Ристо Малчески
Алекса Малчески
Катерина Аневска
Методи Главче
Димитар Треневски

РЕПЕТИТОРИЈ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА – ВТОР ДЕЛ

Скопје, 2019

Рецензенти

Слаѓана Брсаковска
Даниел Велинов
Сања Костадинова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

511(075.3)(076)
514.11(075.3)(076)

РЕПЕТИТОРИЈ по елементарна математика. Д. 2 / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2020. - 205 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Катерина Аневска, Методи Главче, Димитар Треневски. - Библиографија: стр. 199-205

ISBN 978-608-4904-71-7
1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Аневска, Катерина [автор] 4. Главче, Методи [автор] 5. Треневски, Димитар [автор]
а) Елементарна математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111967754

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Репетиториј по елементарна математика – втор дел* е наменета за ученици од средното образование. Идејата на оваа серија од четири збирки задачи е да овозможи повторување на материјалот за кој авторите сметаат дека е неопходен за успешно продолжување на студиите на полето на математиката, физиката, информатиката, електротехничките, машинските и градежните науки. Книгава содржи 422 решени задачи. Како и во првиот дел од оваа серија, така и во оваа книга повеќето од задачите кои се на ниво на задачите кои се задаваат на општинските и регионалните натпревари по математика, но во книгава се поместени и задачи кои се значително поголема тежина. Оттука, оваа збирка задачи може да им послужи и на учениците кои се подготвуваат за натпреварите по математика.

Во книгава четири одделни целини се обработени задачи од комплексните броеви, квадратната функција и квадратните равенки, планиметријата и стереометријата Притоа, задачите се распределени по области. Така, на пример, задачите од планиметријата се распределени во шест дела, и тоа: Триаголник, Четириаголник, Кружница, Плоштини на рамнински фигури, Конструкции и Дополнителни здачи.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска, д-р Даниел Велинов и д-р Сања Костадинова, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје   Авторите
јануари, 2020 г.

I КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1. АЛГЕБАРСКИ ЗАПИС НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

1. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=1}^{n} i^k = i + i^2 + \ldots + i^n ,$$

каде i е имагинарната единица.

Решение. Имаме $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Ќе разгледаме четири случаи, и тоа

а) $n = 4p$. Во овој случај,

$$i^{4s+1} + i^{4s+2} + i^{4s+3} + i^{4s+4} = i - 1 - i + 1 = 0 ,$$

за $s = 0,1,\ldots, p-1$, па според тоа

$$\sum_{k=1}^{4p} i^k = i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{4p-3} + i^{4p-2} + {}^{4p-1} + i^{4p} = 0 .$$

б) $n = 4p+1$. Во овој случај, слично како и во претходниот имаме

$$\sum_{k=1}^{4p+1} i^k = i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{4p-3} + i^{4p-2} + {}^{4p-1} + i^{4p} + i^{4p+1} = 0 + i^{4p+1} = 0 + i = i$$

в) $n = 4p+2$. Во овој случај, со разгледувањата како и во првиот случај имаме

$$\sum_{k=1}^{4p+2} i^k = i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{4p-3} + i^{4p-2} + {}^{4p-1} + i^{4p} + i^{4p+1} + i^{4p+2}$$

$$= 0 + i^{4p+1} + i^{4p+2} = 0 + i - 1 = i - 1$$

г) $n = 4p+3$. Во овој случај, со разгледувања исти како во првите три случаи, добиваме:

$$\sum_{k=1}^{4p+2} i^k = i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{4p-3} + i^{4p-2} + {}^{4p-1} + i^{4p} + i^{4p+1} + i^{4p+2} + i^{4p+3}$$

$$= 0 + i^{4p+1} + i^{4p+2} + i^{4p+3} = 0 + i - 1 - i = -1$$

2. Да се пресмета изразот

$$(\tfrac{1+i\sqrt{3}}{2})^{60} + (\tfrac{1-i\sqrt{3}}{2})^{30} .$$

Решение. Ставајќи $x = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ добиваме:

$$x^2 = -\tfrac{1-i\sqrt{3}}{2} , \qquad x^3 = -\tfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{1-i\sqrt{3}}{2} = -1 .$$

Според тоа, ќе имаме

$$(\tfrac{1+i\sqrt{3}}{2})^{60} + (\tfrac{1-i\sqrt{3}}{2})^{30} = x^{60} + (-x^2)^{30} = x^{60} + x^{60} = 2x^{60} = 2(x^3)^{20} = 2 .$$

3. Да се пресмета вредноста на изразот

$$(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^{1986} + (\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2})^{1986} .$$

Решение. Лесно се проверува дека

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Според тоа, дадениот израз има вредност 2, бидејќи 3 е делител на 1986.

4. Да се упрости изразот

$$A = [1+\tfrac{1+i}{2}][1+(\tfrac{1+i}{2})^2][1+(\tfrac{1+i}{2})^4][1+(\tfrac{1+i}{2})^8]$$

Решение. Бидејќи

$$(\tfrac{1+i}{2})^2 = \tfrac{i}{2}, \quad (\tfrac{1+i}{2})^4 = -\tfrac{1}{4}, \quad (\tfrac{1+i}{2})^8 = (-\tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{1}{16},$$

имаме

$$\begin{aligned} A &= [1+\tfrac{1+i}{2}][1+(\tfrac{1+i}{2})^2][1+(\tfrac{1+i}{2})^4][1+(\tfrac{1+i}{2})^8] \\ &= [1+\tfrac{1+i}{2}][1+\tfrac{i}{2}][1-\tfrac{1}{4}][1+\tfrac{1}{16}] \\ &= \tfrac{1}{2}(3+i)\tfrac{1}{2}(2+i)\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{17}{16} = \tfrac{255}{256}(1+i). \end{aligned}$$

5. Да се пресмета изразот

$$(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{n+4} + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^{n+4} + (\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{n} + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^{n}.$$

Решение. Да го означиме изразот со A. Тогаш

$$A = (\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^n[(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^4+1] + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^n(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^4+1.$$

Да ги пресметаме изразите во средните загради:

$$(\tfrac{1\pm i}{\sqrt{2}})^4+1 = (\tfrac{(1\pm i)^2}{2})^2+1 = (\tfrac{1\pm 2i-1}{2})^2+1 = (\pm i)^2+1 = 0.$$

Според тоа, $A=0$.

5. Да се пресмета збирот

$$S = \tfrac{1-i}{\sqrt{2}} + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^2 + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^3 + \ldots + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^{1987}.$$

Решение. Да ставиме $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Бидејќи $(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^2 = -i$ добиваме:

$$\begin{aligned} S &= z - i + i \;\; + zi^2 - i^3 - zi^3 + i^4 + zi^4 - \ldots. + i^{1992} + zi^{1992} - zi^{1993} \\ &= z(1-i+i^2-i^3+i^4-i^5+i^6-\ldots+i^{1992}) - i(1-i+i^2-i^3+i^4-i^5+i^6-\ldots+i^{1992}) \\ &= (z-i)(1-i+i^2-i^3+i^4-i^5+i^6-\ldots+i^{1992}) \\ &= (z-i)[(1-i+i^2-i^3)+(i^4-i^5+i^6-i^6)+\ldots+(i^{988}-i^{989}+i^{990}-i^{991})+i^{992}]-zi^{993} \\ &= (z-i)-zi = \tfrac{1-i}{\sqrt{2}} - i - \tfrac{(1-i)i}{\sqrt{2}} = \tfrac{-2i-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -i(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

6. Пресметај ја вредноста на збирот

$$S = \tfrac{1+i}{\sqrt{2}} + (\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2 + (\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^3 + \ldots + (\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^{1993}.$$

Решение. Да ставиме $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Бидејќи $z^2=i$, добиваме

$$\begin{aligned} S &= z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{1993} \\ &= z(1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{1992}) + (z^2 + z^4 + \ldots + z^{1992}) \\ &= z + (z+1)(z^2 + z^4 + \ldots + z^{1992}) \\ &= z + (z+1)(i + i^2 + \ldots + i^{996}) \\ &= z + z(z+1)[(i-1-i+1) + (i-1-i+1) + \ldots + (i-1-i+1)] = z. \end{aligned}$$

7. Нека

$$f(n) = (\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^n + (\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^n .$$

Пресметај $f(1986) + f(1990)$!

Решение. Ако $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, тогаш $z_1^2 = i$, $z_2^2 = -i$, $z_1^4 = z_2^4 = -1$. Користејќи го тоа, добиваме:

$$\begin{aligned} f(1986) + f(1990) &= z_1^{1986} + z_2^{1986} + z_1^{1990} + z_2^{1990} \\ &= z_1^{1986}(1 + z_1^4) + z_2^{1986}(1 + z_2^4) \\ &= z_1^{1986}(1-1) + z_2^{1986}(1-1) = 0. \end{aligned}$$

8. Да се пресмета

$$\frac{(1+i)^{1989}}{(1-i)^{1989} - (1+i)^{1989}} .$$

Решение. Бидејќи

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \qquad \text{и} \qquad (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i ,$$

ќе имаме

$$(1+i)^{1989} = (1+i)^{1989}(1+i) = (2i)^{994}(1+i) = 2^{994}(i^2)^{497}(1+i) = -2^{994}(1+i)$$

а слично и

$$(1-i)^{1989} = -2^{994}(1-i) .$$

Користејќи ги овие равенства, добиваме

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^{1989}}{(1-i)^{1989} - (1+i)^{1989}} &= \frac{-2^{994}(1+i)}{-2^{994}(1-i) + 2^{994}(1+i)} = \frac{-(1+i)}{-(1-i) + (1+i)} \\ &= \frac{-(1+i)}{-1+i+1+i} = \frac{-(1+i)}{2i} = \frac{-(1+i)i}{-2} = \frac{i-1}{2}. \end{aligned}$$

9. Нека z е комплексен број таков што $z + \frac{1}{z} = 1$. Пресметајте ја вредноста на изразот

$$z^{1993} + z^{1994} + z^{1995} + z^{1996} + z^{1997} .$$

Решение. Од $z + \frac{1}{z} = 1$, добиваме

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = (z + \frac{1}{z})^2 - 2 = -1 .$$

Понатаму, од $z + \frac{1}{z} = 1$ добиваме $z^2 - z + 1 = 0$, од што следува

$$(z^2-z+1)(z+1)=0\,,\ z^3+1=0\,,\ \text{т.е. } z^3=-1\,.$$

Според тоа,

$$z^{1993}+z^{1994}+z^{1995}+z^{1996}+z^{1997}=z^{1995}(\tfrac{1}{z^2}+\tfrac{1}{z}+1+z+z^2)$$
$$=z^{1995}=(z^3)^{665}=(-1)^{665}=-1.$$

10. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $z=(\frac{3+i}{2-i})^n$ е реален.

Решение. Комплексниот број $\frac{3+i}{2-i}$ можеме да го запишеме во облик

$$\tfrac{3+i}{2-i}=\tfrac{3+i}{2-i}\tfrac{2+i}{2+i}=\tfrac{6+5i+i^2}{4-i^2}=\tfrac{5+5i}{5}=1+i\,.$$

Значи, $z=(1+i)^n$.

Ако n е парен број, односно $n=2k$ за некој $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$z=(1+i)^n=(1+i)^{2k}=[(1+i)^2]^k=(2i)^k\,.$$

Ако пак k е парен број, односно $k=2m$ за некој $m\in\mathbb{N}$, тогаш

$$z=(2i)^{2m}=(4i^2)^m=4^m(-1)^m\,.$$

Значи, ако $n=4m$, т.е. $4\,|\,n$ тогаш $z\in\mathbb{R}$.

Ако $4\nmid n$, тогаш n има еден од облиците $4m+1, 4m+2$ или $4m+3$. Во секој од тие случаи имаме

$z=(1+i)^{4m+1}=4^m(-1)^m(1+i)\notin\mathbb{R}$,

$z=(1+i)^{4m+2}=4^m(-1)^m(1+i)^2=4^m\cdot(-1)^m\cdot 2i\notin\mathbb{R}$,

$z=(1+i)^{4m+3}=4^m(-1)^m(1+i)^3=4^m(-1)^m\cdot 2i(1+i)=4^m\cdot(-1)^m\cdot 2(-1+i)\notin\mathbb{R}$.

Значи, z е реален број ако и само ако $4\,|\,n$.

11. Да се определат сите комплексни броеви z за кои важи

$$z\bar{z}+1=-i(z-\bar{z})\,.$$

Решение. Нека $z=a+ib$, каде a и b се реални броеви. Бидејќи $z\bar{z}=a^2+b^2$ и $z-\bar{z}=2bi$, дадената равенка се трансформира во $a^2+b^2+1=2b$, од каде добиваме

$$a^2+(b-1)^2=0\,.$$

Но, збир на квадрати на реални броеви е 0 ако и само ако квадрираните броеви се 0, од каде добиваме дека $a=0$ и $b-1=0$, односно $b=1$.

Значи, постои единствен комплексен број кој ги исполнува условите и тоа е $z=i$.

12. Најди комплексен број z што ги задоволува равенствата

$$|z+2i|=|z-4i|\quad\text{и}\quad|z-4|=1\,.$$

Решение. Нека $z=a+ib$. Со замена во равенствата добиваме

$$|a+ib+2i|=|a+ib-4i|\quad\text{и}\quad|a+ib-4|=1$$

кои се еквивалентни со

$$|a+i(b+2)|=|a+i(b-4)| \quad \text{и} \quad |a-4+ib|=1$$
$$\sqrt{a^2+(2+b)^2}=\sqrt{a^2+(b-4)^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{(a-4)^2+b^2}=1$$
$$a^2+b^2+4b+4=a^2+b^2-8b+16 \quad \text{и} \quad a^2-8a+16+b^2=1$$
$$12b=12 \quad \text{и} \quad a^2-8a+16b^2=1.$$

Затоа, $b=1$, а 4 е решение на на равенката $a^2-8a+16=0$. Одовде $a=4$, па затоа $z=4+i$.

13. Да се најдат сите комплексни броеви z за кои важи равенството

$$z^2=\overline{z}.$$

Решение. Нека $z=x+iy$ ($x,y\in\mathbb{R}$). Од $z^2=\overline{z}$ добиваме

$$x^2-y^2=x \qquad (1)$$
$$2xy=-y \qquad (2)$$

Од равенката (2) добиваме $y=0$ или $2x+1=0$. Ако $y=0$, тогаш од равенката (1) се добива $x=0$ или $x=1$. Ако $2x+1=0$, т.е. $x=-\frac{1}{2}$, тогаш од равенката (1) се добива $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, бараните комплексни броеви се $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. Да се докаже дека $|1-\overline{a}b|-|a-b|=(1+|ab|)^2-(|a|+|b|)^2$ каде што a и b се комплексни броеви.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}|1-\overline{a}b|^2-|a-b|^2&=(1-\overline{a}b)\overline{(1-\overline{a}b)}+(a-b)\overline{(a-b)}\\&=(1-\overline{a}b)(1-\overline{b}a)+(a-b)(\overline{a}-\overline{b})\\&=1+\overline{a}\,b\,a\,\overline{b}-a\overline{a}-b\overline{b}\\&=1+|ab|^2-|a|^2-|b|^2-2|ab|-2|ab|\\&=(1+|ab|^2)-(|a|+|b|)^2.\end{aligned}$$

15. Нека a,b и c се комплексни броеви такви што $|a|=|b|=|c|=1$. Докажи дека

$$\left|\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}\right|=1.$$

Решение. Ако z е комплексен број, тогаш $|z|^2=z\overline{z}$. За произволни комплексни броеви z и w важи $\overline{(z+w)}=\overline{z}+\overline{w}$ и $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$. Користејќи ги овие својства добиваме $a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=1$. Понатаму:

$$|ab+bc+ac|^2=(ab+bc+ac)\overline{(ab+bc+ac)}$$
$$=(ab+bc+ac)(a\cdot\overline{a}+b\cdot\overline{b}+c\cdot\overline{c})=$$
$$=3+a\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot b+b\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot b+a\cdot\overline{c}+\overline{a}\cdot c$$
$$|a+b+c|^2=(a+b+c)\cdot\overline{(a+b+c)}=3+a\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot b+b\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot b+a\cdot\overline{c}+\overline{a}\cdot c\,;$$

и конечно $|\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}|^2=1$, од каде што директно следува бараното равенство.

16. Нека се a,b и c се комплексни броеви. Докажи дека
$$|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2=|a+b|^2+|b+c|^2+|a+c|^2.$$

Решение. Ако z е комплексен број, тогаш $|z|^2=z\cdot\overline{z}$. За произволни комплексни броеви z и w важи $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$. Користејќи ги овие својства добиваме:
$$|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2=a\overline{a}+b\overline{b}+c\overline{c}+(a+b+c)\overline{(a+b+c)}$$
$$=2a\overline{a}+2b\overline{b}+2a\overline{b}+b\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{b}+c\overline{a}+a\overline{c}$$
$$|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2=(a+b)\overline{(a+b)}+(b+c)\overline{(b+c)}+(c+a)\overline{(c+a)}$$
$$=2a\overline{a}+2b\overline{b}+2a\overline{b}+b\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{b}+c\overline{a}+a\overline{c}$$
од каде што директно следува бараното равенство.

17. Нека z е комплексен број, a е реален број и $z+\frac{1}{z}=a$. Докажи дека z е реален број или $|z|=1$.

Решение. Од дадениот услов, добиваме $z^2-az+1=0$. Значи, z е решение на квадратната равенка $x^2-ax+1=0$. Последната равенка има реални решенија, и тогаш z е реален број, или решенијата се парот конјугирани комплексни броеви z и $\overline{z}$. Но, тогаш според Виетовите формули добиваме $z\overline{z}=1$, односно $|z|=1$.

18. Нека z_1,z_2 се комплексни броеви. Ако $|z_1|=|z_2|=1$ и $z_1z_2\neq-1$, тогаш $z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален број. Докажи!

Решение. Комплексниот број z е реален ако и само ако $z=\overline{z}$. Според тоа
$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}}\quad\Leftrightarrow\quad z_1+z_2+|z_1|^2\,\overline{z_2}+|z_2|^2\,\overline{z_1}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+|z_1|^2\,z_2+|z_2|^2\,z_1$$
$$\Leftrightarrow\quad z_1+z_2+\overline{z_2}+\overline{z_1}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+z_2+z_1.$$

19. Нека во комплексната рамнина на точките A,B,C и D соодветствуваат комплексните броеви z_j, $j=1,2,3,4$ такви што $|z_j|=1$, $j=1,2,3,4$ и
$$z_1+z_2+z_3+z_4=0. \qquad (1)$$
Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е правоаголник.

