, вториот продал 20 килограми и третиот продал 32 килограми, по што им останале еднакви количества риба. Колку килограми риба уловил секој од тројцата рибари?

Решение. Тројцата рибари заедно продале $22+20+32=74$ килограми риба, што значи дека вкупно им останале $146-74=72$ килограми риба. Бидејќи по продажбата секој рибар имал еднакво количество риба, секој од нив имал $72:3=24$ килограми риба. Значи, првиот рибар имал $24+22=46$, вториот имал $24+20=44$ и третиот имал $24+32=56$ килограми риба.

73. Слонот Дамбо има 28 пати повеќе килограми од лавот Симба, а Симба има17 пати повеќе килограми од мајмунот Манки. Колку пати Дамбо има поголема маса од Манки. Ако Манки има $14\,kg$, колку килограми заедно имаат Дамбо, Симба и Манки?

Решение. *Прв начин*. Дамбо има $28\cdot 17=476$ пати повеќе килограми од Манки. Манки има $14\,kg$, па затоа сите заедно имаат

$$(1+17+476)\cdot 14=494\cdot 14=6916\,kg.$$

Втор начин. Дамбо има $28\cdot 17=476$ пати повеќе килограми од Манки. Манки има $14\,kg$, па затоа Симба има $17\cdot 14=238\,kg$. Според тоа, Дамбо има $28\cdot 238=6664\,kg$. Конечно, сите тријца заедно имаае $14+238+6664=6916\,kg$.

74. Вкупната маса на лубеница, диња и ананас е $12\,kg$. Ако лубеницата има три пати поголема маса од дињата и ананасот заедно, а дињата има два пати поголема маса од ананасот, определи ја масата на секое овошје одделно.

Решение. *Прв начин*. Нека масата на ананасот е x. Тогаш масата на дињата е $2x$, а масата на лубеницата е $3(x+2x)=9x$. Според тоа,

$x+2x+9x=12$, од каде наоѓаме $x=1\,kg$. Значи, маста на ананасот е $1\,kg$, масата на дињата е $2\,kg$ и масата на лубеницата е $9\,kg$.

Втор начин. Бидејќи масата на лубеницата е три пати поголема од вкупната маса на ананасот и дињата, таа е еднаква на $\frac{3}{4}$ од вкупната маса на трите овошја, т.е. е еднаква на $\frac{3}{4}\cdot 12=9\,kg$. Значи, вкупната маса на ананасот и дињата е $12-9=3\,kg$. Но, масата на дињата е два пати поголема од масата на ананасот, па затоа масата на ананасот е $\frac{1}{3}$ од вкупната маса на ананасот и дињата, т.е. е $\frac{1}{3}\cdot 3=1\,kg$. Конечно, масата на дињата е $3-1=2\,kg$.

75. Лубеница и диња имаат вкупна маса 30 *kg*. Дињата и тег од 3 *kg* имаат двојно помала маса отколку што е масата на лубеницата. Колку килограми изнесува разликата на масите на лубеницата и дињата?

Решение. Бидејќи масата на лубеницата е двојно поголема од масата на дињата и 3 *kg*, тоа значи дека масата на лубеница е еднаква на масата на две такви дињи и 6 *kg*. Лубеницата и дињата имаат маса 30 *kg*, па 2 дињи и уште 1 диња и 6 *kg* имаат маса 30 *kg*, односно 3 дињи и 6 *kg* имаат маса 30 *kg*. Значи, 3 дињи имаат маса $30-6=24\,kg$, па затоа една диња има маса $24:3=8\,kg$. Според тоа, масата на лубеницата е $30-8=22\,kg$, па разликата на масите на лубеницата и дињата е $22-8=14\,kg$.

76. Вкупната маса на лубеницата и дињата кои ги купил Трајко била $6\,kg\ 400\,g$. Масата на лубеницата и на тег од $50\,g$ е еднаква на масата на дињата и на тег од $4\,kg$. Определи ги масите на дињата и лубеницата.

Решение. Нека масата на лубеницата е x, а масата на дињата е y. Тогаш $x+y=6\,kg\ 400\,g$ и $x+50\,g=y+4\,kg$. Според тоа,

$$2x+y+50\,g=6\,kg\ 400\,g+y+4\,kg,$$
$$2x=10\,kg\ 400\,g-50\,g,$$
$$2x=10\,kg\ 350\,g,$$
$$x=5\,kg\ 175\,g.$$

Значи,

$$y = 6\,kg\ 400\,g - 5\,kg\ 175\,g = 1\,kg\ 225\,g\ .$$

77. Од $5\,kg$ пченица се добива $4\,kg$ брашно, а од $2\,kg$ брашно се добива $3\,kg$ леб. Колку килограми леб се добива од $300\,kg$ пченица?

Решение. Бидејќи од од $2\,kg$ брашно се добива $3\,kg$ леб, заклучуваме дека од од $4\,kg$ брашно се добива $6\,kg$ леб. Но, од $5\,kg$ пченица се добива $4\,kg$ брашно, па затоа од $5\,kg$ пченица се добива $6\,kg$ леб. Според тоа, од $5\cdot 60 = 300\,kg$ пченица се добива $6\cdot 60 = 360\,kg$ леб.

78. Еден сточар на пазар однесол јаре, теле и овен. Јарето и овенот заедно имале 90 *kg*, јарето и телето 186 *kg*, а овенот и телето 240 *kg* . По колку килограми имало секое животно?

Решение. Од дадените податоци на задачата имаме

$$J + O = 90$$
$$J + T = 186$$
$$O + T = 240$$

Ако сите три равенки ги собереме заедно ќе добиеме

$$2(J + O + T) = 516$$
$$J + O + T = 258$$

Па, ако во последната равенка ги замениме условите на задачата добиваме

$$J = 18\,kg$$
$$O = 72\,kg$$
$$T = 168\,kg$$

79. Свеќа висока $18\,cm$ рамномерно гори и целата изгорува за три часа. По колку минути од моментот кога е запалена свеќата ќе биде висока $13\,cm$?

Решение. Според условот на задачата целата свеќа изгорува за $3\cdot 60 = 180$ минути. Тоа значи дека $1\,cm$ изгорува за $180:18 = 10$ минути. Треба да изгорат $18 - 13 = 5\,cm$, за што се потребни $5\cdot 10 = 50$ минути. Значи, свеќата ќе биде висока $13\,cm$ по 50 минути.

80. Растојанието меѓу столбовите на далекуводот е $50\,m$. Колку столбови треба да се постават на растојание од $4800\,m$?

Решение. На растојние од $4800\,m$ има $4800:50=96$ пати по $50\,m$. Тоа значи дека има 96 столбови на почетокот на секоја отсечка од $50\,m$ и еден столб на крајот од последната отсечка. Значи, вкупно има $96+1=97$ столбови.

81. Праволиниска ограда е градена со помош на столбови кои меѓусебно се оддалечени по $4\,m$. Колку метри е долга оградата ако истата има 55 столбови?

Решение. На почетокот на секое растојание се наоѓа по еден столб, и на крајот на последното растојание има еден столб. Тоа значи дека меѓу 55 столбови има 54 растојанија од по $4\,m$. Конечно, должината на оградата е $4\cdot 54=216\,m$.

82. Растојанието меѓу телефонските столбови на една улица долга $1600m$, било $80m$. Заради садење нови дрвца на улицата, столбовите биле разместени така што новото растојание меѓу столбовите е $50m$. Колку столбови по разместувањето останале на истото место?

Решение. Бидејќи $\mathrm{NZS}(50,80)=400$, а првиот столб останува на своето место се добива дека неразместени столбови ќе има вкупно $1+1600:400=1+4=5$ столба.

83. Трака од сатен се пакуваат во ролни од по $15\,m$. Кој е најмалиот број пакување потребно за 16 марами во форма на триаголник со страни $1\,m, 80\,cm, 80\,cm$ се порабат со таа трака, т.е. траката да се сошие по работ на марамата?

Решение. Нека x е бројот на ролните ки треба да се потрошат. Тогаш $1500x\geq 16(100+80+80)$, односно $1500x\geq 4160$, од каде добиваме ц $x\geq 4160:1500$, односно $x>2$. Значи, потребни ни се најмалку 3 ролни со трака од сатен.

84. Кој е најголемиот број чаршави во форма на правоаголник со димензии $180\,cm$ и $140\,cm$ кои што можат да се порабат со украсна трака долга $80\,m$?

Решение. Периметарот на еден чаршав е $L=2\cdot(180+140)=640\,cm$, а должината на украсната трака е $80\cdot 100=8000\,cm$. Бидејќи

$$8000=12\cdot 640+320,$$

заклучуваме дека најмногу можеме да порабиме 12 чаршави и ќе ни остане $320\,cm$ украсна трака.

85. Мерачот за поминати километри во автомобилот на дедо Стојан покажува дека автомобилот поминал 176459 километри. По колку километри мерачот за прв пат повторно ќе покажува број на километри кој е запишан со различни цифри?
Решение. Првиот број кој е поголем од бројот 176459 и е запишан со различни цифри е бројот 176480. Значи по $176480-176459=21\,km$ мерачот за прв пат повторно ќе покажува број на километри кој е запишан со различни цифри.

86. Во еден автомобил мерачот на поминатите километри покажува дека тој автомобил поминал 76488 километри. По колку километри прв пат мерашот ќе покажува број кој е запишан само со непарни цифри?
Решение. Најмалиот следен број кој е запишан само со непарни цифри го добиваме ако цифрата 6 ја замениме со првата поголема непарна цифра, а тоа е цифрата 7, а потоа на последните три места ја ставима најмалата непарна цифра, а тоа е цифрата 1. Така го добиваме бројот 77111, што значи дека автомобилот ќе помине $77111-76488=623$ километри.

87. Срнчето Бамби за половина секунда скокнува 1 метар, а неговата мајка за 1 секунда скокнува 3 метри. Бамби и мајка му истовремено и од исто место почнале да скокаат кон изворот со вода кој бил оддалечен 240 метри. Колку секунди мајката ќе го чека Бамби кај изворот?
Решение. Бамби за половина секунда скокнува 1 метар, што значи дека за 1 секунда тој ќе скокне 2 метри. Според тоа, за да помине 240 метри му се потребни $240:2=120$ секунди. Неговата мајка тој пат ќе го помине за $240:3=80$ секунди. Значи, мајката ќе го чека Бамби $120-80=40$ секунди.

88. Од две места, меѓу кои должината на патот е $210\,km$, истовремено возејќи секој со постојана брзина тргнале во пресрет еден на друг два моторциклисти. Едниот од нив секој час поминувал 5 километри повеќе од другиот. Моторциклистите се сретнале по 2 часа возење. Определи ги брзините на двајцата моторциклисти.
Решение. *Прв начин*. Ако едниот моторциклист за 1 час поминува x

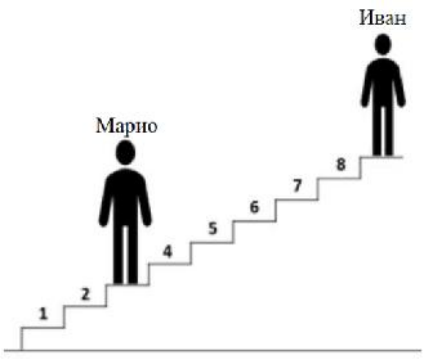
километри, тогаш другиот поминува $x+5$ километри. До средбата, односно по 2 часа возење, моторциклистите го поминале патот меѓу двете места, па затоа $2x+2(x+5)=210$, од каде наоѓаме $4x+10=210$. Значи, $4x=200$, т.е. $x=50$. Според тоа, едниот моторциклист се движел со брзина од 50 километри на час, а другиот со брзина од 55 километри на час.

Втор начин. Патот од 210 километри моторциклистите го поминале за 2 часа. Значи, за 1 час тие поминале $210:2=105$ километри. Бидејќи вториот моторциклист се движел со брзина за 5 километри на час поголема од првито, брзината на првиот моторциклист била $(105-5):2=50$ киломатри на час. Значи, брзината на вториот моторциклист била $50+5=55$ километри на час.

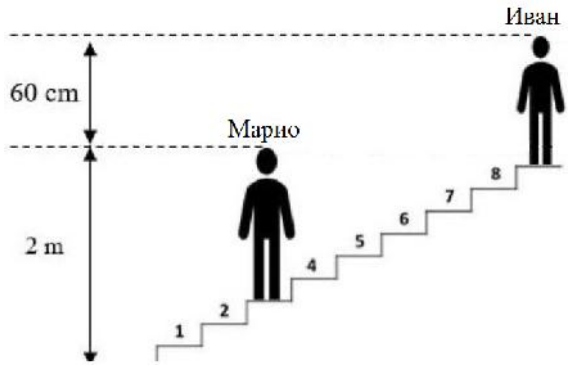
89. Должината на патот меѓу две места е 250 километри. Од двете места еден кон друг истовремено трнале два автомобила. Едниот од нив секој час минува 10 километри повеќе од другиот. Со која брзина се движел секој автомобил, ако по 2 часа патување им останале уште 30 километри до средбата?

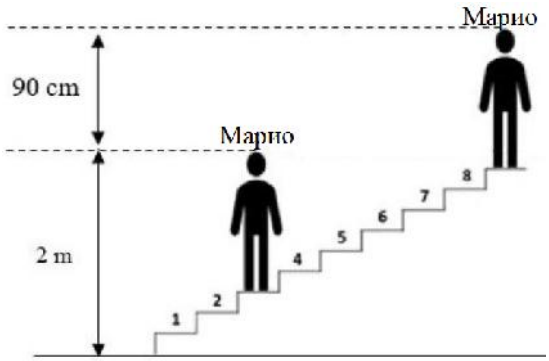
Решение. Ако еден автомобил поминува x километри на час, тогаш другиот поминува $x+10$ километри на час. Бидејќи по 2 часа возење до средбата има преостанале 30 километри, ја добиваме равенката $2(x+x+10)=250-30$, од каде наоѓаме $x=50$. Значи, брзината на едниот автомобил е $50\,km/h$, а на другиот автомобил е $60\,km/h$.

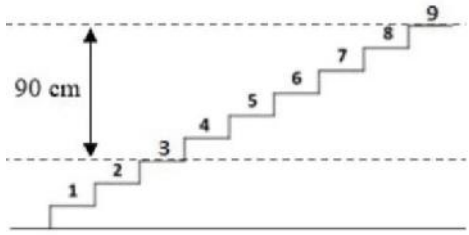
90. Марко стои на третото скалило (броејќи од дното на скалите) и тогаш неговата височина заедно со скалилата е еднаква на $2\,m$. Иван кој е $30\,cm$ понизок од Марко, стои на деветтото скалило (броејќи од дното на скалите) и тогаш неговата височина заедно со скалилата е еднаква на $2\,m\,60\,cm$. Сите скалила се со иста височина. Колку е висок Марко, а колку е висок Иван?



Решение. Јасно, разликата во висините на Марко и Иван е еднаква на $2\,m\,60\,cm - 2\,m = 60\,cm$ (цртеж десно). Ако замислиме Марко да стои на местото на Иван, т.е. на деветтото скалило, тогаш разликата би била за $30\,cm$ поголем бидејќи Марко е за $30\,cm$ повисок од Иван (цртеж лево). Тоа значи дека висината на шест скалила кои се меѓу третото и деветтото скалило е еднаква на $90\,cm$ (цртеж долу десно). Според тоа, секое скалило е високо точно по $90:6 = 15\,cm$. Марко стои на третото скалило, па затоа неговата височина е за $3\cdot 15 = 45\,cm$ помала од $2\,m$. Според тоа, Марко е висок $200 - 45 = 155\,cm$. Конечно, Иван е $30\,cm$ понизок од Марко, што значи дека тој е висок $155 - 30 = 125\,cm$







91. Кучето Арон гледа болви кои од исто место скокаат право кон него. Има мала и голема болва. Кога големата болва ќе направи 7 еднакви скокови, до Арон и недостасуваат $3\,cm$. Кога малата болва ќе направи 10 еднакви скокови, до Арон и недостасува $1\,cm$. Должината на секој скок изразена во сантиметри е природен број. Ако на почетокот болвите од Арон се оддалечени повеќе од $2\,m$, која е најмалата можна должина на скокот на малата болви?

Решение. Болвите се наоѓаат на место кое од Арон е оддалечено

повеќе од $2\ m = 200\ cm$.

Оддалеченоста на малата болва од Арон е број кој го добиваме кога на содржател на бројот 10 поголем од бројот 200 ќе му го додадеме бројот 1. Такви содржатели се броевите 210, 220, 230, 240, 250, 260, ..., што значи дека оддалеченоста на малата болви може да биде: 211, 221, 231, 241, 251, 261, ...

Оддалеченоста на големата болви од Арон е број кој се добива кога на содржател на бројот 7 поголем од бројот 200 ќе му го додадеме бројот 3. Такви содржатели се броевите 203, 210, 217, 224, 231, 238, 245, .., што значи дека оддалеченоста на големата болва може да биде: 206, 213, 220, 227, 234, 241, 248, ...

Бидејќи болвите скокаат од исто место, го бараме најмалиот број кој може да биде и оддалеченост на малата и оддалеченост на големата болва. Тој број е бројот 241. Значи, најмалата должина на скокот на малата болва може да биде: $(241-1):10 = 24\ cm$.

92. Ана, Мијана и Татјана направиле овошен сок и го туриле во три сада. Бидејќи не биле задоволни од поделбата, Ана половина од својот сок го претурила во садот на Мирјана, потоа Мирјана третина од сокот го претурила во садот на Татјана, а на крајот Татјана четвртина од сокот од својот сад го претурила во садот на Ана. Потоа во секој сад имало по 6 литри сок. Колку литри сок имало во секој сад на почетокот?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Чекорите се дадени во следната табела.

	Ана	Мирјана	Татјана
Трет чекор	6	6	6
Втор чекор	4	6	8
Прв чекор	4	9	5
Почеток	8	5	5

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

93. Илија, сопственик на продавница за овошје, од земјоделецот Павле купил 18 лубеници по 60 денари за една лубеница. Додека ги носел во продавницата му паднале 6 лубеници и се скршиле. По која цена Илија треба да ја продаде секоја од преостанатите лубеници така што ќе ги поврати своите пари?

Решение. Илија за 18 лубеници платил $18 \cdot 60 = 1080$ денари. Бидејќи му преостанале $18 - 6 = 12$ лубеници, за да ги поврати своите пари тој

секоја лубеница мора да ја продаде по $1080:12=90$ денари.

94. Андријан во текот на мај, јуни, јули и август (вкупно 123 дена) треба на своите соседи да им ја коси тревата и да го полева цвеќето. Тревата треба да ја коси секој шести ден, а цвеќето да го полева секој трет ден. За секое косење на тревата добива по 2 евра и 40 центи, а за секое полевање на цвеќето по 75 центи. Третина од целата своја заработувачка Андријан планира да ја поклони на својата сестра Маја. Колку пари ќе и даде на Маја ако на 1. мај тој косел трева и го полевал цвеќето?

Решение. Бидејќи $123=20\cdot 6+3$ и $123=41\cdot 3$, заклучуваме дека Андријан на своите соседи 20 пати ќе има окоси тревата и 41 пат ќе го полее цвеќето. За секое косење на тревата тој добива 2 евра и 40 центи, што значи дека за косењето тој добил $20\cdot 2=40$ евра и $20\cdot 40=800$ центи, односно 40 евра и 800 центи, што е 48 евра. За секое полевање на цвеќето Андријан добива по 75 центи, па за 41 полевање тој добил $41\cdot 75=3075$ центи, што е 30 евра и 75 центи. Значи, Андријан вкупно добил 78 евра и 75 центи. Сега, бидејќи $78:3=26$ и $75:3=25$, тој на Маја ќе и даде 26 евра и 25 центи.

95. Три другари Андреј, Стојан и Методи заедно имаат 2007 денари. Ако Андреј му даде на Стојан 100 денари, а на Методија 60 денари, тогаш сите тројца ќе имаат еднакви суми пари. Колку пари има секое дете?

Решение. Кога Андреј ќе му даде 100 денари на Стојан и 60 денари на Методи, секое дете ќе има $2007:3=669$ денари. Значи, Андреј има $669+100+60=829$ денари, Стојан има $669-100=569$ денари и Методија има $669-60=609$ денари.

96. Заедничката заштеда на тројца другари била 1430 денари. Тие одлучиле да задржат еднакви суми пари, а остатокот од парите го дале за купување на поклон на нивната другарка Марија. Марко дал 246 денари, Илија дал 317 денари и Павел дал 294 денари. Колку пари имало заштедено секое дете?

Решение. За поклонот децата дале $246+317+294=857$ денари. Според тоа, на трите деца има останале $1430-857=573$ денари, што значи дека на секое дете му останале по $573:3=191$ денар. Значи, Марко имал $246+191=437$ денари, Илија имал $317+191=508$ денари и Павел имал $294+191=485$ денари.

97. Ана, Јована и Наумка заедно имаат 5724 денари. Ана има два пати помалку денари од парите што заедно ги имаат Наумка и Јована, а Наумка има 500 денари повеќе од Ана. Колку пари има секое девојче?
Решение. Бидејќи Ана има два пати помалку пари од тоа што заено имаат Наумка и Јована, заклучуваме дека Ана има третина од сите пари. Значи, Ана има $5724:3=1908$ денари. Според тоа, Наумка има $1908+500=2408$ денари и Јована има $5724-(1908+2408)=1408$ денари.

98. Тројца другари тргнале во лов и се договориле тоа што ќе уловат да го поделат на три еднакви дела. Заедно уловиле само фазан и зајак. Првиот ловец го добил фазанот, а вториот зајакот, при што вториот ловец му дал на првиот 150 денари, а на третиот 500 денари. Колку чини фазанот, а колку зајакот?
Решение. Третиот ловец добил 500 денари, што е третина од вредноста на уловот. Значи, целиот улов вреди 1500 денари. Значи, фазанот и зајакот вкупно вредат 1500 денари. Бидејќи првиот ловец добил фазан и 150 денари, заклучуваме дека фазанот вреди $500-150=350$ денари. Според тоа, зајакот вреди $1500-350=1150$ денари.

99. Таткото на Темјана претходните девет години секој месец имал иста плата, која била 87831 денар. Секој месец тој штедел точно деветтина од платата. Колку пари заштедил таткото на Темјана за овие девет години?
Решение. *Прв начин*. Таткото месечно штедел $87831:9=9759$ денари. За една година тој заштедил $12\cdot 9759=117108$ денари. За девет години таткото на Темјана заштедил $117108\cdot 9=1053972$ денари.
Втор начин. Во девет години таткото добил $9\cdot 12=108$ плати. Тој месечно штедел деветтина од својата плата, што значи дека за 9 години тој заштедил $108:9=12$ плати. Значи, таткото вкупно заштедил $87831\cdot 12=1053972$ денари.

100. Госпоѓите Милена, Цветанка и Марта се здружиле заедно да купат пиперки за ајвар и собрале 3490 денари. Ако Милена имала 270 денари повеќе, а Цветанка 140 денари повеќе, тогаш секоја ќе дадела иста сума на пари. Колку пари дала секоја од трите госпоѓи?
Решение. Ако Милена дала 270 денари повеќе, а Цветанка дала 140 денари повеќе, тогаш ќе имало $3490+270+140=3900$ денари. Значи,

секоја ќе дадела по $3900:3=1300$ денари. Според тоа, Марта дала 1300 денари, Милева дала $1300-270=1030$ денари и Цветанка дала $1300-140=1160$ денари.

101. Зоран и Весна заедно заштедиле 2024 денари. Притоа петтина на заштедата на Зоран е еднаква на третина на заштеата на Весна. Кој заштедил повеќе пари и за колку?

Решение. Ако петтина од заштедата на Зоран е x, тогаш Зоран заштедил $5x$ денари. Но, петтина од заштедата на Зоран е еднаква на третина од заштедата на Весна, добиваме дека Весна заштедила $3x$ денари. Според тоа, $5x+3x=2024$, од каде добиваме $8x=2024$, т.е. $x=253$ денари. Значи, Зоран заштедил $253\cdot 5=1265$ денари, а Весна заштедила $253\cdot 3=759$ денари.

Конечно, Зоран заштедил $1265-759=506$ денари повеќе од Весна.

102. Братот заштедил 2019 денари повеќе од сестрата. Од своите заштеди тие задржале еднакви суми пари, а остатокот го потрошиле за поклон за годишнината на нивните родители. Братот задржал петтина од својата заштеда, а сестрата задржала половина од својата заштеда. Колку пари потрошиле за поклонот на родителите?

