

ДВЕ ЗАНИМЉИВЕ КОНСТРУКЦИЈЕ

Јенс Карстџенсен, Алија Муминаџић, Фредериксберџ (Данска)

Геометријске конструкције чине важан део средњошколске геометрије. Конструктивни задатак захтева од решавача добро познавање особина многих геометријских фигура и тако га присиљава да учи „теорију“. Међутим, та теорија често није довољна да би се задатак решио. Потребно је да се умешно користи и примењује. Другим речима, захтева креативност и маштовитост.

Упркос свему, геометријске конструкције се генерално све ређе срећу у школској пракси. Поготово оне које желимо да прикажемо у овом чланку.

Познато је да се сваки алгебарски израз, који се добија од једне или више дужи применом коначног броја рационалних операција (сабирање, одузимање, множење, дељење) и квадратним кореновањем, може конструисати лењиром и шестаром. (Под појмом дуж подразумеваћемо геометријску фигуру, а исто тако и њен мерни број - дужину. Из контекста ће бити јасно на шта се односи.)

Ево неколико елементарних примера, за које се претпоставља да су познати читаоцу, у којима је x поменути алгебарски израз.

1. $x = a + b$ (сабирање дужи a и b)
2. $x = a - b$, $a > b$ (одузимање дужи b од дужи a)
3. $x = na$, $n \in \mathbb{N}$ (множење дужи a природним бројем n)
4. $x = \frac{a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (дељење дужи a природним бројем n)
5. $x = \frac{n}{m}a$, $n, m \in \mathbb{N}$ (множење дужи a рационалним бројем $\frac{n}{m}$)
6. $x = \frac{ab}{c}$ (четврта пропорционала)
7. $x = \sqrt{ab}$ (геометријска средина дужи a и b)
8. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (хипотенуза правоуглог троугла с катетама a и b)
9. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (катета правоуглог троугла с хипотенузом a и катетом b)

Многи сложенији изрази могу се конструисати свођењем на неке од наведених. На пример, конструкција израза $x = \frac{a^2 b^3}{c^2 d^2}$ се своди на конструкцију 6 следећим низом конструкција у којима се такође користи конструк-

ција 6: $x_1 = \frac{ab}{c}$, $x_2 = \frac{x_1 a}{c}$, $x_3 = \frac{x_2 b}{d}$, $x_4 = x = \frac{x_3 b}{d}$. Слично, при конструкцији израза $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$ најпре се изврше трансформације

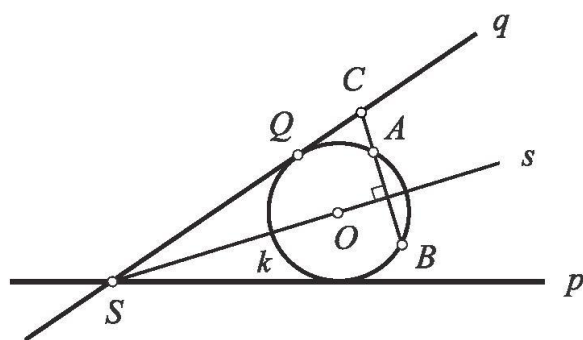
$$x = \sqrt[4]{a^4 - b^4} = \sqrt{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}} = \sqrt{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Потом се искористе конструкције 9 и 8: $x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$, $x_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. На крају се примени конструкција 7: $= \sqrt{x_1 x_2}$.

Још једна примена конструкције 7 дата је у следећем типичном конструктивном задатку.

Задатак 1. Дати су две непаралелне праве p и q и тачка A . Конструисати кружницу која пролази кроз тачку A и додирује праве p и q .

Решење. Анализа. Нека се праве p и q секу и тачки S и нека је k тражена кружница (сл. 1).



Сл. 1.

Како кружница k додирује праве p и q , њен центар O лежи на симетрали s оног угла pSq који садржи тачку A . Стога кружница k , осим кроз тачку A , пролази и кроз тачку B симетричну са A у односу на s . Притом, права AB је нормална на симетралу s и сече праву q у тачки C . Нека је Q тачка додира кружнице k и праве q . На основу теореме о потенцији тачке у односу на кружницу, важи $CQ^2 = CA \cdot CB$, односно $CQ = \sqrt{CA \cdot CB}$. Како су дужи CA и CB познате, дуж CQ се може добити конструкцијом 7.

Конструкција. Конструису се симетрала s и тачке B и C из анализе. Затим се одреди дуж d таква да је $d = \sqrt{CA \cdot CB}$. Даље се на правој q конструише тачка Q таква да је $CQ = d$ и потом кружница k која пролази кроз тачке A , B и Q . Кружница k је тражена.