Решение. Квадратите на должините на страните на четириаголникот се еднакви на $|z_1-z_2|^2$, $|z_2-z_3|^2$, $|z_3-z_4|^2$ и $|z_4-z_1|^2$. Бидејќи точките A и B лежат на единечната кружница добиваме

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)\ .$$

Аналогно добиваме

$$|z_2-z_3|^2=2-(z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3),\ |z_3-z_4|^2=2-(z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4),$$
$$|z_4-z_1|^2=2-(z_4\overline{z_1}+\overline{z_4}z_1).$$

Од условот (1) следува

$$z_1+z_2=-(z_3+z_4) \text{ и } \overline{z_1}+\overline{z_2}=-(\overline{z_3}+\overline{z_4}).$$

Ако ги помножиме овие равенства, добиваме

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4.$$

Според тоа,

$$|z_1-z_2|^2=|z_3-z_4|^2, \text{ т.е. } |z_1-z_2|=|z_3-z_4|.$$

Аналогно се докажува дека

$$|z_2-z_3|=|z_4-z_1|.$$

Конечно, тетивниот четириаголник $ABCD$ е паралелограм, што значи дека тој е правоаголник.

20. Ако z и w се комплексни броеви такви што $\mathrm{Re}\,z>0$ и $\mathrm{Re}\,w>0$, тогаш $|\frac{z-w}{\overline{z}+w}|<1$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Нека $z=x+iy$, $w=a+ib$. Тогаш

$$|\frac{z-w}{\overline{z}+w}|=\frac{|z-w|}{|\overline{z}+w|}=\frac{|(x-a)+(y-b)i|}{|(x+a)+(-y+b)i|}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x+a)^2+(b-y)^2}}\ .$$

Ако $x>0$ и $a>0$, тогаш $(x-a)^2<(x+a)^2$, а $(y-b)^2=(b-y)^2$, па затоа поткореновата величина на броителот е секогаш помала од онаа на именителот, т.е. дропката е помала од 1, со што тврдењето е докажано.

Втор начин. Од $\mathrm{Re}\,z>0$, $\mathrm{Re}\,w>0$ и од својствата на комплексните броеви имаме

$$\begin{aligned}|z-w|^2-|\overline{z}-w|^2&=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})-(\overline{z}+w)(z+\overline{w})\\&=z\overline{z}-\overline{z}w-z\overline{w}+w\overline{w}-\overline{z}z-z\overline{w}-\overline{z}w+w\overline{w}\\&=-[z(w+\overline{w})+\overline{z}(w+\overline{w})]=-(w+\overline{w})(z+\overline{z})\\&=-4\,\mathrm{Re}\,z\cdot\mathrm{Re}\,w<0,\end{aligned}$$

т.е. $|z-w|^2<|\overline{z}+w|^2$, од што следува $|\frac{z-w}{\overline{z}+w}|<1$.

21. Докажи дека $w=\frac{z-1}{z+1}$, каде што z е комплексен број таков што $z\neq-1$, е чисто имагинарен ако и само ако $|z|=1$.

Решение. Нека $|z|=1$ и нека $z=a+ib$. Тогаш

$$w=\frac{a-1+ib}{a+1+ib}\cdot\frac{a+1-ib}{a+1-ib}=\frac{a^2-1+b^2+2ib}{(a+1)^2+b^2}=\frac{a^2-1+b^2}{(a+1)^2+b^2}+i\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}\ .$$

Бројот w е чисто имагинарен ако $a^2-1+b^2=0$, односно $|z|^2=1$, а оттука следува $|z|=1$. Ако $|z|=1$, тогаш $a^2-1+b^2=0$, па јасно е дека w е чисто имагинарен.

22. Најди ја најмалата и најголемата вредност на изразот $|z-\frac{1}{z}|$, ако z е комплексен број таков што $|z|=2$.

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$|z-\frac{1}{z}|=|\frac{z^2-1}{z}|=\frac{|z^2-1|}{|z|}=\frac{|z^2-1|}{2}\ .$$

Бидејќи $|z^2-1|\geq|z^2|-1=4-1=3$ и $|z^2-1|\leq|z^2|+1=5$, добиваме

$$\frac{3}{2}\leq|z-\frac{1}{z}|\leq\frac{5}{2}\ .$$

Ако $z=\pm 2$, тогаш $|z-\frac{1}{z}|=\frac{3}{2}$, па најмалата вредност на $|z-\frac{1}{z}|$ е $\frac{3}{2}$ а ако $z=\pm 2i$, тогаш $|z-\frac{1}{z}|=\frac{5}{2}$, па најголемата вредност на $|z-\frac{1}{z}|$ е $\frac{5}{2}$.

Втор начин. Нека $z=a+ib$. Од $|z|=2$ следува $a^2+b^2=4$, па имаме:

$$\begin{aligned}|z-\tfrac{1}{z}|^2&=|\tfrac{z^2-1}{z}|^2=\tfrac{|z^2-1|^2}{|z|^2}=\tfrac{|z^2-1|^2}{4}=\tfrac{1}{4}|z-1|^2|z+1|^2\\&=\tfrac{1}{4}(a^2-2a+1+b^2)(a^2+2a+1+b^2)=\\&=\tfrac{1}{4}(5-2a)(5+2a)=\tfrac{1}{4}(25-4a^2)\\&=\tfrac{1}{4}(25-4(4-b^2))=b^2+\tfrac{9}{4}.\end{aligned}$$

Од $a^2+b^2=4$ следува дека $0\leq b^2\leq 4$, па $\frac{3}{2}\leq|z-\frac{1}{z}|\leq\frac{5}{2}$. Најмалата вредност е за $z=\pm 2$ и изнесува $\frac{3}{2}$, а најголемата вредност е за $z=\pm 2i$ и изнасува $\frac{5}{2}$.

23. Нека z и w се комплексни броеви такви што $|z|=|w|=|z-w|$. Пресметај ја вредноста на $(\frac{z}{w})^{300}$.

Решение. Ако $x=\frac{z}{w}$, тогаш $|x|=|\frac{z}{w}|=\frac{|z|}{|w|}=1$, $|x-1|=|\frac{z}{w}-1|=\frac{|z-w|}{|w|}=1$. Од $1=|x-1|^2=(x-1)(\overline{x-1})$, добиваме $x\bar{x}-x-\bar{x}+1=1$. Но бидејќи $1=|x|^2=x\bar{x}$, следува $x-1+\bar{x}=0$. Ако помножиме со x $(x\neq 0)$, ќе добиеме $x^2-x+1=0$, а од тука, множејќи со $x+1$, $(x\neq -1)$, ќе добиеме $x^3+1=0$, односно $x^3=-1$. Конечно, $(\frac{z}{w})^{300}=(x^3)^{100}=1$.

24. Даден е комплексниот број u. Одреди ги сите комплексни броеви z така што $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ е реален број.

Решение. Комплексниот број a е реален број ако и само ако $a=\bar{a}$. Нека

$$\frac{u-\bar{u}z}{1-z}=\overline{\left(\frac{u-\bar{u}z}{1-z}\right)}, \text{ т.е. } \frac{u-\bar{u}z}{1-z}=\frac{\bar{u}-u\bar{z}}{1-\bar{z}}.$$

Тогаш

$$u-\bar{u}z-u\bar{z}+\bar{u}z\bar{z}=\bar{u}-u\bar{z}-\bar{u}z+uz\bar{z} \text{ т.е. } (\bar{u}-u)(1-z\bar{z})=0.$$

Ако u е реален број, тогаш $u=\bar{u}$, па решение е секој $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Ако u е комплексен број, тогаш решение е секој $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ таков што $|z|=1$.

25. Дадени се комплексните броеви $a,\ b,\ c$ при што $1+c+c^2=0$. Докажи дека

$$(ac^2+bc)(bc^2+ac)=a^2-ab+b^2.$$

Решение. Од $1+c+c^2=0$, имаме

$$c+c^2+c^3=0, \text{ т.е. } c^3=-(c+c^2)=-(-1)=1.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}(ac^2+bc)(bc^2+ac)&=c^2(ac+b)(bc+a)=c^2(abc^2+a^2c+b^2c+ab)\\&=c^2(ab(c^2+1)+c(a^2+b^2))=c^2(ab(-c)+c(a^2+b^2))\\&=c^3(a^2-ab+b^2)=a^2-ab+b^2.\end{aligned}$$

26. За комплексниот ненулти број z, важи $z^3=\bar{z}$. Пресметај го z^{2004}.

Решение. Од $z^3=\bar{z}$ следува $\bar{z}^3=z$. Со множење на двете равенства добиваме $z^3\bar{z}^3=\bar{z}z$, односно $|z|^6=|z|^2$. Бидејќи $z\neq 0$, имаме $|z|^4=1$ од каде што $|z|=1$. Тогаш $z^4=\bar{z}\quad z=|z|^2=1$ па $z^{2004}=(z^4)^{501}=1$.

27. Ако z е комплексен број таков што $|z|=1$, докажи дека

$$\left|\frac{a_2z^2+a_1z+a_\circ}{\bar{a}_\circ z^2+\bar{a}_1z+\bar{a}_2}\right|=1, \text{ каде } a_\circ,a_1,a_2\in\mathbb{C}.$$

Решение. Нека $|z|=1$. Тогаш

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\bar{a}_0z^2+\bar{a}_1z+\bar{a}_2}\right|&=\left|\frac{a_2z^2+a_1z+a_0}{\bar{a}_0z^2+\bar{a}_1z+\bar{a}_2}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}}\right|=\left|\frac{a_2z|z|^2+a_1|z|^2+a_0\bar{z}}{\bar{a}_0z|z|^2+\bar{a}_1|z|^2+\bar{a}_2\bar{z}}\right|\\&=\left|\frac{a_2z+a_1+a_0\bar{z}}{\overline{a_2z+a_1+a_0\bar{z}}}\right|=\frac{|a_2z+a_1+a_0\bar{z}|}{|\overline{a_2z+a_1+a_\circ\bar{z}}|}\overset{|u|=|\bar{u}|}{=}1.\end{aligned}$$

28. Ако за комплексниот број $z\neq -3+2i$ важи $\left|\frac{z-2+3i}{z+3-2i}\right|=1$, тогаш

$$\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z).$$

Докажи!

Решение. *Прв начин.* Од $|\frac{z-2+3i}{z+3-2i}|=1$, имаме

$$(z-2+3i)(\overline{z}-2-3i)=(z+3-2i)(\overline{z}+3+2i)\,.$$

Последното равенство е еквивалентно со

$$(z+\overline{z})+i(z-\overline{z})=0\,.$$

Бидејќи $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$ и $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$, добиваме

$$\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)=0\text{, т.е } \operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)\,.$$

Втор начин. Ако $z=a+bi$ тогаш од условот во задачата добиваме

$$|(a-2)+(b+3)i|=|(a+3)+(b-2)i|,$$

а оттука

$$(a-2)^2+(b+3)^2=(a+3)^2+(b-2)^2\,.$$

Од последното равенство имаме $10a-10b=0$ па $\operatorname{Re}(z)=a=b=\operatorname{Im}(z)$.

29. Определи ги комплексните броеви z за кои

$$|z|=\frac{1}{|z|}=|z-1|\,.$$

Решение. Јасно е дека равенките се определени за $z\neq 0$. Од равенката $|z|=\frac{1}{|z|}$, добиваме $|z|^2=1$, односно

$$|z|=1\,. \tag{1}$$

Од претходната равенка и равенката $|z|=|z-1|$ ја добиваме равенката

$$|z-1|=1\,. \tag{2}$$

Ако комплексниот број z го запишеме во алгебарски облик $z=x+iy$, од (1) и (2) добиваме

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}. \tag{3}$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка, ја добиваме равенката $2x-1=0$. од каде $x=\frac{1}{2}$. Ако замениме во било која од равенките од системот (3), ја добиваме равенката $y^2=\frac{3}{4}$. Нејзини решенија се $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, множеството броеви

$$\{\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\},$$

е решение на равенките.

30. Ако a,b и c се комплексни броеви такви што $|a|=|b|=1$ и $\overline{a}\neq b$, тогаш $\frac{\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{a}bc}{\overline{a}-b}$ е имагинарен број. Докажи!

Решение. Нека $w=\frac{\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{a}bc}{\overline{a}-b}$. Тогаш $\overline{w}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\,\overline{c}}{a-\overline{b}}$. Од $|a|=|b|=1$ следува дека $a\overline{a}=b\overline{b}=1$. Имаме:

$$\overline{w}=\frac{a+\bar{b}+c+a\bar{b}\bar{c}}{a-\bar{b}}=\frac{a+\bar{b}+c+a\bar{b}\bar{c}}{a-\bar{b}}\cdot\frac{\bar{a}b}{\overline{\bar{a}b}}=\frac{a\bar{a}b+\bar{a}b\bar{b}+\bar{a}bc+a\bar{a}b\bar{b}\bar{c}}{a\bar{a}b-\bar{a}b\bar{b}}=\frac{b+\bar{a}+\bar{a}bc+\bar{c}}{b-\bar{a}}=-w$$

и оттука $\operatorname{Re} w=0$.

31. Нека z и z_0 се комплексни броеви, $|z_0|=1$ и $z\neq z_0$. Докажи дека

$$\left|\frac{z-z_0}{\bar{z}z_0-1}\right|=1$$

Решение. Тврдењето на задачатsa следува од следната низа еквивалентни равенства

$$\left|\frac{z-z_0}{\bar{z}z_0-1}\right|=1$$

$$|z-z_0|=|\bar{z}z_0-1|$$

$$(z-z_0)\overline{(z-z_0)}=(\bar{z}z_0-1)\overline{(\bar{z}z_0-1)}$$

$$(z-z_0)(\bar{z}-\overline{z_\circ})=(\bar{z}z_0-1)(z\overline{z_0}-1)$$

$$|z|^2-z\overline{z_0}-z_0\bar{z}+1=|z|^2-\bar{z}z_0-z\overline{z_\circ}+1.$$

32. Комплексните броеви z_1, z_2 и z_3 ги исполнуваат условите

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \text{ и } z_1+z_2+z_3=0.$$

Докажи дека точките z_1, z_2 и z_3 се темиња на рамностан триаголник.

Решение. Треба да докажеме дека $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_1-z_3|$. Од условот $z_1+z_2+z_3=0$, добиваме

$$|z_3-z_1|^2=|2z_1+z_2|^2=(2z_1+z_2)(2\overline{z_1}+\overline{z_2})=5+2(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2).$$

Ист резултат се добива ако претходната постапка ја направиме со $|z_3-z_2|^2$ или со $|z_2-z_1|^2$. Со тоа доказот е завршен.

33. Ако $|z_1|=|z_2|=1$ и $z_1z_2+1\neq 0$, тогаш $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ е реален број. Докажи!

Решение. Имаме

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{(z_1+z_2)\overline{(1+z_1z_2)}}{|1+z_1z_2|^2}=\frac{(z_1+z_2)(1+\overline{z_1}\,\overline{z_2})}{|1+z_1z_2|^2}=\frac{z_1+z_2+(z_1\overline{z_1})\overline{z_2}+\overline{z_1}(z_2\overline{z_2})}{|1+z_1z_2|^2}$$

$$=\frac{z_1+z_2+\overline{z_2}+\overline{z_1}}{|1+z_1z_2|^2}=\frac{2\operatorname{Re} z_1+2\operatorname{Re} z_2}{|1+z_1z_2|^2}\in\mathbb{R}.$$

34. Ако $|z|=1$ и $z\neq -1$, докажи дека $\frac{z-1}{i(z+1)}$ е реален број.

Решение. Имаме

$$\frac{(z-1)\overline{(i(z+1))}}{|z+1|^2}=\frac{(z-1)(-i(\bar{z}+1))}{|z+1|^2}=\frac{-i(z\bar{z}+z-\bar{z}-1)}{|z+1|^2}=\frac{-i(1+z-\bar{z}-1)}{|z+1|^2}$$

$$=\frac{-i(-2i\operatorname{Im} z)}{|z+1|^2}=\frac{-2\operatorname{Im} z}{|z+1|^2}\in\mathbb{R}.$$

35. Ако z_1, z_2 и z_3 се темиња на рамностран триаголник со тежиште во координатниот почеток, тогаш:

а) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$;

б) $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$

Решение. Разгледуваме ситуација во координатен систем каде z_1 е на x оска, а координатниот почеток е на симетралата на отсечката со краеви z_2 и z_3 (со ротација, било која положба се сведува на ваква положба).

Ако должината на страната на триаголникот е a, тогаш

$$z_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ \ z_2 = \frac{a}{2}i,\ \ z_3 = -\frac{a}{2}i\ .$$

Сега, лесно се проверува дека се точни тврдењата а) и б).

36. Нека a и b се комплексни броеви и $c > 0$. Докажи дека

$$|a+b|^2 \le (1+c)|a|^2 + (1+\tfrac{1}{c})|b|^2\ . \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи

$$|a+b|^2 = (a+b)\overline{(a+b)} = (a+b)(\overline{a}+\overline{b}) = a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b}\ ,$$

даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a\overline{b} + b\overline{a} \le ca\overline{a} + \tfrac{1}{c} b\overline{b}\ .$$

Имаме

$$ca(\overline{a} - \tfrac{1}{c}\overline{b}) - b(\overline{a} - \tfrac{1}{c}\overline{b}) \ge 0\ ,$$

$$(ca-b)(\overline{a} - \tfrac{1}{c}\overline{b}) \ge 0\ ,$$

$$(ca-b)\tfrac{1}{c}(c\overline{a} - \overline{b}) \ge 0\ ,$$

$$\tfrac{1}{c}(ca-b)\overline{(ca-b)} \ge 0\ ,$$

$$|ca-b|^2 \ge 0\ .$$

Последното неравенство е точно за секој реален број c, $c > 0$ и за $a, b \in \mathbb{C}$. Тоа е еквивалентно со сите претходни неравенства, добиваме дека неравенство (1) е точно.

2. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ЗАПИС НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

1. Докажи дека решенијата на равенката $(az+b)^3 = 1$ по z $(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ се темиња на рамностран триаголник чија должина на страна е $\sqrt{3}/|a|$.

Решение. Ако $z_\circ, z_1$ и z_2 се решенија на равенката (се наоѓаат со помош на Моавровата формула), тогаш треба да се докаже дека

$$|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0| = |z_2 - z_1|\ .$$

Бидејќи

$$z_k = -\frac{b}{a} + \frac{1}{a}(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3})\ (k = 0, 1, 2),$$

лесно се докажува дека

$$z_1 - z_0 = \frac{1}{a}(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

па според тоа $|z_1 - z_0| = \frac{\sqrt{3}}{|a|}$.

Аналогно се добива

$$|z_2 - z_0| = |z_2 - z_1| = \frac{\sqrt{3}}{|a|}.$$

.

2. Дали е точно равенството $\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$?