Решение. Ако петтина од заштедата на братот ја означиме со x, тогаш целата заштеда на бартот е $5x$. Тогаш половина од заштедата на сестратата е x (таа задржала еднаква сума пари како братот), па затоа целата нејзина заштеда е $2x$. Братот повеќе заштедил од сестрата $5x-2x=3x$, па затоа $3x=2019$, од каде добиваме $x=673$. Според тоа, братот заштедил $5\cdot 673=3365$ денари, а сестрата заштедила $2\cdot 673=1346$ денари.

Братот и сестрата заедно заштедиле $3365+1346=4711$ денари, за себе задржале $2\cdot 673=1346$, а за поклонот на родителите потрошиле $4711-1346=3365$ денари.

103. Драгана за палто, дуксер и чевли платила 16100 денари. Палтото го платила 7400 денари поскапо од дуксерот, а дуксерот и палтото ги платла 7100 денари поскапо од чевлите. Колку платила Драгана за палтото, колку за дуксерот и колку за чевлите?

Решение. Ако со x,y,z ги означиме цените на палтото, дуксерот и чевлите, тогаш $x+y+z=16100$, $x=y+7400$ и $x+y=z+7100$. Со

замена од третата во првата равенка добиваме $2z+7100=16100$, па затоа $z=4500$ денари. Според тоа, $x+y=11600$, па со замена од втората равенка добиваме $2y+7400=11600$, односно $y=2100$ денари. Конечно, $x=2100+7400=9500$ денари. Значи, палтото чинело 9500 денари, дуксерот 2100 денари и чевлите 4500 денари.

104. За 6 кокошкини, 3 паткини и 1 гускино јајце треба да се платат 100 денари, а исто толку треба да се платат за 2 кокошкини, 1 паткино и 3 гускини јајца. Колку гускини јајца може да се купат за 100 денари?
Решение. Бидејќи 2 кокошкини, 1 паткино и 3 гускни јајца чинат 100 денари, добиваме дека 6 кокошкини, 3 паткини и 9 гускини јајца чинат 300 денари. Но, според условот 6 кокошкини, 3 паткини и 1 гускино јајце чинат 100 денари, па затоа $9-1=8$ гускини јајца чинат $300-100=200$ денари. Значи, 1 гускино јајце чини $200:8=25$ денари. Според тоа, за 100 денари може да се купат $100:25=4$ гускини јајца.

105. Ивана отишла на пазар да купи јаболка. За да купи $8\,kg$ јаболка и недостасуваат 15 денари, а ако купи $5\,kg$ јаболка и преостануваат 33 денари. Колку пари чини килограм јаболка? Колку пари имала Ивана?
Решение. Нека со x ја означиме цената на $1\,kg$ јаболка. Бидејќи за да купи $8\,kg$ јаболка и недостасуваат 15 денари, Ивана има $8x-15$ денари. Од друга страна, ако купи $5\,kg$ јаболка и преостануваат 33 денари, па затоа Ивана има $5x+33$ денари. Според тоа,

$$\begin{aligned} 8x-15&=5x+33,\\ 8x-5x&=33+15,\\ 3x&=48,\\ x&=48:3=16. \end{aligned}$$

Значи, килограм јаболка чини 16 денари и Ивана има $8\cdot16-15=113$ денари.

106. Мајсторот Рампо воведува парно греење, а наплатува така што за својата работа зема половина од цената на потрошениот материјал и за секој ден работа додава уште по 1700 денари. Колку г-нот Јакопетрески платил за работата на мајсторот Рампо, а колку за материјалот, ако вкупно платил 33480 денари, а работата била завршена за

3 дена?

Решение. За трите дена работа Рампо наплатил $3 \cdot 1700 = 5100$ денари. Според тоа, цената на материјалот и делот од парите кои мајсторот Рампо ги наплатил врз основа на цената на материјалот вкупно чинат $33480 - 5100 = 28380$ днари. Ако цената на материјалот е $2x$ денари, тогаш мајсторот Рампо наплатил x денари, па затоа $2x + x = 28380$, од каде наоѓаме $3x = 28380$, односно $x = 9460$ денари. Значи, г-нот Јакопетрески за материјалот платил $2 \cdot 9460 = 18920$ денари, а за работата на мајсторот Рампо платил $9460 + 5100 = 14560$ денари.

107. На пазар $3\,kg$ грозје чинат колку што чинат $5\,kg$ круши. Лена купила $2\,kg$ грозје, а Елена $3\,kg$ круши. Кој потрошил повеќе пари Лена или Елена?

Решение. Од условот на здачата следува дека $6\,kg$ грозје чини колку $10\,kg$ круши. Според тоа $2\,kg$ грозје чини колку $\frac{10}{3}\,kg$ круши. Но, $\frac{10}{3} > 3$, што значи дека Лена потрошила повеќе пари од Елена.

108. На пазарот $3\,kg$ домати чинат колку $2\,kg$ пиперки, а $2\,kg$ домати колку $1\,kg$ краставици. Мила купила $5\,kg$ домати, Ангелина $3\,kg$ краставици, а Виолета $3\,kg$ пиперки. Која од нив трите потрошила најмногу пари?

Решение. Бидејќи $1\,kg$ краставици чинат колку $2\,kg$ домати заклучуваме дека $3\,kg$ краставици чинат колку $6\,kg$ домати. Ангелина купила $3\,kg$ краставици, а Мила купила $5\,kg$ домати, што значи дека Ангелина потрошила повеќе пари од Мила.

Бидејќи $3\,kg$ домати чинат колку $2\,kg$ пиперки заклучуваме дека $15\,kg$ домати чинат колку $10\,kg$ пиперки. Тоа значи дека $5\,kg$ домати чинат колку што чинат $\frac{10}{3}\,kg$ пиперки, од каде следува дека Мила потрошила повеќе пари од Виолета.

Конечно, најмногу пари потрошила Ангелина, па Мила и на крајот Виолета.

109. Од 1. март до 5. март Ратка потрошила $\frac{1}{6}$ од своите пари, Даница потрошила $\frac{1}{5}$ од своите пари и Љубинка потрошила $\frac{1}{4}$ од своите пари.

Вечерта на 5. март трите другарки имале еднакви суми пари и вкупно 1800 денари. Колку пари имале девојчињата на 1. март наутро?

Решение. На 5. март навечер трите девојчиња имале 1800 денари,што значи дека секое имало по 600 денари. На Ратка и преостанале $\frac{5}{6}$ од парите, што значи дека таа на почетокот имала $\frac{6}{5}\cdot 600 = 720$ денари. Понатаму, на Даница и преостанале $\frac{4}{5}$ од парите што значи дека таа на почетокот имала $\frac{5}{4}\cdot 600 = 750$ денари. Слично, Љубинка на почетокот имала $\frac{4}{3}\cdot 600 = 800$ денари. Конелно, на 1. март наутро девојчињата имале $720 + 750 + 800 = 2270$ денари.

110. Раде и Пецо заедно имаат 2009 денари. Ако $\frac{1}{9}$ од парите кои ги има Раде е за 10 денари поголема од $\frac{1}{10}$ од парите кои ги има Пецо, колку пари има секој од нив?

Решение. Ако со x означиме $\frac{1}{10}$ од парите кои ги има Пецо, тогаш $\frac{1}{9}$ од парите на Раде е еднаква на $x+10$. Значи, Пецо има $10x$ денари, а Раде има $9(x+10)$ денари. Затоа $9(x+10)+10x = 2009$, од каде добиваме $19x = 1919$, односно $x = 101$. Конечно, Пецо има $10\cdot 101 = 1010$ денари, а Раде има $2009 - 1010 = 999$ денари.

111. Андреј, Бојан и Вангел понеле на екскурзија вкупно 2006 денари. Андреј на екскурзијата потрошил $\frac{3}{4}$ од своите пари, Бојам потрошил $\frac{5}{6}$ од своите пари и Вангел потрошил $\frac{6}{7}$ од своите пари. Сите тројца од екскурзијата се вратиле со иста сума пари. Колку пари понело секое дете на екескурзијата?

Решение. Нека Андреј, Бојан и Вангел на екскурзија понеле x, y и z денари, соодветно. Бидејќи Андреј потрошил $\frac{3}{4}$ од своите пари од екскурзија се вратил со $\frac{1}{4}$ од своите пари, т.е. со $\frac{1}{4}x$ денари. На потполно ист начин заклучуваме дека Бојан се вратил со $\frac{1}{6}y$ денари и Вангел се вратил со $\frac{1}{7}z$ денари. Бидејќи сумите се еднакви, добиваме $\frac{1}{4}x = \frac{1}{6}y = \frac{1}{7}z = t$, до каде наоѓаме $x = 4t,\ y = 6t,\ z = 7t$. Но,

$$x + y + z = 2006,$$

па со замена во последната равенка добиваме $4t + 6t + 7t = 2006$, т.е. $17t = 2006$, па затоа $t = 118$. Конечно, Андреј понел $4 \cdot 118 = 472$ денари, Бојан понел $6 \cdot 118 = 708$ денари и Вангел понел $7 \cdot 118 = 826$ денари.

112. Ацо, Војдан и Симон заедно имаат 2016 денари.. Кога Ацо потрошил $\frac{2}{3}$ од своите пари, Војдан потрошил $\frac{3}{4}$ од своите пари и Симон потрошил $\frac{6}{7}$ од своите пари, им останале еднакви суми пари. Колку пари имал секој од нив?

Решение. Ацо потрошил $\frac{2}{3}$, па затоа му останала $\frac{1}{3}$ од сумата која ја имал. Слично на Војдан му останала $\frac{1}{4}$ одсумата која ја имал, а на Симон му останала $\frac{1}{7}$ од сумата која ја имал. Бидејќи на исте тројца им останале еднакви суми добиваме дека $\frac{1}{3}a = \frac{1}{4}b = \frac{1}{7}c = x$. Значи, Ацо имал $a = 3x$ денари, Војдан имал $b = 4x$ денари и Симон имал $c = 7x$ денари. Според тоа, $3x + 4x + 7x = 2016$, од каде добиваме $14x = 2016$, односно $x = 144$ денари. Значи, Ацо имал $3 \cdot 144 = 432$ денари, Војдан имал $4 \cdot 144 = 576$ денари и Симон имал $7 \cdot 144 = 1008$ денари.

113. Анка, Венда и Симона отишле во слаткарница и вкупно понеле 2016 денари. Анка потрошила $\frac{2}{3}$ од своите пари, Венда потрошила $\frac{3}{4}$ од своите пари и Симона потрошила $\frac{5}{6}$ од своите пари. На Венда и Симона им останале еднакви суми праи, а на Анка и останала сума колку на Венда и Симона заедно. Колку пари имало секое девејќе на почетокот?

Решение. Со a, v, s да ги означиме сумите кои Анка, Венда и Симона ги имале на почетокот. На Анка и останале $\frac{1}{3}$ од парите, на Венда $\frac{1}{4}$ од парите и на Симона $\frac{1}{6}$ од парите кои ги имала на почетокот. Според тоа, на Анка, Венда и Симона им останале $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}v$ и $\frac{1}{6}s$ денари. Ако со x ја означиме сумата која им останала на Ведна и

Симона, тогаш $\frac{1}{4}v=\frac{1}{6}s=x$, $\frac{1}{3}a=\frac{1}{4}v+\frac{1}{6}s=2x$ и $a+v+s=2016$. Според тоа, $v=4x, s=6x, a=6x$ и $6x+4x+6x=2016$. Од последната равенка следува $16x=2016$, т.е. $x=126$. Значи, Анка и Симона имале по $6\cdot126=756$ денари, а Венда имала $4\cdot126=504$ денари.

114. Двајца кувари за 10 минути испекле 22 палачинки. Колку палачинки ќе испечат четири кувари за еден час, ако сите кувари работат со иста брзина?

Решение. *Прв начин*. Еден кувар за 10 минути испекува два пати помалку палачинки од двајца кувари, т.е. испекува $22:2=11$ палачинки. Значи,еден кувар за 1 час испекува $11\cdot6=66$ палачинки. Според тоа, 4 кувари за 1час испекуваат $4\cdot66=264$ палачинки.

Втор начин.Четири кувари за 10 минути испекуваат два пати повеќе палачинки од двајца кувари, т.е. испекува $2\cdot22=44$ палачинки. Според тоа, четири кувари за 1 час испекуваат $6\cdot44=264$ палачинки.

115. Тројца моделари можат за 3 дена да направат три модели на еден вид авион. Колку модели на овој авион може да направат 4 моделари за 6 дена?

Решение. Еден моделар за 3 дена прави еден модел на авионот. Четири моделари за три дена прават 4 модели на авионот. Конечно, 4 моделари за 6 дена прават 8 модела на авионот.

116. Еден работник може да заврши некоја работа за 4 часа, а друг работник истата таа работа може да ја заврши под истите услови за 12 часа. За колку часа ќе биде завршена работата ако двајцата работници работат заедно?

Решение. За 12 часа првиот работник може да заврши 3 такви работи. Според тоа, за 12 часа двајцата работници заедно може да завршат $3+1=4$ такви работи. За тоа, една таква работа може да завршат за четири пати пократко време, односно за $12:4=3$ часа.

117. Една работа 6 работници завршуваат за 8 дена. Но, 5 дена по почетокот на работата на тимот му се придружиле уште неколку работници, па така работата е завршена еден ден порано од планираното. Колку работници дошле да помогнат? (Сите работници работат со исто темпо.)

Решение. По 5 дена требало 6 работници да работата уште 3 дена. Тоа се уште $6 \cdot 3 = 18$ работни дена на еден работник. Но, работата е завршена еден ден порано, што значи дека по доаѓањето на новите работници работата е завршена уште за 2 дена. Според тоа, секој ден работеле по $18 : 2 = 9$ работници. Значи, работата ја почнале 6 работници, а ја завршиле 9 работници, од каде следува дека 3 работници дошле да помогнат.

118. Сашо имал три кутии со џамлии. Половина од џамлиите од првата кутија ги ставил во втората кутија, потоа третина од џамлиите кои се сега во втората кутија ги ставил во третата кутија, а потоа четвртина од џамлиите кои се во третата кутија ги ставил во првата кутија. На крајот во секоја кутија имало по 12 џамлии. Колку џамлии имало во секоја кутија на почетокот?

Решение. Задача ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Постапките во секој чекор се дадени во следнава табела.

	Кутија 1	Кутија 2	Кутија 3
На крај	12	12	12
Пред трет чекор	8	12	16
Пред втор чекор	8	18	10
Пред прв чекор	16	10	10

119. Во една сала има 36 столици. Некои имаат 3 ногалки, а некои 4 ногалки. Вкупниот број ногалки е 127. Колку столици се со 4 ногалки?

Решение. Ако сите столици имаат по 3 ногалки, тогаш ќе имаме $3 \cdot 36 = 108$ ногалки. Меѓутоа имаме $127 - 108 = 21$ ногалка повеќе, што значи дека имаме 19 столици со по една ногалка повеќе, односно со 4 ногалки.

120. Во книжара стигнале пет кутии фломастери и на секоја кутија пишувало колку фломастери има: 130, 110, 100, 115 и 105. Во секоја кутија имало фломастери со иста боја: или црвени или сини. Кога се продале сите фломастери од една кутија, се покажало дека сини фломастери останале три пати повеќе од црвени фломастери. Колку сини фломастери останале?

Решение. Бројот на фломастерите од преостанатите кутии мора да е делив со 4. Тоа значи дека преостанале фломастерите од првата, втората,четвртата и петтата кутија: $130 + 110 + 115 + 105 = 460$. Бидејќи

преостанале 460 фломастери, црвени има $460:4=115$, а сини има $460-115=345$.

121. За опремување на една детска градинка се купени 144 играчки: автомобилчиња, топки и кукли. Бројот на автомобилчињата е една четвртина од бројот на сите играчки, а на секои четири кукли се купени по пет топки. Колку топки се купени?
Решение. Биле купени $144:4=36$ автомобилчиња. Според тоа, бројот на другите играчки бил $144-36=108$. Ако на секои четири кукли секупени пет топки, тогаш имаме еднаков број групи од по $4+5=9$ играчки. Вакви групи има $108:9=12$, па како во секоја група има по 5 топки, биле купени $5\cdot 12=60$ топки.

122. На три полици вкупно се наредени 400 книги. Ако 10 книги се преместат од втората на третата полица, тогаш на првата и втората полица ќе има еднаков број книги, а на третата полица бројот на книгите ќе биде еднаков на вкупниот број книги кои останале на првата и втората полица. Колку книги има втората полица?
Решение. Бидејќи на крајот бројот на книгите на третата полица е еднаков на збирот на броевите на книгите на првата и втората полица, добиваме дека вкупно на првата и втората полица има $400:2=200$ книги. Но, на првата и втората полица има еднаков број книги, па затоа на овие две полици има по $200:2=100$ книги. Конечно, бидејќи 10 книги се преместени од втората на третата полица, на втората полица на почетокот имало $100+10=110$ книги.

123. Тројца пријатели биле на риболов и секој десетти улов наместо риба бил чевел. Колку риби морале да уловат рибарите за да се „обујат“?
Решение. За да се „обујат“ на рибарите им се потребни $3\cdot 2=6$ чевли. Според тоа, тие треба да уловат $6\cdot 9=54$ риби.

124. Два зајака за 3 дена јадат 24 моркови. Колку моркови ќе изедат 3 зајаци за 5 дена?
Решение. Еден зајак за 3 дена изедува $24:2=12$ моркови. Значи, еден зајак дневно изедува $12:3=4$ моркови. Три зајаци за 1 ден изедуваат $3\cdot 4=12$ моркови, а за 5 дена изедуваат $12\cdot 5=60$ моркови.

125. Три мачки за 4 дена фаќаат 24 глувци. За колку дена 5 мачки ќе фатат

30 глувци?

Решение. За 1 ден 3 мачки фаќаат $24:4=6$ глувци. Затоа за 1 ден 1 мачка ќе фати $6:3=2$ глувци. Понатаму, 1 мачка ќе фати 30 глувци за $30:2=15$ дена, па затоа 5 мачки ќе фатат 30 глувци за $15:5=3$ дена.

126. Во Мравовелеград живеат 448 пати повеќе мравки отколку во Мравосело, а 28 пати повеќе мравки отколку што живеат во Мравоград. Ако во Мравосело живеат 2009 мравки, колку мравки живеат во Мравоград?

Решение. *Прв начин*. Во Мравовелеград живеат $2009\cdot 448=900032$ мравки. Значи, во Мравоград живеат $900032:28=32144$ мравки.

Втор начин. Во Мравоград живеат $448:28=16$ пати повеќе мравки отколку во Мравосело. Значи, во Мравоград живеат $2009\cdot 16=32144$ мравки.

127. На еден концерт имало 1645 посетители, момчиња и девојчиња. Во секој ред седеле по 18 девојчиња и 17 момчиња. Колку девојчиња, а колку момчиња биле на овој концерт?

Решение. Во секој ред седеле по $18+17=35$ деца. Тоа значи дека во салата имало $1645:35=47$ реда. Според тоа, на концертот имало $18\cdot 47=846$ девојчиња и $17\cdot 47=799$ момчиња.

128. На еден екипен натпревар учествувале 1435 ученици од петто, шесто, седмо, осмо и деветто одделение. Во секоја екипа имало 5 ученици од петто, 6 ученици од шесто, 7 ученици од седмо, 8 ученици од осмо и 9 ученици од деветто оделение. Колку ученици имало од секое одделение на натпреварот?

Решение. Секоја екипа е составена од $5+6+7+8+9=35$ ученици. На натпреварот имало вкупно 1435 ученици, што значи дека бројот на екипите бил 41. Значи, од петто имало $5\cdot 41=205$ ученици, од шесто $6\cdot 41=246$, од седмо $7\cdot 41=287$, од осмо $8\cdot 41=328$ и од деветто $9\cdot 41=369$ ученици.

129. Пет бригади со еднаков број акцијаши во секоја бригада тргнале на работна акција. Командантот на акцијата застанал пред акцијашите и ги построил така што во секоја бригада акцијашите биле построени по 8 мина во секој ред. Акцијашот Марко бил во осумнаесеттиот ред во својата бригада, односно во петтиот ред сметајќи од крајот на брига-

дата. Колку акцијаши имало на оваа работна акција?

Решение. Пред Марко има 17 ред, а по него има 4 реда. Значи, една бригада има $17+1+4=22$ реда. Во секој ред има по 8 акцијаши, што значи дека една бригада има $22\cdot 8=176$ акцијаши. Имаме 5 бригади, што значи дека заедно со командантот на акцијата, кој постројувањето стоел пред акцијашите, на акцијата учествувале $5\cdot 176+1=881$ луѓе.

130. На една екскурзија имало 60 ученици. Девојчињата се сместени во трикреветни, а момчињата во чеирикреветни соби. Бројот на четирикреветните соби е за еден поголем од бројот на трикреветните соби и сите кревети биле искористени. Колку момчиња и колку девојчиња имало на екскурзијата?

Решение. Ако не ја сметаме четирикреветната соба во која се сместени 4 момчиња, тогаш $60-4=56$ деца се сместени во еднаков број трикреветни и четирикреветни соби. Но, во еден пар трикреветна и четирикреветна соба се сместени 7 деца, па затоа за сместувањето на 56 деца се употребени $56:7=8$ парови соби. Според тоа, девојчињата се сместени во 8 трикреветни соби, што значи дека има $8\cdot 3=24$ девојчиња. Конечно, бројот на момчињата е $60-24=36$.

131. Во една овошна градина се засадени 3600 садници: јаболка, круши и сливи. Бројот на крушите е петти дел од бројот на сите садници, а на секои три садници сливи се засадени пет садници јаболка. Колку садници јаболка се засадени во оваа овошна градина?

Решение. Во овошната градина се засадени $3600:5=720$ стебла круши. Значи, вкупниот број на сливи и јаболка е $3600-720=2880$. Бидејќи на секои три садници сливи се засадени пет садници јаболка имаме групи од сливи и јаболка од по $3+5=8$ садници. Вакви групи се $2880:8=360$. Во секоја група има по 5 садници јаболка, што значи дека вкупниот број јаболка е $5\cdot 360=1800$.

132. На секое од своите три деца Цветанка им дала еднаков број мандарини. Кога секое дете изело по 4 мандарини, вкупно им останале онолку мандарини колку што секое дете добило на почетокот. Колку мандарини добило секое дете?

Решение. *Прв начин*. Од условот на задачата следува дека вкупниот број на изедените мандарини е два пати поголем бројот на мандарините кои секое дете ги добило на почетокот. Децата изеле $3\cdot 4=12$

мандарини, што значи дека секое дете на почетокот добило по $12:2=6$ мандарини.

Втор начин. Ако со x го означиме бројот на мандариниte кои секое дете ги добило на почетокот, тогаш $x-4$ е бројот на мандариниte кои му останале на секое дете. Оттука следува дека $3(x-4)=x$, па затоа $3x-12=x$, односно $2x=12$, па е $x=6$. Значи, секое дете на почетокот добило по 6 мадарини.

Трет начин. Ако со x го означиме бројот на мандариниte кои секое дете ги добило на почетокот, добиваме дека тие вкупно добиле $3x$ мандарини. Кога изеле $3\cdot 4=12$ мандарини, вкупно им останале x мандарини. Значи, тие изеле $3x-x=12$ мандарини, од каде добиваме $x=6$. Значи, секое дете на шпочетокот добило по 6 мандарини.

133. На секој од своите четири внуци бабата му дала еднаков број јаболка. Кога децата изеле по три јаболка, им останале онолку јаболка колку што имало секое дете на почетокот. Колку јаболка добило секое дете?

Решение. Ако со x го означиме бројот на јаболката кои ги добило секое дете од четирите деца, тогаш кога изелеле по 3 јаболка на секое дете му останале $x-3$ јаболка. Затоа $4(x-3)=x$, од каде добиваме $4x-12=x$, односно $x=4$. Значи, секое дете на почетокот добило по 4 јаболка.

134. Три девојчиња вкупно набрале 480 јаболка. Ако второто девојче му даде на третото 50 јаболка, тогаш второто и третото девојче ќе имаат еднаков број јаболка, а третото ќе има 40 јаболка помалку отколку првите две девојчиња заедно. Колку јаболка набрало третото девојче?

