*сабота, 8. јули 2023*

**Задача 1.** Определи ги сите сложени цели броеви $n > 1$ кои го задоволуваат следново својство: ако $d_1, d_2, \ldots, d_k$ се сите позитивни делели на $n$ и важи $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, тогаш $d_i$ е делител на $d_{i+1} + d_{i+2}$ за секој $1 \leqslant i \leqslant k - 2$.

**Задача 2.** Нека $ABC$ е остроаголен триаголник во кој $AB < AC$. Нека $\Omega$ е опишаната кружница околу $ABC$. Нека $S$ е средната точка на лакот $CB$ од $\Omega$ кој ја содржи $A$. Нормалата спуштена од $A$ на $BC$ ја сече $BS$ во $D$, а $\Omega$ по втор пат во $E \neq A$. Правата низ $D$ паралелна на $BC$ ја сече правата $BE$ во $L$. Опишаната кружница околу триаголникот $BDL$ ја означуваме со $\omega$. Нека $\omega$ ја сече $\Omega$ по втор пат во $P \neq B$.
Докажи дека тангентата на $\omega$ во $P$ ја сече правата $BS$ во точка на внатрешната симетрала од $\angle BAC$.

**Задача 3.** За секој цел број $k \geqslant 2$, определи ги сите бесконечни низи од позитивни цели броеви $a_1, a_2, \ldots$ за кои постои полином $P$ од облик $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, каде $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ се ненегативни цели броеви, такви што

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{n+k}$$

за секој цел број $n \geqslant 1$.



*Време за работа: 4 часа и 30 минути.*
*За секоја точно решена задача се добиваат 7 поени.*

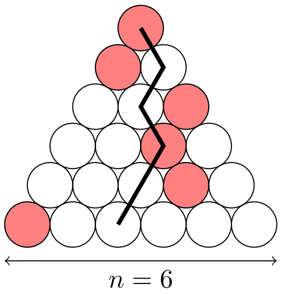
*недела, 9. јули 2023*

**Задача 4.** Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ се попарно различни позитивни реални броеви такви што

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

е цел број за секое $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Докажи дека $a_{2023} \geqslant 3034$.

**Задача 5.** Нека $n$ е позитивен цел број. *Јапонски триаголник* се состои од $1 + 2 + \cdots + n$ кругови распоредени во форма на рамностран триаголник, така што за секој $i = 1, 2, \ldots, n$, $i$-тиот ред содржи точно $i$ круга, од кои точно еден е обоен црвено. *Нинџа патека* во јапонски триаголник е низа од $n$ кругови добиена почнувајќи од најгорниот ред, па последователно движејќи се од круг, во еден од двата круга непосредно под него, завршувајќи во најдолниот ред. Подолу е даден пример за јапонски триаголник за $n = 6$, со нинџа патека во него кога содржи два црвени кругови .




Изразено преку $n$, најди го најголемиот $k$ таков што во секој јапонски триаголник постои нинџа патека која содржи најмалку $k$ црвени круга.

**Задача 6.** Нека $ABC$ е рамностран триаголник. Нека $A_1, B_1, C_1$ се точки во внатрешноста на $ABC$ такви што $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ и

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Нека $BC_1$ и $CB_1$ се сечат во $A_2$, $CA_1$ и $AC_1$ се сечат во $B_2$, а $AB_1$ и $BA_1$ се сечат во $C_2$. Докажу дека ако триаголникот $A_1B_1C_1$ е разностран, тогаш трите опишани кружници околу триаголниците $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ и $CC_1C_2$ минуваат низ две заеднички точки.

(Забелешка: триаголник е разностран ако нема две страни со еднаква должина.)

*Saturday, 8. July 2023*

**Problem 1.** Determine all composite integers $n > 1$ that satisfy the following property: if $d_1, d_2, \ldots, d_k$ are all the positive divisors of $n$ with $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, then $d_i$ divides $d_{i+1} + d_{i+2}$ for every $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

**Problem 2.** Let $ABC$ be an acute-angled triangle with $AB < AC$. Let $\Omega$ be the circumcircle of $ABC$. Let $S$ be the midpoint of the arc $CB$ of $\Omega$ containing $A$. The perpendicular from $A$ to $BC$ meets $BS$ at $D$ and meets $\Omega$ again at $E \neq A$. The line through $D$ parallel to $BC$ meets line $BE$ at $L$. Denote the circumcircle of triangle $BDL$ by $\omega$. Let $\omega$ meet $\Omega$ again at $P \neq B$.
Prove that the line tangent to $\omega$ at $P$ meets line $BS$ on the internal angle bisector of $\angle BAC$.

**Problem 3.** For each integer $k \geqslant 2$, determine all infinite sequences of positive integers $a_1, a_2, \ldots$ for which there exists a polynomial $P$ of the form $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, where $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ are non-negative integers, such that

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

for every integer $n \geqslant 1$.



*Time: 4 hours and 30 minutes.*
*Each problem is worth 7 points.*

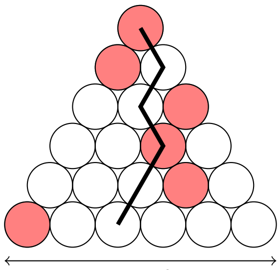
*Sunday, 9. July 2023*

**Problem 4.** Let $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ be pairwise different positive real numbers such that

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

is an integer for every $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Prove that $a_{2023} \geqslant 3034$.

**Problem 5.** Let $n$ be a positive integer. A *Japanese triangle* consists of $1 + 2 + \cdots + n$ circles arranged in an equilateral triangular shape such that for each $i = 1, 2, \ldots, n$, the $i^{\text{th}}$ row contains exactly $i$ circles, exactly one of which is coloured red. A *ninja path* in a Japanese triangle is a sequence of $n$ circles obtained by starting in the top row, then repeatedly going from a circle to one of the two circles immediately below it and finishing in the bottom row. Here is an example of a Japanese triangle with $n = 6$, along with a ninja path in that triangle containing two red circles.




In terms of $n$, find the greatest $k$ such that in each Japanese triangle there is a ninja path containing at least $k$ red circles.

**Problem 6.** Let $ABC$ be an equilateral triangle. Let $A_1, B_1, C_1$ be interior points of $ABC$ such that $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$, and

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Let $BC_1$ and $CB_1$ meet at $A_2$, let $CA_1$ and $AC_1$ meet at $B_2$, and let $AB_1$ and $BA_1$ meet at $C_2$. Prove that if triangle $A_1B_1C_1$ is scalene, then the three circumcircles of triangles $AA_1A_2$, $BB_1B_2$ and $CC_1C_2$ all pass through two common points.

(Note: a scalene triangle is one where no two sides have equal length.)