Решение. Левата страна можеме да ја запишеме во облик

$$w = \sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} + \sqrt{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}).$$

Со примена на Моавровата формула добиваме

$$w = \sqrt{2}[(\cos\frac{\pi/3+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/3+2k\pi}{2}) + (\cos\frac{-\pi/3+2n\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi/3+2n\pi}{2})] \quad (k,n = 0,1).$$

Според тоа w има 4 вредности. Една од нив е за $k = n = 0$, па добиваме

$$\sqrt{2}[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}] = \sqrt{6}.$$

Меѓутоа, ако земеме $k = n = 1$, за w се добива $-\sqrt{6}$. Значи, левата страна, збир на квадратни корени од комплексни броеви не е еднозначно одреден комплексен број.

3. Ако $(\frac{a+i}{a-i})^n = 1, (a \in R)$, докажи дека $a = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, ..., n-1.$

Решение. Имаме

$$\sqrt[n]{1} = \frac{a+i}{a-i} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, ..., n-1$$

т.е. $a + i = \sqrt[n]{1}(a - i)$, па затоа

$$a = -i\frac{1+\sqrt[n]{1}}{1-\sqrt[n]{1}} = -i\frac{1+\cos(2k\pi/n)+i\sin(2k\pi/n)}{1-\cos(2k\pi/n)+i\sin(2k\pi/n)}$$

$$= -i\frac{2\cos^2(k\pi/n)+i2\sin(k\pi/n)\cos(k\pi/n)}{2\sin^2(k\pi/n)+i2\sin(k\pi/n)\cos(k\pi/n)}$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}, (k = 0, 1, ... n-1).$$

4. Ако $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha,$ докажи дека $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Имаме

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$$

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$$

$$x = \cos\alpha \pm i\,|\sin\alpha|$$

Претпоставуваме дека $\alpha \in [0, \pi].$ Тогаш

$$x = \cos\alpha + i\sin\alpha \text{ или } x = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha).$$

Во првиот случај, според Моавровата формула добиваме

$$x^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \text{ и } x^{-n} = \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha) .$$

Заради тоа

$$x^n + x^{-n} = 2\cos n\alpha .$$

Слично постапуваме во вториот случај.

5. Докажи дека

$$x^{2n} - 1 \equiv (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\tfrac{k\pi}{n} + 1).$$

Решение. Треба да ги најдеме сите корени (реални и комплексни) на равенката $x^{2n} - 1 = 0$ и да ја примениме теоремата за факторизација на полиноми. Бидејќи $1 = \cos 0 + i\sin 0$ според Моавровата формула добиваме

$$x = \sqrt[2n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\tfrac{2k\pi}{2n} + i\sin\tfrac{2k\pi}{2n}, (k = 0,1,..., 2n-1).$$

Значи, решенијата на горната равенка се:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \cos\tfrac{\pi}{n} + i\sin\tfrac{\pi}{n},..., x_n = -1,...,$$

$$x_{2n-1} = \cos\tfrac{(2n-1)\pi}{n} + i\sin\tfrac{(2n-1)\pi}{n} = \cos\tfrac{\pi}{n} + i\sin\tfrac{\pi}{n}$$

Ако ги комбинираме паровите комплексни броеви и нивните конјугирани комплексни броеви и ја примениме теоремата за факторизација на полиноми добиваме:

$$x^{2n} - 1 \equiv [(x-1)(x+1)][(x - \cos\tfrac{\pi}{n} - i\sin\tfrac{\pi}{n})(x - \cos\tfrac{\pi}{n} + i\sin\tfrac{\pi}{n})]...$$

$$...[(x - \cos\tfrac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n})\cdot(x - \cos\tfrac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n})]$$

$$= (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\tfrac{k\pi}{n} + 1) .$$

6. Докажи дека

$$\prod_{k=2}^{n-1}\sin\tfrac{k-1}{2n}\pi = \tfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} .$$

Решение. Бидејќи

$$x^{2n} - 1 \equiv (x^2 - 1)(1 + x^2 + ... + x^{2n-2}), \text{ за } x \neq 1 ,$$

според претходната задача добиваме

$$1 + x^2 + ... + x^{2n-2} \equiv \prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\tfrac{k\pi}{n} + 1).$$

Ако x тежи кон единица левата страна тежи кон n, а десната страна тежи кон

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2(1 - \cos\tfrac{k\pi}{n}).$$

Заради тоа

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\tfrac{k\pi}{n} .$$

Ако коренуваме од левата и десната страна на последното равенство го добиваме бараното равенство.

7. Докажи дека:

а) $x^{2n+1}-1 \equiv (x-1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1)$

б) $x^{2n+1}+1 \equiv (x+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}+1)$

в) $x^{2n}+1 \equiv \prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1)$.

Упатство. Постапи како во задача 5.

II КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА И КВАДРАТНА РАВЕНКА

1. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

1. Ако за реалните броеви a, b, c важи: $a > 0$ и $b > a + c$, тогаш равенката $ax^2 + bx + c = 0$ има две реални решенија. Докажи!

Решение. Треба да докажеме дека од $a > 0$ и $b > a + c$ следува $D > 0$.

1) Ако $c < 0$, тогаш поради $a > 0$ имаме $D = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$.

2) Ако $c \geq 0$, тогаш од неравенствата $a > 0$ и $b > a + c$ ги добиваме неравенствата $a + c > 0$ и $b > a + c > 0$. Од последното неравенство следува дека

$$D = b^2 - 4ac > (a + c)^2 - 4ac = (a - c)^2 > 0 .$$

2. Нека е $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

а) Да се одреди $f(x+1) - f(x)$.

б) Ако $f(x+1) - f(x) = x$, да се најдат a и b.

Решение. Имаме

а) $f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 - ax^2 - bx - 1 = 2ax + a + b$

б) Од $f(x+1) - f(x) = x$ имаме $2a = 1$ и $a + b = 0$, т.е. $a = \frac{1}{2}$ и $b = -\frac{1}{2}$.

3. Квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, за $x = 1, 2, 3$, добива вредности $0, 1, 4$ соодветно. Која вредност овој полином добива за $x = 11$?

Решение. Од условите на задачата се добива следниов систем линеарни равенки со непознати a, b, c:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 4. \end{cases} .$$

Решавајќи го овој систем, се добива $a = 1, c = 1, b = -2$, па дадениот полином гласи $x^2 - 2x + 1$. Ако во добиениот полином ставиме $x = 11$, добиваме дека бараната вредност е 100.

4. Дадена е фамилијата параболи $y(x) = mx^2 + 2x + n$, $m, n \in \mathbf{R}$.

а) Да се определи онаа парабола чие теме е во точката $T(2,3)$.

б) Да се најдат нулите на оваа парабола.

в) Да се скицира графикот на оваа парабола.

Решение. а) Темето на параболата $y(x) = ax^2 + bx + c$ има координати $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$. Во случајов $a = m, b = 2, c = n$, па затоа

$$-\frac{2}{2m}=2,\quad \frac{4mn-4}{4m}=3, \text{ т.е. } m=-\frac{1}{2},\, n=1\,.$$

Според тоа бараната парабола е $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

б) Нулите на параболата се: $x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+2}}{-1}=2\pm\sqrt{6}$.

в) Гарфикот на параболата скицирај го самостојно.

5. Дадена е функцијата $f(x)=x^2-4x+5$. Да се најдат вредностите на m за кои неравенството $f(a)+f(b)>m$ е исполнето за секои реални броеви a и b.

Решение. Од $f(x)=x^2-4x+5=\left(x-2\right)^2+1$ следува дека

$$\min f(x)=f(2)=1,$$

па затоа $f(a)+f(b)\geq 2$ за секои реални броеви a и b. Според тоа, бараните вредности за m се $m\in(-\infty,2)$.

6. Со формулата

$$y=x^2-2(k-1)x+k^2\,,\ k\in\mathbb{R}\,,$$

дадено е множество од параболи.

Да се определи геометриското место на темињата на параболите.

Решение. Темето на параболата $y=ax^2+bx+c$ е зададено со $T(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

Заменувајќи $a=1, b=2(k-1)$ и $c=k^2$, се добива дека темето е $T(k-1,2k-1)$ за даден реален број k. Бидејќи $2k-1=2(k-1)+1$, бараното геометриско место е правата $y=2x+1$

7. Нека a,b и c се должини на страни на триаголник. Докажи дека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дадена со:

$$f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)+c^2\,,$$

прима позитивна вредност за секој реален x.

Решение. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дадена со $f(x)=Ax^2+Bx+C$ прима позитивна вредност за секој реален број x ако и само ако $A>0$ и $D=B^2-4AC<0$.

Бидејќи, во дадениот случај, имаме $A=b^2>0$, првиот услов е исполнет.

За вториот услов, имаме

$$\begin{aligned}D&=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\\&=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)\\&=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]\\&=(a+b+c)(b+c-a)(b-c-a)(a+b-c).\end{aligned}$$

Бидејќи a,b и c се должини на страни на триаголник, имаме

$$a+b+c>0\,,\ b+c-a>0\,,\ b-c-a<0 \text{ и } a+b-c>0\,,$$

од каде што се добива дека $D<0$, односно дека е исполнет и вториот услов.

8. Докажи дека ако $10x+11y=\frac{1}{3}$, тогаш $x^2+y^2>\frac{1}{1995}$.

Решение. Од условот $10x+11y=\frac{1}{3}$, добиваме $y=\frac{1-30x}{33}$, од каде

$$x^2+y^2=x^2+(\frac{1-30x}{33})^2=\frac{1}{1089}(1989x^2-60x+1).$$

Да ставиме $f(x)=1989x^2-60x+1$. Тогаш, минималната вредност на f е

$$f_{\min}(x)=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot 1989-3600}{4\cdot 1989}=\frac{121}{221}.$$

Значи,

$$x^2+y^2=\frac{1}{1089}(1989x^2-60x+1)\geq\frac{1}{1089}\cdot\frac{121}{221}=\frac{1}{1089}>\frac{1}{1995}.$$

9. Најди x, за којшто функцијата

$$y=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+...+(x-x_{1996})^2$$

прима најмала вредност.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}y&=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+...+(x-x_{1996})^2\\&=1996x^2-2(x_1+x_2+...+x_{1996})+(x_1^2+x_2^2+...+x_{1996}^2)\end{aligned}$$

Последната функција е квадратна со коефициент $a=1996>0$, па значи прима најамала вредност во $\frac{x_1+x_2+...+x_{1996}}{1996}$.

10. Со формулата $y=(k+1)x^2-2kx+k-1$, $k\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ е определено множество параболи.

а) Одреди го геометриското место на темињата на овие параболи;

б) Реши ја равенката $(k+1)x^2-2kx+k-1=0$.

Решение. а) Нека $T(x,y)$ е темето на параболата $y=(k+1)x^2-2kx+k-1$, тогаш

$$x=\frac{k}{k+1}=1-\frac{1}{k+1},\quad y=-\frac{1}{k+1}.$$

Со елиминирање на k од горните равенки го добиваме бараното геометриско место: $y=x-1$. Според тоа геометриското место на темињата на параболите е права.

б) Бидејќи $D=4k^2-4(k^2-1)=4$, добиваме $x_1=1$, $x_2=\frac{k-1}{k+1}$.

11. Нека равенката $ax^2+bx+c=0$, каде што $a\neq 0$, нема реални решенија. Да се определи знакот на c, ако се знае дека $a+b+c<0$.

Решение. Според условот на задачата, квадратната функција

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

нема реални нули, па значи $f(x)<0$ за секој $x\in\mathbb{R}$ или $f(x)>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Но $f(1)=a+b+c<0$, па значи мора $f(0)=c<0$.

12. а) За кои вредности на m и n изразот

$$\frac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$$

има најголема вредност?

б) Нацртај го графикот на функцијата

$$y=(4m+6n-2)\,|\,x\,|+2m+3n$$

за сите вредности на m и n за кои изразот $\frac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ има најголема вредност.

Решение. а) Изразот

$$\frac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$$

има најголема вредност ако

$$4m^2+12mn+9n^2+1$$

има најмала вредност.

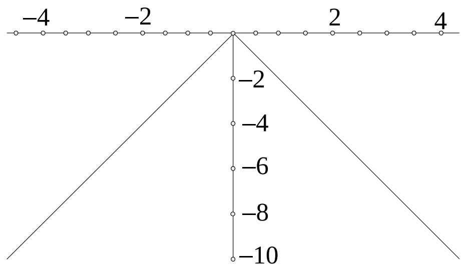
Бидејќи

$$4m^2+12mn+9n^2+1=(2m+3n)^2+1\geq 1,$$

најмалата вредност на

$$4m^2+12mn+9n^2+1$$

се добива ако $2m+3n=0$.



б) Бидејќи $2m+3n=0$ добиваме дека функцијата е $y=-2\,|\,x\,|$ а нејзиниот график е прикажан на цртежот десно.

13. Даден е квадратниот трином

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

при што $c<0$ и $a+b+c>0$.

Докажи дека f има реални корени.

Решение. Нека $f(x)=ax^2+bx+c$ нема реални корени. Тогаш дискриминантата $D=b^2-4ac<0$. Значи, $4ac>b^2$ и бидејќи $c<0$ добиваме $a<\frac{b^2}{4c}$. Оттука имаме

$$a+b+c<\frac{b^2}{4c}+b+c=\frac{b^2+4bc+4c^2}{4c}=\frac{(b+2c)^2}{4c}<0,$$

што е во контрадикција со почетниот услов.

14. Квадратните триноми $p_i(x)=x^2+a_ix+b_i$, $i=1,2,3$ се такви што $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ и $b_2=\frac{b_1+b_3}{2}$. Квадратните триноми $p_1(x)$ и $p_3(x)$ немаат реални нули.

Докажи дека триномот $p_2(x)$ исто така нема реални нули.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи квадратните триноми $p_1(x)$ и $p_3(x)$ немаат реални нули, и коефициентот пред x^2 им е позитивен, имаме $p_1(x)>0$ и $p_3(x)>0$ за $x\in\mathbb{R}$. Затоа,

$$\frac{p_1(x)+p_3(x)}{2}>0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Од друга страна,

$$\frac{p_1(x)+p_3(x)}{2}=\frac{x^2+a_1x+b_1+x^2+a_3x+b_3}{2}=x^2+\frac{a_1+a_3}{2}x+\frac{b_1+b_3}{2}=p_2(x).$$

Според тоа, $p_2(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, односно триномот нема реални нули.

Втор начин. Бидејќи квадратните триноми $p_1(x)$ и $p_3(x)$ немаат реални корени, нивните дискриминанти се негативни, т.е.

$$a_1^2-4b_1<0 \text{ и } a_3^2-4b_3<0.$$

Од последните две неравенства добиваме

$$a_1^2+a_3^2-4b_1-4b_3<0.$$

Ќе ја разгледаме дискриминантата на триномот $p_2(x)$:

$$D=\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2-4\frac{b_1+b_3}{2}=\frac{1}{4}[a_1^2+a_3^2+2a_1a_3-8b_1-8b_3].$$

Од неравенството $2a_1a_3\le a_1^2+a_3^2$, добиваме

$$D<\frac{1}{4}[2a_1^2+2a_3^2-8b_1-8b_3]=\frac{1}{2}[a_1^2+a_3^2-4b_1-4b_3]<0.$$

Бидејќи $D<0$, квадратниот трином $p_2(x)$ нема реални нули.

2. КВАДРАТНА РАВЕНКА

1. Равенката

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}=1$$

(a,b и c се меѓусебно различни) е од втор степен, па според тоа би требало да има најмногу две различни решенија. Меѓутоа неа ја задоволуваат три различни броеви $x=a, x=b$ и $x=c$. Како е можно тоа?

Решение. Равенката е еквивалентна со равенката $0\cdot x^2+0\cdot x+1=1$ т. е. таа е идентитет. Решение е секој реален број x.

2. Производот на еден корен на квадратната равенка $ax^2+bx+b=0$, со еден корен на квадратната равенка $ax^2+ax+b=0$, е 1.

Најди ги корените на равенките.

Решение. Нека y и z се корени на равенките

$ax^2+ax+b=0$ и $ax^2+bx+b=0$,

соодветно, за кои $yz=1$. Тогаш $z=\frac{1}{y}$ и $a\frac{1}{y^2}+b\frac{1}{y}+b=0$, т.е. $by^2+by+a=0$.

Ако ги собереме равенките

$$ay^2+ay+b=0 \text{ и } by^2+by+a=0$$

добиваме

$$(a+b)y^2+(a+b)y+a+b=0,$$

т.е.

$$(a+b)(y^2+y+1)=0\,.$$

Изразот y^2+y+1 е позитивен, за секој $y\in\mathbb{R}$. Според тоа $a+b=0$, т.е. $b=-a$. Значи, равенките се $ax^2+ax-a=0$ и $ax^2-ax-a=0$. Равенките се квадратни па $a\neq 0$. Според тоа дадените равенки се $x^2+x-1=0$ и $x^2-x-1=0$.

Нивни решенија се $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ и $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, соодветно.

3. Дадена е равенката $\frac{x^2+2}{x^2-2x+2}=m,$ каде што m е реален параметар. За кои вредности на m равенката има точно еден реален корен?

Решение. Бидејќи $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0,$ за секој реален број x, дадената равенка е еквивалентна на равенката:

$$(m-1)x^2-2mx+2m-2=0$$

Ако m=1, тогаш добиената линеарна равенка има единствено решение $x=0$. Ако $m\neq 1,$ тогаш квадратната равенка има единствено решение ако и само ако $D=4(-m^2+4m-2)=0$, т.е. $m=2\pm\sqrt{2}.$ Следствено, $m\in\{1,2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}\}$.

4. Дадена е квадратната равенка по x

$$4(p-2)^2x^2-4(p-2)qx+q(4p-3q+4)-(p-1)^2=0\,,\ \ p,q\in\mathbb{N}\,.$$

Каков услов треба да исполнуваат p и q за равенката да има двоен корен? Да се најде барем еден двоен корен кој е природен број.

Решение. За дадената равенка да биде квадратна, потребно е $p-2\neq 0$. Непосредно се проверува дека дискриминантата на равенката е

$$D=4(p-2)^2(2q-p-1)^2\,.$$

За равенката да има двоен корен, потребно е $D=0$. Бидејќи $4(p-2)^2\neq 0$, потребно е $2q-p-1=0$, а тоа е и условот кој треба да го задоволуваат p и q за квадратната равенка да има двоен корен. Тој двоен корен е

$$x=\frac{2(p-2)q}{4(p-2)^2}=\frac{q}{2(p-2)}=\frac{p+1}{4(p-2)}\,.$$

За x да биде природен број, потребно е $p\geq 3$ и $p+1\geq 4(p-2)$, од каде следува дека $p=3$ и $x=1$ е еден двоен корен.

5. За кој природен број a равенката $x^2+y^2=axy$ има решенија во множеството природни броеви.

Решение. Ако ја разгледаме равенка како квадратна по y, т.е.

$$y^2-axy+x^2=0\,,$$

тогаш $y_{1/2}=\frac{ax\pm x\sqrt{a^2-4}}{2}$.