Решение. На крајот првото и третото девојче имаат еднаков број јаболка, да го означиме со x, а третото девојче има $2x-40$ јаболка. Значи, $x+x+2x-40=480$, од каде добиваме $4x=520$, односно $x=130$ јаболка. Конечно, првото девојче набрало 130 јаболка, второто набрало $130+50=180$ јаболка, а третото набрало 170 јаболка.

135. Во едно одделение имало 5 навивачи повеќе за Вардар од навивачи за Пелистер. По победата на Пелистер, 3 ученици се премислиле и почнале да навиваат за Пелистер. Која екипа сега има повеќе навивачи и за колку?

Решение. Ако бројот на навивачите на Пелистер го означиме со x,

тогаш бројот на навивачите на Вардар е $x+5$. По победата на Пелистер бројот на навивачите на вардар бил $x+5-3=x+2$, а бројот на навивачите на Пелистер бил $x+3$. Значи, сега Пелистер има еден навивач повеќе.

136. На конференција за печат на која присуствувале новинари и спортисти, имало вкупно 20 учесници. Првиот новинар направил интервју со пет спортисти, вториот новинар направил интервју со шест спортисти, третиот со седум, и така по ред до последниот новинар кој направил интервју со сите спортисти. Колку спортисти имало на оваа конференција за печат?

Решение. Нека на конференцијата имало x новинари. Секој новинар направил интервју со 4 спортисти повеќе отколку што е неговиот реден број, па како последниот новинар направил интервју со сите спортисти, добиваме дека на конференцијата имало $x+4$ спортисти. Значи, $x+x+4=20$, од каде добиваме $2x=16$, односно $x=8$. Значи, на конференцијата имало 8 новинари и 12 спортисти.

137. Сите 29 ученици од едно одделение играле шах така што противници во секоја партија биле момче и девојче. Мирјана играла со четири момчиња, Николина со пет момчиња, Снежана со шест момчиња, итн. редоследно до последното девојче кое играло со секое момче во тоа одделение. Колку момчиња има во тоа одделение?

Решение. Нека во одделението има x девојчиња. Ако девојчињата ги наредиме во ред според бројот на одиграните партии, тогаш секое девојче одиграло 3 партии повеќе отколку што е нејзиниот реден број. Затоа бројот на момчињата во одделението е $x+3$. Според тоа, $x+x+3=29$, од каде добиваме $2x=26$, односно $x=13$. Значи, во одделението имало 23 девојчиња и 16 момчиња.

138. Во еден дел на Зоолошката градина се сместени зајаци, птици и змии. Децата избројале 24 глави, 14 крила и 62 нозе. Колку животни има од секој вид?

Решение. Според бројот на главите во зоолошката градина има 24 животни. Бидејќи има 14 крила, добиваме дека има $14:2=7$ птици. Според тоа, зајаци и змии има $24-7=17$. Сега, бидејќи седум птици имаат 14 нозе, зајаците имаат $62-14=48$ нозе. Значи, има $48:4=12$ зајаци. Конечно, во зоолошката градина има $17-12=5$ змии.

139. Патувајќи на летување Горјан од автобусот на една ливада видел 25 животни, меѓу кои имало коњи, крави, овци и кози. Крави имало три пати повеќе од коњи, а овци имало два пати повеќе од кози. Горјан забележал дека сите коњи не биле со иста боја. Колку животни имало на ливадата од секој вид?

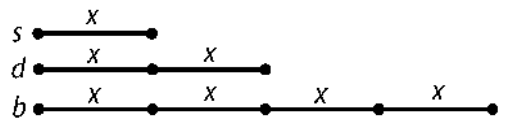
Решение. Со x да го означиме бројот на коњите, а со y бројот на козите. Бидејќи сите коњи не се со сита боја заклучуваме дека $x>1$. Понатаму, бројот на кравите е $3x$, а бројот на овците е $2y$, па затоа $x+3x+y+2y=25$, односно $4x+3y=25$. Бидејќи $x>1$ последната равенка во множеството природни броеви има единствено решение $x=4,\ y=3$. Значи, на ливадата имало 4 коњи, 12 крави, 3 кози и 6 овци.

140. Тројца другари Бојан, Јован и Максим собираат сликчиња од фудбалери. Бојан има три пати повеќе сликчиња од Јован, а Јован има два пати повеќе сликчиња од Максим. Колку сликчиња има секое дете, ако Бојан и Максим заедно имаат 210 сликчиња?

Решение. Нека Максим има x сликчиња. Тогаш Јован има $2x$, а Бојан има $3\cdot 2x=6x$ сликчиња. Но, Бојан и Максим заедно имаат 210 сликчиња, па затоа $x+6x=210$, од каде добиваме $x=30$. Значи, Максим има 30 сликчиња, Јован има 60 и Бојан има 180 сликчиња.

141. Драган има два пати помалку сликички од Бојан, а Стефан има два пату помалку сликички од Драган. Сите заедно имаат 714 сликички. Колку сликички има секое дете?

Решение. Стефан има најмалку сликички, кои на цртежот десно се претставени со отсечка со должина x. Сега со отсечки се преставени броевите на сликичките кои ги имаат Драган и Бојан. Затоа $7x=714$, од каде добиваме $x=102$. Значи, Стефан има 102 сликички, Драган има $102+102=204$ сликички и Бојан има $204+204=408$ сликички.



142. На натпревар по математика учествувале 46 ученици. Бројот на учениците кои се пласирале пред Милан е четири пати помал од бројот

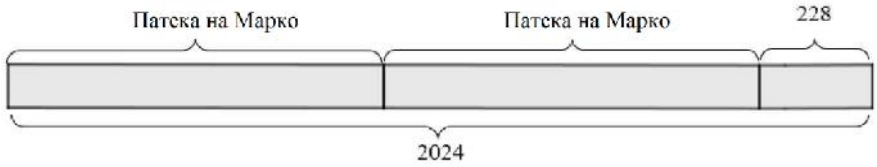
на учениците кои се пласирале по Милан. Кое место на натпреварот го освоил Милан?

Решение. Бројот на учениците кои се пласирале пред или по Милан е еднаков на $46-1=45$. Ако пред Милан се пласирале x ученици, тогаш по него се пласирале $4x$ ученици. Според тоа, $x+4x=45$, односно $x=9$. Значи, пред Милан се пласирале 9 уеници, а по него се пласирале $45-9=36$ ученици. Милан бил десетти.

143. Тренерите Иван и Марко означиле две шумски патеки. Катерина ги поминала двете патеки, при што направила 2024 чекори со иста должина. Ако на патеката на Иван направела 204 помалку, а на патемката на Марко 24 чекори повеќе, тогаш на двете патеки ќе направела еднаков број чекори. Колку чекори Катерина направила на патеката на Иван, а колку на патеката на Марко?

Решение. Кога патеката на Иван ќе ја намалиме за 204 чекори, а патеката на Марко ќе ја зголемиме за 24 чекори, добиваме еднаква должина, што е прикажано на долниот цртеж.

Бидејќи двете патеки имаат вкупно 2024 чекори, а според претходното разликата во нивните должини е 228 чекори, го добиваме следниот цртеж



Значи, Катерина на патеката на Марко направила $(2024-228):2=898$ чекори, а на патеката на Иван направила $898+228=1126$ чекори.

144. Три другарки Ана, Вера и Теа заедно имаат 180 музички цедиња. Ако Теа и даден на Ана $\frac{1}{6}$ од своите цедиња, а Вера и даде на Ана $\frac{1}{5}$ од своите цедиња, тогаш сите девојчиња ќе имаат еднаков број цедиња. Колку цедиња има секое девојче?

Решение. Ако сите девојчиња имаат еднаков број цедиња, тогаш

секое девојче ќе има $180:3=60$ цедиња. Според тоа, $\frac{5}{6}$ од цедињата на Теа се 60 цедиња, па затоа Теа има $(60:5)\cdot 6=72$ цедиња. Слично, Вера има $(60:4)\cdot 5=75$ цедиња. Конечно, Ана има $180-(72+75)=33$ цедиња.

145. Во училишната кујна стигнале 200 чаши. Поголемите чаши се пакувани во кутии од по 4, а помалите во кутии од по 6 чаши. Притоа се испорачани 5 пакувања големи чаши повеќе од пакувања мали чаши. Колку биле мали, а колку големи чаши?

Решение. Ако ги тргнеме овие 5 пакувања големи чаши, добиваме дека имаме $200-5\cdot 4=180$ чаши кои се запакувани во еднаков број пакувања големи и мали чаши. Но, во пакет големи и пакет мали чаши имаме $4+6=10$ чаши. Значи, имаме $180:10=18$ пакети големи и 18 пакети мали чаши. Според тоа, вкупно се $(18+5)\cdot 4=92$ големи чаши и $18\cdot 6=108$ мали чаши.

146. Пет деветтини од присутните на еден роденден биле момчиња. Кога четири момчиња отшле на тренинг, останале еднаков број момчиња и девојчиња. Колку присутни имало на почетокот на роденденската прослава?

Решение. Ако биле пет деветтини момчиња, тоа значи дека биле четири деветтини девојчиња. Кога 4 момчиња заминале, останале еднаков број момчиња и девојчиња. Тоа значи дека овие 4 момчиња се една деветтина од сите деца кои биле на прославата. Значи, на почетокот на прославата биле присутни $9\cdot 4=36$ деца.

147. Коњ и мазга оделе еден покрај друг и носеле тежок товар. Коњот постојано ја молел мазгата да земе барем една вреќа од неговиот грб. „Ако јас земам од тебе една вреќа ќе носам два пати повеќе вреќи отколку што ќе носиш ти“, рекла мазгата, и додала: „Ако ти земеш една вреќа од мене, ќе носиме еднаков број вреќи.“ Колку вреќи носел коњот, а колку носела мазгата?

Решение. Ако коњот носи x вреќи, кога ќе земе од мазгата 1 вреќа, ќе има $x+1$ вреќа. Тогаш и мазгата ќе има $x+1$, а тоа е за 1 помалку отколку на почетокот. Значи, мазгата на почетокот имала $x+2$ вреќи. Кога мазгата од коњот ќе земе 1 вреќа, таа ќе има $x+3$ вреќи, а коњот ќе има $x-1$ вреќа. Значи, $x+3=2(x-1)$, од каде имаме $x+3=2x-2$,

па затоа $x=5$. Значи, коњот носел 5 вреќи, а мазгата носела 7 вреќи.

148. Во една фирма работат пет пати повеќе жени од мажи, а бројот на жените е за 480 поголем од бројот на мажите. Колку луѓе вкупно работата во оваа фирма?

Решение. Нека во фирмата работа x мажи. Тогаш бројот на жените е $5x$, па затоа $5x-x=480$. Значи, $4x=480$, па затоа $x=480:4=120$. Според тоа, во фирмата се запослени 120 мажи и $5\cdot 120=600$ жени.

149. Во едно одделение има два пати повеќе момчиња од девојчиња. Ако на училиште не дојдат три девојчиња, тогаш бројот на момчињата ќе биде три пати поголем од бројот на девојчињата. Колку ученици има во тоа одделение?

Решение. Нека во одделението има x девојчиња. Тогаш бројот на момчињата е еднаков на $2x$. Понатаму, од условот следува равеката $2x=3(x-3)$, од каде добиваме $2x=3x-9$, па затоа $3x-2x=9$, односно $x=9$. Значи, во одделението има 9 девојчиња и 18 момчиња, т.е. вкупно $9+18=27$ ученици.

150. На баба Темјана ѝ дошле внуците на гости, па сака да им подели колачи. Ако на секој внук му даде по 5 колачи, ќе и недостасуваат 3 колачи. Ако на секој внук му даде по 4 колачи, ќе и останат 3 колачи. Колку внуци има баба Темјана?

Решение. Нека баба Темјана има x внуци. Од условот на здачата следува $5x-3=4x+3$, од каде добиваме $5x-3x=3+3$, т.е. $x=6$. Значи, баба Темјана има 6 внуци.

151. Баба Анѓа им дели колачи на своите внуци. Ако на секого му даде по 4 колачи, ќе и останат 2 колачи, а ако на секого му дава по 5 колачи, ќе и недостасува еден колач. Колку колачи и колку вници има баба Анѓа?

Решение. Нека баба Анѓа има x внуци. Тогаш од првиот услов следува дека таа има $4x+2$ колачи, а од вториот услов следува дека таа има $5x-1$ колачи. Според тоа, $4x+2=5x-1$, од каде добиваме $x=3$. Значи, баба Анѓа има 3 внуци и $4\cdot 3+2=14$ колачи.

152. Ана, Јана и Дана заедно имале 140 сликички. Ана и дала на Дана четвртина од своите сликички, а Јана и дала на Дана десеттина од

своите сликички. Тогаш Ана и Јана имале еднаков број сликички, а Дана имала 40 сликички помалку од Ана и Јана заедно. Колку сликички имала Дана пред да добие сликички од Ана и Јана?

Решение. Ако на крајот Ана и Јана имале по x сликички, тогаш Дана имала $2x-40$ сликички. Значи, $x+x+2x-40=140$, од каде добиваме $x=45$. Значи, на крајот Ана и Јана имале по 45 сликички. Бидејќи Ана и дала на Дана четвртина од своите сликички, добиваме дека 45 сликички се три четвртини од сликичките кои ги имала Ана на почетокот. Значи, една четвртина од сликичките кои ги имала Ана на почетокот е $45:3=15$, од каде следува дека Ана на почетокот имала $4\cdot 15=60$ сликички. Јана на Дана и дала десеттина од своите сликички, што значи дека и останале девет десетини од сликичките кои ги имала на почетокот. Значи, една десеттиа од сликичките кои Јана ги имала на почетокот е $45:9=5$,т.е. Јана на почетокот имала $10\cdot 5=50$ сликички.

Конечно, Дана на почетокот имала $140-60-50=30$ сликички.

153. На две гранки имало 25 врапчиња. Кога од првата гранка на втората гранка ќе прелетаат 5 врапчиња, а потоа од втората ќе одлетаат 7 врапчиња, тогаш на првата гранка ќе има два пати повеќе врапчиња отколку на втората гранка. Колку врапчиња имало на почетокот на секоја гранка?

Решение. На почетокот имало 25 врапчиња, па кога одлетале 7 на двете гранки останале $25-7=18$ врапчиња. Ако на втората гранка има x врапчиња, тогаш на првата има $2x$ врапчиња, па затоа $x+2x=18$. Значи, $3x=18$, па затоа $x=6$. Значи, на втората гранка останале 6, а на првата 12 врапчиња. Конечно, на почетокот на првата гранка имало $12+5=17$ врапчиња.

154. Три седмини од вкупниот број ученици на едно одделение се девојчиња. Ако дојдат уште четири девојчиња, тогаш во одделението ќе има еднаков број момчиња и девојчиња. Колку вкупно ученици има во моментот во одделението?

Решение. Ако девојчињата се $\frac{3}{7}$ од вкупниот број ученци, тогаш момчињата се $1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$ од вкупниот број ученици. Која ќе дојдат 4 девојчиња, тогаш девојчињата се изедначуваат со момчињата. Тоа значи

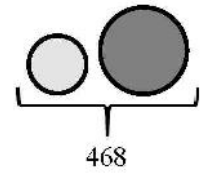
дека овие 4 девојчиња се $\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$ од вкупниот број ученици. Значи, во одделениео има $4\cdot 7=28$ ученици.

155. Јана и Лана купиле кеса бонбони. Прво заедно изеле $\frac{2}{3}$ од бонбоните, а потоа секоја од нив изела уште по една бонбона. Другиот ден заедно изеле $\frac{1}{2}$ од преостанатите бонбони и им останале уште 3 бонбони. Колку бонбони имало во кесата на почетокот?

Решение. Трите бонбони што останале се $\frac{1}{2}$ од бонбоните кои останале по првиот ден. Значи, по првиот ден им останале $2\cdot 3=6$ бонбони. Ако ги додадеме уште двете бонбони што подоцна ги изеле, добиваме дека $\frac{1}{3}$ од бонбоните кои биле на почетокот во кесата е еднаква на $6+2=8$ бонбони. Значи, на почетокот во кесата имало $3\cdot 8=24$ бонбони.

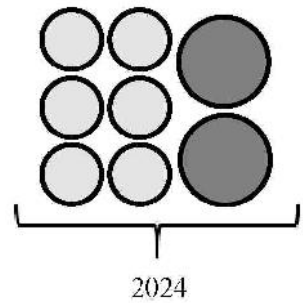
156. Во саботата Музејот на современата уметност (МСУ) имал 468 посетители. Во неделата МСУ го посетиле два пати повеќе мажи и шест пати повеќе жени отколку во саботата, така што имало вкупно 2024 посетители. Колку мажи и колку жени го посетиле МСУ?

Решение. *Прв начин*. Нека со  го означиме бројот на жените, а со  го означиме бројот на мажите кои во саботата го посетиле МСУ. Вкупниот број посетители е 468, па затоа го имаме дијаграмот прикажан на цртежот десно.

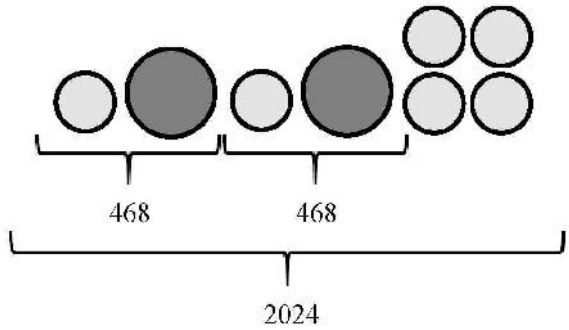


Бидејќи во неделата МСУ го посетиле 2024 луѓе и тоа шест пати повеќе жени и два пати повеќе мажи отколку во саботата, го добиваме дјаграмот прикажан на цртежот десно.

Понатаму, ако го искористиме првиот дијаграм, тогаш вториот дијаграм можеме да го претставиме како на долниот цртеж. Сега, од $2024-2\cdot 468=1088$ и дијаграмот десно следува дека во саботата МСУ го посетиле



$1088:4=272$ жени. Според тоа, во саботата МСУ го посетиле $468-272=196$ мажи.



Втор начин. Нека во саботата МСУ го посетиле x жени и y мажи. Од условот на задачата следува $x+y=468$ и $6x+2y=2024$. Од првата равенка имаме $y=468-x$, па со замена во втората равенка добиваме $6x+2(468-x)=2024$, т.е. $6x+936-2x=2024$. Значи, $4x=1088$, т.е. $x=272$. Според тоа, $y=468-272=196$. Конечно, во саботата МСУ го посетиле 272 жени и 196 мажи.

157. Бабата на Ана месила колачи. Ана првиот ден изела половина од сите колачи и уште половина од еден колач, вториот ден изела половина од преостанатите колачи и уште половина од еден колач, третиот ден изела половина од преостанатите колачи и уште половина колач. За четвртиот ден и преостанале 3 колачи. Колку колачи месила бабата на Ана?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Четвртио ден Ана имала 3 колачи. Тоа значи дека $3+\frac{1}{2}$ колачи е половина од колачите кои ги имала третиот ден, од каде следува дека третиот ден Ана имала $2\cdot(3+\frac{1}{2})=7$ колачи. Аналогно наѓаме дека вториот ден Ана имала $2\cdot(7+\frac{1}{2})=15$ колачи. Конечно, првиот ден таа имала $2\cdot(15+\frac{1}{2})=31$ колач, т.е. бабата на Ана месила 31 колач.

158. Милан, Јован и Драган заедно имаат вјупно 180 џамлии. Милан на Драган му дал шестина од своите џамлии, а Јован му дал на драган петтина од своите џамлии. Потоа секое дете имало еднаков број џамлии. Колку џамлии имало секое дете на почетокот?

Решение. На крајот сите тројца имале по $180:3=60$ џамлии. Бидејќи Милан на Драган му дал шестина од всоите џамлии, преостанатите 60 џамлии се $\frac{5}{6}$ од џамлиите кои ги имал на почетокот. Значи, $\frac{1}{6}$ од џамлиите кои ги имал на почетокот Милан се $60:5=12$ џамлии. Според тоа, Милан на почетокот имал $12\cdot 6=72$ џамлии.

Јован му дал на Драган петтина од вспоите џамлии,што значи дека преостанатите 60 џамлии се $\frac{4}{5}$ од џамлиите кои Јован ги имал на почетокот. Значи, $\frac{1}{5}$ од џамлиите кои ги имал на почетокот Јован се $60:4=15$ џамлии. Според тоа, Јован на почетокот имал $15\cdot 5=75$ џамлии.

Конечно, Драган на почетокот имал $180-72-75=33$ џамлии.

159. Во една паралелка има 24 ученици. Во оваа паралелка бројот на момчињата е еднаков на $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата. Колку момчиња и колку девојчиња има во паралелката?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи бројот на момчињата е $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата, заклучуваме дека во одделението на секои 3 момчиња има по 5 девојчиња. Според тоа, учениците во ова одделение можеме да ги поделиме на групи од по $3+5=8$ деца. Значи, имаме $24:8=3$ вакви групи. Во секоја група има по 3 момчиња и по 5 девојчиња, што значи дека во одделението има $3\cdot 3=9$ момчиња и $3\cdot 5=15$ девојчиња.

Втор начин. Ако со x го означиме бројот на девојчињата во паралелката, тогаш бројот на момчињата е $\frac{3}{5}x$. Според тоа, во паралелката вкупно има $x+\frac{3}{5}x$ ученици, па како тој број е еднаков на 24, ја добиваме равенката $x+\frac{3}{5}x=24$. Понатаму, имаме $\frac{8}{5}x=24$, па затоа $8x=24\cdot 5$, односно $x=(24\cdot 5):8=15$. Значи, во паралелката има 15 девојчиња и $24-15=9$ момчиња.

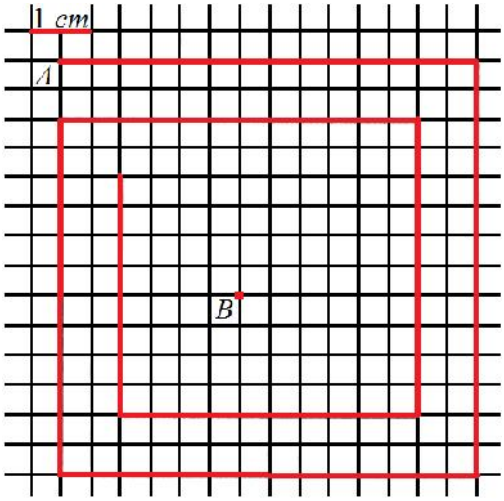
160. На почетокот на состанокот на „Веселата дружина“ бројот на присутните членови бил пет пати поголем од бројот на отсутните. За време на состанокот стигнал уште еден член на дружината, па сега бројот на присутните бил шест пати поголем од бројот на отсутните. Колку

членови има „Веселата дружина“?

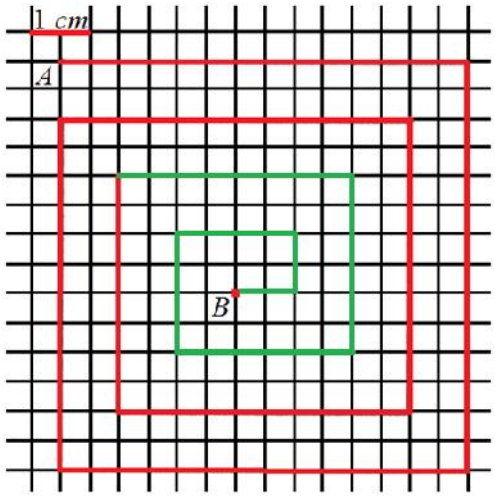
Решение. Вкупниот број членови е делив со 6 (бидејќи бројот на присутните членови бил пет пати поголем од бројот на отсутните). По доаѓањето на еден член бројот на присутните бил 6 пати поголем од бројот на отсутните, што значи дека вкупниот број членови е делив и со 7. Значи, вкупниот број членови на „Веселата дружина“ е делив со 6 и со 7, па како $\mathrm{NZD}(6,7)=1$, тој е делив со $6\cdot 7=42$. Единствен број кој ги задоволува условите на задачата е бројот 42, бидејќи броевите 84, 126, ... не ги исполнуваат условите на задачата. Значи, друштвото „Веселата дружина“ има 42 члена.

3. ГЕОМЕТРИЈА

1. Користејќи го правилото според кое е нацртан дел од искршената линија продолжи го цртањето на оваа линија така што таа ги поврзува точките A и B, а потоа пресметај ја нејзината должина.