Доказ конструкције. Препушта се читаоцима.

Дискусија. Ако је $A \neq S$, задатак увек има два решења. (Зашто?). Ако је $A = S$ задатак нема решење.

□

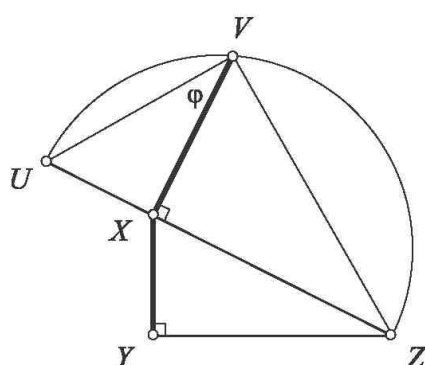
Напомена. (а) Задатак се може решити и хомотетијом или још напреднијом трансформацијом – инверзијом. Остављамо читаоцима за вежбу.

(б) Ако су праве p и q паралелне, конструкција се знатно поједностављује. Нека се читаоци сами увере.

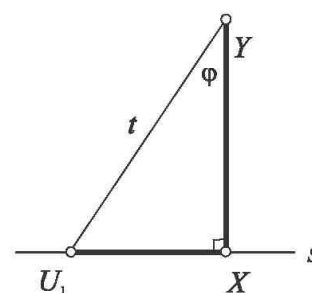
Следећи задатак спада у оне „необичне“.

Задатак 2. (а) Датиа је дуж $XU = 1$. Конструисати дуж $\sqrt[4]{5}$.
(б) Датиа је дуж $Y = \sqrt[4]{5}$. Конструисати јединичну дуж.

Решење. (а) *Конструкција.* Конструисе се правоугли троугао XYZ , с правим углом код Y , такав да је $XU = 1$ и $YZ = 2$ (сл. 2(а)).



(а)



(б)

Сл. 2.

Конструисе се тачка U таква да је $U - X - Z$ и $XU = 1$. Затим се конструисе полукружница k с пречником UZ која лежи с оне стране праве UXZ с које није тачка Y . У тачки X се конструисе нормала на праву UXZ и њен пресек с полукружницом k означи са V . Дуж XV је тражена.

Доказ конструкције. По Питагориној теореме је $XZ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Троугао UZV је правоугли с правим углом код V , па су троуглови UXV и VXZ слични. Отуда је (конструкција 7) дуж XV геометријска средина за UX и XZ , односно $XV = \sqrt{UX \cdot XZ} = \sqrt{1 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$.

Дискусија. Очигледно, задатак има јединствено решење.

(б) *Конструкција.* У тачки X се конструисе нормала s на XY , а у тачки Y полуправа t која с полуправом YX образује угао ϕ једнак углу XVU из (а) (сл. 2(б)). Нека је U_1 пресек s и t . Дуж XU_1 је тражена.

Доказ конструкције. По конструкцији је $\Delta U_1XY \sim \Delta UXV$. (Напоменимо да дуж XU не мора да буде једнака дужи XV из (а) иако су обе по $\sqrt[4]{5}$. Разлог је што јединичне дужи у (а) и (б) не морају да буду једнаке.) Отуда и из чињенице да однос дужина не зависи од система мерења (од избора једини-

чне дужи) следи $U_1X : XY = UX : XV$, односно $U_1X : \sqrt[4]{5} = 1 : \sqrt[4]{5}$, па је $U_1X = 1$.

Дискусија. Као и у (а), задатак има јединствено решење.

□

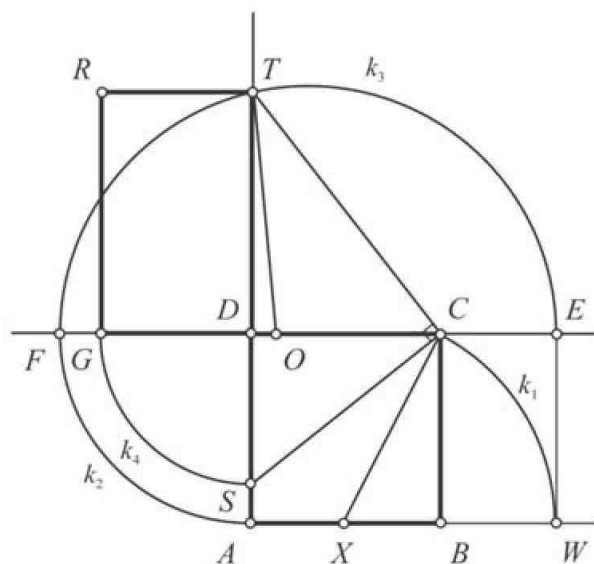
За тачку X дужи AB кажемо да дели дуж AB у златном или божанском односу ако је $\frac{AX}{BX} = \frac{AB}{AX}$. Ако однос $\frac{AX}{BX}$ означимо са ϕ и узмемо у обзир да је $AB = AX + BX$, тада претходна једнакост гласи $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$. Одатле је $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

За правоугаоник са страницама a и b кажемо да је златан ако је $\frac{a}{b} = \phi$.