За да решението е природен број, мора a^2-4 да е полн квадрат, т.е. мора да постои природен број k така што

$$a^2-4=k^2$$

односно

$$(a-k)(a+k)=4\,.$$

Бидејќи a и k се природни броеви $a+k$ е природен број, па заради горното равенство $a-k$ е природен број. Уште мора $a+k\geq a-k$. Заради ова можни се следниве два случаи:

а) $a-k=2, a+k=2$, што повлекува $a=2$, $k=0$

б) $a-k=1, a+k=4$, што повлекува $a=\frac{5}{2}$, $k=\frac{3}{2}$.

Бидејќи само во случајот а) a е природен број, единствено решение на задачата е $a=2$.

6. а) За кои вредности на *m*, равенката

$$mx^2+2(m+1)x-1-m=0\,,$$

има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на *m*, да се најде двојниот корен на добиената равенка.

б) Да се реши неравенката $(x-2)(x-3)^2(x-4)^3<0$.

Решение. а) За да равенката има двоен корен треба да важи

$$(2(m+1))^2-4m(-1-m)=0$$

односно

$$2m^2+3m+1=0\,.$$

Ова е квадратна равенка чии решенија се

$$m_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 1}{4};\ m_1=-\frac{1}{2};\quad m_2=-1\,.$$

За $m_1=-\frac{1}{2},\quad x_{1,2}=1$ додека за $m_2=-1,\quad x_{1,2}=0$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x-2)(x-4)<0$ при услов $x\neq 3$, чие решение е унијата на интервалите (2,3) и (3,4).

7. а) За кои вредности на *m*, равенката

$$mx^2+2(m-1)x+1-m=0\,,$$

има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на *m*, да се најде двојниот корен на добиената равенка.

б) Да се реши неравенката $(x+2)(x+3)^2(x+4)^3<0$.

Решение. а) За равенката да има двоен корен потребно е

$$(2(m-1))^2-4m(1-m)=0$$

односно

$$2m^2-3m+1=0\,.$$

Ова е квадратна равенка чии решенија се

$$m_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 1}{4};\ m_1=1;\quad m_2=\frac{1}{2}\,.$$

За $m_1=1,\quad x_{1,2}=0$, додека за $m_2=\frac{1}{2},\quad x_{1,2}=1$.

б) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x+2)(x+4)<0$ при услов $x \neq -3$, чие решение е унијата на интервалите $(-4,-3)$ и $(-3,-2)$.

8. Ако a,b,c се непарни броеви, тогаш корените на равенката

$$ax^2+bx+c=0$$

не се рационални броеви. Докажи!

Решение. Ако $a=2k+1, b=2m+1, c=2n+1$, тогаш

$$\begin{aligned} D &= (2m+1)^2-4(2k+1)(2n+1) \\ &= 4m(m+1)-8(2kn+k+n)-3 \\ &= 4m(m+1)-8(2kn+k+n+1)+5 \end{aligned}$$

Бројот $m(m+1)$ е секогаш парен, па бројот $4m(m+1)$ е делив со 8. Значи, $D=8p+5$. За корените на равенката да бидат рационални броеви, треба $D=8p+5$ да биде полн квадрат. Но D е непарен број па затоа

$$D=(2q+1)^2=4q(q+1)+1,$$

т.е. D не може да биде потполн квадрат. Следователно, корените на равенката не може да се рационални броеви.

9. Нека p и q се реални броеви такви што равенката

$$x^2+4(p-\frac{6q}{p})x+4q=0$$

нема реални решенија. Докажи дека равенката

$$x^2+px+q=0$$

има две различни реални решенија.

Решение. Бидејќи дадената равенка нема реални решенија, следува

$$16(p-\frac{6q}{p})^2-16q<0, \text{ т.е. } (p-\frac{6q}{p})^2-q<0.$$

Множејќи го даденото неравенство со p^2 добиваме

$$p^4-12p^2q-p^2q+36q^2<0.$$

Оттука добиваме

$$(p^2-4q)(p^2-9q)<0.$$

Имаме две можности:

$$1^\circ \begin{cases} p^2-4q<0 \\ p^2-9q>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2^\circ \begin{cases} p^2-4q>0 \\ p^2-9q<0 \end{cases}$$

Ако важи R, тогаш множејќи го второто неравенство со -1 добиваме

$$\begin{cases} p^2-4q<0 \\ -p^2+9q<0 \end{cases}$$

па собирајќи ги двете неравенства добиваме $5q<0$, што не е можно, бидејќи од условот $(p-\frac{6q}{p})^2-q<0$ следува $0<(p-\frac{6q}{p})^2<q$. Значи

$$p^2-4q>0 \text{ и } p^2-9q<0\,.$$

Со тоа докажавме дека равенката $x^2+px+q=0$ има две различни реални решенија.

10. Дадена е неравенката $x^2+ax-1<0$. Определи ги вредностите на параметарот a, така што множеството од нејзините решенија е интервал со должина 5.

Решение. Дискриминантата на неравенката е $D=a^2+4\geq 0$, па според тоа таа има реални решенија. Од условот множеството решенија на неравенката да е интервал со должина 5 добиваме:

$$5=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+4}\,.$$

Решенија на равенката $\sqrt{a^2+4}=5$ се $a=\pm\sqrt{21}$. Лесно се проверува дека добиените вредности ги задоволуваат условите од задачата.

11. Нека ax^2+bx+c е трином кој нема реални корени и $a+b+c>0$. Докажи дека $c>0$.

Решение. Бидејќи триномот ax^2+bx+c нема реални корени, за било кое $x\in\mathbb{R}$, $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$. Од условот $a+b+c>0$, добиваме дека

$$f(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c>0\,.$$

Значи, $ax^2+bx+c>0$, за секој реален број x. Според тоа $c=f(0)>0$.

12. Нека $x_1>0$ и $a,b\in\mathbb{R}$ се корените на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$, за чии коефициенти важи $3a=2(c-b)$. Најди ги корените на равенката.

Решение. Да забележиме дека $a\neq 0$, во спротивно равенката не е квадратна. Користејќи ја формулата за разложување на квадратен трином кога се познати корените на соодветната квадратна равенка, може да запишеме

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\,.$$

Заменувајќи ги условите на задачата добиваме

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-5ax_1x+4ax_1^2\,.$$

Споредувајќи ги коефициентите на квадратните триноми имаме

$$b=-5ax_1,\ c=4ax_1^2\,.$$

Овие вредности ќе ги замениме во условот за коефициентите, па оттука

$$3a=2(4ax_1^2+5ax_1)\,.$$

Ако равенката се подели со $a\neq 0$ следува дека x_1 е корен на квадратната равенка

$$8x_1^2+10x_1-3=0\,,$$

со решенија $x_{1_1}=\frac{1}{4}$ и $x_{1_2}=-\frac{3}{2}$. Со оглед на тоа што $x>0$, останува $x_1=\frac{1}{4}, x_2=1$.

13. Определи ги сите вредности на параметарот m, така што за секој x важи

$$(4m^2-5m+1)x^2+2(m+1)x+1>0\,. \qquad (1)$$

Решение. Неравенството $ax^2+bx+c>0$ важи за секој реален број x ако и само ако $a>0$ и $D=b^2-4ac<0$. Во нашиов случај

$$a=4m^2-5m+1=(m-1)(4m-1)$$

$$D=4(m+1)^2-(4m^2-5m+1)=4m(-3m+7)\,.$$

Од $a>0$ следува дека $m\in(-\infty,-\frac{1}{4})\cup(1,+\infty)$, а од $D<0$, пак, следува дека $m\in(-\infty,0)\cup(\frac{7}{3},+\infty)$, т.е. важи неравенството (1) за секој реален број x ако и само ако $m\in(-\infty,0)\cup(\frac{7}{3},+\infty)$

14. Докажи дека квадратните равенки

$$ax^2+bx+c=0 \text{ и } bx^2+cx+a=0\,,\ a,b,c\in\mathbb{R}\,,\ a\neq0\,,\ b\neq0$$

имаат заедничко решение ако и само ако важи $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Решение. Нека α е заедничкото решение на дадените квадратни равенки. Следи дека

$$0=\alpha(a\alpha^2+b\alpha+c)-(b\alpha^2+c\alpha+a)=a(\alpha^3-1)\,,$$

па бидејќи $a\neq0$, добиваме дека $\alpha^3=1$. Ако $\alpha=1$, добиваме $a+b+c=0$, па од идентитетот

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

следи дека $a^3+b^3+c^3=3abc$. Ако α е комплексен корен на равенката $\alpha^3=1$, тогаш и $\overline{\alpha}$ е заедничко решение на дадените квадратни равенки, па дадените равенки се еквивалентни. Од тука $a:b=b:c=c:a$, па затоа $a=b=c$, од каде и $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Обратно, нека важи $a^3+b^3+c^3=3abc$, па врз основа на горниот идентитет се добива дека $a=b=c$ или $a+b+c=0$. Во првиот случај дадените равенки се идентични, а во вториот случај заедничко решение им е 1.

15. При кои вредности на a неравенството $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2>0$ важи за секој реален број x?

Решение. Неравенството (1), при $a^2-1\neq0$, важи за секој реален број x ако и само ако се исполнети следниве услови:

$$a^2-1>0\,, \qquad D=4(-a^2-2a+3)<0\,,$$

т.е. ако и само ако: $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ и $a\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$, од каде што добиваме дека $a\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

Во случајот кога $a^2-1=0$, имаме: левата страна на (1) за $a=1$ е 2, а за $a=-1$ е $-4x+2>0$, т.е. и $a=1$ е решение.

Следствено, неравенството (1) важи за секој реален број x ако и само ако $a \in (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$.

15. Равенката $ax^2 + bx + c = 0$ има реални решенија. Докажи дека равенката $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ исто така има реални решенија.

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

а) $ac \le 0$. Тогаш $-4a^3c^3 \ge 0$ од каде што добиваме дека $D = b^6 - 4a^3c^3 \ge 0$. Значи, равенката $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ има реални решенија.

б) $ac > 0$. Квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$ има реални решенија, па според тоа

$$b^2 - 4ac \ge 0\text{, т.е. } b^2 \ge 4ac > 0.$$

Но тогаш $b^6 \ge 64a^3c^3 > 4a^3c^3$. Значи, $D = b^6 - 4a^3c^3 > 0$, што е доволен услов за да $a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$ има реални решенија.

16. За еден квадратен трином, за секој негов корен x_0 бројот $x_0 - \frac{1}{2x_0 - 9}$ е исто така негов корен.

Определи го збирот на неговите корени.

Решение. Нека a и b се корени на квадратниот трином. Тогаш, од условот на задачата имаме

$$b = a - \frac{1}{2a-9} \quad \text{и} \quad a = b - \frac{1}{2b-9}.$$

Ако двете равенства ги собереме, добиваме

$$b + a = a + b - \frac{1}{2a-9} - \frac{1}{2b-9}\text{, т.е. } 2b - 9 = -(2a - 9)$$

па затоа $a + b = 9$. Сега лесно се добива дека корените се 4 и 5. Такви полиноми се

$$a(x^2 - 9x + 20).$$

17. Дадени се квадратните триноми

$$f(x) = x^2 + 2a_1 x + b_1,\ g(x) = x^2 + 2a_2 x + b_2 \text{ и } h(x) = x^2 + 2a_3 x + b_3,$$

при што $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3 > 1$. Барем еден од нив има реални и различни корени. Докажи!

Решение. Ќе претпоставиме спротивно. Тогаш дискриминантите на соодветните квадратни равенки се непозитивни, т.е.

$$a_1^2 \le b_1,\ a_2^2 \le b_2 \text{ и } a_3^2 \le b_3.$$

Левите, а со тоа и десните страни на овие неравенства се непозитивни. Според тоа

$$a_1^2\ a_2^2\ a_3^2 \le b_1\ b_2\ b_3,$$

односно $N^2 \le N$, каде $N > 1$. Но, од $N > 0$ од неравенството $N^2 \le N$ добиваме $N \le 1$. Тоа е спротивно од условот на задачата $N > 1$.

Значи, постои $i \in \{1, 2, 3\}$ таков што $a_i^2 > b_i$. Соодветниот полином има реални и различни нули.

18. Определи ги сите парови цели броеви (a,b) такви што збирот $a+b$ е корен на равенката

$$x^2+ax+b=0\,.$$

Решение. Нека a и b се цели броеви за кои што е исполнет условот од задачата. Тогаш

$$(a+b)^2+a(a+b)+b=0$$

т.е. a и b се решенија на равенката $2a^2+3ab++2a^2+b=0$. Истата можеме да ја запишеме во облик на квадратна равенка по b,

$$b^2+(3a+1)b+2a^2=0\,.$$

Оваа равенка има целобројни решенија по b ако и само ако нејзината дискриминанта

$$D=(3a+1)^2-4\cdot 2a^2=(a+1)^3-8$$

е полн квадрат.

Разликата меѓу два последователни квадрати е расти. Според тоа, разликата на два последователни квадрати е 8 само за 9 и 1. Значи, $(a+3)^2=9$ од каде што добиваме $a=0$ или $a=-6$. За $a=0$ добиваме $b=0$ и $b=-1$ а за $a=-6$ добиваме $b=8$ и $b=9$.

Конечно, решенија за (a,b) се $(-6,8)$, $(-6,9)$, $(0,0)$ и $(0,-1)$.

19. Да се реши равенката $x^4-34x^2+225=0$.

Решение. Воведуваме смена $x^2=t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2-34t+225=0$,чии решенија се и . Од $x^2=9$ следува $x_{1/2}=\pm 3$, а од $x^2=25$ следува $x_{3/4}=\pm 5$.

20. Да се реши равенката $x^4-41x^2+400=0$.

Решение. Воведуваме смена $x^2=t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2-41t+400=0$,чии решенија се $t_1=16$ и $t_2=25$. Од $x^2=16$ следува $x_{1/2}=\pm 4$, а од $x^2=25$ следува $x_{3/4}=\pm 5$.

21. Да се реши равенката $x^4+6x^2+25=0$.

Решение. Воведуваме смена $x^2=t$ и ја добиваме равенката $t^2+6t+25=0$ чии решенија се $t_1=-3+4i$ и $t_1=-3-4i$. Ако се вратиме на почетната непозната наоѓаме $x^2=-3+4i$ или $x^2=-3-4i$. Земаме $x=a+ib$ и со замена во $x^2=-3+4i$ добиваме

$$(a+ib)^2=-3+4i \text{ т.е. } a^2-b^2+i2ab=-3+4i\,.$$

Од последната равенка го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

чии решенија се $a_1 = 1, b_1 = 2; a_2 = -1, b_2 = -2$ па затоа решенија на почетната равенка се $x_1 = 1 + 2i; x_2 = -1 - 2i$.

Слично, од $x^2 = -3 - 4i$ се добива $x_3 = 1 - 2i; x_4 = -1 + 2i$.

22. Да се реши равенката: $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$.

Решение. Имаме:

$$x^4 - 6x^2 + 25 = 0$$
$$(x^2 - 3)^2 + 16 = 0$$
$$(x^2 - 3)^2 - (4i)^2 = 0$$
$$(x^2 - 3 - 4i)(x^2 - 3 + 4i) = 0$$
$$x^2 = 3 + 4i \quad \text{или} \quad x^2 = 3 - 4i$$

Од $x^2 = 3 - 4i$ следува $x_1 = 2 - i$ и $x_2 = -2 + i$, а од $x^2 = 3 + 4i$ следува $x_3 = 2 + i$ и $x_4 = -2 - i$. Понатаму, постапи како во претходната задача.

23. Да се реши равенката $(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) = 40$, во $\mathbb{C}$.

Решение. Бидејќи $(x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$ и $(x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$, равенката добива облик

$$(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8) = 40.$$

Ставајќи $x^2 - 6x + 5 = y$, ја добиваме равенката $y(y+3) = 40$ чии решенија се $y_1 = 5$ и $y_2 = -8$. Решавајќи ги равенките

$$x^2 - 6x + 5 = 5 \quad \text{и} \quad x^2 - 6x + 5 = -8,$$

ги добиваме корените на дадената равенка: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 3 + 2i$, $x_4 = 3 - 2i$.

24. Дадена е равенката $2x^2 - (a+b)x + \sqrt{ab}(a + b - 2x) = 0,$ каде a и b се реални броеви. Да се покаже дека едно решение на равенката е аритметичка, а другото геометриска средина на броевите a и b.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$2x^2 - (a + b + 2\sqrt{ab})x + (a+b)\sqrt{ab} = 0.$$

Нејзината дискриминанта

$$D = (a + b + 2\sqrt{ab})^2 - 8(a+b)\sqrt{ab} = (a + b - 2\sqrt{ab})^2.$$

Решенијата се $x_1 = \frac{a+b}{2}$ и $x_2 = \sqrt{ab}.$

25. Во множеството реални броеви, реши ја равенката:

$$|x^4 - x^2 - 6| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|.$$

Решение. Левата страна на равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\begin{aligned}|x^4-x^2-6|&=|x^4-4-(x^2+2)|=|(x^2+2)(x^2-2)-(x^2+2)|\\&=(x^2+2)|x^2-2-1|=(x^2+2)|x^2-3|\end{aligned} \qquad (*)$$

а десната можеме да ја запишеме во облик

$$|x^4-4|-|x^2+2|=|(x^2+2)(x^2-2)|-|x^2+2|=(x^2+2)(|x^2-2|-1) \qquad (**)$$

Во (*) и (**) ја искористивме точноста на неравенството $x^2+2>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Почетната равенка ја запишуваме во облик

$$(x^2+2)|x^2-3|=(x^2+2)(|x^2-2|-1),$$

и ако поделиме со x^2+2 истата го добива обликот

$$|x^2-3|=(|x^2-2|-1). \qquad (1)$$

Сега ќе разгледаме три случаи.

а) Ако $|x|\geq\sqrt{3}$ равенката преминува во идентитетот $x^2-3=x^2-2-1=x^2-3$.

б) Ако $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$ равенката преминува во равенката $3-x^2=x^2-2-1$ чие решение е $x=\sqrt{3}$ кое не припаѓа во интервалот $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$.

в)Ако $|x|<\sqrt{2}$ равенката преминува во $3-x^2=2-x^2-1$ што не е можно.

Значи, решение на равенката е секој x, $|x|\geq\sqrt{3}$.

26. За кои вредности на параметарот m сите решенија на равенката

$$mx^4-mx^2+m+1=0,$$

припаѓаат на интервалот $(-1,1)$.

Решение. Со смената $y=x^2$, равенката го добива обликот

$$my^2-my+m+1=0. \qquad (1)$$

Ако x е решение на почетната равенка што се наоѓа меѓу реалните броеви -1 и 1, тогаш y е решение на (1) што се наоѓа меѓу реалните броеви 0 и 1. Од друга страна равенката (1) не може да има само едно решение меѓу 0 и 1, бидејќи во тој случај ќе важи $f(0)f(1)<0$, каде $f(y)=my^2-my+m+1$, односно $(m+1)^2<0$ што не е можно.