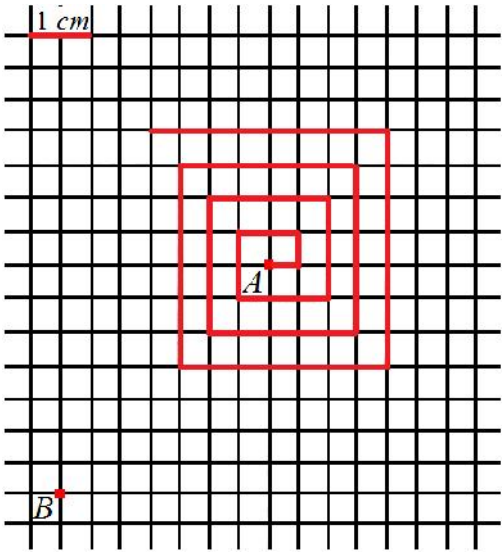
Решение. Доцртувањето на искршената линија е прикажано на долниот цртеж. Истото е прикажано со зелена линија.



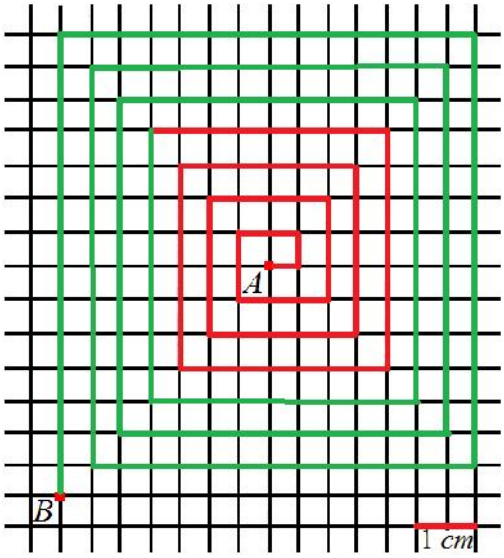
Должината на искршената линија е еднаква на:

$$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+7+7+7=63\,cm.$$

2. Користејќи го правилото според кое е нацртан дел од искршената линија продолжи го цртањето на оваа линија така што таа ги поврзува точките A и B, а потоа пресметај ја нејзината должина.



Решение. Доцртувањето на искршената линија е прикажано на долниот цртеж. Истото е прикажано со зелена линија.



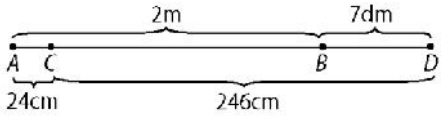
Должината на искршената линија е еднаква на:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=105\,cm\,.$$

3. Точките A,B,C и D се наоѓаат на една права. Растојанието меѓу

точките A и B е $2\,m$, меѓу A и C е $24\,cm$, меѓу B и D е $7\,dm$, а меѓу C и D е $246\,cm$. Определи го растојанието меѓу точките B и C.

Решение. Точките C и D може двете да бидат меѓу A и B, двете надвор од отсечката AB или една на и една надвор од отсечката AB. Бидејќи растојанието меѓу точките C и D е $246\,cm$ заклучуваме дека точката C е на отсечката AB, а точката D надвор од отсечката AB. Според тоа, растојанието меѓу точките B и C е $2\,m - 24\,cm = 176\,cm$.



4. Точките A, B, C и D лежат на една права. Растојанието меѓу точките A и B е $3\,m$, меѓу точките A и C е $56\,cm$, меѓу точките B и D е $11\,dm$. Колку е најголемото, а колку најмалото растојание меѓу точките C и D?

Решение. Кога и двете точки C и D се меѓу A и B растојанието е најмало и е еднакво на $134\,cm$, а кога и двете се надвор од отсечката AB растојанието е најголемо и е еднакво на $466\,cm$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. На една права се нанесени точките A, B, C, D, E по тој редослед. Растојанието меѓу средните точки на отсечките AB и DE е 16 *cm*, а растојанието меѓу средните точки на отсечките BC и CD е 6 *cm*. Пресметај ја должината на отсечката AE.

Решение. Имаме, $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD}$. Понатаму, $\frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD} = 6\,cm$, па

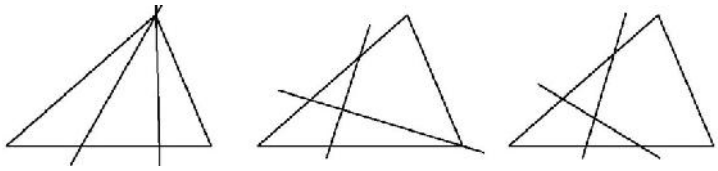
затоа $\overline{BD} = 2 \cdot 6 = 12\,cm$. Исто така, $\frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{DE} = 16\,cm$, од каде добиваме $\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DE} = 16 - 12 = 4\,cm$. Конечно,

$$\overline{AE} = 16 + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DE} = 16 + 4 = 20\,cm.$$

6. Со две прави подели даден триаголник на:
   а) три триаголници,
   б) два триаголници и два четириаголници,

в) два триаголници, еден четириаголник и еден петаголник.

Решение. Бараните поделби се прикажани на долните цртежи



а) б) в)

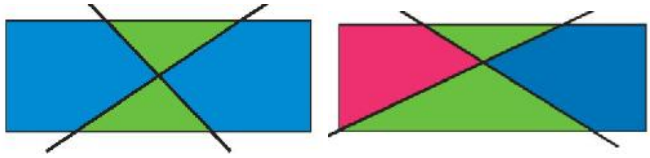
7. Со две прави подели правоаголник на:

а) два триаголника и два петаголника,

б) два триаголника,еден четириаголник и еден петаголник.

Решение. а) Бараната поделба е прикажана на цртежот долу лево.

б) Бараната поделба е прикажана на цртежот долу десно.



8. Над секоја страна на даден правоаголник, надвор од него, конструираме рамностран триаголник. Да се пресмета периметарот на добиената фигура ако периметарот на правоаголникот е $72\,cm$.

Решение. При конструирање на рамностраните триаголници секоја страна на правоаголникот ја заменуваме со две страни со иста должина. Според тоа, периметарот на добиената фигура е двапати поголем од периметарот на правоаголникот, т.е. $L = 2 \cdot 72 = 144\,cm$.

9. Даден е рамностран триаголник со плоштина $6cm^2$. Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на добиената фигура.

Решение. При конструкцијата, над секоја страна на рамностран триаголник конструираме рамностран триаголник со страна со иста должина како страната на триаголник, што значи дека додаваме нов рамностран триаголник кој има иста плоштина како почетниот рамностран триаголник. Значи, добиената фигура се состои од четири рамностранитриаголници еднакви на почетниот рамностран триаголник. Затоа плоштината на добиента фигура е четири пати поголем од плоштината на рамностраниот триаголник, т.е. $P = 4 \cdot 6 = 24cm^2$.

10. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AB}=\overline{AC}$) кракот AC е продолжен преку темето A до точка D, така што периметарот на триаголникот BAD е $16\,cm$. Пресметај ја основата BC на триаголникот ABC, ако периметарот на триаголникот BCD е $29\,cm$.

Решение. Имаме

$$L_{\triangle BAD}=\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DB}=16\,cm$$
$$L_{\triangle BCD}=\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AD}+\overline{DA}=29\,cm$$
$$\overline{CA}=\overline{BA}$$
$$\overline{BC}=L_{\triangle BCD}-L_{\triangle BAD}=29-16=13\,cm.$$

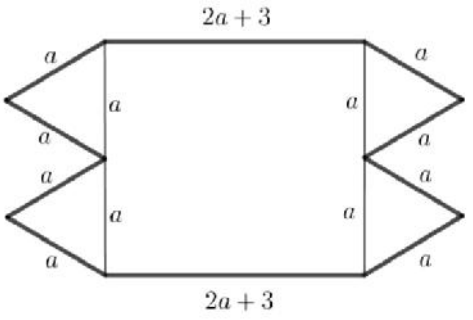
Значи, $\overline{BC}=13\,cm$.

11. Произволна точка во внатрешноста на квадрат е подеднакво оддалечена од двете спротивни страни и тоа $3x+1$ и $5x-7$ соодветно, мерени во cm. Определи го периметарот на квадратот.

Решение. Од условот на задачата имаме $5x-7=3x+1$, од каде $x=4$. Страната на квадратот е $5x-7+3x+1=26\ cm$, а периметарот изнесува $4\cdot 26=104\ cm$.

12. Андреј нацртал правоаголник чија една страна е подолга од другата за $3\,cm$. Потоа над двете пократки страни на правоаголникот нацртал по два рамностранa триаголници чии страни се еднакви (вид цртеж). Периметарот на добиената фигура е еднаков на $78\,cm$. Определи го периметарот на почетниот правоаголник.

Решение. Нека должината на страната на рамностраните триаголници е еднаква на a (цртеж десно). Тогаш должината на пократката страна на правоаголникот е еднаква на $2a$, а должината на подолгата страна на правоаголникот е еднаква на $2a+3$.

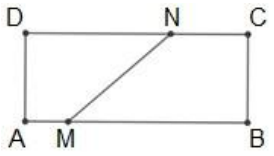


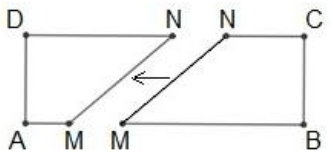
Периметарот на добиената фигура е $L = 2(2a + 3 + 4a) = 12a + 6$, па затоа $12a + 6 = 78$, од каде добиваме $12a = 72$, односно $a = 6\,cm$. Конечно, периметарот на правоаголникот е

$$L' = 2(2a + 2a + 3) = 8a + 6 = 8 \cdot 6 + 6 = 54\,cm.$$

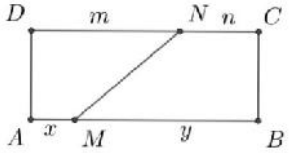
13. Правоаголник $ABCD$ со должини на страни $8\,cm$ и $5\,cm$ со отсечка MN е поделена на два четириаголника со еднакви периметри од по $20\,cm$. Определи ја должината на отсечката MN.

Решение. *Прв начин*. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на $2 \cdot (8 + 5) = 26\,cm$. Збирот на периметрите на двата четириаголника $AMND$ и $MBCN$ е еднаков на $2 \cdot 20 = 40\,cm$ и истиот се добива кога со периметарот на правоаголникот ќе се соберат две должини на отсечката MN, (цртеж десно). Оттука следува $26 + 2\overline{MN} = 40$, т.е. $\overline{MN} = (40 - 26) : 2 = 7\,cm$.





Втор начин. Нека $a = 8\,cm$ и $b = 5\,cm$. При ознаки како на цртежот десно, точни се равенствата



$$a = x + y = m + n,$$
$$L_{AMND} = x + \overline{MN} + m + b,$$
$$L_{MBCN} = y + b + n + \overline{MN},$$

па затоа

$$\begin{aligned} L_{AMND} + L_{MBCN} &= x + \overline{MN} + m + b + y + b + n + \overline{MN} \\ &= 2\overline{MN} + (x + y) + (m + n) + 2b \\ &= 2\overline{MN} + 2(a + b), \end{aligned}$$

од каде добиваме

$$20 + 20 = 2\overline{MN} + 2 \cdot (8 + 5), \text{ т.е. } \overline{MN} = (40 - 26) : 2 = 7\,cm.$$

14. Правоаголник и квадрат имаат еднакви периметри. Должината на страната на квадратот е $6\,cm$. Едната страна на правоаголникот е долга $4\,cm$. Колку е долга другата страна на правоаголникот?

Решение. Периметарот на квадратот е еднаков на $4 \cdot 6 = 24\,cm$. Нека должините на страните на правоаголникот се a и $b = 4\,cm$. Тогаш за

неговиот периметар добиваме $2a + 2 \cdot 4 = 24$, од каде наоѓаме $2a + 8 = 24$,т.е. $2a = 24 - 8 = 16$. Значи, $a = 16 : 2 = 8\ cm$.

15. Кога едната страна на правоаголникот ќе се зголеми за $48\ cm$, се добива квадрат со периметар $2008\ cm$. Определи ја должината на страната на квадратот и периметарот на почетниот правоаголник.
Решение. Должината на страната на квадратот е еднаква на $2008 : 4 = 502\ cm$. Периметарот на почетниот правоаголник е еднаков на $2008 - 2 \cdot 48 = 2008 - 96 = 1912\ cm$.

16. Кога едната страна на правоаголникот се зголеми за $8\ cm$, а другата се зголеми за $6\ cm$, се добива квадрат чиј периметар е три пати поголем од периметарот на почетниот правоаголник. Определи ја должината на страната на добиениот квадрат.
Решение. Ако со L го означиме периметарот на правоаголникот добиваме дека $L + 2(8 + 6) = 3L$, од каде наоѓаме $L = 14\ cm$. Според тоа, периметарот на квадратот е еднаков на $3 \cdot 14 = 42\ cm = 420\ mm$, па затоа должината на неговата страна е
$$420\ mm : 4 = 105\ mm = 10\ cm\ 5\ mm.$$

17. Надворешната страна на квадратна рамка е со должина $50\ cm$, а нејзината внатрешна површина има плоштина $1600\ cm^2$. Пресметај ја ширината на рамката.

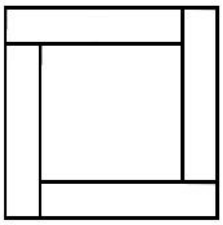
Решение. Бидејќи $40 \cdot 40 = 1600$, должината на внатрешната страна на рамката е $40\ cm$. Секоја надворешна страна на рамката е за две ширини на рамката подолга од соодветната внатрешна страна. Затоа ширината на рамката е $(50 - 40) : 2 = 5\ cm$.

18. Една рамка има секаде иста ширина (види цртеж). Вкупната должина на надворешниот раб на рамката е за $40\ cm$ поголема од вкупната должина на внатрешниот раб на рамката. Определи ја ширината на рамката.

Решение. Секој надворешна страна на рамката е за две ширина на

рамката подолга од соодветната внатрешна страна на рамката. Бидејќи рамката има по 4 внатрешни и надворешни страни, заклучуваме дека нејзината ширина ќе биде $40:(4\cdot 2)=40:8=5\,cm$.

19. Од четири еднакви (складни) правоаголници, секој со периметар 2012 сантиметри (мерните броеви на должините на страните се изразени во цели броеви сантиметри), направене е фигура како на цртежот десно. Ако периметарот на оваа фигура (збирот на периметрите на двата квадрати) е 8000 сантиметри, пресметај ги должините на страните на овие правоаголници.

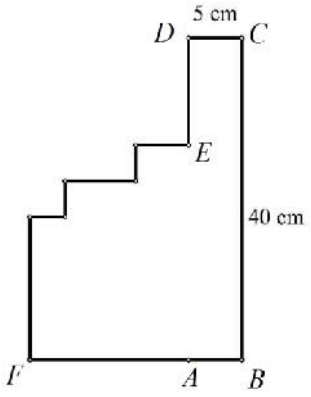


Решение. Нека a е должината на подолгата, а b е должината на пократката страна на правоаголниците. Тогаш периметарот на поголемиот квадрат е еднаков на $4a+4b$, а периметарот на помалиот квадрат е еднаков на $4a-4b$. Значи, периметарот на целата фигура е

$$4a+4b+4a-4b=8a,$$

па затоа $8a=8000$, т.е. $a=1000\,cm$ и $b=(2012-2\cdot 1000):2=6\,cm$

20. Ана почнала да црта правоаголник $ABCD$ почнувајќи од точката A. Ги нацртала отсечките AB, BC и CD. Цртајќи ја отсечката DA дошла до точката E и наместо отсечката нацртала седум отсечки во низа и така дошла до точката A, како што е прикажано на цртежот десно. Секоја отсечка која ја нацртала е нормална на претходната нацртана отсечка.

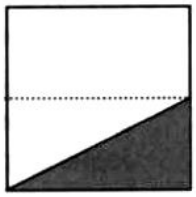


На цртежот се прикажани должините на две отсечки $\overline{BC}=40\,cm$ и $\overline{CD}=5\,cm$. Определи ја должината на отсечката FA ако периметарот на добиената фигура е $140\,cm$.

Решение. Со a да ја означиме должината на отсечката FA. Четириаголникот $ABCD$ е правоаголник, па затоа $\overline{AB}=5\,cm$. Да забележиме дека вкупната должина на сите четири отсечки кои Ана ги нацртала паралелно на отсечката BC е еднаква на $40\,cm$. Понатаму, збирот на трите отсечки кои ги нацртала по точката E и се паралелни на FA е

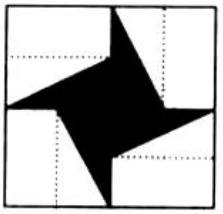
еднаков на дожината на отсечката FA, односно на a. Периметарот на добиената фигура е $140\,cm$, па затоа $a+5+40+5+40+a=140$, од каде добиваме $2a+90=140$. Значи, $2a=50$, т.е. $a=50:2=25\,cm$.

21. Квадрат со страна $8\,cm$ е поделен на два еднакви правоаголника. Потоа е обоен еден дел од квадратот. Определи ја плоштината на обоениот дел.



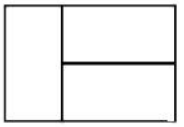
Решение. Плоштината на целиот квадрат е еднаква на $8\cdot 8=64\,cm^2$. Понатаму, квадратот е поделен на два еднакви правоаголника, па затоа плоштината на секој од двата правоаголника е еднаква на $64:2=32\,cm^2$. Сега, обоениот дел е еднаков на половина од едниот правоаголник, што значи дека неговата плоштина е еднаква на $32:2=16\,cm^2$.

22. Квадрат со страна $16\,cm$ е поделен на четири еднакви квадрати. Секој од овие квадрати е поделен на два еднакви правоаголника. Потоа е обоен по еден дел од некои од овие правоаголници, со што е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Определи ја плоштината на оваа фигура.

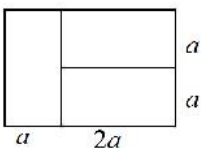


Решение. Има $4\cdot 2=8$ мали правоаголници и секој од нив има плоштина $(16\cdot 16):8=32\,cm^2$. Според тоа, секој од четирите правоаголни триаголници кои ја формираат обоената фигура има плоштина $32:2=16\,cm^2$. Конечно, плоштината на обоената фигура е еднаква на $16\cdot 4=64\,cm^2$.

23. Три мали правоаголници се наредени така што формираат нов правоаголник (цртеж десно). Периметарот на секој од малите правоаголници е $60\,cm$. Определи ја плоштината на големиот правоаголник.

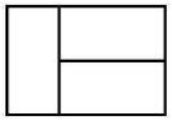


Решение. Ако пократката страна на правоаголникот е a, тогаш подолгата страна е $2a$. Значи, $a+2a+a+2a=60$, односно $a=10\,cm$. Според

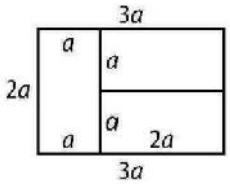


тоа, страните на пра-воаголникот се $20\,cm$ и $30\,cm$, а неговата плоштина е $600\,cm^2$.

24. Три мали складни правоаголници се наредени како на цртежот десно со што е добиен поголем правоаголник. Периметарот на поголемиот правоаголник е еднаков на $200\,cm$. Колкава е плоиштината на еден од малите правоаголници?

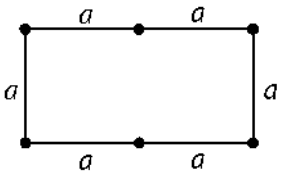


Решение. Ако пократката страна на малиот правоаголник има должина a, тогаш неговата поголема страна има должина $2a$. Значи, должините на страните на големиот правоаголник се $2a$ и $a+2a=3a$. Според тоа, $2(2a+3a)=200$, од каде добиваме $a=20\,cm$. Значи, должините на страните на еден мал правоаголник се $20\,cm$ и $40\,cm$, па затоа неговата плоштина е $20\cdot 40=800\,cm^2$.



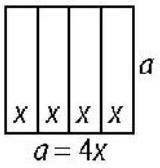
25. Периметарот на правоаголникот е $8\,dm\,4\,cm$. Пресметај ја плоштината на овој правоаголник ако едната негова страна е два пати подолга од другата.

Решение. Со a да ја означиме пократката страна на правоаголникот. Тогаш подолгата страна е $2a$, па затоа неговиот периметар е $L=6a$. Но, $L=8\,dm\,4\,cm=84\,cm$, па затоа $6a=84$, односно $a=14\,cm$. Според тоа, страните на правоаголникот се $14\,cm$ и $28\,cm$, па затоа неговата плоштина е $P=14\cdot 28=392\,cm^2$.



26. Квадрат со три прави е поделен на четири еднакви правоаголници. Периметарот на еден од така добиените правоаголници е еднаков на $30\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

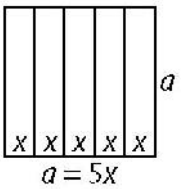
Решение. Ако со x ја означиме помалата страна на правоаголникот, тогаш неговата поголема страна е еднаква на $a=4x$. Значи, периметарот на еден од малите правоголници е еднаков на $2(x+4x)=10x$, па за-



тоа $10x = 30$, т.е. $x = 3\,cm$. Значи, должината на страната на квадратот е $a = 4 \cdot 3 = 12\,cm$, па затоа неговата плоштина е $P = 12 \cdot 12 = 144\,cm^2$.

27. Квадрат е поделен со четири прави на пет еднакви правоаголници. Периметарот на еден така добиен правоаголник е еднаков на $24\,cm$. Определи ја плоштината на овој квадрат.

Решение. Со x да ја означиме помалата страна на правоаголникот (цртеж десно). Тогаш периметарот на правоаголникот е

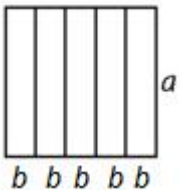


$$2(x + a) = 2(x + 5x) = 12x,$$

од каде добиваме $12x = 24$, т.е. $x = 2\,cm$. Значи, $a = 5 \cdot 2 = 10\,cm$, од каде следува $P = 10 \cdot 10 = 100\,cm^2$.

28. Квадрат е поделен на пет еднакви правоаголници со четири паралелни прави. Збирот на периметрите на тие правоаголници е 96 *cm*. Определи го периметарот на квадратот.

Решение. *Прв начин.* Ако должините на страните на петте еднакви делбени правоаголници ги означиме со a и b, тогаш збирот на периметрите на делбените правоа-голници ќе биде еднаков на $5 \cdot 2(a + b) = 10a + 10b$.



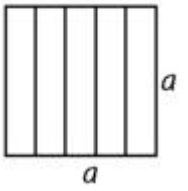
Понатаму, од условот на задачата следува дека $a = 5b$, па затоа $2a = 2 \cdot 5b = 10b$. Според тоа, збирот на периметрите на петте делбени правоаголници е еднаков на $10a + 10b = 10a + 2a = 12a$. Затоа

$$12a = 96, \text{ т.е. } a = 96 : 12 = 8\,cm.$$

Конечно, периметарот на почетниот квадрат е еднаков на

$$4a = 4 \cdot 8 = 32\,cm.$$

Втор начин. Од условот на задачата следува дека секоја од делбените отсечки по два пати учествува во збирот на периметрите на делбените правоа-голници (еднаш во периметарот на левиот и еднаш во периметарот на десниот правоаголник). Ако со a ја означиме должината на страната на квадратот, тогаш периметарот на квадратот е $L = 4a$, а збирот на периметрите на делбените правоаголници е

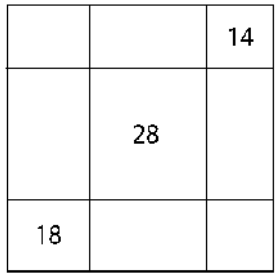


$$L' = L + 4 \cdot 2a = L + 2 \cdot 4a = L + 2L = 3L.$$

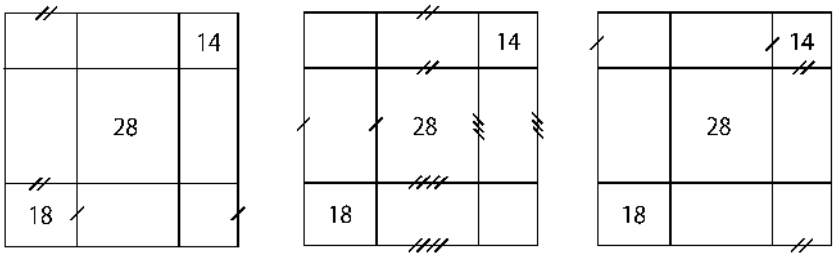
Затоа важи $3L = 96$, од каде добиваме $L = 32\ cm$.