Задатак 3. Конструисајте златан правоугаоник чија је површина једнака површини датог квадрата.

Решење. Нека је $ABCD$ дати квадрат. Без утицаја на општост, можемо узети да је квадрат јединични, тј. $AB = 1$. Тако треба да се конструире златни правоугаоник површине 1.

Конструкција. Конструире се кружница k_1 са центром у тачки X – средишту странице AB и полупречником XC (сл. 3).



Сл.3.

Нека је W њен пресек с продужетком странице AB преко B . У тачки W конструире се нормала на AB и са E означи њен пресек с правом CD . Конструире се кружница k_2 са центром D и полупречником DA и са F означи њен пресек с продужетком странице CD преко D . Конструире се полу-

кружница k_3 , с пречником EF и центром O , која је са оне стране праве CD са које нису A и B . Нека је T њен пресек с продужетком странице AD . У тачки C конструише се нормала на праву CT и са S означи њен пресек са страницом AD . Даље се конструише кружница k_4 са центром D и и полупречником DS и и са G означи њен пресек са продужетком странице CD преко D . Најзад, конструишу се права кроз G паралелна са AD и права кроз T паралелна са AB и њихов пресек означи са R . Четвороугао $GDTR$ је тражени правоугаоник.

Доказ конструције. Очигледно је $GDTR$ правоугаоник. Треба да се покаже да је златни и да је његова површина једнака 1.

(а) *правоугаоник $GDTR$ је златни.* Доказаћемо да је $\frac{DT}{DG} = \phi$. По конструцији тачке W и из правоуглог троугла XBC имамо да је $W = XC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Отуда је $AW = AX + XW = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, па је

$$DE = AW = \phi. \quad (1)$$

Како је $EF = DF + DE = DA + DE = 1 + DE$, из (1) следи да је $EF = 1 + \phi$. Стога је полупречник полукружнице k_3 једнак $\frac{1}{2}EF = \frac{1+\phi}{2}$, те је

$$OT = OF = OE = \frac{1+\phi}{2}. \quad (2)$$

Како је $OD = OF - DF = \frac{1+\phi}{2} - 1 = \frac{\phi-1}{2}$, из правоуглог троугла DOT и (2) добијамо

$$DT = \sqrt{OT^2 - OD^2} = \sqrt{\left(\frac{1+\phi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\phi-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\phi}. \quad (3)$$

Из правоуглог троугла SCT имамо да је DC геометријска средина за дужи DS и DT , тј. $DC = \sqrt{DS \cdot DT}$. С обзиром на (3) и да је $DC = 1$, следи $1 = \sqrt{DS \cdot \sqrt{\phi}}$, одакле је $DS = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$. Тако је

$$DG = DS = \frac{1}{\sqrt{\phi}}. \quad (4)$$

Коначно, из (3) и (4) добијамо $\frac{DT}{DG} = \frac{\sqrt{\phi}}{\frac{1}{\sqrt{\phi}}} = \phi$ и правоугаоник $GDTR$ је златни.

(б) *површина правоугаоника $GDTR$ је 1.* Из (3) и (4) следи

$$P_{GDTR} = DT \cdot DG = \sqrt{\phi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\phi}} = 1.$$

Дискусија. Ако су a и b ($a > b$) странице траженог златног правоугаоника, тада је $ab = 1$ и $\frac{a}{b} = \phi$. Следи $a = \sqrt{\phi}$ и $= \frac{1}{\sqrt{\phi}}$, те је тај правоугаоник подударан с добијеним $GDTR$. Дакле, задатак има јединствено решење.

□

Напомена. Како је $AW = \phi$ (сл. 3) и $W = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$, странице a и b златног правоугаоника могу се добити као $a = \sqrt{\phi} = \sqrt{1 \cdot \phi} = \sqrt{AB \cdot AW}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{\phi}} = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{\phi}} = \sqrt{AB \cdot BW}$. Детаље препуштамо читаоцима.

Литература

- [1] L. O. Barton, Construction of a Golden Rectangle a Given Area, Mathematical Spectrum Vol. 39, No. 3, 2006/2007
- [2] D. Palman, Geometrijske konstrukcije, Element, Zagreb 1996.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2019/20 година