Да забележиме дека (1) има две решенија кои се меѓу 0 и 1 ако се исполнети следните услови

а) $D\geq 0$, т.е. $m^2-4m(m+1)\geq 0$. Последната неравенка е исполнета за $m\in[-\frac{4}{3},\infty)$.

б) $mf(0)>0$, т.е. $m(m+1)>0$. Последната неравенка е точна за $m\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

в) $mf(1)>0$, т.е. $m(m+1)>0$. Последната неравенка е точна за $m\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

г) $f'(1)f'(0)<0$, т.е. $-m^2<0$. Последната неравенка е точна $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Сите четири услови се исполнети за $m\in[-\frac{4}{3},-1)$. За вака определените вредности на m имаме $0<y_1<y_2<1$, односно

$$-1<-\sqrt{y_2}<-\sqrt{y_1}<0<\sqrt{y_1}<\sqrt{y_2}<1,$$

што и требаше да се докаже.

27. Реши ја равенката

$$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(6x+7)^2(3x+4)(3x+3)=18.$$

Со смената $t=3x+\frac{7}{2}$, ја добиваме равенката $(2t)^2(t+\frac{1}{2})(t-\frac{1}{2})=18$, т.е. равенката $4t^4-t^2-18=0$. Решенијата на оваа равенка се $t_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$ и $t_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$. Според тоа, решенијата на почетната равенка се $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{5}{3}$, $x_{3,4}=-\frac{7}{6}\pm i\frac{\sqrt{2}}{3}$.

28. Реши ја равенката

$$x^4-x^3-10x^2+2x+4=0.$$

Решение. Бидејќи $x=0$ не е решение, дадената равенка е еквивалентна со равенката $x^2-x-10+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=0$. Воведуваме смена $t=x-\frac{2}{x}$, $x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4$ и равенката го добива обликот $t^2-t-6=0$. Решенијата на оваа равенка се $t_1=3$ и $t_2=-2$. За $t_1=3$ имаме $x-\frac{2}{x}=3$, т.е. $x^2-3x-2=0$ и решенија се $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. За $t_2=-2$ имаме $x-\frac{2}{x}=-2$, т.е. $x^2+2x-2=0$ и решенија се $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

29. Нека p_1, p_2, q_1, q_2 се реални броеви такви што

$$p_1p_2=2(q_1+q_2).$$

Докажи дека барем една од равенките

$$x^2+p_1x+q_1=0, \qquad x^2+p_2x+q_2=0$$

има реални корени.

Решение. Нека претпоставиме дека ниту една од дадените равенки нема реален корен. Тогаш

$$p_1^2-4q_1<0 \text{ и } p_2^2-4q_2<0.$$

Ако ги собереме последните две неравенства добиваме

$$p_1^2-4q_1+p_2^2-4q_2<0$$
$$p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)<0,$$
$$p_1^2+p_2^2-2p_1p_2<0$$
$$(p_1-p_2)^2<0,$$

што е противречност.

30. Реши ја неравенката

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}+\frac{x-2}{x-3}-12<0,$$

во множеството реални броеви $\mathbb{R}$

Решение. Неравенката се сведува до неравенката

$$\frac{(x-2)^2}{(x-3)^2}-\frac{x-2}{x-3}-12<0,$$

при што мора да биде $x\neq 3$. Ставајќи $y=\frac{x-2}{x-3}$ се добива: $y^2+y-12<0$. Бидејќи нули на полиномот y^2+y-12 се $y=-4$ и $y=3$, а коефициентот пред y^2 е 1, т.е. поголем од 0, се добива дека

$$-4<y<3\text{, т.е. } -4<\frac{x-2}{x-3}<3.$$

Според тоа, множеството решенија на дадената равенка ќе биде пресекот на решенијата на неравенките:

$$\frac{x-2}{x-3}-3<0 \qquad (1)$$

$$\frac{x-2}{x-3}+4>0. \qquad (2)$$

Множеството решенија на неравенката (1) е $(-\infty,3)\cup(\frac{7}{2},+\infty)$, а множеството решенија на неравенката (2) е $(-\infty,\frac{14}{5})\cup(3,+\infty)$. Значи, множеството решенија на дадената неравенка е $(-\infty,\frac{14}{5})\cup(\frac{7}{2},+\infty)$.

31. Решете ја неравенката

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\geq xy.$$

Решение. Бидејќи $x\geq 1$ и $y\geq 1$, дадената неравенка е еквивалентна со:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-1}}{y}\geq 1.$$

Сега секој од собироците на левата страна од неравенката не е поголем од $0,5$, т.е.

$$\frac{\sqrt{t-1}}{t}\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(t-1)=t^2 \Leftrightarrow (t-2)^2\geq 0$$

при што равенство се достигнува кога $t=2$. Значи, $x=y=2$.

3. ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ КОИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

1. Да се реши равенката

$$(2x+2)\sqrt{x+5}=x^2+3x+2,$$

во множеството реални броеви.

Решение. Последователно добиваме

$$(2x+2)\sqrt{x+5}=x^2+3x+2 \Leftrightarrow$$

$$2(x+1)\sqrt{x+5}=(x+1)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$(x+1)(2\sqrt{x+5}-x-2)=0$$

Едно решение на последната равенка е $x=1$, бидејќи $x+5\geq 0$. Решавајќи ја равенката $2\sqrt{x+5}-x-2=0$ се добива

$$4x+20=x^2+4x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=16.$$

За $x=-4$, левата страна на почетната равенка е еднаква на −6, додека десната е 6. Вредноста $x = 4$ е решение на почетната равенка. Решенија на дадената равека се $x = 1$ и $x = 4$.

2. Да се реши равенката

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=2x.$$

Решение. Равенката има смисла за $x\geq 0$, $1-2x\geq 0$ и $1+2x\geq 0$ што значи за $x\geq 0, x\leq \frac{1}{2}$ и $x\geq -\frac{1}{2}$ од што следува $x\in[0,\frac{1}{2}]$. Дадената равенка ја квадрираме и последователно добиваме

$$1-2x+2\sqrt{1-4x^2}+1+2x=4x^2$$

$$2\sqrt{1-4x^2}=4x^2-2$$

$$(1-4x^2)=(2x^2-1)^2$$

$$1-4x^2=4x^4-4x^2+1$$

т.е. $4x^4=0$. Решение на последната равенка е $x=0$, но тоа не е решение на почетната равенка бидејќи $\sqrt{1-2\cdot 0}+\sqrt{1+2\cdot 0}=2\neq 0=2\cdot 0$.

3. Да се реши равенката

$$(2x-2)\sqrt{x+10}=x^2+x-2,$$

во множеството реални броеви.

Решение. Имаме

$$(2x-2)\sqrt{x+10}=x^2+x-2 \Leftrightarrow$$

$$2(x-1)\sqrt{x+10}=(x-1)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(2\sqrt{x+10}-x-2)=0$$

Едно решение на последната равенка е $x=1$, бидејќи $x+10\geq 0$. Решавајќи ја равенката $2\sqrt{x+10}-x-2=0$ се добива

$$4x+40=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2=36.$$

За $x=-6$, левата страна на почетната равенка е −28, додека десната е 28. Вредноста $x=6$ е решение на почетната равенка. Решенија на дадената равенка се $x=1$ и $x=6$.

4. Да се реши равенката

$$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$$

Решение. Воведуваме смена $t=\sqrt[3]{x}$, со што равенката се трансформира во:

$$\frac{t^4-1}{t^2-1}-\frac{t^2-1}{t-1}=4.$$

За $t\neq -1$ и $t\neq 1$, ова равенка е еквивалентна со равенката

$$t^2+1-t+1=4, \text{ т.е. } t^2-t-2=0,$$

чии решенија се: $t_1=-1$ и $t_2=2$. Бидејќи $t\neq -1$, единствено решение на равенката е x за кое $\sqrt[3]{x}=2$, т.е. $x=8$.

5. Реши ја равенката

$$\sqrt{x-9}+\sqrt{x+12}-\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=0\ .$$

Решение. Со квадрирање на равенката $\sqrt{x-9}+\sqrt{x+12}=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}$ се добива

$$x-9+2\sqrt{x^2+3x-108}+x+12=x-3+2\sqrt{x^2-7x+12}+x-4\ ,$$

т.е.

$$\sqrt{x^2+3x-108}=\sqrt{x^2-7x+12}-5\,.$$

Со повторно квадрирање, се добива

$$x^2+3x-108=x^2-7x+12-10\sqrt{x^2-7x+12}+25\,,$$

т.е.

$$2\sqrt{x^2-7x+12}=29-2x\ .$$

Со уште едно квадрирање, се добива

$$4x^2-28x+48=841-116x+4x^2$$

т.е.

$$88x=793\,.$$

Бидејќи $\frac{793}{88}-9=\frac{1}{88}>0$, бараното решение е $x=\frac{793}{88}$.

6. Да се реши по x равенката

$$\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a\ .$$

Решение. Со квадрирање на ирационалната равенка добиваме

$$x-\sqrt{x-a}=a^2 \quad \text{или} \quad \sqrt{x-a}=x-a^2\ .$$

Со повторно квадрирање ја добиваме следната квадратна равенка

$$x^2-(2a^2+1)x+a^4+a=0\,,$$

чии решенија се: $x_1=a^2+a$, $x_2=a^2-a+1$.

Треба да се провери во кој случај тие се решенија на ирационалната равенка. За $a<0$ равенката нема решение. Затоа нека $a\geq 0$, т.е. $\sqrt{a^2}=a$. Ако вредноста $x=a^2+a$ ја замениме во ирационалната равенка добиваме:

$$\sqrt{a^2+a-\sqrt{a^2+a-a}}=\sqrt{a^2+a-a}=a\ .$$

Значи, $x=a^2+a$ е решение на ирационалната равенка, за секое $a\geq 0$.

Ако вредноста $x=a^2-a+1$ ја замениме во ирационалната равенка, добиваме:

$$\sqrt{a^2-a+1\sqrt{a^2-a+1-a}}=\sqrt{a^2-a+1-|\,a-1\,|}=\begin{cases} a, & \text{за } a\leq 1\\ \sqrt{a^2-2a-2}, & \text{за a}>1\end{cases}\quad .$$

Бидејќи за $a>1$, $\sqrt{a^2-2a-2}<a$ добиваме дека $x=a^2-a+1$ е решение на ирационалната равенка само за $0\leq a\leq 1$.

Равенката има две решенија за $0 \le a \le 1$, едно решение за $a > 1$ и нема решенија за $a < 0$.

7. Да се одредат реалните решенија на равенката $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = a$ каде што a е произволен реален број. Во зависност од параметарот a да се определи бројот на решенија на равенката и тие да се наведат.

Решение. Јасно е дека равенката нема решение ако $a < 0$, затоа што левата страна на равенката никогаш не е негативна. Поради тоа претпоставуваме $a \ge 0$.

Да воведеме смена $\sqrt{x-1} = t$, каде што $t \ge 0$(поради ненегативноста на корените). Од смената добиваме $x = t^2 + 1$. Со замена во дадената равенка добиваме:

$$\sqrt{t^2+1+3-4t} = a$$
$$\sqrt{t^2-4t+4} = a$$
$$\sqrt{(t-2)^2} = a$$
$$|t-2| = a \qquad (1)$$

Заради знакот на апсолутна вредност, разгледуваме два случаи:

а) $t \ge 2$. Во овој случај $|t-2| = t-2$ и равенката (1) добива облик $t-2 = a$, од каде што $t = a+2$.

Но, од условите $t \ge 0$ и $t \ge 2$, за параметарот a треба да важи $a+2 \ge 0$ и $a+2 \ge 2$, односно $a \ge -2$ и $a \ge 0$. Значи, $t = a+2$ за $a \ge 0$.

б) $t < 2$. Во овој случај $|t-2| = 2-t$ и равенката (1) го добива обликот $2-t = a$, од каде што $t = 2-a$.

Но, од условите $t \ge 0$ и $t < 2$, за параметарот a треба да важи $2-a \ge 0$ и $2-a < 2$, односно $a \le 2$ и $a > 0$. Значи, $t = 2-a$ за $a \in (0, 2]$.

Се враќаме на смената $\sqrt{x-1} = t$, односно $x = t^2+1$ и конечно добиваме:

- ако $a < 0$ равенката нема решение.
- ако $a = 0$ равенката има единствено решение $x = 5$;
- ако $a \in (0,2]$ равенката има две решенија $x = a^2 \pm 4a + 5$;
- ако $a > 2$ равенката има единствено решение $x = a^2 + 4a + 5$.

8. Да се определат реалните решенија на равенката

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-2}.$$

Решение. Бидејќи $x-1 < x+1$ за секој реален број x јасно е дека за секој реален број од дефиниционата област на равенката важи $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$, односно $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} < 0$. Бидејќи левата страна на равенката е негативна, а десната е ненегативна, дадената равенка нема решение.

9. Во множеството на реалните броеви реши ја равенката

$$\sqrt{3x-a} = a-2x. \qquad (1)$$

Решение. Ако ја квадрираме дадената равенка добиваме:

$$4x^2-(4a+3)x+a^2+a=0\,.$$

Значи, $x_{1/2}=\frac{4a+3\pm\sqrt{8a+9}}{8}$. Да провериме дали најдените решенија ја задоволуваат почетната равенка. Десната страна има вредност

$$a-2x=\frac{-3\mp\sqrt{8a+9}}{8}\,.$$

Бидејќи $a-2x$ е ненегативен број, добиваме дека корен може да биде само

$$x_1=\frac{4a+3-\sqrt{8a+9}}{8}\,. \qquad (2)$$

Освен тоа, од (1) очигледно е дека $a\geq 0$, па затоа:

$$a-2x=\frac{-3+\sqrt{8a+9}}{4}=\sqrt{(\frac{-3+\sqrt{8a+9}}{4})^2}=\sqrt{\frac{9+4a-6\sqrt{8a+9}}{8}}$$

$$=\sqrt{\frac{12a+9-6\sqrt{8a+9}}{8}-a}=\sqrt{3x-a}.$$

10. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x+3}=\sqrt{6x^2-2x-18}\,.$$

Решение. Вредностите на подкореновите изрази треба да се ненегативни, од каде $x\in[-3,\frac{1-\sqrt{109}}{6}]\cup[\frac{1-\sqrt{109}}{6},+\infty)$. Нека

$$u=\sqrt{x^2+x+1}\,,\ v=\sqrt{x+3}\,,\ w=\sqrt{6x^2-2x-18}\,.$$

Од дадената равенка и дефинираноста на u,v,w се добива системот $u+2v=w$, $6u^2-8v^2=w^2$, од каде после елиминацијата на w, се добива $5u^2-4uv-12v^2=0$. Бидејќи $u=-3$ не е решение на дадената равенка, следи дека $v\neq 0$, па последната равенка може да се запише како $5(\frac{u}{v})^2-4\frac{u}{v}-12=0$, од каде $\frac{u}{v}=2$ или $\frac{u}{v}=-\frac{6}{5}$. Втората можност отпаѓа, затоа што $u,v\geq 0$, па затоа $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+3}}=2$, односно $x^2+3x-11=0$, од каде $x=\frac{3\pm\sqrt{53}}{2}$, што навистина се решенија на дадената равенка, затоа сто припаѓаат на областа на дефинираност на корените.

11. Во множеството $\mathbb{R}$ реши ја равенката $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

Решение. Дадената равенка е дефинирана за $x\geq 1$. Нека $u=\sqrt[3]{2-x}$, $v=\sqrt{x-1}$. Од $v=1-u$ и $u^3+v^2=1$, се добива $u(u-1)(u+2)=0$, од каде $u\in\{0,1,-2\}$, односно $x\in\{2,1,10\}$, и бидејќи секој од добиените броеви е не помал од 1, се прифаќаат сите три решенија.

12. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}+(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=0\,.$$

Решение. Дадената равенка има смисол за $x\neq 1$ и $x\neq 3$.

Нека $t=\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$. Тогаш,

$$(3-x)t^2-2t+(x-1)=0,$$

од каде $t=1$ или $t=\frac{x-1}{3-x}$. Во првиот случај се добива $x=2$, а во вториот $(\frac{3-x}{x-1})^4=1$, односно или $\frac{3-x}{x-1}=1$, т.е. $x=2$ или $\frac{3-x}{x-1}=-1$, што нема решение. Значи, единствено решение на равенката е $x=2$.

13. Да се реши равенката

$$\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0.$$

Решение. Очигледно е дека едно решение е $x=-(a+1)$. Ќе покажеме дека тоа е и единствено решение. Бидејќи кореновите показатели на собироците се непарни броеви воведуваме смена $y=x+a+1$. Со воведената смена добиваме

$$\sqrt[3]{y-1}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y+1}=0,$$

која можеме да ја запишеме во облик

$$-\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{y-1}+\sqrt[3]{y+1}.$$

Ако последната равенка ја кубираме, добиваме

$$-y=y-1+3\sqrt[3]{(y^2-1)(y+1)}+3\sqrt[3]{(y^2-1)(y-1)}+y+1$$

$$-3y=3\sqrt[3]{y^2-1}(\underbrace{\sqrt[3]{y+1}+\sqrt[3]{y-1}}_{-\sqrt[3]{y}})$$

$$-y=-\sqrt[3]{y^3-y}.$$

Јасно е дека последната равенка има единствено решение $y=0$, па според тоа единствено решение на почетната равенка е $x=-(a+1)$.

4. ВИЕТОВИ ФОРМУЛИ

1. Нека решенијата на равенката $(a-1)x^2-(a+1)x+2a-1=0$, $a\in R$, $a\neq 1$, се x_1 и x_2. Најди ги сите вредности на параметарот b така да производот $(x_1-b)(x_2-b)$ не зависи од a.

Решение. Бидејќи $a\neq 1$, дадената равенка е квадратна, па од Виетовите формули следува дека

$$(x_1-b)(x_2-b)=x_1x_2-b(x_1+x_2)+b^2=\frac{2a-1}{a-1}-b\frac{a+1}{a-1}+b^2=b^2-b+2+\frac{1-2b}{a-1},$$

па дадениот израз не зависи од a акко $b=\frac{1}{2}$.

2. Дадена е квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in R$, $a\neq 0$. Ако двете решенија на равенката се реални и припаѓаат на интервалот $(0,1)$ докажи дека $a(2c+b)<0$.

Решение. Ако $x_1,x_2\in(0,1)$ се решенијата на равекната, тогаш

$$\frac{2c+b}{a}=2\cdot\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=2x_1x_2-x_1-x_2=x_1x_2-x_1+x_1x_2-x_2 \\ =x_1(x_2-1)+x_2(x_1-1)<0,$$

од каде и $a(2c+b)<0$.