Забелешка. Вториот начин на решавање може да се примени и кога делбените правоаголници не се еднакви, при што повторно се добива дека периметарот на почетниот квадрат е $L = 32\ cm$.

29. Квадратот даден на цртежот десно е поделен на девет правоаголника. Броевите запишани во трите правоаголници се еднакви на нивните паремитри. Определи ја должината на страната на дадениот квадрат и пресметај го неговиот периметар.



Решение. На долните цртежи се означени страниците на правоаголниците чии периметри се познати и кои се еднакви на некои делови од страниците на квадратот.



Од цртежите гледаме дека периметарот на квадратот е еднаков на збирот на периметрите на трите правоаголници, односно дека важи $L = 18 + 28 + 14 = 60$.

30. При заградување на плац со правоаголен облик се поставени по 5 столбови на пократките страни, а по 11 столбови на подолгите страни. Растојанието меѓу секои два соседни столба е $4\ m$. Определи ги должината на целата ограда и плоштината на плацот.

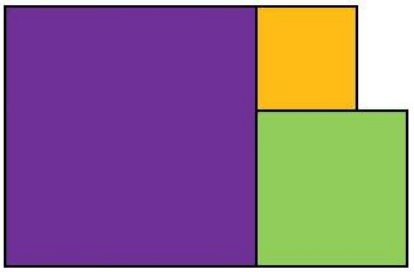
Решение. На почетокот и на крајот на секоја страна мора да има столба. Меѓу 5 столбови има 4 растојанија по $4\ m$, а меѓу 11 столбови има 10 растојанија по $4\ m$. Значи, должините на страните на плацот се $4 \cdot 4 = 16\ m$ и $4 \cdot 10 = 40\ m$. Според тоа, должината на оградата е $2 \cdot (16 + 40) = 112\ m$, а плоштината на плацот е $16 \cdot 40 = 640\ m^2$.

31. Во еден забавен парк околу површина со правоаголен облик се поста-

вени два реда жици со разнобојни светилки. Жицата е затегната на столбови кои се распоредени долж правоаголникот на растојание две метра. На подолгата страна на правоаголникот има 11 столбови, а на пократката има 6 столбови. Определи ја должината на жицата со сијалици и плоштината на праваоголникот.

Решение. На почетокот и на крајот на секоја страна мора да има по еден столб. Меѓу 11 столбови има 10 пати по 2 метра, што значи 20 метра. Меѓу 6 столбови има 5 пати по 2 метра, што значи 10 метра. Значи, правоаголникот има страни со должини 20 и 10 метра. Неговата плоштина е еднаква на $20 \cdot 10 = 200\, m^2$, а должината на жицата е $2 \cdot (2 \cdot 20 + 2 \cdot 10) = 120\, m$.

32. На цртежот десно се дадени три квадрати. Периметарот на жолтиот квадрат е $28\, cm$, а периметарот на зелениот квадрат е $44\, cm$. Пресметај го периметарот на целата фигура.



Решение. Должината на страната на жолтиот квадрат е $28 : 4 = 7\, cm$, а должината на страната на зелениот квадрат е $44 : 4 = 11\, cm$. Значи, должината на страната на лилјаковиот квадрат е $7 + 11 = 18\, cm$. Според тоа, периметарот на фигурата е:

$$L = 3 \cdot 18 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 7 + 11 - 7 = 94\, cm$$

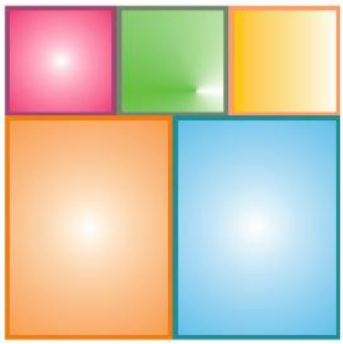
33. На цртежот десно периметарот на жолтиот квадрат е еднаков на $16\, cm$, а периметарот на зелениот квадрат е еднакв на $40\, cm$.Определи го периметарот на целата фигура.

Решение. Должината на страната на жолтиот квадрат е еднаква на $16 : 4 = 4\, cm$, а должината на страната на зелениот квадрат е еднаква на $40 : 4 = 10\, cm$. Според тоа, должината на страната на синиот квадрат е еднаква на $10 - 4 = 6\, cm$, а должината на страната на црвениот квадрат е еднаква на $10 + 6 = 16\, cm$. Според тоа, периметарот на дадената

фигура е

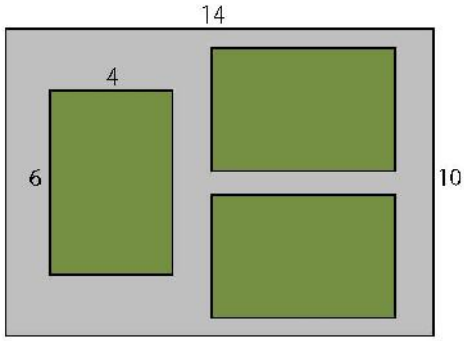
$$L = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 4 + 6 + (6 - 4) = 84\,cm.$$

34. На плажа 5 другарки ги ставиле крпите како на цртежот десно, со што формирале квадрат. Јована, Ивана и Катерина имаат еднакви крпи во форма на квадрат и секоја од овие крпи има периметар $320\,cm$. Ана и Јана имаат еднакви крпи во форма на правоаголник. Определи го периметарот на крпата на Ана.



Решение. Должината на страната на малите квадрати е еднаква на $320 : 4 = 80\,cm$. Значи, должината на страната на големиот квадрат е еднаква на $3 \cdot 80 = 240\,cm$. Според тоа, страните на правоаголниците, т.е. на крпата на Ана се $240 : 2 = 120\,cm$ и $240 - 80 = 160\,cm$. Значи, периметарот на крпата на Ана е $2 \cdot 120 + 2 \cdot 160 = 560\,cm$.

35. Зелените површини на малите паркови, кој е претставен на цртежот десно, се три површини со еднакви плоштини. Што е поголемо, плоштината на бетонските патеки околу зелените површини или плоштината на зелените површини? Должините се изразени во метри.

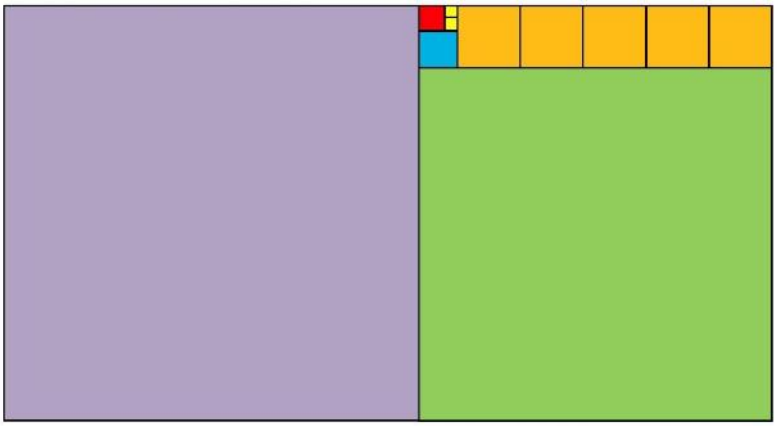


Решение. Вкупната плоштина на зелените површини е $3 \cdot (6 \cdot 4) = 72$. Според тоа, плоштината на бетонските патеки е $14 \cdot 10 - 72 = 68$. Значи, поголема е плоштината на зелените површини.

36. Правоаголник со плоштина $2013\,cm^2$ чија една страна е долга $33\,cm$, е поделен (паралелно на страните) на најмал број квадрати со исти или различни страни. На колку квадрати е поделен овој правоаголник?

Решение. Втората страна на правоаголникот е еднаква на $2013 : 33 =$

$61\,cm$. Најмалиот број квадрати се добива ако во секој чекор се зема најголемиот можен квадрат. На тој начин ја добиваме поделбата која содржи 11 квадрати (види цртеж).



37. Ако едната страна на правоаголникот се зголеми за $3\,cm$, а другата се намали за $2\,cm$, се добива квадрат со плоштина $81\,cm^2$. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

Решение. Нека должината на страната на добиениот квадрат е x. Тогаш $x \cdot x = 81$, па затоа $x = 9\,cm$. Според тоа, должините на страните на даденият правоаголник се $a = 9 - 3 = 6\,cm$ и $b = 9 + 2 = 11\,cm$. Конечно, плоштината на правоаголникот е $P = ab = 6 \cdot 11 = 66\,cm^2$, а неговиот периметар е $L = 2(a + b) = 2(6 + 11) = 34\,cm$.

38. Страната AB на правоаголникот $ABCD$ е за $2\,cm$ подолга од страната BC. Ако подолгата страна се зголеми за $1\,cm$, а пократката се зголеми за $3\,cm$, плоштината на новиот правоаголник ќе биде поголема од плоштината на правоаголникот $ABCD$ за $41\,cm^2$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ABCD$.

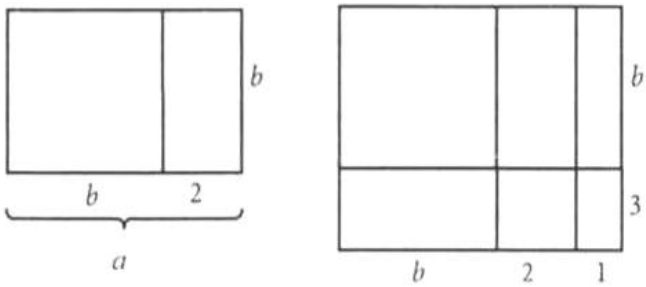
Решение. Нека $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$,при што $a = b + 2$. Плоштината на правоаголникот $ABCD$ е $P = b \cdot b + 2b$, а плоштината на новиот правоаголник е

$$P' = b \cdot b + 2 \cdot b + 1 \cdot b + 3 \cdot b + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2$$

(види цртеж). Затоа

$$b \cdot b + 2 \cdot b + 41 = b \cdot b + 2 \cdot b + 1 \cdot b + 3 \cdot b + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2,$$

$$41 = b + 3b + 6 + 3,$$
$$4b + 9 = 41m$$
$$b = 8\,cm.$$

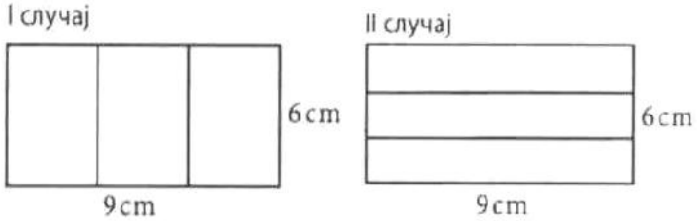


Според тоа, $a = b + 2 = 10\,cm$ и плоштината на правоаголникот $ABCD$ е $P = 10 \cdot 8 = 80\,cm^2$.

39. Правоаголникот со страни $6\,cm$ и $9\,cm$ подели го на три еднакви правоаголници. Определи ги сите можни решенија и најди кој правоаголник ќе има најголем периметар.

Решение. Поделбата може да се направи на два начини и тоа со делење на страната со должина $9\,cm$ и со делење на страната со должина $6\,cm$ (види цртеж).

Во првиот случај секој од добиените правоаголници има страни со должини $a = 9:3 = 3\,cm$ и $b = 6\,cm$. Притоа периметарот на секој делбен правоаголник е $2(a + b) = 18\,cm$.



Во вториот случај секој од добиените правоаголници има страни со должини $a = 9\,cm$ и $b = 6:3 = 2\,cm$. Притоа периметарот на секој делбен правоаголник е $2(a + b) = 22\,cm$.

Значи, правоаголникот во вториот случај има поголем периметар.

40. Од 40 исти квадрати со должина на страна $a = 1\,cm$ треба да се соста-

ви правоаголник, при што квадратите не се преклопуваат и меѓу нив нема празнини. Колку правоаголници може да се состават и кој од така добиените правоаголници има најмал периметар?

Решение. Бидејќи $40 = 40 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5$, можеме да составиме четири правоаголници и тоа:

1) $a = 40\,cm, b = 1\,cm$ и $L = 2(40+1) = 82\,cm$,

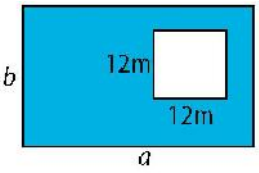
2) $a = 20\,cm, b = 2\,cm$ и $L = 2(20+2) = 44\,cm$,

3) $a = 10\,cm, b = 4\,cm$ и $L = 2(10+4) = 28\,cm$ и

4) $a = 8\,cm, b = 5\,cm$ и $L = 2(8+5) = 26\,cm$.

Значи, правоаголникот со страни $a = 8\,cm, b = 5\,cm$ има најмал периметар.

41. Плац во форма на правоаголник е заграден со жичана ограда. Столбовите на оградата се поставени по работ на плацот понувајќи од едно теме и се на растојание $5\,m$ еден од друг. Во секое теме на плацот има по еден столб. На плацот е изградена куќа чиј теме е во форма на квадрат со должина на страна $12\,m$. Колкава е плоштината на дворот ако за оградување на плацот се потрошени 14 столбови?



Решение. Бидејќи куќата е во форма на квадрат со страна $12\,m$ должините на страните на плацот се поголеми од $12\,m$, што значи на секоја страна на плацот има најмалку по 4 столбови. Понатаму, 4 столба се наоѓаат во аглите на плацот, па затоа остануваат 10 столбови да се распоредени во внатрешноста на страните. Тоа е можно само ако на подлгата страна има 5 столбови, а на пократката има 4 столбови. Според тоа, подолгата страна има 4 растојанија од по $5\,m$, т.е. таа е долга $20\,m$, а на пократката страна има 3 растојанија од по $5\,m$, т.е. таа е долга $15\,m$. Според тоа, плоштината на плацот е $20 \cdot 15 = 300\,m^2$, а како куќата зафаќа $12 \cdot 12 = 144\,m^2$, заклучуваме дека плоштината на дворот е $300 - 144 = 156\,m^2$.

42. Од правоаголник со должина $2013\,cm$ и ширина $1\,cm$ со сечење и составување без да има преклопувања е формиран најмал број квадрати чии страни се со должини, изразени во сантиметри, природни броеви.

Пресметај го збирот на периметрите на добиените квадрати.

Решение. Цифрата на единиците на производот на два исти броја може да биде 0, 1, 4, 9, 5 и 6. Бидејќи збирот на било кои два од овие шест броја нема цифра на единиците 3, заклучуваме дека бараниот број квадрати е поголем од два. Понатаму, од

$$43 \cdot 43 + 10 \cdot 10 + 8 \cdot 8 = 1849 + 100 + 64 = 2013$$

следува дека најмалиот број квадрати е три и збирот на периметрите на трите добиени квадрати е еднаков на

$$4 \cdot 43 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 8 = 172 + 40 + 32 = 244\, cm .$$

43. Шаховската табла е составена од 64 еднакви квадратни полиња. Плоштината на секое поле е еднаква на $9\, cm^2$. Пресметај го периметарот на целата табла.

Решение. Од $3 \cdot 3 = 9$ следува дека должината на страната на едно квадратно поле на таблата е еднаква на $3\, cm$. На секоја страна на таблата имаме по 8 полиња, па затоа должината на страната на таблата е $8 \cdot 3 = 24\, cm$. Конечно, периметарот на таблата е $4 \cdot 24 = 96\, cm$.

44. Ако сите полиња на шаховската табла се наредат едно до друго се добива правоаголник со периметар $260\, cm$. Определи ја плоштината на шаховската табла.

Решение. Правоаголникот е составен од 64 квадрати. Значи, периметарот на правоаголникот е составен од $2 + 2 \cdot 64 = 130$ страни на едно поле на шаховската табла. Според тоа, должината на едно поле на шаховската табла е $26 : 130 = 2\, cm$. Значи, плоштината на едно поле на шаховската табла е $2 \cdot 2 = 4\, cm^2$, па затоа плоштината на целата шаховска табла е $4 \cdot 64 = 256\, cm^2$.

45. При планирањето на изградбата ба еден стан, идните сопственици побарале квадратната соба со плоштина $16\, m^2$ да се замени со правоаголна, така што должината на едната страна да се зголеми за 20%, а должината на другата страна да се намали за 20%. Тие се надевале дека со оваа измена ќе ја зголемат плоштината на дневната соба. Дали сопствениците биле во право?

Решение. Бидејќи $16 = 4 \cdot 4$, квадратната соба со плштина $16\, m^2$ има

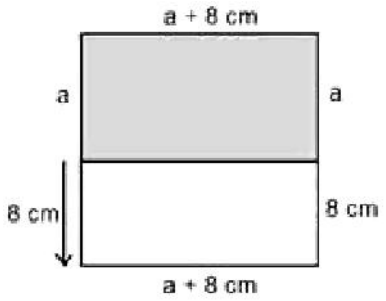
должина на страна $a = 4\,m = 400\,cm$. Страната која се зголемува за 20% ќе има должина $a + 0,2a = 400 + 80 = 480\,cm$. Страната која се намалува за 20% ќе има должина $a - 0,2a = 400 - 80 = 320\,cm$. Плоштината на правоаголната соба ќе биде $P = 480 \cdot 320 = 153600\,cm^2$. Бидејќи $16\,m^2 = 160000\,cm^2 > 153600\,cm^2$ заклучуваме дека сопствениците не биле во право.

46. Ако едната страна на правоаголникот се зголеми за 8 *cm*, се добива квадрат со периметар 6,8 *dm*. Колкав е периметарот на правоаголникот изразен во сантиметри?

Решение. *Прв начин.* Периметарот на квадратот е $6,8\,dm = 68\,cm$. Нека a е помалата страна на правоаголникот. Периметарот на квадратот е $L = 4(a+8)$, што значи дека

$$4(a+8) = 68, \text{ т.е. } a + 8 = 17,$$

од каде се добива $a = 9\,cm$. Според тоа



$$L' = 2(a + a + 8) = 2(9 + 17) = 52\,cm.$$

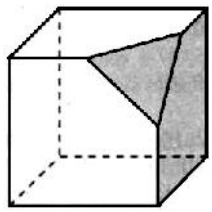
Втор начин. Периметарот на квадратот е $6,8\,dm = 68\,cm$. Квадратот со периметар 68 *cm* има страна $68 : 4 = 17\,cm$. Тоа е едната страна на правоаголникот, а другата страна е еднаква на $17 - 8 = 9\,cm$.

Конечно, периметарот на правоаголникот е

$$L' = 2(9 + 17) = 52\,cm.$$

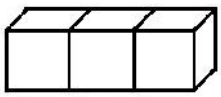
Трет начин. Периметарот на квадратот е $6,8\,dm = 68\,cm$. Кога едната страна на правоаголникот се зголемува за $8\,cm$, тогаш неговиот периметар се зголемува за $2 \cdot 8 = 16\,cm$. Значи, периметарот на правоаголникот е еднаков на $68 - 16 = 52\,cm$.

47. Во секое теме на коцката се сечат три раба. Ако ги земеме средините на тие рабои и го отсечеме делот од коцката како на цртежот десно и тоа го направиме за секое теме на коцката ќе добиеме ново тело. Колку темиња, рабови и ѕидови има вака добиеното тело?



Решение. Бидејќи при сечењето темињата на добиеното тело се средините на рабовите на коцката која има 12 рабови, добиваме дека добиеното тело има 12 темиња. Понатаму, од секое теме излегуваат по четири рабови, но како секој раб го броиме два пати (по еднаш од секое теме), добиваме дека добиеното тело има $(12 \cdot 4) : 2 = 24$ рабови. На крајот, при сечењето во секое теме бројот на ѕидовите се зголемува за еден, па како коцката има 6 ѕидови и 8 темиња, добиеното тело ќе има $6 + 8 = 14$ ѕидови.

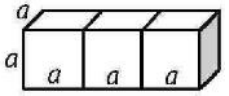
48. Три еднакви коцки се поставени една до друга (цртеж десно) и така е добиен квадар со плоштина $350\,cm^2$. Определи ја плоштината на едната коцка?



Решение. Плоштината на квадарот е составена од плоштината на 14 ѕидови на коцката. Значи, плоштината на еден ѕид на коцката е $350 : 14 = 25\,cm^2$. Плоштината на коцката е $25 \cdot 6 = 150\,cm^2$.

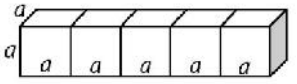
49. Кога квадар со плоштина $1400\,cm^2$ ќе се расече на три дела, се добиваат три еднакви коцки. Определи ја плоштината на една таква коцка.

Решение. На цртежот десно е прикажана поделбата на квадратот. Плоштината на квадарот е еднаква плоштината на 14 еднакви квадрати. Значи, ако со a ја означиме должината на страната на една од делбените коцки, добиваме $14a^2 = 1400$, односно $a^2 = 100\,cm^2$. Конечно, плоштината на една од делбените коцки е $P = 6a^2 = 600\,cm^2$.



50. Квадар со плоштина $1408\,cm^2$ е пресечен на пет дела, со што се добиени пет еднакви коцки. Определи ја плоштината на една таква коцка.

Решение. Според условот на задачата пресечениот квадар е прикажан на цртежот десно. Плоштината на квадарот е еднаква на плоштината на 22 квадрати со должина на страна a. Според тоа, $22a^2 = 1408\,cm^2$, од каде добиваме $a^2 = 1408 : 22\,cm^2$, што значи

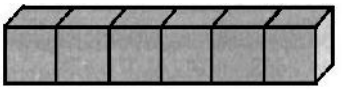


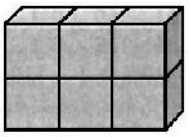
$a^2 = 64\,cm^2$. Конечно, плоштината на една од добиените коцки е $P = 6a^2 = 6 \cdot 64\,cm^2 = 384\,cm^2$.

51. Шест еднакви коцки се наредени така што е формиран квадар. Ако плоштината на една коцка е $24\,cm^2$, определи ја плоштината на добиениот квадар.

Решение. Плоштината на еден ѕид на коцката е $24 : 6 = 4\,cm^2$. Коцките можеме да ги наредиме на два начина.

а) Ако коцките се наредени како на цртежот десно, тогаш неговата плоштина е еднаква на плоштината на 26 ѕида на коцката, т.е.е еднаква на $26 \cdot 4 = 104\,cm^2$.





б) Ако коцките се наредени како на цртежот лево, тогаш неговата плоштина е еднаква на плоштината на 22 ѕида на коцката, т.е. е еднаква на $22 \cdot 4 = 88\,cm^2$.

52. Волуменот на квадарот кој е направен со поврзување на 4 еднакви коцки е $500\,cm^3$. Колкава е неговата плоштина?

Решение. Волуменот на една коцка е еднаков на $500 : 4 = 125\,cm^3$ и како $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ заклучуваме дека должината на работ на една коцка е $5\,cm$.

Ако коцките се ставени во еден ред, т.е. ако имаме квадар $4 \times 1 \times 1$, тогаш неговата површина е составена од 4 правоаголници со димензии $5\,cm$ и $20\,cm$ и 2 квадрати со страна $5\,cm$, па затоа плоштината е $4 \cdot 5 \cdot 20 + 2 \cdot 5 \cdot 5 = 450\,cm^2$.

Ако коцките се ставени во два ред, т.е. ако имаме квадар $2 \times 2 \times 1$, тогаш неговата површина е составена од 4 правоаголници со димензии $5\,cm$ и $10\,cm$ и 2 квадрати со страна $10\,cm$, па затоа плоштината е $4 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \cdot 10 = 400\,cm^2$.

53. Волуменот на квадарот кој е составен од 18 еднакви коцки е еднаков на $144\,cm^3$. Определи ја неговата плоштина.

Решение. Волуменот на една коцка е еднаков на $144 : 18 = 8\,cm^3$. Би-

дејќи $2\cdot 2\cdot 2=8$, добиваме дека работ на една коцка е $2\,cm$. Можни се следниве случаи:

1) Ако квадарот е од видот $18\times 1\times 1$, тогаш неговата плоштина е еднаква на $4\cdot 2\cdot 38+2\cdot 2\cdot 2=296\,cm^2$.
2) Ако квадарот е од видот $9\times 2\times 1$, тогаш неговата плоштина е еднаква на $2\cdot 18\cdot 4+2\cdot 4\cdot 2+2\cdot 18\cdot 2=232\,cm^2$.
3) Ако квадарот е од видот $6\times 3\times 1$, тогаш неговата плоштина е еднаква на $2\cdot 12\cdot 2+2\cdot 6\cdot 2+2\cdot 12\cdot 6=216\,cm^2$.
4) Ако квадарот е од видот $3\times 3\times 2$, тогаш неговата плоштина е еднаква на $2\cdot 6\cdot 6+2\cdot 6\cdot 4+2\cdot 4\cdot 6=168\,cm^2$.

54. Од еднакви коцки со должина на раб еднаква на $2\,cm$, со лепење на ѕидовите на соседните коцки е добиено телото прикажано на цртежот десно. Пресметај ги плоштината и волуменот на ова тело.

Решение. Волуменот на една коцка е

$$V'=2\cdot 2\cdot 2=8\,cm^3,$$

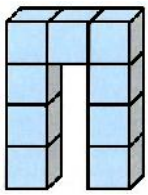
што значи дека волуменот на добиеното тело е

$$V=10\cdot V'=10\cdot 8=80\,cm^3.$$

Бидејќи при лепење на коцките секоја коцка има две соседни коцки кои имаат по еден заеднички ѕид, од секоја коцка по 2 ѕида нема да учествуваат во формирање на површината на телото. Значи, од секоја коцка точно по 4 ѕида учествуваат во формирање на површината на телото, па затоа

$$P=10\cdot 4\cdot 2\cdot 2=160\,cm^2.$$

55. Од девет еднакви коцки, со нивно лепење е направено телото прикажано на цртежот десно. Работ на коцките е $3\,cm$. Пресметај ги волуменот и плоштината на добиеното тело.



Решение. Јасно, волуменот на добиеното тело е еднаков на збирот на волумените на деветте коцки, т.е. тој е $V=9\cdot 3\cdot 3\cdot 3=243\,cm^3$.

Бидејќи секоја освен крајните две коцки има две соседни коцки со кои

има по еден соседен ѕид, а крајните две коцки имаат по еден соседен ѕид, добиваме дека плоштината на добиеното тело е

$$P = (7 \cdot 4 + 2 \cdot 5) \cdot 3 \cdot 3 = 342\ cm^2 .$$

56. Колку различни квадари може да се направат од 212 еднакви коцки со должина на раб $1\,cm$?

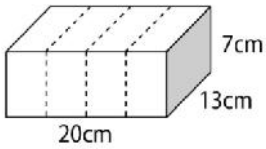
Решение. Имаме $212 = 2 \cdot 2 \cdot 53$. Квадарот го определуваат должините на неговите рабови, т.е. производите на бројот 212 на три различни множители. Значи, од 212 еднакви коцки со должина на раб $1\,cm$ може да се направат квадарите: $1 \times 1 \times 212, 1 \times 2 \times 106, 1 \times 4 \times 53, 2 \times 2 \times 53$.

57. Колку различни квадари може да се направат од 30 еднакви коцки со раб $1\,cm$?

Решение. Имаме, $30 = 1 \cdot 1 \cdot 30 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, па затоа од 30 коцки може да се направат 5 коцки и тоа коцките:

$$1 \times 1 \times 30,\ \ 1 \times 2 \times 15,\ \ 1 \times 3 \times 10,\ \ 1 \times 5 \times 6,\ \ 2 \times 3 \times 5 .$$

58. Обоен дрвен квадар чии рабиви се $20\,cm, 13\,cm$ и $7\,cm$ е расечен на четири еднакви квадари чии рабови се $5\,cm, 13\,cm$ и $7\,cm$. Колкава е вкупната плоштина на необоените делови?



Решение. За да од дадениот квадар се добијат четири еднакви кавадари со дадените димензии квадратот треба да се расече како на цртежот десно. Со секое сечење се добиваат по два правоаголници со страни $13\,cm$ и $7\,cm$. Според тоа, плоштината на необоените ѕидови ќе биде $3 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 7 = 546\ cm^2$.

59. Квадар од дрво со рабови $6\,cm, 8\,cm$ и $9\,cm$ е обоен со црвена боја. Кога овој квадар ќе го поделиме на три еднакви квадари со должини на рабови $6\,cm, 8\,cm$ и $3\,cm$, колкава е плоштината на необоените ѕидови.

Решение. Со секое сечење на дадениот квадар добиваме по два необоени правоаголниа со должини на страни $6\,cm$ и $8\,cm$. Со две сечење се добиваат четири правоаголници со должини на страни $6\,cm$ и $8\,cm$

и затоа плоштината на необоениот дел е еднаква на $4 \cdot 8 \cdot 6 = 192\ cm^2$.

60. Должините на рабовите на дрвен квадар се еднакви на $4\ cm, 6\ cm$ и $8\ cm$. Квадарот е обоен во сина боја. Потоа квадарот е пресечен на два еднакви квадари така што плоштината на необоените ѕдови на тие два квадари е $48\ cm^2$. Определи ги должините на рабовите на новодобиените квадари.

Решение. Со сечење на квадарот на два еднакви квадари добиваме два необоени ѕида со вкупна плоштина $48\ cm^2$. Според тоа, едниот ѕид е правоаголник со плоштина $48 : 2 = 24\ cm^2$. Рабовите на почетниот квадар се $4\ cm, 6\ cm$ и $8\ cm$, па се сечење на еден раб на половина од другите два раба се формира правоаголник со плоштина $24\ cm^2$. Значи, двата раба кои не се сечат се рабовите со должини $4\ cm, 6\ cm$, а пресечениот раб е работ од $8\ cm$. Конечно, должините на рабовите на добиените квадари се $4\ cm, 4\ cm$ и $6\ cm$.

61. Еден ѕид на квадарот е квадрат со плоштина $25\ dm^2$. Неговиот соседен ѕид има плоштина $5\ dm^2$. Пресметај го волуменот на овој квадар.

Решение. Бидејќи $25 = 5 \cdot 5$ два раба на квадарот се со должина $a = b = 5\ dm$. Понатаму, од $5 = 5 \cdot 1$ заклучуваме дека должината на третиот раб е $c = 1\ dm$. Конечно, волуменот на овој квадар е $V = abc = 25\ dm^3$

62. Квадар од дрво со должини на рабови $5\ cm, 6\ cm, 8\ cm$ е обоен со сина боја. Како треба да се расече овој квадар на четири еднакви квадари така што вкупната плоштина на необоените делови ќе биде најмала можна?

Решение. При првото расекување сакаме да добиеме два необоени ѕида со најмали можни плоштини. Затоа треба да расечеме на половина од работ со должина $8\ cm$. Така ќе добиеме два квадари со рабови $5\ cm, 6\ cm, 4\ cm$ и плоштина на необоените ѕидови еднаква на $2 \cdot 5 \cdot 6 = 60\ cm^2$. Сега, од секој од овие два квадари со исто расекување треба да добиеме по два квадари, но така што плоштините на новодо-

биените необоени ѕидови се најмали. Затоа треба да сечеме на половина од работ со должина $6\,cm$. Притоа ќе добиеме четири нови необоени ѕидови со должини на рабови $5\,cm, 4\,cm$, т.е. со вкупна плоштина $4\cdot 5\cdot 4 = 80\,cm^2$. Конечно, добивме четири еднакви квадари со најмала можна плоштина на необоените ѕидови која е еднаква на $80 + 60 = 140\,cm^2$.

63. Два ѕида на квадарот се квадрати со плоштина $144\,cm^2$. Секој од преостанатите четири ѕида има плоштина еднаква на $\frac{2}{3}$ од плоштината на ѕидот кој е квадрат. Определи го волуменот на овој квадар.
Решение. Бидејќи $144 = 12\cdot 12$ должината на рабовите на ѕидот кој е квадрат е $a = 12\,cm$. Плоштината на секој од другите четири ѕида на квадарот е еднаква на $(144:3)\cdot 2 = 48\cdot 2 = 96\,cm^2$. Тоа се правоаголници со една страна $a = 12\,cm$, па затоа другата нивна страна е $b = 96:12 = 8\,cm$. Конечно, волуменот на квадарот е
$$V = a\cdot a\cdot b = 12\cdot 12\cdot 8 = 1152\,cm^3.$$

64. Должините на рабовите на еден квадар се $5\,cm, 8\,cm$ и $10\,cm$. Сите ѕидови на квадарот се обоени со сина боја. Квадарот е пресечен два пати и се добиени четири еднакви квадари така што плоштината на необоените ѕидови на добиените четири квадари е еднаква на $180\,cm^2$. Определи ги должините на рабовите на добиените квадари.
Решение. Ѕидовите на квадарот имаат плоштини $5\cdot 8 = 40\,cm^2$, $5\cdot 10 = 50\,cm^2$ и $8\cdot 10 = 80\,cm^2$. При секое сечење се добиваат два необоени еднакви ѕидови чии плоштини се еднакви на плоштините на еден од ѕидовите. Сега, бидејќи $180 = 2\cdot 90 = 2\cdot(40+50) = 2\cdot 40 + 2\cdot 50$ заклучуваме дека добиените ѕидови се со плоштини $40\,cm^2$ и $50\,cm^2$. Тоа значи, дека при едното сечење е преполовен работ со должина $10\,cm$, а при другото сечење е преполовен работ со должина $8\,cm$. Значи, четирите квадари имаа рабови $5\,cm, 4\,cm$ и $5\,cm$.

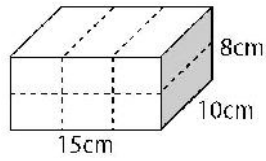
65. Дрвен квадар со должини на рабови $8\,cm, 12\,cm$ и $14\,cm$ е обен со цр-

вена боја. Потоа квадарот е расечен на шест еднакви квадари со должини на рабови $8\,cm, 4\,cm$ и $7\,cm$. Пресметај ја плоштината на необоените делови.

Решение. Прво квадарот го сечеме паралелно на sидовите чии рабови се со должини $8\,cm$ и $12\,cm$. Така добиваме два необоени правоаголници со вкупна плоштина $2\cdot 8\cdot 12 = 192\,cm^2$. Потоа квадарот го сечеме два пати паралелно на sидовите чии рабови се со должини $8\,cm$ и $14\,cm$. Така добиваме два пати по два необоеии правоаголници со вкупна плоштина $2\cdot 2\cdot 8\cdot 14 = 448\,cm^2$. Значи, вкупната плоштина на необоените делови е $192 + 448 = 640\,cm^2$.

66. Дрвен квадар со рабови $15\,cm, 10\,cm$ и $8\,cm$ е обоен со црвена боја, а потоа е расечен на шест еднакви квадари со рабови $5\,cm, 10\,cm$ и $4\,cm$. Колкава е вкупната плоштина на необоените sидови на новите квадари?

Решение. Бидејќи новодобиените квадари имаат по еден раб еднаков на $10\,cm$, овој раб од почетниот квадар не се сечат. Значи, се дели работ од $15\,cm$ на три дела и работ од $8\,cm$ на два дела (види цртеж). Така добиваме необоена површина која е формирана од четири правоаголници со страни $10\,cm$ и $8\,cm$, и два правоаголници со страни $15\,cm$ и $10\,cm$. Според тоа, вкупната необоена површина има плоштина



$$2\cdot 15\cdot 10 + 4\cdot 10\cdot 8 = 620\,cm^2.$$

67. Вкупната должина на сите рабови на еден квадар е $448\,cm$. Периметарот на еден негов sид, чиј еден раб е два пати подолг од другиот, е $126\,cm$. Определи ја плоштината на овој квадар.

Решение. Ако рабовите на квадарот се a, b, c, тогаш од условот на задачата следува $4(a+b+c) = 448$, $2(a+b) = 126$ и $2a = b$. Бидејќи $a+b+c = 112$ и $a+b = 63$, добиваме

$$c = 112 - (a+b) = 112 - 63 = 49\,cm.$$

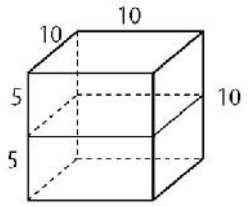
Од $a+b = 63$ и $2a = b$, добиваме $3a = 63$, т.е. $a = 21\,cm$ и $b = 42\,cm$. Конечно, за плоштината на квадарот добиваме

$$P = 2(ab + bc + ca) = 7938\,cm^2 .$$

68. Вкупната должина на рабовите на еден квадар е $28\,cm$. Едниот ѕид на тој квадар е квадрат. Должината на страната на тој ѕид изразена во сантиметри е природен број. Определи ја плоштината на овој квадар.
Решение. Нека рабовите на квадарот се a, b и c, при што важи $a = b$. Тогаш $4(a + b + c) = 28$, односно $2a + c = 7$. Можни се следниве три случаи:
1) $a = 1\,cm, c = 5\,cm$ и тогаш $b = 1\,cm$, па $P = 2(ab + bc + ca) = 30\,cm^2$.
2) $a = 2\,cm, c = 3\,cm$ и тогаш $b = 2\,cm$, па $P = 2(ab + bc + ca) = 32\,cm^2$.
3) $a = 3\,cm, c = 1\,cm$ и тогаш $b = 3\,cm$, па $P = 2(ab + bc + ca) = 30\,cm^2$.

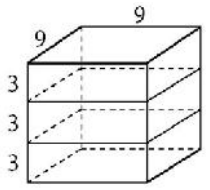
69. Квадар од дрво со рабови $16\,cm, 18\,cm$ и $9\,cm$ е обоен со сина боја. Кога овој квадар ќе го поделиме на четири еднакви квадари со должини на рабови $4\,cm, 18\,cm$ и $9\,cm$, колкава е вкупната плоштина на необоените делови?
Решение. Од даденият квадар со секое сечење добиваме два нови необоени правоаголника со должини на страните $18\,cm$ и $9\,cm$. Квадарот на четири еднакви делови го делиме со 3 сечења, што значи дека необоената површина која се добива е еднаква на $2 \cdot 3$ правоаголници со страни $18\,cm$ и $9\,cm$ и има плоштина $2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 18 = 972\,cm^2$.

70. Два складни квадари формираат коцка. Определи ја плоштината на оваа коцка, ако пократкиот раб на квадарот е $5\,cm$.
Решение. За да од два еднакви квадари може да се состави коцка, мора по два ѕида од секој од овие квадари да се еднакви квадрати. Овие квадрати се истовремено два ѕида на коцката. Останатите четири ѕида на квадарите мора да се исти правоаголници. Едната страна на секој од овие правоаголници е раб на коцката, а другата страна е еднаква на половина од работ на коцката. Ако пократкиот раб на квадарите е $5\,cm$, тоа значи дека неговиот подолг раб е $10\,cm$. Значи, работ на коцката е $10\,cm$, па нејзината плоштина е $P = 6 \cdot 10 \cdot 10 = 600\,cm^2$.



71. Три складни квадари формираат коцка. Определи ја плоштината на таа коцка ако пократкиот раб на еден квадар е $3\,cm$.

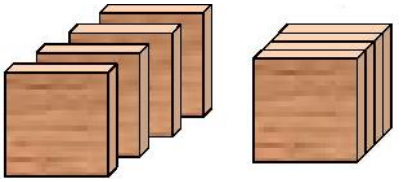
Решение. За да од три еднакви квадари може да се состави коцка, мора по два сида од секој од овие квадари да се еднакви квадрати. Овие квадрати се истовремено два сида на коцката. Останатите четири сида на квадарите мора да се исти правоаголници. Едната страна на секој од овие правоаголници е раб на коцката, а другата страна е еднаква на третина од работ на коцката. Ако пократкиот раб на квадарите е $3\,cm$, тоа значи дека неговиот подолг раб е $9\,cm$. Значи, работ на коцката е $9\,cm$, па нејзината плоштина е $P = 6 \cdot 9 \cdot 9 = 486\,cm^2$.



72. Со лепење на 4 еднакви дрвени квадари со рабови $16\,cm, 16\,cm$ и $4\,cm$ е составена коцка. Пресметај ја плоштината на оваа коцка.

Решение. Бидејќи $4 \cdot 4 = 16\,cm$, коцката која ја добиваме со лепење на четирите квадари има раб со должина $16\,cm$ (цртеж десно). Според тоа, нејзината плоштина е

$$P = 6 \cdot 16 \cdot 16 = 1536\,cm^2.$$



73. Со лепење на шест еднакви дрвени квадари со рабови $12\,cm$, $6\,cm$ и $4\,cm$ е составена коцка. Пресметај ја плоштината на оваа коцка.

Решение. *Прв начин*. Волуменот на еден квадар е еднаков на $12 \cdot 6 \cdot 4\,cm^3$. Според тоа, волуменот на добиената коцка е еднаков на $6 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 4 = 12 \cdot (2 \cdot 6) \cdot (3 \cdot 4) = 12 \cdot 12 \cdot 12\,cm^3$. Значи, работ на коцката е еднаков на $12\,cm$, па затоа нејзината плоштина е еднаква на $6 \cdot 12 \cdot 12 = 864\,cm^2$.

Втор начин. Лепиме два пати по три квадари со сидовите со страни (рабови) $12\,cm$ и $6\,cm$, со што добиваме добиваме два квадари со рабови $12\,cm, 12\,cm$ и $6\,cm$. Сега, со лепење на овие два квадари добиваме коцка со раб $12\,cm$. Нејзината плоштина е еднаква на $6 \cdot 12 \cdot 12 = 864\,cm^2$.

74. Мајсторот Ненад прави аквариум од стакло (без поклопец) со димензии $30\,cm, 35\,cm$ и $50\,cm$. Колку најмалку стакло му е потребно на Ненад за да го направи аквауиумот?

Решение. Најмалку стакло ќе биде потребно ако отворот е еден од двата сида со најголема плоштина. Според тоа, на Ненад најмалку му е потребно

$$P = 2\cdot 30\cdot 50 + 2\cdot 30\cdot 35 + 35\cdot 50 = 3000 + 2100 + 1750 = 6850\ cm^2$$

стакло.

75. Кутија во форма на квадар е без поклопец. Еден сид на кутијата има рабови со должини $60\,cm$ и $50\,cm$, а друг сид со рабови со должини $60\,cm$ и $40\,cm$.

а) Определи ги должините рабовите на третиот сид на кутијата.

б) Определи ја плоштината на кутијата ако недостасува сид чија плоштина е најмала.

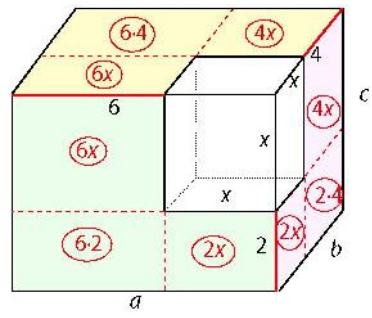
Решение. а) Должините на рабовите на кутијата се $60\,cm$, $50\,cm$ и $40\,cm$. Според тоа, должините на рабовите на третиот сид се $50\,cm$ и $40\,cm$.

б) Јасно, недостасува сид со должини на рабови $50\,cm$ и $40\,cm$. Според тоа, плоштината на кутијата е

$$P = 2\cdot 60\cdot 50 + 2\cdot 60\cdot 40 + 50\cdot 40 = 10800\ cm^2.$$

76. Ако едниот раб на квадарот се намали за $2\,cm$, другиот за $4\,cm$, а третиот за $6\,cm$ се добива коцка со плоштина еднаква на $568\,cm^2$ помала од плоштината на квадарот. Пресметај ги плоштините на коцката и квадарот.

Решение. Нека a, b, c се рабовите на квадарот и x е работ на коцката. Ако едниот раб на квадарот се намали за $2\,cm$, другиот за $4\,cm$, а третиот за $6\,cm$, тогаш плоштината на едниот сид на квадарот ќе се намали за $2x + 2\cdot 4 + 4x = 6x + 8$, плоштината на другиот сид ќе се намали за



$4x+6\cdot 4+6x=10x+24$ и плоштината на третиот ѕид ќе се намали за $6x+6\cdot 2+2x=8x+12$, види цртеж. Оттука следува, дека плоштината на целиот квадар ќе се намали за

$$2(6x+8+10x+24+8x+12)=48x+88.$$

Значи, $48x+88=568$, од каде добиваме $x=10\,cm$. Сега должините на рабовите на квадратот се еднакви на $12\,cm, 14\,cm, 16$.

Значи, плоштината на коцката е $P'=6\cdot 10\cdot 10=600\,cm^2$, а плоштината на квадарот е $P'=2(12\cdot 14+14\cdot 16+16\cdot 12)=1168\,cm^2$.

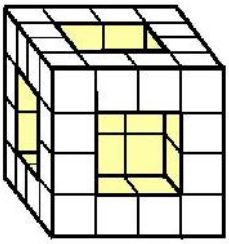
77. Ако едниот раб на коцката се зголеми за $1\,cm$, другиот за $2\,cm$ и третиот за $3\,cm$ се добива квадар чија плоштина е за $262\,cm^2$ поголема од плоштината на коцката. Пресметај ги плоштините на коцката и квадарот.

Решение. Нека работ на коцката е x. Ако едниот раб на коцката се зголеми за $1\,cm$, другиот за $2\,cm$ и третиот за $3\,cm$, тогаш плоштината на еден ѕид на коцката ќе се зголеми за $1\cdot x+1\cdot 3+3\cdot x=4x+3$, плоштината на другиот ѕид ќе се зголеми за $2\cdot x+2\cdot 1+1\cdot x=3x+2$ и плоштината на третиот ѕид ќе се зголеми за $3\cdot x+2\cdot 3+2\cdot x=5x+6$. Значи, плоштината на целата коцка ќе се зголеми за

$$2\cdot(4x+3+3x+2+5x+6)=2\cdot(12x+11)=24x+22.$$

Значи, $24x+22=262$, од каде добиваме $24x=240$, т.е. $x=10\,cm$. Значи, плоштината на коцката е $P=6\cdot 10\cdot 10=600\,cm^2$. Плоштината на квадарот е $P'=P+262=862\,cm^2$.

78. Плоштината на една коцка е еднаква на $96\,cm^2$. Од 40 такви еднакви коцки е составено тело прикажано на цртежот десно. Имено, прво од 64 коцки е направена голема коцка, а потоа на секој ѕид од средината се извадени по 4 коцки. Определи ја плоштината на вака добиеното тело.



Решение. *Прв начин*. Ако плоштината на една коцка е $96\,cm^2$, тогаш плоштината на еден нејзин ѕид е еднаква на $96:6=16\,cm^2$. На секоја од шесте страни на добиеното тело имаме по

$4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 24$ квадрати еднакви на еден ѕид на малата коцка. Значи, плоштината на добиеното тело е $6 \cdot 24 \cdot 16 = 2304\, cm^2$.

Втор начин. Ако плоштината на една коцка е $96\, cm^2$, тогаш плоштината на еден нејзин ѕид е еднаква на $96 : 6 = 16\, cm^2$, а нејзиниот раб е еднаков на $4\, cm$. Според тоа, должината на работ на големата коцка е $4 \cdot 4 = 16\, cm$, па затоа нејзината плоштина е $6 \cdot 16 \cdot 16 = 1536\, cm^2$. Бидејќи од средината на секој ѕид се извадени по 4 мали коцки, плоштината се зголемила за $6 \cdot 8 \cdot 16 = 768\, cm^2$. Конечно, плоштината на добиеното тело се $1536 + 768 = 2304\, cm^2$.

4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Меѓу петте зборови

   АЛКА, БРОД, ВРЕМЕПЛОВ, ГРУГ, КРАК

   четири задоволуваат некоја законитост, а еден збор не ја задоволува таа законитост, т.е. е прекуброен. Кој е тој збор?

   Решение. Меѓу дадените зборови зборот АЛКА е единствениот кој почнува со самогласка, зборот БРОД е единствен кај кој првата и последната буква се различни, зборот ВРЕМЕПЛОВ е единствен кај кој бројот на буквите е различен од 4, зборот ГРУГ е единствеиот кој во македонскиот јазик нема никакво значење, а зборот КРАК е единствениот во кој е нарушен азбучниот редослед на првте две букви.

   Според тоа, задачата има пет решенија, т.е. за секој збор постои логично објаснување зошто баш тој збор е прекуброен.

2. Димитар изјавил: „Завчера се уште немав 11 години, а следната година ќе наполнам 13 години.“ Дали оваа изјава може да е вистинита?

   Решение. Да. Димитар на 31. декември наполнил 11 години, а изјавата ја дал следниот ден на 1. јануари.

3. Седат Марко и Илија, Едно од децата вели: „Јас сум Марко.“ Другото дете вели: „Јас сум Илија.“ Познато е дека барем еден од нив лаже. Кое од двете деца е Марко, а кое е Илија?

   Решение. Да претпоставиме дека едното дете кажало вистина. Тогаш тоа дете се вика токму како што кажува. Но, тогаш другото дете се вика како што кажува, што значи дека и тоа кажало вистина. Но, според претпоставката барем едното дете лаже, па затоа и двете деца лажат и секој себе се нарекува со името на другиот.