3. Нека a и b се корени на равенката $x^2-3cx-8d=0$, а c и d се корени на равенката $x^2-3ax-8b=0$. Пресметај го збирот $a+b+c+d$, ако a,b,c,d се различни реални броеви.

Решение. Од Виетовите формули имаме $a+b=3c$, $c+d=3a$, $ab=-8d$, $cd=-8b$. Ако ги собереме првите две равенки добиваме $a+b+c+d=3(a+c)$. Од нив наоѓаме: $b=3c-a$, $d=3a-c$ и со замена во другите две равенки добиваме: $a(3c-a)=-8(3a-c)$, $c(3a-c)=-8(3c-a)$.

Ако овие две равенки ги одземеме добиваме: $c^2-a^2=32(c-a)$.

Бидејќи $a\neq c$, следува $a+c=32$. Тогаш $a+b+c+d=3(a+c)=32\cdot 3=96.$

4. Најди ги сите позитивни броеви a, за коишто и двата корена на равенката $a^2x^2+ax+1-7a^2=0$ се цели броеви.

Решение. Равенката ќе има реални решенија, ако $D\geq 0$, т.е.

$$0\leq a^2-4a^2(1-7a^2)=a^2(28a^2-3),$$

од каде што добиваме $a^2\geq\frac{3}{28}$, т.е. $\frac{1}{a}\leq\sqrt{\frac{28}{3}}$.

Од Виетовите формули имаме $x_1+x_2=-\frac{1}{a}$. Бидејќи x_1 и x_2 се цели броеви, следува дека и $-\frac{1}{a}$ е цел број, а од $a>0$ заклучуваме дека $\frac{1}{a}$ е природен број. Единствени природни броеви за кои важи $\frac{1}{a}\leq\sqrt{\frac{28}{3}}$ се броевите 1, 2 и 3. Значи, $a\in\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$. За овие вредности на a соодветните вредности на дискриминантите се $D_1=25$, $D_{\frac{1}{2}}=1$, $D_{\frac{1}{3}}=\frac{1}{81}$, а соодветните решенија на равенките се: -3 и 2; -3 и 1; -2 и -1.

5. Нека a,b и c се цели броеви и $a>0$. Докажи дека, ако равенката $ax^2+bx+c=0$ има две реални решенија во интервалот $(0,\frac{1}{2})$, тогаш $a\geq 5$.

Решение. Нека x_1 и x_2 се решенија на дадената равенка. Според Виетовите врски, имаме $x_1x_2=\frac{c}{a}$, од каде, бидејќи $x_1,x_2\in(0,\frac{1}{2})$, добиваме $0<\frac{c}{a}<\frac{1}{4}$, односно $0<4c<a$. Од последното е јасно дека c е позитивен број, па бидејќи и a и c се цели позитивни броеви, добиваме $a\geq 4c+1\geq 4\cdot 1+1=5$.

6. Нека a,b и c се позитивни реални броеви при што $a+b+c=1$ и еден корен на равенката $ax^2+bx+c=x$ е во интервалот $(0,1)$.

Докажи дека $2a+b>1$.

Решение. Веднаш се гледа дека едно решение на дадената равенка е 1. Да го означиме ова решение со x_1, а другото со x_2. Од Виетовите врски имаме $x_1x_2=\frac{c}{a}$, а бидејќи $x_1=1$, добиваме $x_2=\frac{c}{a}$. Од двете решенија само x_2 може да се наоѓа во интервалот $(0,1)$, па значи $\frac{c}{a}<1$. Оттука добиваме $c<a$ и

$$1=a+b+c<a+b+a=2a+b\ .$$

7. При $xyz\neq 0$ нека важат равенствата $x+y+z=xyz$, $x^2=yz$. Да се докаже дека y и z се реални ако и само ако $x^2\geq 3$.

Решение. Дадените равенства да ги запишеме во обликот

$$y+z=x^3-x\ , \qquad yz=x^2\ .$$

Значи, y и z се корени на квадратната равенка

$$t^2-(x^3-x)t+x^2=0\ ,$$

која што има реални решенија ако и само ако $D\geq 0$, $x^2(x^4-2x^2-3)\geq 0$, т.е. ако и само ако

$$x^4-2x^2-3\geq 0\ ,$$

од каде што добиваме $x^2\geq 3$.

8. Нека x_0 и x_1 се реални корени на равенката $x^2+a_1x+b_1=0$, x_0 и x_2 се реални корени на равенката $x^2+a_2x+b_2=0$ и x_0 и x_3 се реални корени на равенката $x^2+a_3x+b_3=0$. Најди ги корените на равенката

$$x^2+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}x+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}=0\ .$$

Решение. Од $x_0^2+a_1x_0+b_1=0$, $x_0^2+a_2x_0+b_2=0$ и $x_0^2+a_3x_0+b_3=0$ добиваме

$$3x_0^2+(a_1+a_2+a_3)x_0+b_1+b_2+b_3=0\ ,$$

односно

$$x_0^2+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}x_0+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}=0$$

па x_0 е реален корен на дадената равенка. Тогаш, равенката има уште еден реален корен. Од $x_0+x_1=-a_1$, $x_0+x_2=-a_2$ и $x_0+x_3=-a_3$ добиваме

$$3x_0+x_1+x_2+x_3=-\left(a_1+a_2+a_3\right)\text{, т.е. } x_0+\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=-\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\ .$$

Бидејќи

$$x_0\cdot\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{x_0x_1+x_0x_2+x_0x_3}{3}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\ ,$$

следува дека x_0 и $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ се корени на дадената равенка.

9. Дадена е равенката

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}=1, \quad a\in\mathbb{R}.$$

а) Да се докаже дека за секој a решенијата на равенката се реални.

б) Да се одреди a, така што $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=3$.

Решение. Дадената равенка може да се напише во обликот

$$x^2-(3a+2)x+2a^2+3a=0.$$

а) Корените на равенката се реални ако $D\geq 0$. Но

$$D=(3a+2)^2-4(2a^2+3a)=a^2+4>0,$$

па значи корените се реални и различни.

б) Според Виетовите правила имаме:

$$x_1+x_2=3a+2 \quad \text{и} \qquad x_1x_2=2a^2+3a,$$

па од $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=3$, добиваме

$$\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=3, \text{ т.е. } \frac{(3a+2)^2-2(2a^2+3a)}{2a^2+3a}=3.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката $a^2+4a-3=0$, чии решенија се $a_1=1$ и $a_2=-4$.

10. За кои вредности на параметарот a разликата од корените на равенката

$$2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$$

е еднаква на нивниот производ?

Решение. Нека x_1 и x_2 се корените на дадената равенка. Според Виетовите формули имаме $x_1+x_2=\frac{a+1}{2}$, $x_1x_2=\frac{a-1}{2}$. По услов од задачата имаме

$$x_1-x_2=x_1x_2,$$

па решавајќи го системот

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{a+1}{2} \\ x_1-x_2=\frac{a-1}{2} \end{cases},$$

добиваме $x_1=\frac{a}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$. Ако едниот од овие корени го замениме во равенката, добиваме $a=2$.

9. Ако a,b и c се реални броеви, такви што $a+b+c=2$ и $ab+bc+ca=1$, тогаш $0\leq a\leq\frac{4}{3}$. Докажи!

Решение. Од $a+b+c=2$ се добива $b+c=2-a$. Од $ab+bc+ca=1$, се добива

$$bc=1-a(b+c)=1-a(2-a).$$

Затоа броевите b и c се решенија на квадратната равенка

$$x^2+(a-2)x+1-a(2-a)=0.$$

Бидејќи b и c се реални броеви, мора дискриминантата на квадратната равенка да е ненегативна, т.е.

$$0 \leq D = (a-2)^2 - 4(1-a(2-a)) = -3a^2 + 4a\ ,$$

од каде што следува $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$.

10. а) Во квадратната равенка $x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2 = 0$ да се определи параметарот m така што збирот од решенијата на дадената равенка да е еднаков на збирот од нивните квадрати.

б) Ако со $y(x,m)$ го означиме квадратниот трином

$$y(x,m) = x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2\ ,$$

да се скицираат графиците на функциите $y(x,m_1)$, $y(x,m_2)$ каде m_1 и m_2 се решенијата за m од задачата под а).

Решение. Од Виетовите правила имаме

$$x_1 + x_2 = 2(m+1) \text{ и } x_1 x_2 = 3m + 2\ .$$

Понатаму, од условот на задачата имаме

$$2(m+1) = x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4(m+1)^2 - 2(3m+2)$$

од каде после средувањето добиваме $2m^2 - 1 = 0$. Решенијата на последната равенка се $m_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Квадратните функции чии графици треба да ги скицираме се

$$y_1 = x^2 - 2(1+\tfrac{1}{\sqrt{2}})x + 2 + \tfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ и } y_2 = x^2 - 2(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}})x + 2 - \tfrac{3}{\sqrt{2}}\ .$$

Графиците на функциите се параболи со темиња

$$T_1(1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \text{ и } T_1(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{2}})\ ,$$

соодветно и како $a_1 = a_2 = 1 > 0$ заклучуваме дека функциите немаат нули.

11. Да се најде параметарот k така што да важи $x_1^2 + x_2^2 = 1$, каде x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2 + (k-1)x + k = 0$.

Решение. Согласно Виетовите формули имаме

$$x_1 + x_2 = -(k-1) \text{ и } x_1 \cdot x_2 = k,$$

па затоа

$$1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (k-1)^2 - 2k\ .$$

Значи, бараната вредност на k е решение на равенката $k^2 - 4k = 0$ од каде што добиваме $k = 0$ или $k = 4$.

12. Да се најде параметарот k така што да важи $x_1^2 + x_2^2 = 1$, каде x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2 + (k+1)x + 2(k+2) = 0$.

Одговор. $k = 4$ или $k = -2$.

13. За која вредност на m, равенката $x^2 + mx + 12 = 0$ има еден корен еднаков на 3? Потоа да се најде и другиот корен.

Решение. Од $x_1 = 3$ е корен на дадената равенка добиваме дека $9 + 3m + 12 = 0$, па затоа $m = -7$. Сега од Виетовите правила имаме $x_1 + x_2 = -m = 7$ т.е. $x_2 = 4$.

14. За која вредност на m корените на равенката $x^2 - 9x + m = 0$ го задоволуваат условот $x_1 - x_2 = 5$?

Решение. Од Виетовите правила имаме $x_1 + x_2 = 9$, $x_1x_2 = m$. Од условот $x_1 - x_2 = 5$ и $x_1 + x_2 = 9$ следува $x_1 = 7, x_2 = 2$.

Значи $m = x_1x_2 = 14$.

15. За која вредност на параметарот p корените x_1 и x_2 на равенката

$$x^2 - 4x + p - 5 = 0$$

го задоволуваат условот $x_1 - x_2 = 0$? За таа вредност на p, да се најдат корените на равенката.

Решение. Од Виетовите правила имаме

$$x_1 + x_2 = 4 \text{ и } x_1x_2 = p - 5.$$

Од условот на задачата имаме $x_1 = x_2$ па ако замениме во $x_1 + x_2 = 4$ наоѓаме $x_1 = x_2 = 2$. Конечно, со замена во $x_1x_2 = p - 5$ добиваме $p = 9$.

16. За која вредност на параметарот m корените x_1 и x_2 на равенката

$$x^2 - 6x + m = 0$$

го задоволуваат условот $x_1 - x_2 = 10$?

Решение. Од Виетовите правила имаме

$$x_1 + x_2 = 6 \text{ и } x_1x_2 = m.$$

Од условот на задачата имаме $x_1 - x_2 = 10$ и како $x_1 + x_2 = 6$ ако ги собереме последните две равенки наоѓаме $x_1 = 8$, па затоа $x_2 = -2$. Конечно, од $x_1x_2 = m$ имаме $m = -16$.

17. За која вредност на параметарот a квадратната равенка $x^2 - ax + a - 1 = 0$ има решенија такви, што збирот на квадратите од реципрочните вредности на корените е еднаков на 5.

Решение. Нека x_1 и x_2 се решенијата на равенката. Според условот

$$5 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} \qquad (1)$$

Од Виетовите правила имаме $x_1 + x_2 = a$ и $x_1x_2 = a - 1$ и ако замениме во (1) ја добиваме равенката

$$5 = \frac{a^2 - 2(a-1)}{(a-1)^2}$$

која при $a \neq 1$ е еквивалентна на равенката $4a^2 - 8a + 3 = 0$ чии решенија се $a_1 = \frac{3}{2}$ и $a_2 = \frac{1}{2}$.

18. Да се најде параметарот a така што збирот на квадратите на решенијата на равенката $x^2-(a+1)x+2a=0$ е еднаков на 5.

Решение. Ако ги искористиме Виетовите врски добиваме

$$5=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a+1)^2-4x=a^2-2a+1$$

т.е. ја добиваме равенката $a^2-2a-4=0$ чии решенија се

$$a_1=1+\sqrt{5},\quad a_2=1-\sqrt{5}\,.$$

19. Нека a и b се корени на равенката $x^2+px+1=0$ и нека b и c се корени на равенката $x^2+qx+2=0$. Докажи дека $(b-a)(b-c)=pq-6$.

Решение. Од Виетовите правила се добива дека $a+b=-p$, $ab=1$, $b+c=-q$ и $bc=2$. Тогаш:

$$\begin{aligned}(b-a)(b-c)&=(b+a-2a)(b+c-2c)=(-p-2a)(-q-2c)=pq-2aq-2cp+4ac\\&=pq-2a\,(\,b\,+c\,)-2c\,(\,b\,+a\,)\,+\,4ac=pq-2ab-2bc-2ac+4ac\\&=pq-2ab-2bc=pq-2-4=pq-6\end{aligned}$$

20. Нека x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка

$$6x^2-5x+1=0\,.$$

Без да се решава дадената равенка, да се формира квадратната равенка по y чии решенија се броевите

$$y_1=\tfrac{x_1+1}{x_1-1}\ \text{ и }\ y_2=\tfrac{x_2+1}{x_2-1}\,.$$

Решение. Од равенката (1) според Виетовите правила имаме

$$x_1+x_2=\tfrac{5}{6},\ x_1x_2=\tfrac{1}{6}\,.$$

Нека $y^2-px+q=0$ е бараната равенка; тогаш пак според Виетовите правила, ќе имаме

$$p=y_1+y_2=\tfrac{x_1+1}{x_1-1}+\tfrac{x_2+1}{x_2-1}=\tfrac{(x_1+1)(x_2-1)+(x_2+1)(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\tfrac{2x_1x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=-5$$

$$q=y_1\cdot y_2=\tfrac{x_1+1}{x_1-1}\tfrac{x_2+1}{x_2-1}=\tfrac{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=6\,.$$

Според тоа, бараната равенка е $y^2+5y+6=0$.

21. Да се најде $\frac{1}{x_1^5}+\frac{1}{x_2^5}$, каде што x_1 и x_2 се решенијата на квадратната равенка $x^2+kx+s=0$.

Решение. Според Виетовите правила, решенијата x_1 и x_2 на дадената квадратна равенка ги задоволуваат равенствата

$$x_1+x_2=-k\quad\text{и}\quad x_1x_2=s\,.$$

Користејќи го овој факт, како и идентитетот

$$x_1^5+x_2^5=(x_1+x_2)(x_1^4-x_1^3x_2+x_1^2x_2^2-x_1\,x_2^3+x_2^4)$$

имаме

$$\frac{1}{x_1^5}+\frac{1}{x_2^5}=\frac{x_1^5+x_2^5}{x_1^5x_2^5}=\frac{(x_1+x_2)(x_1^4-x_1^3x_2+x_1^2x_2^2-x_1x_2^3+x_2^4)}{(x_1x_2)^5}$$
$$=\frac{-k[(x_1^2+x_2^2)^2-x_1^2x_2^2-x_1^3x_2-x_1x_2^3)}{s^5}$$
$$=\frac{-k\{[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-(x_1x_2)^2-x_1x_2(x_1^2+x_2^2)\}}{s^5}$$
$$=\frac{-k\{(k^2-2s)^2-(x_1x_2)^2-s[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]\}}{s^5}$$
$$=-[(k^2-2s)^2-s^2-s(k^2-2s)]$$
$$=-\frac{k}{s^5}(k^4-5k^2s+5s^2).$$

22. Нека x_1 и x_2 се корените на равенката $p^2x^2+p^3x+1=0$. Да се определи p, така што изразот $x_1^4+x_2^4$ да има најмала вредност.

Решение. За изразот $x_1^4+x_2^4$ користејќи ги Виетовите правила, имаме

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=[(x_2+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2$$
$$=(p^2-\tfrac{2}{p^2})^2-\tfrac{2}{p^4}=(p^4+\tfrac{2}{p^4})-4.$$

Значи, изразот $x_1^4+x_2^4$ има најмала вредност ако и само ако изразот $p^4+\frac{2}{p^4}$ има најмала вредност. За овој израз, пак, имаме

$$p^4+\tfrac{2}{p^4}\geq 2\sqrt{p^4\tfrac{2}{p^4}}=2\sqrt{2},$$

од каде што следува дека изразот $p^4+\frac{2}{p^4}$ прима најмала вредност за $p=\pm\sqrt[8]{2}$.

23. Нека x_1 и x_2 се корените на равенката $x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0$, каде што p е произволен реален параметар . За која вредност на параметарот p важи

$$x_1^4+x_2^4=2+\sqrt{2}.$$

Решение. Според Виетовите врски имаме

$$x_1+x_2=-p, \qquad x_1x_2=-\tfrac{1}{2p^2}.$$

Од друга страна $(x_1+x_2)^4=x_1^4+4x_1^3x_2+6x_2^2x_2^2+4x_1x_2^3+x_2^3$, од каде што

$$x_2^4+x_1^4=(x_1+x_2)^4-4x_1^2x_2^2(x_1+x_2)+6(x_1x_2)^2=2+p^4+\tfrac{1}{2p^4}.$$

Од равенката $2+p^4+\frac{1}{2p^4}=2+\sqrt{2}$, добиваме $(p^2-\frac{1}{\sqrt{2}p^2})^2=0$, т.е. $p=\pm\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

24. Нека p и q се реални броеви такви што за корените x_1 и x_2 на равенката $x^2+px+q=0$, важи $|x_1|=|x_2|=1$. Докажи дека $\frac{p^2}{q}\geq 0$.

Решение. Од Виетовите правила за корените x_1 и x_2, добиваме

$$p = -(x_1 + x_2), \qquad q = x_1 x_2 .$$

Од $|x_1| = |x_2| = 1$ следува $|\frac{x_1}{x_2}| = 1$, па затоа $-1 \le \mathrm{Re}(\frac{x_1}{x_2}) \le 1$. Според тоа,

$$\frac{p^2}{q} = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} = 2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{\overline{x_1}}{\overline{x_2}} = 2 + 2\,\mathrm{Re}(\frac{x_1}{x_2}) \ge 0 .$$

25. Најди релација меѓу корените на квадратната равенка

$$(x^2 - 6m + 5) + m(x^2 - 5x + 6) = 0$$

што не зависи од m?

Решение. Ако $m \ne -1$, тогаш равенката е еквивалентна со равенката

$$x^2 - \frac{5m+6}{m+1}x + \frac{6m+1}{m+1} = 0 ,$$

и има корени x_1 и x_2 за кои важат равенствата

$$x_1 + x_2 = \frac{5m+6}{m+1} = 5 + \frac{1}{m+1}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{6m+5}{m+1} = 6 - \frac{1}{m+1}$$

Ако ги собереме овие две равенства, добиваме $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 11$.

26. Во равенката $x^2 + px + q = 0$ одреди ги реалните броеви p и q, ако разликата на корените на равенката е еднаква на 5, а разликата на нивните кубови е 35.

Решение. Нека x_1 и x_2 се корени на дадената равенка. Од условот на задачата имаме $x_1 - x_2 = 5,\ x_1^3 - x_2^3 = 35$. Бидејќи

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) ,$$

добиваме $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 7$. Тогаш

$$q = x_1x_2 = \tfrac{1}{3}[(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 - x_2)^2] = \tfrac{1}{3}(7 - 25) = -6$$

$$p^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2 = 25 - 24 = 1$$

па оттука добиваме дека $p = -1$ или $p = 1$.

27. Одреди ги вредностите на параметарот m така што за решенијата x_1 и x_2 на равенката $x^2 + (m+3)x + m + 21 = 0$ е исполнето: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 1$.

Решение. Ако неравенката ја трансформираме и ги искористиме Виетовите правила, добиваме

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_2x_1} - 1 < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x_1^2+x_2^2-x_2x_1}{x_2x_1} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x_2+x_1)^2-3x_2x_1}{x_2x_1} < 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{(m+3)^2-3(m+21)}{m+21} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{m^2+3m-54}{m+21} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(m+9)(m-6)}{m+21} < 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(m+9)(m-6) > 0\\ m + 21 < 0\end{cases} \vee \begin{cases}(m+9)(m-6) < 0\\ m + 21 > 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad m \in (-\infty, -21) \cup (-9, -6)$$

28. Докажи дека корените на равенката $x^2-(m^2+1)x+m^2=0$ се позитивни реални броеви за секој $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

б) За кои вредности на параметарот m, корените x_1 и x_2 на дадената равенката ја задоволуваат релацијата $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$?

Решение. а) Дискриминантата на равенката е

$$D=(m^2+1)^2-4m^2=(m^2-2m+1)(m^2+2m+1)=(m-1)^2(m+1)^2\geq 0\ .$$

Затоа равенката има реални корени. Корените се $x_1=m^2$ и $x_2=1$ и бидејќи $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ тие се позитивни.

б) Ако $x_1=m^2$ и $x_2=1$ ја задоволуваат релацијата $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$, добиваме $|m|+1=3$ од каде што следува дека $m=\pm 2$.

29. Најди ги сите вредности на реалниот параметар $a\neq 0,1$ за кои равенките

$$x^2-(2a+1)x+a=0 \text{ и } x^2+(a-4)x+a-1=0$$

имаат реални корени x_1, x_2 и x_3, x_4, соодветно, за кои е исполнето равенството

$$\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_4}{x_2}=\frac{x_1x_4(x_1+x_2+x_3+x_4)}{a}\ .$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со

$$a(x_1x_2+x_3x_4)=x_1x_2x_3x_4(x_1+x_2+x_3+x_4)\ .$$

Од Виетовите формули ја добиваме равенката $a(2a-1)=a(a-1)(a+5)$. Бидејќи $a\neq 0$, ја добиваме квадратната равенка $a^2+2a-4=0$, чиишто решенија се $-1-\sqrt{5}$ и $-1+\sqrt{5}$.

30. Дадени се равенките

$$x^2-ax+b-4=0 \text{ и } y^2-by+a-\tfrac{1}{4}=0\ ,\ a,b\in\mathbb{R}\ .$$

За кои вредности на a и b, корените не втората равенка се реципрочни вредности од корените на првата равенка?

Решение. Нека $x>0$ и β се корени на првата равенка. Според условите на задачата $\alpha,\ \beta\neq 0$. Од Виетовите равенства, за првата равенка имаме: $\alpha+\beta=a$ и $\alpha\beta=b-4$, а за втората: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=b$ и $\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}=a-\frac{1}{4}$. Тогаш, со замена на првите две равенки во вторите две се добива: $a=b(b-4)$ и $1=(b-4)(a-\frac{1}{4})$. Од последните две равенки добиваме $(b-4)(b(b-4)-\frac{1}{4})=1$, односно ја добиваме равенката $b^3-8b^2+\frac{63}{4}b=0$. Нејзини решенија се: $b_1=0$, $b_2=\frac{7}{2}$, $b_3=\frac{9}{2}$ а соодветните вредности за a се $a_1=0$, $a_2=-\frac{7}{4}$, $a_3=\frac{9}{4}$.

31. Познато е дека корените на равенката $x^2+px+q=0$ се цели броеви. Ако $p+q=198$, определи ги корените на равенката и броевите p и q.

Решение. Ако x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+px+q=0$, тогаш според Виетовите формули имаме

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1x_2=q \end{cases}.$$

Од последните равенства и даденото равенство (зависноста меѓу p и q), добиваме

$$198=p+q=-(x_1+x_2)+x_1x_2=(x_1-1)(x_2-1)-1.$$

Според тоа $(x_1-1)(x_2-1)=199$. Бидејќи x_1, x_2 се цели броеви и x_1-1, x_2-1 се цели броеви, а 199 е прост број, добиваме

$$\begin{cases} x_1-1=1 \\ x_2-1=199 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1-1=-1 \\ x_2-1=-199 \end{cases}.$$

Решенијата (x_1, x_2) на последните системи се $(2,200)$ и $(0,198)$. За решението $(2,200)$, според Виетовите формули добиваме,

$$p=-2-200=-202,\ q=2\cdot 200=400,$$

а за решението $x=2-\sqrt{5+2^n}$, $p=-198, q=0$.

32. Различните реални броеви a,b,c и d се такви што a и b се корени на равенката $x^2-3cx-8d=0$, а c и d се корени на равенката $x^2-3ax-8b=0$. Да се пресмета збирот $a+b+c+d$.

Решение. Според виетовите правила $a+b=3c$ и $c+d=3a$, па според тоа $b=3c-a$ и $d=3a-c$. Исто така според Виетовите правила $ab=-8d$ и $cd=-8b$, па заменувајќи во последните две равенства $b=3c-a$ и $d=3a-c$ добиваме

$$a(3c-a)=-8(3a-c)$$
$$c(3a-c)=-8(3c-a)$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка добиваме

$$c^2-a^2=32(c-a)$$

и бидејќи $a\neq c$ имаме $a+c=32$.Бидејќи $a+b=3c$ и $c+d=3a$, заради последното равенство имаме

$$a+b+c+d=3(a+c)=3\cdot 32=96.$$

33. Разложи го изразот $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ на два рационални множители чиј збир е едаков на $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Дали постои повеќе од едно такво разложување?

Решение. Изразот $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ можеме да го запишеме во облик

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{(a-b)(a+b)}{ab}=\frac{a-b}{b}\frac{a+b}{b}=(\frac{a}{b}-1)(\frac{b}{a}+1).$$

Изразите $\frac{a}{b}-1$ и $\frac{b}{a}+1$ се рационални и нивниот збир е еднаков на $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Сега ќе покажеме дека таквото разложување е единствено. Нека претпоставиме дека u и v се рационални изрази за кои што

$$\begin{cases} u+v=\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \\ uv=\frac{a}{b}-\frac{b}{a} \end{cases}.$$

Тогаш u и v се корени на квадратната равенка

$$x^2-(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})x+\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=0.$$

Дискриминантата D на квадратната равенка е

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^2-4(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{a^2}{b^2}-4(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})=\frac{a^2}{b^2}-2+\frac{a^2}{b^2}-4(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})+4$$

$$=(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})^2-4(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})+4=(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2)^2.$$

Значи, D е полн квадрат, па решенијата на квадратната равенка се рационални

$$x_1=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2)}{2}=\frac{a}{b}-1, \qquad x_2=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-2)}{2}=\frac{b}{a}+1.$$

Според тоа, разложувањето е единствено.

34. Да се одреди x^2+y^2 , ако

$$xy+x+y=44$$
$$x^2y+xy^2=448$$

Решение. Равенките ќе ги запишеме во облик

$$xy+x+y=44$$
$$xy\,(x+y)=448.$$

Ќе воведеме смени

$$p_1=x+y$$
$$p_2=xy$$

Тогаш

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=p_1^2-2p_2,$$

а системот го добива обликот

$$p_1+p_2=44$$
$$p_1p_2=448.$$

Јасно е дека p_1 и p_2 се решенија на равенката

$$p^2-44p+448=0$$

односно $p_{1/2}=\frac{44\pm 12}{2}$.

Сега постојат два можни случаи.

1) $p_1=28$, $p_2=16$ и $x^2+y^2=752$

2) $p_1=16$, $p_2=28$ и $x^2+y^2=200$.

Според тоа, за збирот x^2+y^2 имаме две можни вредности 752 и 200.

35. Бројот p е еден од корените на равенката $5x^2+bx+10=0$. Изрази ги преку p корените на равенката $10x^2+bx+5=0$.

Решение. Јасно, $p\neq 0$ и $5p^2+bp+10=0$.

Ако последното равенство го поделиме со p^2, добиваме

$$5+\frac{b}{p}+\frac{10}{p^2}=0 \quad \text{т.е.} \quad 10\left(\frac{1}{p}\right)^2+b\frac{1}{p}+5=0 .$$

Значи, еден корен на равенката $10x^2+bx+5=0$ е $\frac{1}{p}$. Според Виетовите правила $x_1x_2=-\frac{10}{p}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{5}$. Од првото равенство имаме $\frac{1}{p}x_2=\frac{5}{10}$, од каде следува $x_2=\frac{p}{2}$.

Конечно, корени на втората равенка се $\frac{1}{p}$ и $\frac{p}{2}$.

5. СИСТЕМИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

1. Реши ја равенката $\left(\frac{x^3+x}{3}\right)^3+\frac{x^3+x}{3}=3x$.

Решение. Ако воведеме смена $\frac{x^3+x}{3}=y$, тогаш $y^3+y=3x$ и $x^3+x=3y$. Според тоа, ако x_0 е решение на равенката и $\frac{x_0^3+x_0}{3}=y_0$, тогаш (x_0,y_0) е решение на системот равенки

$$\begin{cases} x^3+x=3y \\ y^3+y=3x \end{cases}$$

Точно е и обратното кое што не е тешко да се докаже. Заради тоа, доволно е да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^3+x=3y \\ y^3+y=3x \end{cases}$$

Ако од првата равенка на системот ја одземеме втората равенка на системот добиваме

$$(x^3-y^3)+(x-y)=3(y-x)$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2+1)=3(y-x)$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2+4)=0 . \qquad (1)$$

Бидејќи

$$x^2+xy+y^2+4=x^2+2x\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{3}{4}y^2+4=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+4\geq 4 ,$$

за било кои $x,y\in\mathbb{R}$, од равенката (1) имаме $x-y=0$ односно $x=y$. Според тоа $\frac{x^3+x}{3}=x$, од каде добиваме дека $x(x^2-2)=0$. Решенија на последната равенка се $x_1=0,\ x_2=\sqrt{2},\ x_3=-\sqrt{2}$. Не е тешко да се провери дека истите се решенија и на почетната равенка.

2. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y=z \\ x^2+y^2=z \\ x^3+y^3=z \end{cases}.$$

Решение. Третата равенка на системот ќе ја трансформираме во обликот $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, односно $z=z^3-3xyz$. Притоа од формулата за бином на квадрат имаме $xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]$ и конечно третата равенка на системот добива облик

$$z=z^3-\tfrac{3}{2}z(z^2-z).$$

Со средување истата станува

$$z^3-3z^2+2z=0 \Leftrightarrow z(z-1)(z-2)=0,$$

од каде решенија за променливата z се $z\in\{0,1,2\}$. За секоја од поединечните вредности на z решаваме системи од две равенки со две непознати

$$\begin{cases} x+y=z \\ x^2+y^2=z \end{cases}.$$

Така за првиот систем, за $z=0$ имаме:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$$

со решение $x=y=0$. За $z=1$, системот добива облик

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

кој со замена од првата во втората равенка и решавајќи квадратна равенка ни дава решенија $x=0, y=1$ и $x=1, y=0$. За $z=2$, системот добива облик

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

кој слично како во претходниот случај, решавајќи квадратна равенка ни дава решенија $x=y=1$.

Конечно, решенија на почетниот систем се подредените тројки

$$(x,y,z)\in\{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,2)\}.$$

3. Реши го во $\mathbb{R}$ системот равенки

$$x+\sqrt{y}=3,\ y+\sqrt{z}=3,\ z+\sqrt{x}=3.$$

Решение. Имаме, $x-y=\sqrt{z}-\sqrt{y}$, $y-z=\sqrt{x}-\sqrt{z}$, $z-x=\sqrt{y}-\sqrt{x}$. Да претпоставиме дека $x\le y$. Тогаш $\sqrt{z}-\sqrt{y}\le 0$, т.е. $z\le y$. Понатаму $\sqrt{x}-\sqrt{z}\ge 0$, т.е. $x\ge z$, а оттука $y\le x$. Значи, $x=y$. Аналогно добиваме $x=z$. Според тоа $x=y=z$. Затоа е доволно да ја решиме равенката $x+\sqrt{x}=3$, т.е. $\sqrt{x}=3-x$, каде што $x\in[0,3]$.

Нејзино решение е $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$, па следува дека решение на системот е

$$\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}, \frac{7-\sqrt{13}}{2}, \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right).$$

4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2x \end{cases}.$$

Решение. *Прв начин.* Со собирање на равенките на системот добиваме

$$x^2+1+y^2+z^2+1=2x+2y+2z$$

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(z^2-2z+1)=0$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$$

Збирот од квадратите на три броја е еднаков на нула, ако секој од собироците е еднаков на нула, т.е. $x-1=0, y-1=0$ и $z-1=0$, па затоа $x=1, y=1, z=1$.

Втор начин. Од $a^2+1=2b$ следува дека

$$a^2-2a+1=2(b-a)\text{, т.е. } (a-1)^2=2(b-a).$$

Бидејќи $(a-1)^2 \geq 0$ следува дека $b \geq a$. Од системот равенки и горниот заклучок добиваме $x \geq z \geq y \geq x$, т.е. $x=y=z$. Тогаш од $x^2+1=2x$ следува дека системот има единствено решение $x=y=z=1$.

5. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^3+y^3=341 \\ xy^2+yx^2=330 \end{cases}$$

Решение. Ако втората равенка ја помножиме со 3, а потоа двете равенки ги собереме, добиваме $(x+y)^3=11^3$, од каде што $x+y=11$. Заменувајќи во втората равенка добиваме $xy=30$. На крајот имаме $x=5, y=6$ или $x=6, y=5$.

6. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+3+y^3=0 \end{cases}$$

Решение. Ако првата равенка ја помножиме со 2, а втората со -1 и ако ги собереме, ќе добиеме

$$(y+1)(2x^2(1-y)+y^2-3y+3)=0.$$

За $y=-1$, добиваме $x=1$. За $y \leq 1$, изразот во заградата е строго поголем од 0, а за $y \geq 1$, првата равенка на дадениот систем нема решение. Значи, единствено решение на дадениот систем е $(1,-1)$.

7. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{y}\\ x^2-y^2=9\end{cases}$$

Решение. Дефиниционата област на системот е множеството од сите парови (x,y) за кои што важи $x\geq y\geq 0$. Првата равенка ја квадрираме и го добиваме еквивалентниот систем

$$\begin{cases}x+y-2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y=y\\ x^2-y^2=9\end{cases},$$

односно

$$\begin{cases}2x-2\sqrt{(x+y)(x-y)}=y\\ x^2-y^2=9.\end{cases}.$$

Со замена на втората равенка во првата добиваме

$$\begin{cases}2x-2\cdot 3=y\\ x^2-y^2=9.\end{cases}$$

Оттука имаме

$$\begin{cases}2x-2\cdot 3=y\\ x^2-(2x-6)^2=9\end{cases}$$

односно

$$\begin{cases}2x-2\cdot 3=y\\ x^2-8x+15=0\end{cases}.$$

Решенијата на квадратната равенка се $x_1=5$ и $x_2=3$. Тогаш, $y_1=4$ и $y_2=0$. Решенија на системот се $(5,4)$ и $(3,0)$, бидејќи се точки од дефиниционата област.

8. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}x+y+z=\frac{13}{3}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3}\\ xyz=1\end{cases}$$

Решение. Имаме: $y+z=\frac{13}{3}-x$, $x(y+z)=\frac{13}{3}-yz$, $zy=\frac{1}{x}$. Ако од првата и третата равенка замениме во втората ја добиваме равенката

$$x(\tfrac{13}{3}-x)=\tfrac{13}{3}-\tfrac{1}{x},$$

која е еквивалентна на равенката $13x^2-3x^3-13x+3=0$, т.е. на равенката

$$(x-1)(3x^2-10x+3)=0.$$

Решенија на последната равенка се $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{3}$.

Бидејќи равенките во системот се симетрични заклучуваме дека решенија на системот се следните шест подредени тројки

$$(1,3,\tfrac{1}{3}),\ (1,\tfrac{1}{3},3),\ (3,1,\tfrac{1}{3}),\ (3,\tfrac{1}{3},1),\ (\tfrac{1}{3},1,3),\ (\tfrac{1}{3},3,1)\,.$$

9. Реши го, во множеството на реалните броеви, системот равенки

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+xy+y^2=19\,. \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме двете равенки, добиваме

$$x^2+2xy+y^2+x+y=30\text{, т.е. } (x+y)^2+(x+y)=30\,.$$

Со воведување на смената $t=x+y$, ја добиваме квадратната равенка

$$t^2+t-30=0\,,$$

чии решенија се $t_1=5$ и $t_2=-6$. Од $x+y=5$, добиваме $y=5-x$, па заменувајќи во една од дадените равенки, добиваме $x_1=3$, $x_2=2$ и $y_1=2$, $y_2=3$. Од $x+y=-6$ добиваме $y=-6-x$, па заменувајќи во една од равенките добиваме комплексни решенија. Значи дадениот систем има два пара реални решенија $(3,2)$ и $(2,3)$.