4. Пред почетокот на шаховски турнир секој учесник за себе прогнозирал кое место ќе го освои. Михајло прогнозирал дека ќе го освои последното место. По завршувањето на турнирот се покажало дека сите, се разбира освен Михајло, освоиле полошо место отколку што прогнозирале. Притоа немало двајца учесници кои освоиле ист број поени, што значи дека немало поделба на местата. Кое место го освоил Михајло?

Решение. Бидејќи сите освен Михајло освоиле полошо место отколку што за себе прогнозирале никој од нив не го освоил првото место. Тоа значи дека Михајло го освоил првото место.

5. Во еден извештај од шаховски турнир во списанието Шах-мат е објавен следниов распоред за пласман на натпреварувачките:
   1) Севда Борисовска,
   2) Ангела Максимоска,
   3) Наташа Маркоска.

   Во следниот број е извршена исправка. Констатирано е дека ниту едно име ниту презиме не соодветствува на дадениот распоред, а исто така ниту едно име не соодветствува на напишаното презиме. Се знае само дека прва била шахистката која се викала Ангела. Кој е точниот редослед на пласманот на шахистките?

   Решение. На прво место е Ангела. Таа не може да е Борисовска, бидејќи според условот Борисовска не е прва. Таа не е ниту Максимоска, бидејќи тоа не соодвествува на името. Значи, Ангела се презива Маркоска, т.е. прва е Ангела Маркоска. Втора е или Севда или Наташа. Шахистката на второто место не е Маркоска, а не е ниту Максимоска, што значи дека шахистката која е втора е Борисовска. Но, Борисовска не е Севда, што значи дека втора е Наташа Борисовска, а трета е Севда Максимовска.

6. Меѓу пет момчиња се водел ваков разговор.
   Ацо: *Јас знам да ја решам оваа задача*.
   Борис на Ацо: *Не знаеш*.
   Владимир на Борис: *Не си во право*.
   Гаврил на Владимир: *Ти не си во право*.
   Драган: *Гаврил лаже*.
   Познато е дека повеќе од половината деца рекле вистина. Дали Ацо знае да ја реши задачата?

   Решение. Да претпоставиме дека Ацо не знае да ја реши задачата. Тогаш Ацо излагал, Борис кажал вистина, Владимир излагал, Гаврил рекол вистина и Драган излагал. Значи повеќето деца излагале, што противречи на условот на задачата. Според тоа, Ацо кажал вистина и тој знае да ја реши задачата. Во случајов Ацо, Владимир и Драган говореле виситина, а Борис и Гаврил лажеле.

7. Една година во месец јануари имало четири понеделници и четири петоци. Во кој ден бил 1. јануари?
   Решение. Првиот понеделник не може да биде пред четврти јануари, бидејќи во тој случај ќе имаме пет понеделници. Исто така, ниту првиот петок не може да биде пред четврти јануари, бидејќи во тој случај ќе имаме пет петоци. Двата услови се задоволени само ако првиот ден во месецот е во вторник.

8. Во една година имало пет саботи во месецот мај. Кој од следниве денови не можел да се појави пет пати во тој месец:
   а) среда, б) четврток, в) петок, г) недела, д) понеделник
   Решение. Месецот мај има 31 ден, што значи четири полни седмици и уште три дена. Тоа значи дека пет пати се повторуваат деновите кои се по 28-ми мај, а тоа се 29, 30 и 31 мај. Сите можности се: (сабота 29, недела 30, понеделник 31) или (петок 29, сабота 30, недела 31) или (четврток 29, петок 30, сабота 31). Значи, сигурно средата не може да се појави пет пати во текот на тој месец.

9. Една година имало пет среди во октомври. Кој од следниве денови не може да се појави пет пати во тој месец:
   а) понеделник, б) вторник, в) четврток, г) петок, д) сабота?
   Решение. Месецот октомври има 31 ден, што значи четири цели седмици и уште три дена. Тоа значи дека пет пати може да се појават деновите кои се по 28-ти октомври (29., 30. и 31. октомври). Сите можности се: (среда 29, четврток 30, петок 31) или (вторник 29, среда 30, четврток 31) или (понеделник 29, вторник 30, среда 31). Значи, од наведените денови сигурно само саботата не се јавува пет пати во овој месец.

10. Шест последователни месеци мај, јуни, јули, август, септември и октомври се такви што збирот на деновите во првите три месеци е еднаков на збирот на деновите во последните три месеци (по 92 дена). Колку има уште последователни шест месеци со истото својство?
    Решение. Покрај дадените месеци ако февруари не е во престапна година постојат уште три групи последователни месеци кои го задоволуваат условот:
    1) март (31), април (30), мај (31), јуни (30), јули (31), август (31),
    2) јули (31), август (31), септември (30), октомври (31), ноември (30),

декември (31),

3) август (31), септември (30), октомври (31), ноември (30), декември (31), јануари (31),

а ако февруари е во престапна година, тогаш имаме уште две групи од по шест месеци кои го задоволуваат условот:

4) септември (30), октомври (31), ноември (30), декември (31), јануари (31), февруари (29),
5) јануари (31), февруари (29), март (31), април (30), мај (31), јуни (30).

11. Дали може месеците да се поделат во две групи, по 6 последователни, така што во секоја група ќе има еднаков број денови?

Решение. За да месеците се поделат во две групи со еднаков број денови годината мора да има парен број денови, што значи дека таа мора да е престапна, т.е. месецот февруари да има 29 деннови. Тогаш годината има 366 денови. Можни се две поделби на годината и тоа:

Прв начин:

Прва група: април, мај, јуни, јули, август и септември,

Втора група: октомври, ноември, декември, јануари, февруари и март,

Втор начин:

Прва група: јуни, јули, август, септември, октомври и ноември,

Втора група: декември, јануари, февруари, март, април и мај.

12. Тројца пријатели сакаат да поделат 7 полни, 7 наполнети до половина чаши лимунада и 7 празни чаши така што секој ќе добие еднаков број чаши и исто количество лимунада. Како тоа може да го направат, а притоа да нема претурање на лимунада од една во друга чаша?

Решение. Секој од пријателите треба да добие по 7 чаши и

$$(7+\frac{7}{2}):3=\frac{21}{2}:3=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$$

чаши лимонада. Не сметајќи го редоследот на пријателите можни се две различни поделби.

	Полни чаши	Наполнети до половина	Празни чаши
I	3	1	3
II	3	1	3
III	1	5	1

	Полни чаши	Наполнети до половина	Празни чаши
I	2	3	2
II	2	3	2
III	3	2	3

13. Горјан на полицата има 3 различни пара чевли. Ако без да гледа, од полицата зема еден по еден чевел, колку најмалку чевли мора да земе, за да биде сигурен дека извадил еден пар соодветни чевли?
Решение. Ако извади три чевли, тогаш може да се случи секоја чевел да е од различен пар. Но, ако извади четири чевли, тогаш бидејќи има три пара чевли, сигурно ќе има две чевли од ист пар.

14. Во платнена вреќичка се наоѓаат 4 црвени, 5 сини и 6 бели топчиња. Матеј без да гледа вади топчиња од кутијата. Колку топчиња мора да извади за да биде сигурен дека извадил најмалку по едно топче од секоја боја?
Решение. Ако Матеј извади 11 топчиња, може да се случи да и извади сите сини и сите бели топчиња и како $5+6=11$, нема да има црвено топче. Но, ако извади 12 ропчиња, тогаш сигурно ќе има топче од секоја боја.

15. Во платнена вреќа има по пет црвени, сини и бели топчиња. Лерка без да гледа вади топчиња од вреќата. Колку топчиња треба да извади за да биде сигурна дека извадила 5 топчиња од една боја?
Решение. Ако Лерка извади 12 топчиња, тогаш бидејќи $12=3\cdot 4$ може да се случи од секоја од трите бои да се извадени по 4 топчиња, т.е. да немаме 5 топчиња од една боја. Но, ако се извадени 13 топчиња, бидејќи $13=3\cdot 4+1$, сигурно ќе имаме 5 топчиња од една боја.

16. Во сад се наоѓаат 42 бомбони и тоа 12 чоколадн, 14 перминт и 16 овошни бомбони. Сите бомбони се со иста форма и се завиткани во иста заштитна хартија така што со допир не може да се разликуваат. Кој е најмалиот број бомбони што треба да ги земеме за да сме сигурни дека сме зеле до секој вид по една бомбона?
Решение. Ако извлечеме 30 бомбони може да се случи тоа да се 16 овошни бомбони и 14 бомбон перминт, па така ќе немаме бомбони од исте три вида. Но, ако извлечеме 31 бомбона, тогаш сигурно ќе имаме најмалку по 1 бомбона од секој вид.

17. Андреј имал три еднакви пара волнени и три еднакви пара кожни ракавици. Пред тргнување на училиште Андреј, без да гледа од фиоката вади една по една ракавица. Колку ракавици треба да извади Андреј за да е сигурен дека извадил еден пар соодветни ракавици?
Решение. Ако Андреј извади 6 ракавици, може да се случи да извади 3 леви волнени и 3 леви кожени ракавици (можни се и други комбинации при кои нема да има пар соодветни ракавици). Но, ако извади 7 ракавици, тогаш меѓу нив ќе има или 4 волнени и 3 кожени, или 3 волнени и 4 кожени ракавици. Меѓу четирите ракавици од истиот вид може да има најмногу 3 леви ракавици, па затоа ќе има барем една десна, односно ќе има пар соодветни ракавици од тој вид.

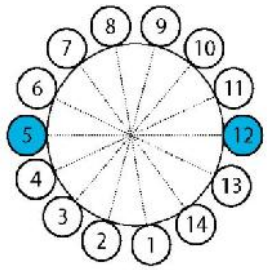
18. Дали може часовникот да се подели на четири делови така што збирот на броевите во секој дел да е еднаков на 15?
Решение. Бараната поделба е можна. Една поделба е прикажана на цртежот десно. Обиди се да најдеш друга поделба која ги задоволува условите на задачата.

19. На колку начини сума од 100 денари може да се исплати со монети од 2 и 5 денари?
Решение. Со монетата од 2 денари може да бидат исплатени само пари суми денари. Сега, разликата на бројот 100 и било кој парен број е парен број. Затоа остатокот за исплата со монетата од 5 денари исто така е парен. Според тоа, со монетите од 5 денари може да бидат исплатени само сумите 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и 100 денари. Тоа се 11 суми, што значи дека сумата од 100 денари со монети од 2 и 5 денари може да се исплати на 11 начини.

20. Јане има два песочни часовника. Во првиот песекот истекува од едниот во другиот дел за 7 минути, а во вториот за 4 минути. Како Јане со помош на овие два часовника ќе измери време од:
а) 60 минути, б) 10 минути.
Решение. а) Бидејќи $8 \cdot 7 + 4 = 60$ Јане 8 пати ќе го заврти првиот часовник, а потоа еднаш вториот часовник.
б) Имаме $10 = (7 - 4) + 7$. Затоа Јане двата часовника ќе ги пушти истовремено. Кога вториот ќе истече, во првиот има песок уште за 3

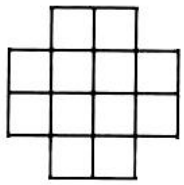
минути. Затоа сега првиот ќе го заврти и од тој момент со него ќе измери 3 минути, по што повторно ќе го заврти првиот часовник и кога тој ќе истеќе поминале уште 7 минути, што значи поминале $3+7=10$ минути.

21. Седиштата на вртелешката се означени со броевите 1, 2, 3, ... Ангел и Олгица седат на спротивните страни на вртелешката. Ангел седи на седиштето со број 12, а Олгица на седиштето со број 5. Колку седишта има вртелешката?



Решение. Од седиштето со број 5 до седиштето со број 12 има уште 6 седишта. Бидејќи седиштата со броевите 5 и 12 се едно спроти друго, од двете страни има по 6 седишта. Според тоа, заедно со двете седишта на кои седат Ангел и Олгица иммем $6+6+2=14$ седишта.

22. Во квадратчињата на фигурата прикажана на цртежот десно запиши ги првите дванаесет природни броеви така што било кои два последователн броја нема да се соседни ниту водорамно, ниту вертикално, ниту дијагонално.



Решение. Постојат повеќе распореди кои ги задоволуваат условите на задачата. Еден таков распоред е даден на цртежот десно. Обиди се користејќи го истиот да добиеш уште неколку распореди кои ги задоволуваат условите на задачата.

	8	10	
2	6	1	7
4	11	3	12
	9	5	

23. Марко ги распоредил броевите 1, 2, ..., 8 во темињата на една коцка. Кога ги пресметал збировите добиени по секој ѕид, забележал дека сите збирови се еднакви.

а) Колку изнесува секој таков збир?

б) Најди едно распоредување на броевите 1, 2, ..., 8 во темињата на коцка кое ја го има саканото својство.

Решение. а) Во секое теме од коцката се спојуваат три ѕида, а коцката има вкупно шест ѕидови. Тоа значи дека имаме шест еднакви збирови и секој број се јавува во вкупниот збир по три пати. Ако бараниот збир го означиме со S, тогаш

$$6S = 3(1+2+\ldots+8) \ .$$

Оттука $S = 18$.

б) На пример, во четирите темиња од долната основа на коцка запиши ги броевите 1, 8, 2, 7 (во некој кружен редослед), а во соодветните темиња од горната основа запиши ги броевите 6, 3, 5, 4.

24. На три купчиња се наоѓаат 11, 7 и 6 жетони редоследно. Дозволено е од едно купче да се преместат на друго купче онолку жетони колку што таму веќе има. Како со три преместувања да се изедначи бројот на жетоните во сите три купчиња?

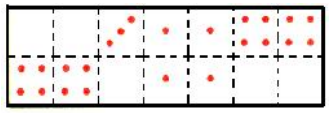
Решение. Во купчињата вкупно има $11+7+6=24$ жетони. Според тоа, во секое купче треба да има $24:3=8$ жетони. Логично е прво во првиот потег да направиме во сите купчиња да има парен број жетони. Тоа значи од првото купче во второто купче да префрлиме 7 жетони. Потоа лесно се добива реѓението на задачата. Имаме:

$$(11,7,6) \to (4,14,6) \to (4,8,12) \to (8,8,8) \ .$$

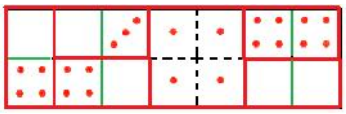
25. Матеј расекол пист хартија на три дела. Еден од добиените делови повторно го расекол на три дела. Постапката ја поворил 7 пати. Колку вкупно делови добил Матеј?

Решение. Со секое сечење Матеј од 1 парче хартија добива 3 парчиња хартија, што значи дека со секое сечење бројот на парчињата хартија се зголемува за $3-1=2$ парчиња. Матеј сечел 7 пати, па затоа на крајот тој имал $1+7\cdot 2=15$ парчиња хартија.

26. Домината се наредени во кутија. Броевите (точките) видливи во горниот ред се распоредени како на цртежот десно. Притоа на цртежот не се прикажани границите меѓу доминат. Определи го распоредот на домината во горниот ред.



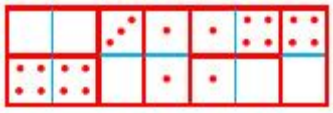
Решение. Заради симетричноста на распоредот на точките во првите и последните две колони мора да имаме две крајни хоризонтални домина и едно крајно вертикално домино (во комплетот нема две исти домина).



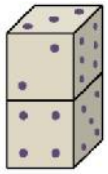
Ако хоризонталните домина се на десната страна, тогаш по одделување на петте домина се добива ситуацијата при-

кажана на цртежот лево и сега нема како од преостанатите четири полиња да добиеме две различни домина.

Ако хоризонталните домина се на левата страна, тогаш лесно се добива распоредот прикажан на цртежот десно. Јасно, ова е бараното решение.



27. Станадардна коцка за играње е коцка кај која збирот на бројот на точките запишани на секои два спротивни ѕида е еднаков на 7. Две стандардни коцки се ставени една над друга, како на цртежот десно. Збирот на бројот на точките кои се на долната страна на горната коцка и оние кои се на горната страна на долната коцка е помал од 10. Колку точки има на долната страна на долната коцка?



Решение. На долната страна на горната коцка има 4 точки. На горната страна на долната коцка може да има 6 или 1 точка (наспроти 4 се 3, а наспроти 5 се 2 точки). Бидејќи споменатиот збир е помал од 10, на горната страна на долната коцка има 1 точка. Конечно, на долната страна на долната коцка има 6 точки.

28. Во иста улица од иста страна се наоѓаат пекара и книжарница. Од едната страна на пекарата има уште 27 куќи, а од другата страна 13 куќи. Книжарницата е во куќата која е точно на средина на улицата. Колку куќи има меѓу пекарата и книжарницата?

Решение. Во улицата бројот на куќите на страната на која се наоѓаат пекарата и книжарницата е еднаков на $27+1+13=41$. Книжарницата е во средината на улицата, што значи дека таа е во 21-та куќа. Меѓу 21-та и 28-та куќа има 6 куќи.

29. Кога учениците од училиштето тргнале кон паркот учителката им рекла да одат по тројца во секој ред. Стојан, Симон и Станко забележале дека нивната тројка е шеста од почетокот на колоната и е шеста од крајот на колоната. Колку ученици оделе во паркот?

Решение. Очигледно пред и по тројката на Стојан, Симон и Станко има по 5 тројки. Значи, во колоната има $2\cdot 5+1=11$ тројки, односно $3\cdot 11=33$ ученици.

30. Датумот 5. мај 2055. година може да се запише во видот 5.5.55. Колку

датуми има во XXI век кои на ваков начин може да се запишат само со користење на една цифра.

Решение. Има 13 такви датуми: 1.1.11; 2.2.22; 3.3.33; 4.4.44; 5.5.55; 6.6.66; 7.7.77; 8.8.88; 9.9.99; 1.11.11; 11.1.11; 11.11.11; 22.2.22. Значи, има 13 такви датуми.

31. Фудбалската екипа Победа одиграла три натпревари: еден победила, еден изгубила и еден одиграла нерешено. На овие натпревари екипата дала три гола и примила еден гол. Со кој резултат завршил секој од трите натпревари?

Решение. Бидејќи екипата загубила еден натпревар, тоа значи дека на овој натпревар таа примила повеќе годолови отколку што дала. Но, таа примила само еден гол, па затоа натпреварот кој го загубила завршил со резултат $0:1$. Сега останува дека екипата дала 3 гола, а не примила ниту еден. Затоа натпреварот кој го одиграла нерешено завршил со резултат $0:0$, па останува натпреварот во кој пбедила да завршил со резултат $3:0$.

32. Фудбалска екипа одиграла шест натпревари: два победила, два изгубила и два одиграла нерешено. На овие натпревари екипата дала 3 годла, а примола 2 гола. Со кој резултат завршил секој од шесте натпревари?

Решение. Екипата загубила два натпревари, што значи дека на овие натпревари примила повеќе голови отколку што дала. Но, таа примила само 2 годла, па затоа овие два натпревари завршиле со резултат 0:1. Понатаму, бидејќи екипата не примила други голови, таа на двата натпревари кои завршиле нерешено не дала ниту еден гол, што значи дека овие два натпревари завршиле со резултат 0:0. Конечно, сите три голови екипата ги постигнала на натпреварите на кои победила и на нив не примеила ниту еден гол, па затоа овие натпревари завршиле со резултати 2:0 и 1:0. Значи, натпреварите заршиле со резултати: 2:0, 1:0, 0:0, 0:0, 0:1 и 0:1.

33. Во Фудбалскиот куп на Република Македонија учествуваат 507 екипи. Купот се игра по системот да екипата која го изгубила натпреварот (во регуларниот тек на натпреварот или по изведување на пенали) испаѓа од натамошното натпреварување. Колку натпревари треба да се одиграат за да се добие победник на Купот?

Решение. За да се добие победник во купот, без разлика како екипите се распоредени мора 506 екипи да испаднат од натпреварувањето. Од натпреварувањето се испаѓа ако се изгуби натпревар, што значи за да се добие победникот на купот мора да има 506 порази. Според тоа, одиграни се 506 натпревари.

34. За еден број ќе врлиме дека е *растечки* (*опаѓачки*), ако секоја цифра (земена како едноцифрен број) е за еден поголема (помала) од цифрата запишана десно од неа. Пресметај за колку се повеќе опаѓачките од растечките броеви.
Решение. Ако ги разгледуваме *опаѓачките* петцифрени броеви (43210, 54321, 65432,76543, 87654 и 98765), гледаме дека кога читаме од десно кон лево ги добиваме сите пет *растечки* петцифрени броеви. Значи, *опаѓачки* петцифрени броеви има за еден повеќе од *растечки* петцифрени броеви.
Така добиваме дека *опаѓачки* броеви има 9 повеќе од *растечки* броеви и тоа: еден двоцифрен (10), еден трицифрфен 210, ..., еден десетцифрен (9876543210).

35. Определи *растечки* број чија третина е природен број поголем од 100 и помал од 2000.
Решение. Бараниот растечки број е поголем од 3000 и е помал од 6000. Тоа може да е некој од броевите 3456, 4567 и 5678. Од овие броеви само бројот 3456 е делив со 3, и тоа е бараниот број.

36. Определи го бројот на сите шестцифрени броеви чиј производ на цифри е 30 и кои се помали од 122000.
Решение. Бројот 30 како производ на шест едноцифрени броеви може да се запише на два начина: $30 = 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$. Според тоа, бараните броеви се:

111156, 111516, 115116, 111165, 111615, 116115,
111561, 111651, 115161, 115611, 116151, 116511,
111235, 111523, 111352, 111253, 111325, 111532,
112135, 112153, 112315, 112351, 112513, 112531,
113125, 113152, 113215, 113251, 113512, 113521,
115123, 115132, 115213, 115231, 115312, 115321,
121135, 121153, 121315, 121351, 121513, 121531,

и има 42 такви броја.

37. Запиши ги сите парни петцифрени броеви помали од 12000 кај кои производот на цифрите е 16.

Решение. Бројот 16 како производ на пет едноцифрени броеви може да се запише само на следниве начини:

$$18 = 8\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 4\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 4\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1. \qquad (*)$$

Бараните броеви треба да се петцифрени, помали од 12000 и парни, па затоа цифрата 1 мора да е прва и втора цифра на овие броеви. Според тоа, од првиот производ во (*) ги добиваме броевите: 11812, 11182, 11218, 11128, од вториот производ броевите: 11414, 11144, од третиот производ броевите: 11422, 11242, 11224, а од четвртиот производ не добиваме ниту еден број. Според тоа, има 9 броја со саканите својства.

38. Запиши ги сите парни петцифрени броеви кај кои производот на цифрите е 18.

Решение. Имаме

$$18 = 9\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 6\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$

и тоа се единствените три начини на кои бројот 18 може да се запише како производ на пет природни броја. Броевите треба да се парни, па затоа цифрата на единиците мора да е 2 или 6. Бараните броеви се:

91112, 19112, 11912, 11192, 33112, 31312, 31132,
13312, 13132, 11332, 31116, 13116, 11316, 11136.

Според тоа, има 14 броеви кои ги имаат саканите својства.

39. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои збирот на цифрите е еднаков на 5 и кои се поголеми од 3000. Колку од овие броеви се парни?

Решение. Постојат шест начини на претставување на бројот 5 како збир на четири ненегативни собирци, и тоа:

$$5 = 5+0+0+0 = 4+1+0+0 = 3+2+0+0$$
$$= 3+1+1+0 = 2+2+1+0 = 2+1+1+1.$$

Сега бараните броеви се само оние кои на местото на илјадитите имаат една од цифрите: 5, 4 или 3. Значи, тоа се броевите: 5000, 4100, 4010, 4001, 3200, 3020, 3002, 3110, 3101, 3011. Значи, вакви броеви се вкупно 10 и од нив парни се седум и тоа: 5000, 4100, 4010, 3200, 3020, 3002, 3110.

40. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои збирот на

цифрие е поголем од 33? Колку од овие броеви се непарни?

Решение. Најголем можен збир на цифрите на етирицифрен број е 36 и тоа е бројот 9999. Броеви чиј збир на цифри е еднаков на 35 се: 9998, 9989, 9899 и 8999. Броеви чиј збир на цифри е 34 се: 9988, 9898, 9889, 8998, 8989, 8899 и 9997, 9979, 9799, 7999. Според тоа, има 15 четирицифрени броеви чиј збир на цифри е поголем од 33, а од нив 11 броеви се непарни.

41. Палиндром е оној број кој исто се чита како од лево кон десно, така и од десно кон лево. На пример, палиндроми се 34243 и 777. Колку има четирицифрени палндроми?

Решение. Четирицифрен палиндром е од видот $\overline{abba}$ каде $\overline{ab}$ е двоцифрен број. Според тоа, четирицифрени палиндроми има колку што има и двоцифрени броеви, односно 90.

42. Дали има повеќе петцифрени или шестцифрени броеви палиндроми?

Решение. На секој петцифрен палендром $\overline{abcba}$ му соодветствува точно еден шестцифрен палиндром $\overline{abccba}$ и обратно на секој шестцифрен палиндром $\overline{xyzzyx}$ му соодветствува точно еден петцифрен палиндром $\overline{xyzyx}$. Значи, има еднаков број петцифрени и шестцифрени палиндроми.

43. Колку четирицифрени броеви постојат чија почетна и крајна цифра е 3?

Решение. Бараните броеви се од видот $\overline{3ab3}$. Буквата a може да е било која цифра,т.е. за неа имаме 10 можности. За секој избор на цифра на местото на буквата a, за избор на цифра на буквата b имаме 10 можности. Според тоа, вкупно имаме $10 \cdot 10 = 100$ можности, т.е. постојат 100 четирицифрени броеви постојат чија почетна и крајна цифра е 3.

44. Определи го бројот на сите четирицифрени непарни броеви чиј збир на цифри е 12, а збирот на цифрата на десетките и цифрата на единиците е 5.

Решение. Броевите се непарни, па затоа цифрата на единиците мора да е непарен број, а збирот на цифрата на десетките и цифрата на единиците да е 5. Според тоа, за двоцифрениот завршеток има три

можности и тоа: 05, 23 и 42.
Збирот на цифрите на бројот е 12, а збирот на цифрите на двоцифрениот завршеток е 5. Значи, збирот на првите две цифри е $12-5=7$ и во случајов имаме седум можности: 70, 61, 52, 43, 34, 35 и 16.
На секоја од седумте можности за првите две цифри соодветствуваат по три можности за двоцифрениот завршеток, па затоа имаме $3\cdot 7=21$ број со бараните својства.

45. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците.
Решение. На местото на стотките може да е било која од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, што значи дека за цифрити на стотките и единиците имаме 9 можности (откако ќе ја избереме цифрата на стотките за цифрата на единиците, која е еднаква на цифрата на стотките имаме 1 можност). На местото на десетките може да биде било која од десетте цифри, што значи дека за цифрата на десетките имаме 10 можности. Сега комбинирајќи ги можностите за изборот на цифрите на стотките, десетките и единиците добиваме дека бројот на трицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците е $9\cdot 10\cdot 1=90$.

46. Определи го бројот на четирицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците.
Решение. На местото на илјадите може да се запишат 9 цифри и тоа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Секоја од овие 9 можности може да се комбинира со 10 цифри на местото на стотките. Значи, за првите две цифри имаме $9\cdot 10=90$ можности. Со овие 90 можности можеме да комбинираме 10 цифри на местото на десетките, а за цифрата на единиците имаме само една можност (тоа е цифрата која е веќе запишана на местото на стотките). Значи, постојат $9\cdot 10\cdot 10\cdot 1=900$ четирицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците.

47. На колку начини четири пријателки Анкица, Гордана, Иванка и Милица може меѓусебно да поделат 11 исти чоколади така што секоја девојка ќе добие најмалку две чоколади?
Решение. Откако секоја девојка ќе добие по 2 чоколади, бројот чоколади кои треба да се поделат е $11-4\cdot 2=3$. Овие 3 чоколади може да

се поделат на неколку начини и тоа:

1) Сите три чоколади ги добива една девојка, па така заедно со веќе добиените чоколади ги имаме следниве четири можности:

Анкица	Гордана	Иванка	Милица
5	2	2	2
2	5	2	2
2	2	5	2
2	2	2	5

2) Една девојка добива 1, а друга добива 2 чоколади, па така заедно со веќе добиените чоколади ги имаме следниве дванаесет можности:

Анкица	Гордана	Иванка	Милица
2	2	3	4
2	2	4	3
2	3	2	4
2	3	4	2
2	4	2	3
2	4	3	2
3	2	2	4
3	2	4	2
3	4	2	2
4	2	2	3
4	2	3	2
4	3	2	2

3) Три девојки добиваат по 1 чоколада, па така заедно со веќе добиените чоколади ги имаме следниве четири можности:

Анкица	Гордана	Иванка	Милица
2	3	3	3
3	2	3	3
3	3	2	3
3	3	3	2

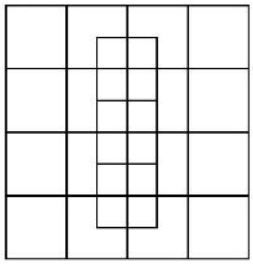
Конечно, поделбата може да се изврши на $4+12+4=20$ различни начини.

48. Павлина има црни триаголни плочки од кои направила четири фигури како на долниот цртеж. Ако продолжи да прави фигури, колку црни

триаголници ќе има 15. фигура повеќе од 10. фигура во низата?

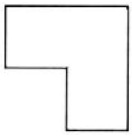
Решение. Да забележиме дека 2. фигура има 2 плочки повеќе од 1. фигура, 3. фигура има 3 плочки повеќе од 2. фигура, 4. фигура има 4 плочки повеќе од 3. фигура итн. се до 15. фигура. Затоа 15. фигура има повеќе $15+14+13+12+11=65$ плочки од 10. фигура.

49. Колку квадрати се прикажани на цртежот десно?

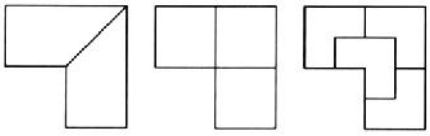


Решение. На цртежот има 12 мали квадратчиња, 5 квадрати составени од по четири мали квадратчиња, 16 големи квадрати, 9 квадрати составени од по четири големи квадрати, 4 квадрати составени од по четири големи квадрати и 1 квадрат составен од шеснаесет големи квадрати. Значи, на цртежот вкупно има $12+5+16+9+4+1=47$ квадрати.

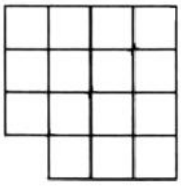
50. Квадрат е поделен на четири еднакви квадрати, а потоа еден од малите квадрати е исечен, со што е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Подели ја оваа фигура на 2, 3 и 4 еднакви делови.



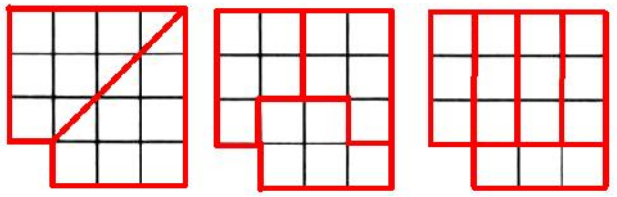
Решение. Бараните поделби на 2, 3, и 4 делови на добиената фигура се прикажани на долните цртежи.



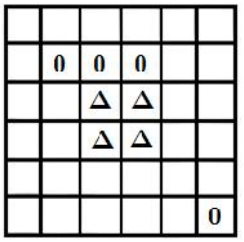
51. Квадрат е поделен на 16 еднакви квадрати. Потоа еден од аголните мали квадрати е исечен и е добиена фигурата прикажана на цртежот десно. Подели ја оваа фигура на 2, 3, 5 еднакви делови.



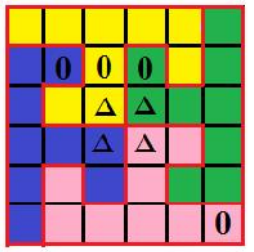
Решение. Бараните поделби на 2, 3, и 5 делови на добиената фигура се прикажани на долните цртежи.



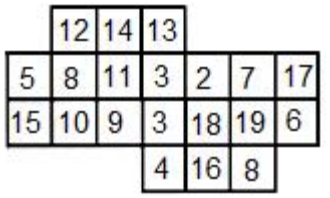
52. Расечи го квадратот на 4 еднакви делови така што во секој дел ќе има по едно триаголниче и по едно кругче.



Решение. Квадратот има 36 мали квадратчиња и истиот треба да се расече на четири дела, што значи дека во секој дел мора да има по 9 мали квадратчиња. Бараното расекување на дадено на цртежот десно.

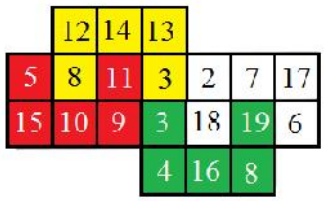


53. Фигурата прикажана на цртежот десно подели ја на четири еднакви делови (по форма) така што збирот на броевите во секој од добиените делови е еднаков.



Решение. Збирот на сите броеви запишани во дадената фигура е еднаков на 200. Според тоа, збирот на броевите во секој од четирите дела на кои треба да ја пооделиме фигурата треба да е еднаков на $200:4=50$. Понатаму, целата фигура е составена од 20 квадратчиња, па затоа во секој дел треба да има по $20:4=5$ квадратчиња.

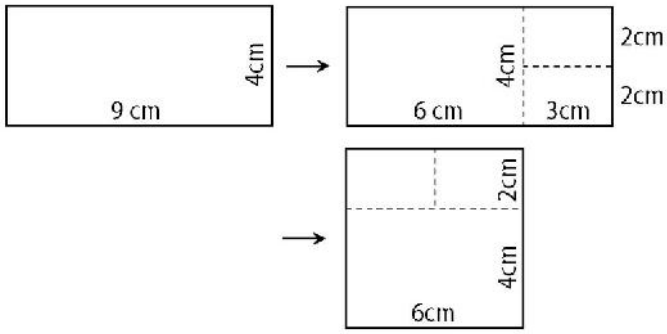
Сега, збирот на броевите во првиот ред е $12+13+14=39$, па затоа да провериме дали на овие три полиња може да им се додадат две полиња чиј збир е 11. Очигледно тоа се полињата во кои се запишани броевите 3 и 8, па лесно се добива поделбата на фигурата прикажа-на на цртежот десно која ги



задоволува бараните услови.

54. Правоаголник со димензии $9\,cm$ и $4\,cm$ треба да се расече на три правоаголници така што од нив ќе се состави квадрат. Прикажи го бараното расекување? Определи го периметарот на добиениот квадрат.

Решение. Плоштината на правоаголникот е $9\cdot 4=36\,cm^2$. Тоа значи дека плоштината на квадратот е $36\,cm^2$, па затоа должината на неговата страна треба да е $6\,cm$. Значи, периметарот на добиениот квадрат ќе биде $4\cdot 6=24\,cm$. Расекувањето се добива ако отсечеме правоаголник со страни $6\,cm$ и $4\,cm$, а преостанатиот дел го поделиме на два правоаголника со страни $3\,cm$ и $2\,cm$ (вид цртеж).



55. Обој едно од најмалите квадратчиња прикажани на цртежот десно.

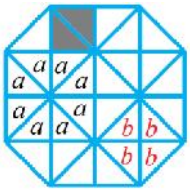
а) Колку квадратчиња имаат еднаква плоштина со обоеното квадратче?

б) Колку квадрати имаат 4 пати поголема плоштина од обоеното квадратче?

в) Колку квадрати имаат 2 пати поголема плоштина од обоеното квадратче?

г) Колку вкупно квадрати има на дадениот цртеж?

Решение. а) Во првиот ред има 2, во вториот и третиот ред има по 4 и во четвртиот ред има 2 квадратчиња кои имаат еднаква плоштина со обоеното квадратче. Според тоа, вкупно има $2+4+4+2=12$ такви квадратчиња.



б) Квадрат кој има 4 пати поголема плоштина од

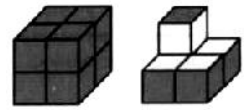
обоеното квадратче е означен на цртежот десно така што во триаголничињата од кои е составен е запишана буквата a. Сега лесно се гледа дека на дадениот цртеж има 5 такви квадрати.

в) Квадрат кој има 2 пати поголема плоштина од обоеното квадратче е означен на цртежот десно така што во триаголничињата од кои е составен е запишана буквата b. Сега лесно се гледа дека на дадениот цртеж има 5 такви квадрати.

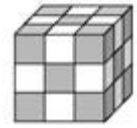
г) На дадениот цртеж ги има само горните три вида квадрати, т.е. има $12+5+5=22$ квадрати.

56. Коцка е составена од 8 мали сини коцки, а потоа е обоено со црвена боја. Кога коцката се исушила, Матеј ги оделил сите мали коцки. Дали постои мала коцка која има повеќе сино обоени отколку црвено обоени ѕидови?

Решение. Секоја коцка има 6 ѕидови. Големата коцка има 8 темиња и во секое теме се наоѓа по една од осумте мали коцки. Оваа коцка има точно три ѕида обоени со црвена боја, а другите три ѕида се обоени со сина боја. Значи не постои мала коцка која има повеќе сино обоени отколку црвено обоени ѕидови



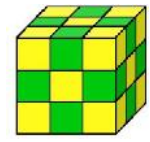
57. Коцка со раб $3\,cm$ е составена од бели и сиви коцки чии рабови се $1\,cm$. Секои две соседни коцки се различно обоени (цртеж десно). Колку коцки се сиви?



Решение. Во првиот и третиот ред на коцката има по 5 сиви коцки, а во средниот ред има сиви коцки колку што се бели коцки во првиот и третиот ред, односно 4 сиви коцки. Значи, големата коцка содржи $5+4+5=14$ сиви коцки.

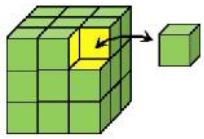
58. Една голема коцка е составена од 13 зелени и 14 жолти мали коцки. Малите коцки се наредени така што секои две соседни коцки се со различна боја. Која боја има коцката која е во средината на големата коцка? (Соседни се коцките кои имаат заеднички ѕид.)

Решение. Големата коцак е составена од 27 коцки кои се наредени во три реда со по 9 коцки (цртеж десно). Во секој ред има 5 коцки од една боја и 4 коцки од друга боја. Бидејќи има 13 зелени и 14 жолти коцки, $13=4+5+4$ и $14=5+4+5$, заклучуваме дека зелените коцки се во



првиот ред 4, во вториот ред 5 и во третиот ред 4. Бидејќи во вториот ред се 5 зелени коцки тие се по две на надворешните ѕидови и една во средината. Значи, восредината на големата коцка е зелена мала коцка.

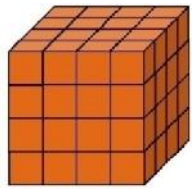
59. Голема коцка е составена од 27 мали жолти коцки, а потоа целата е обоена во зелена боја. Потоа коцката е растуреа. Колку мали коцки ќе имаат:



а) три жолти и три зелени ѕидови,
б) четири жолти и две зелени ѕидови,
в) пет жолти и еден зелен ѕид,
г) само жолти ѕидови?

Решение. Мали коцки со:
а) три жолти и три зелени ѕида се 8 (коцките во темињата на големата коцка),
б) четири жолти и два зелени ѕида се 12 (на секој од 12-те рабови по 1 коцка),
в) пет жолти и еден зелен ѕид се 6 (на секој ѕид на големата коцка по 1 мала коцка),
г) само жолти ѕидови е $3\cdot 3\cdot 3-(8+12+6)=27-26=1$.

60. Коцка со раб $4\,cm$ е целосно обоена, а потоа е расечена на коцки со раб $1\,cm$ (цртеж десно).



а) Колку коцки имаат три обоени ѕида?
б) Колку коцки имаат два обоени ѕида?
в) Колку коцки имаат еден обоен ѕид?
г) Колку коцки воопшто не се обоени?

Решение. а) Три обоени ѕидови имаат 8 коцки и тоа се коцките во темињата на големата коцка.
б) По два обоени ѕида имаат 24 мали коцки (на секој од 12-те рабови по 2 коцки).
в) Еден обоен ѕид имаат 24 коцки (на секој ѕид на големата коцка по 4 мали коцки).
г) Ниту еден обоен ѕид имаат $4\cdot 4\cdot 4-(8+24+24)=8$ мали коцки.

61. Учителката на секој член на ликовната секција му дала по една коцка. Нивна задача била да ја обојат коцката така што секоја страна биде обоена со една боја: или жолта или зелена. Кога ја завршиле работата забележале дека секој својата коцка ја обоил различно од другите.

Бидејќи коцките многу им се допаднале, учениците ја замолиле учителката и таа да обои една коцка со истите бои и на истиот начин, но така што нејзината коцка да се разликува од веќе обоените. На нивно големо жалење учителката тоа не можела да го направи. Колку ученици имала оваа ликовна секција?

Решение. Бидејќи коцката има 6 sида можни комбинации се:

Р. бр.	Боја	Боја	Боја	Боја	Боја	Боја	Објаснување
1	ж	ж	ж	ж	ж	ж	Една комбинација
2	ж	ж	ж	ж	ж	з	Една комбинација
3	ж	ж	ж	ж	з	з	Кога зелените sидови се соседни
4	ж	ж	ж	ж	з	з	Кога зелените sидови се паралелни
5	ж	ж	ж	з	з	з	Кога секој од трите зелени sида има по два соседни зелени sида
6	ж	ж	ж	з	з	з	Кога само еден од три зелени sида има по два соседни зелени sида, а преостанатите два по еден
7	ж	ж	з	з	з	з	Кога жолтите sидови се соседни
8	ж	ж	з	з	з	з	Кога жолтите sидови се паралелни
9	ж	з	з	з	з	з	Една комбинација
10	з	з	з	з	з	з	Една комбинација

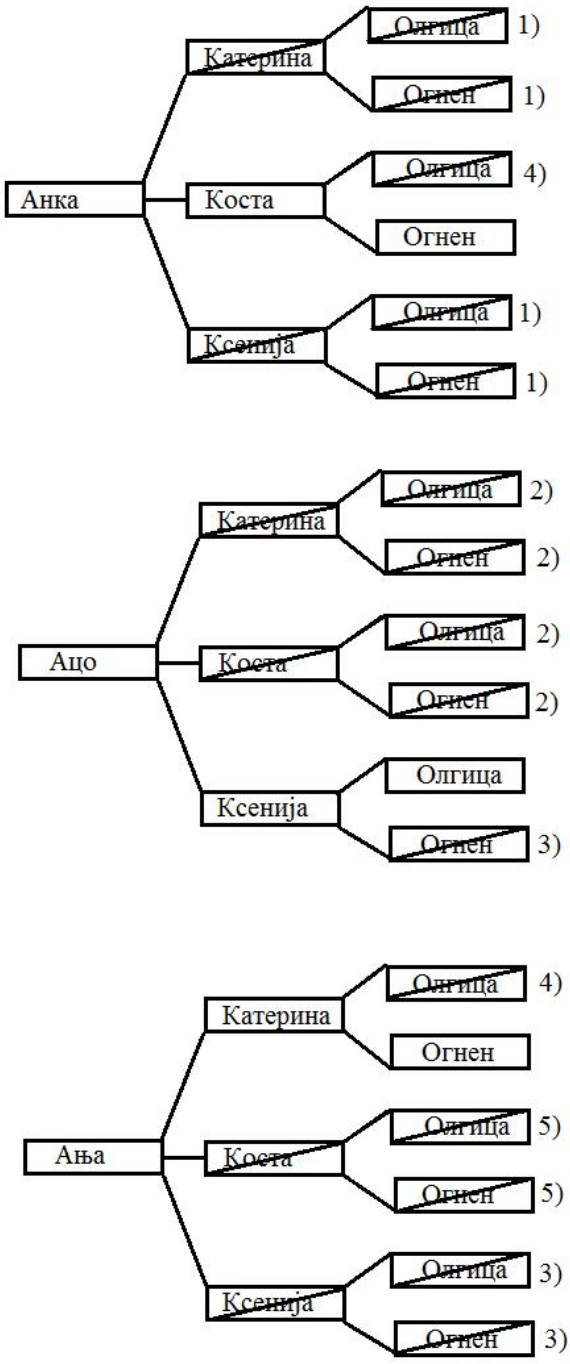
Бидејќи бројот на можните комбинации е 10 (преостанатите комбинации се добиваат со вртење на коцката), а за учителката не останала ниту една комбонација, заклучуваме дека ликовната секција има 10 ученици.

62. Едно училиште треба да испрати тричлена делегација за договор во врска со организирањето на спортските игри во градот. Предложени се: атлетичарите Анка, Ацо и Ања, кошаркарите Катерина, Коста и Ксенија и одбојкарите Олгица и Огнен. Членовите на делегацијата треба да се занимаваат со различни спортови и меѓусебно да се согласуваат. Врз основа на направената анкета јасно е кој со кого не сака да соработува:
    1) Анка не соработува со Ксенија и Катерина,
    2) Катерина и Коста не сакаат да соработуваат со Ацо,
    3) Ксенија соработува само со Анка, Олгица или Ацо,
    4) Олгица не ги сака Анка и Катерина бидејќи ја оговарале,
    5) Коста и Ања се скарани.

    Испиши ги сите можности за состав на делегацијата.

    Решение. Со пребројување со помош на „дрво“ може да се испишат сите можности. Ако се прецртаат „гранките“ на кои се учениците кои не сакаат да соработуваат, останууваат само три можности за состав на

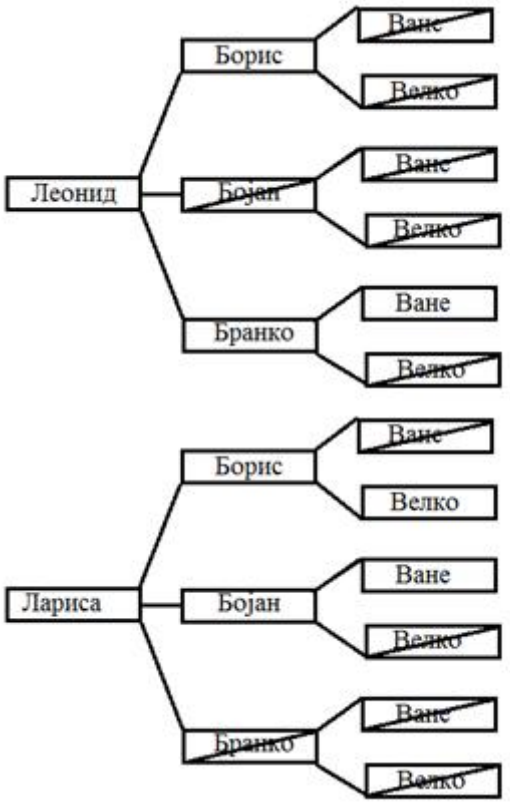
делегацијата.

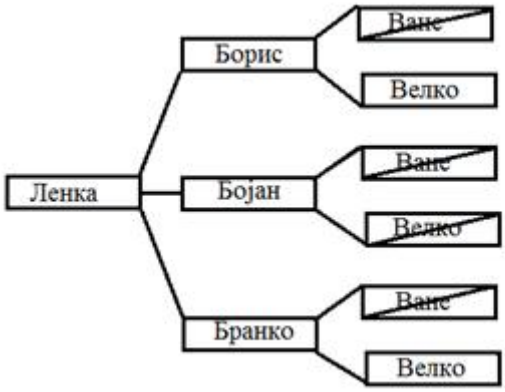


63. Организаторите на меѓународниот еколошки камп треба да состават тимови кои ќе се грижат за здравјето на учесниците. Секој тим треба да има лекар, болнилар и возач. На списокот има тројца лекари (Леонид, Лариса и Ленка), тројца болничари (Борис, Бојан и Бранко) и двајца возачи (Ване и Велко). Организаторот зане де постои несогласување меѓу некои кандидати. Од оправдани причини во ист тим не може да се: Леонид и Бојан, Леонид и Велко, Лариса и Бранко, Борис и Ване, Ленка и Ване, Бојан и Велко. Кои тимови може да ги состави организаторот на кампот?

Решение. Со пребројување со помош на „дрво“ може да се испишат сите можности. Ако се прецртаат „гранките“ на кои се учениците кои не сакаат да соработуваат, останууваат само пет можности за состав на тимовите:

1) Леонид, Бранко, Ване,
2) Лариса, Борис, Велко,
3) Лариса, Бојан, Ване,
4) Ленка, Борис, Велко,
5) Ленка, Бранко, Велко.




Ленка
Борис
Бојан
Бранко
Ване
Велко
Ване
Велко
Ване
Велко