10. Реши го во $\mathbb{R}$ системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2)=12 \\ \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{3} \end{cases},$$

од каде што следува $x^2-xy+y^2=36$, односно $(x+y)^2-3xy=36$. Нека $z=x+y$. Тогаш, $xy=3z$ односно последната равенка е еквивалентна со $z^2-9z-36=0$. Нејзини решенија се $z_1=12$ и $z_2=-3$. Значи ги добиваме системите:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ xy=36 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-9 \end{cases}$$

кои се еквивалентни со квадратните равенки $t^2-12t+36=0$ и $t^2+3t-9=0$, соодветно. Значи множеството решенија на дадениот систем е

$$M=\{(6,6),(\tfrac{-3+3\sqrt{3}}{2},\tfrac{-3-3\sqrt{3}}{2}),(\tfrac{-3-3\sqrt{3}}{2},\tfrac{-3+3\sqrt{3}}{2})\}\,.$$

11. Реши го системот

$$\begin{cases} x(y+z)=35 \\ y(z+x)=32\,. \\ z(x+y)=27 \end{cases}$$

Решение. Ако го развиеме системот до облик

$$\begin{cases} xy + xz = 35 \\ yz + yx = 32 \\ zx + zy = 27 \end{cases}$$

очигледно е дека може да се воведат смени $a = xy, b = xz, c = yz$ со што системот добива облик

$$a + b = 35 \qquad (1)$$

$$c + a = 32 \qquad (2)$$

$$b + c = 27 \,. \qquad (3)$$

Со собирање и одземање на равенките добиваме,

$$(1) + (2) - (3):\ 2a = 40\ ,\ (2) + (3) - (1):\ 2c = 12 \text{ и } (1) + (3) - (2):\ 2b = 30\ .$$

Од овде соодветниот систем станува

$$\begin{cases} a = 20 \\ b = 15 \\ c = 12 \end{cases},$$

односно

$$\begin{cases} xy = 20 \\ xz = 15 \\ yz = 12 \end{cases},$$

а притоа $x, y, z \neq 0$. Систем еквивалентен на дадениот е

$$\begin{cases} y = \frac{20}{x} \\ z = \frac{15}{x} \\ yz = 12 \end{cases}.$$

Заменувајќи ги првата и втората равенка во третата се добива $x^2 = 25,\ x = \pm 5$. Тогаш решенија на почетниот систем се

$$(x, y, z) \in \{(5,4,3), (-5,-4,-3)\}\ .$$

12. Определи ги позитивните решенија на системот равенки:

$$\begin{cases} a + b = c^2 \\ b + c = d^2 \\ c + d = a^2 \\ d + a = b^2 \end{cases}.$$

Решение. Нека a, b, c, d се позитивни решенија на дадениот систем. Ако од првата равенка ја одземеме третата равенка,а од втората равенка ја одземеме четвртата равенка, добиваме

$$\begin{aligned} a - c + b - d &= (c - a)(c + a) \\ b - d &= (c - a)(a + c + 1) \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} b-d+c-a &= (d-b)(d+b) \\ c-a &= (d-b)(d+b+1) \end{aligned} \qquad (2)$$

Ако (2) замениме во (1) добиваме

$$b-d=(d-b)(a+c+1)(b+d+1)$$

Бидејќи a,b,c и d се позитивни реални броеви $a+c+1>0$, $b+d+1>0$. Ако $b\neq d$, тогаш $b-d\neq 0$ и

$$-1=(a+c+1)(b+d+1)\ .$$

Последното равенство не е точно (производ на два позитивни броја не може да е еднаков на -1).

Според тоа $b=d$, тогаш од (2) имаме $c-a=0$, односно $c=a$. Сега, системот го добива обликот

$$\begin{cases} a+b=a^2 \\ a+b=b^2 \end{cases}.$$

Тогаш $a^2-b^2=0$, т.е. $(a-b)(a+b)=0$. Бидејќи $a+b>0$, добиваме $a-b=0$, т.е. $a=b$. Првата равенка од последниот систем го добива обликот $2a=a^2$, чии решенија се $a_1=0$, $a_2=2$. Бараното решение е $a=2$, и конечно $a=b=c=d=2$.

13. Реалните броеви x,y,z се ненулти, попарно различни и

$$x^3+y^2z=y^3+z^2x=z^3+x^2y\ . \qquad (*)$$

Докажи дека $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

Решение. Нека x,y и z се ненулти попарно различни броеви за кои се исполнети равенствата (*), кои можеме да ги запишеме во облик

$$\begin{cases} x^3+y^2z=y^3+z^2x \\ y^3+z^2x=z^3+x^2y \\ x^3+y^2z=z^3+x^2y \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x(x^2-z^2)=y^2(y-z) \\ y(y^2-z^2)=z^2(z-x) \\ z(z^2-y^2)=x^2(x-y) \end{cases}.$$

Ако трите равенства ги помножиме, добиваме

$$xyz(x-z)(z-y)(y-x)(x+z)(z+y)(y+x)=x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)\ .$$

Бидејќи $x,y,z\neq 0$ и $x\neq y\neq z\neq x$, добиваме

$$-(x+z)(z+y)(y+x)=xyz$$

т.е.

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz=0$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)=0\ . \qquad (**)$$

Ќе покажеме дека $x+y+z\neq 0$. Ако претпоставиме дека $x+y+z=0$, т.е. $z=-x-y$ и ако замениме во $x^3+y^2z=y^3+z^2x$, добиваме

$$y(x^2+xy+y^2)=0\ .$$

Од тоа што $y\neq 0$, добиваме

$$x^2+xy+y^2=0$$
$$(\tfrac{x}{y})^2+\tfrac{x}{y}+1=0\,.$$

Значи, x и y се реални броеви за кои $\frac{x}{y}$ е решение на квадратната равенка

$$t^2+t+1=0\,.$$

Бидејќи таа нема реални решенија добиваме контрадикција со почетната претпоставка, па според тоа $x+y+z\neq 0$. Заради (**) имаме

$$xy+yz+zx=0\,,$$

и ако поделиме со xyz го добиваме бараното равенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

14. За кои вредности на параметарот a, системот

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+azx=0. \end{cases}$$

Решение. Очигледно е дека за било која вредност на a, $x=y=z=0$ е решение на системот. Ќе ги определиме вредностите на a за кои тоа решение е единствено.

Од првата равенка имаме $y=-x-z$, и ако замениме во втората равенка добиваме $(-x-z)x+(-z-x)z+axz=0$, т.е.

$$x^2+(2-a)xz+z^2=0\,. \tag{1}$$

Системот ќе нема реални решенија, само ако равенката (1) нема реални решенија. Ако ова равенка ја разгледуваме како квадратна равенка по x, тогаш нејзината дискриминанта е

$$D=[(2-a)z]^2-4z^2=(a^2-4a)z^2\,.$$

Ако $z=0$, тогаш за системот го добиваме решението $x=z=0$, од каде добиваме дека и $y=0$.

Ако $z\neq 0$, за да системот има единствено реално решение, треба $D<0$. Но $D<0$ ако и само ако $0<a<4$.

Значи, системот има единствено реално решение за $a\in(0,4)$.

15. Определи ги потребните и доволните услови за реалните параметри a,b и c така што равенката

$$a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=x$$

да нема реални решенија.

Решение. При $a=0$ равенката станува линеарна $(b^2-1)x=-c(b+1)$. Очигледно е дека таа нема решение при $b=1$ и $c\neq 0$.

При $a\neq 0$ дадената равенка има решение ако и само ако има решение системот

$$\begin{cases} au^2+bu+c=v \\ av^2+bv+c=u. \end{cases} \tag{1}$$

Навистина, ако $x_\circ$ е решение на равенката, тогаш $(x_\circ, ax_\circ^2 + bx_\circ + c)$ е решение на системот. Ако пак $(u_\circ, v_\circ)$ е решение на системот, тогаш $u_\circ$ е решение на равенката.

Сега, ако од првата равенка на системот ја одземеме втората равенка на системот, добиваме

$$a(u^2 - v^2) + (b+1)(u-v) = 0$$
$$(u-v)[a(u+v) + (b+1)] = 0 .$$

Јасно е дека системот (1) е еквивалентен со севкупноста на системите

$$\begin{cases} u = v \\ av^2 + bv + c = u \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a(u+v) + b + 1 = 0 \\ av^2 + bv + c = u. \end{cases} .$$

Првиот систем нема решение кога равенката $av^2 + (b-1)v + c = 0$ нема решение, т.е. кога $(b-1)^2 - 4ac < 0$. При овој услов и вториот систем нема решение. Навистина од $u = -\frac{b+1}{a} - v$ со замена во втората равенка добиваме

$$av^2 + (b+1)v + c + \frac{b+1}{a} = 0 ,$$

за која

$$D = (b-1)^2 - 4ac - 4 < (b-1)^2 - 4ac < 0 .$$

Значи, равенката нема решение при условите

$$a = 0, b = 1, c \neq 0 \ \text{ и } \ a \neq 0, (b-1)^2 < 4ac .$$

16. Две цевки полнат еден базен. Втората цевка, сама, ќе го наполни базенот за 5 часа подолго отколку првата цевка. Ако се пуштат истовремено двете цевки базенот ќе се наполни за 6 часа. Пресметај за колку време втората цевка може сама да го наполни базенот.

Решение. Нека првата цевка сама го полни базенот за *т* часа. Тогаш за 6 часа ќе наполни $\frac{6}{t}$ делови од базенот. Според условот втората цевка го полни базенот за *т* + 5 часа. За еден час полни $\frac{1}{t+5}$ делови од базенот, а за 6 часа $\frac{6}{t+5}$ делови од базенот. Бидејќи за 6 часа со истовремена работа на двете цевки базенот ќе се наполни, равенката е:

$$\frac{6}{t} + \frac{6}{t+5} = 1 \quad \Leftrightarrow \ t^2 - 7t - 30 = 0, \left(t \neq 0; t \neq -5\right)$$

чии решенија се $t_1 = 10;\ t_2 = -3$.

Бидејќи времето не може да биде негативно единствено решение е *т* =10. Значи времето потребно втората цевка да го наполни базенот е *т* = *т* +5, т.е. 15 часа.

17. Еден базен се полни со 2 цевки. Двете заедно го полнат базенот за 12 часа. Ако првата цевка сама го исполни базенот до половина, а втората цевка сама продолжи да го дополнува базенот, тогаш целиот базен ќе се наполни за 25 часа. За колку време секоја цевка сама може да го наполни базенот?

Решение. Нека x е бројот на часови за кои првата цевка сама го полни базенот, а y е бројот на часови за кои втората цевка сама го полни базенот. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25\end{cases}.$$

Од втората равенка добиваме $y=50-x$, и ако ова го замениме во првата равенка ја добиваме квадратната равенка $x^2-50x+600=0$.

Решенија на ова равенка се $x_1=20$, $x_2=30$. Значи, првата цевка го полни базенот за 20 (30) часа, а втората за 30 (20) часа.

18. На пат од a m предните тркала на еден трактор прават k завртувања повеќе од задните. Да се најде периметарот на секое тркало, ако периметарот на задното тркало е за b m поголем од периметарот на предното тркало.

Решение. Ако x е периметарот на предното тркало, тогаш периметарот на задното тркало ќе биде $x+b$.

На пат од a m задното тркало ќе направи $\frac{a}{x+b}$ завртувања, а предното тркало ќе направи $\frac{a}{x}$ завртувања.

Според условот на задачата ќе имаме $\frac{a}{x}=k+\frac{a}{x+b}$, т.е. $kx^2+kbx-ab=0$. Решенијата на ова квадратна равенка се:

$$x_{1/2}=\frac{-kb\pm\sqrt{k^2b^2+4kab}}{2k}.$$

Решението x_2 е негативно; поради $\sqrt{k^2b^2+4kab}>kb$, следува дека решението x_1 е позитивно. Значи, периметарот на предното тркало е

$$x=\frac{-kb+\sqrt{k^2b^2+4kab}}{2k},$$

а периметарот на задното тркало е

$$y=\frac{kb+\sqrt{k^2b^2+4kab}}{2k}.$$

19. Два брода тргнале истовремено еден кон друг, првиот од пристаништето A кон пристаништет B а вториот обратно. Тие се сретнале по три часа. Првиот брод стигнал во пристаништето B за 2 часа и 30 минути покасно отколку вториот брод во пристаништето A. Колку часа секој од бродовите го минувал растојанието меѓу двете пристаништа.

Решение. Нека v_1 е брзината на првиот брод а v_2 е брзината на вториот брод. Ако x е растојанието меѓу пристаништата, тогаш

$$3v_1+3v_2=x. \qquad (1)$$

Ако вториот брод патувал y часа, тогаш првиот брод патувал $y+2,5$ часа. Според тоа, $v_1(y+2,5)=x$ и $v_2y=x$, од каде добиваме $v_1=\frac{x}{y+2,5}$, $v_2=\frac{x}{y}$. Сега, ако замениме во (1) добиваме

$$\frac{3x}{y+2,5}+\frac{3x}{y}=x,$$

$$\frac{3}{y+2{,}5}+\frac{3}{y}=1,$$

$$2y^2-7y-15=0.$$

Позитивно решение на последната равенка е $y=5$. Вториот брод пристигнал за 5 часа а првиот брод пристигнал за $7{,}5$ часа.

20. Нека $P_1(x)=ax^2-bx-c,\ P_2(x)=bx^2-cx-a,\ P_3(x)=cx^2-ax-b$ се три полиноми за кои што $a,b,c\neq 0$. Постои реален број α таков што

$$P_1(\alpha)=P_2(\alpha)=P_3(\alpha).$$

Докажи дека $a=b=c$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$a\alpha^2-b\alpha-c=\lambda$$

$$b\alpha^2-c\alpha-a=\lambda$$

$$c\alpha^2-a\alpha-b=\lambda$$

каде λ е заедничката вредност на трите полиноми во точката α. Ако од системот го елиминираме α^2, ги добиваме равенките

$$(ca-b^2)\alpha-(bc-a^2)=\lambda(b-a)$$

$$(ab-c^2)\alpha-(ca-b^2)=\lambda(c-b)$$

$$(bc-a^2)\alpha-(ab-c^2)=\lambda(a-c)$$

Ако последните три равенки ги собереме добиваме

$$(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)(\alpha-1)=0\ .$$

Сега имаме две можности.

Случај 1. $\alpha=1$. Тогаш

$$a-b-c=b-c-a=c-a-b,$$

и $2a-2b=2b-2c=2c-2a=0$, т.е. $a=b=c$.

Случај 2. . $ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2=0$, од каде следува

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

$$a-b=b-c=c-a=0$$

$$a=b=c.$$

21. Реалните броеви x,y,z не се сите еднакви меѓу себе, и

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k\ .$$

Определи ги вредностите за k.

Решение. Нека x,y,z е решение на системот равенки $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k$.

Тогаш, од $x+\frac{1}{y}=k$ добиваме

$$x = k - \frac{1}{y} = \frac{ky-1}{y}, \qquad (1)$$

а од $y + \frac{1}{z} = k$, добиваме

$$z = \frac{1}{k-y}. \qquad (2)$$

Ако (1) и (2) ги замениме во $z + \frac{1}{x} = k$ добиваме

$$\frac{1}{k-y} + \frac{y}{ky-1} = k.$$

Последното равенство може да се запише во облик

$$(1-k^2)(y^2 - ky + 1) = 0.$$

Сега, имаме два случаи.

Случај 1. $y^2 - ky + 1 = 0$. Тогаш $ky = y^2 + 1$, т.е. $y + \frac{1}{y} = k$. Но тогаш од $x + \frac{1}{y} = k$ добиваме $x = y$, $y + \frac{1}{z} = k$ добиваме $y = z$. Според тоа, $x = y = z$, што е спротивно со претпоставките од задачата.

Случај 2. $1 - k^2 = 0$. Ако $k = -1$, тогаш на пример $x = 2, y = -1, z = \frac{1}{2}$. Ако $k = 1$, тогаш на пример $x = -2, y = 1, z = -\frac{1}{2}$.

Значи, за k имаме две можни вредности и тоа $k = \pm 1$.

22. Да се определат вредностите за параметарот p за кои системот

$$\begin{cases} x^2 + 1 = (p+1)x + py - z \\ y^2 + 1 = (p+1)y + pz - x \\ z^2 + 1 = (p+1)z + px - y \end{cases}$$

има единствено решение. За добиените вредности на p определи ги решенијата на системот.

Решение. Да забележиме дека со секое циклично разместување (промена) на променливите се добива ист систем. На пример, ако $x \to y$, $y \to z$ и $z \to x$ се добива систем во кој третата равенка е прва, првата е втора а втората равенка е трета.

Според тоа, ако (x_0, y_0, z_0) е решение на системот, тогаш (y_0, z_0, x_0) и (z_0, x_0, y_0) се исто така решенија на системот. Според тоа, ако p е параметар за кој системот има единствено решение, тогаш $z_0 = x_0 = y_0$.

Но, тогаш (x_0, x_0, x_0) е решение на системот ако и само ако x_0 е решение на равенката $x^2 + 1 = 2px$. Вредностите за p за кои последната равенка има единствено решение се оние за кои $D = 4p^2 - 4$ е нула, т.е. $p = \pm 1$.

Сега, за $p = 1$ добиваме $x^2 + 1 = 2x$, т.е. $x = 1$, па затоа решение на системот е $x = y = z = 1$, а за $p = -1$ добиваме $x^2 + 1 = -2x$, т.е. $x = -1$, па затоа решение на системот е $x = y = z = -1$.

III ПЛАНИМЕТРИЈА

1. ТРИАГОЛНИК

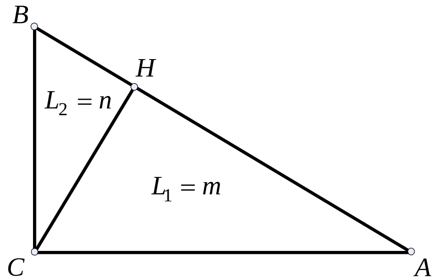
1. Висината го дели правоаголнот триаголник на два триаголници кои имаат периметри m и n. Определи го периметарот на почетниот триаголник.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник (со теме на правиот агол во точката C) и нека CH е негова висина. Од условот на задачата имаме

$$L_1 = L_{AHC} = m \text{ и } L_2 = L_{CHB} = n.$$

Триаголниците AHC, BHC и ABC се слични, при што коефициентите на сличност се

$$k_1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ и } k_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \qquad (1)$$



При тоа, исто така

$$\frac{L_1}{L} = k_1 \text{ и } \frac{L_2}{L} = k_2. \qquad (2)$$

Од равенствата (1) имаме

$$\overline{AC} = k_1\overline{AB} \text{ и } \overline{BC} = k_2\overline{AB}.$$

Според Питагоровата теорема

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$

од каде го добиваме равенството $k_1^2 + k_2^2 = 1$. Ако од (2) замениме во претходното равенство, имаме

$$(\frac{L_1}{L})^2 + (\frac{L_2}{L})^2 = 1, \text{ т.е. } L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

2. Да се пресметаат аглите на триаголникот, ако се знае дека тие се однесуваат како 1 : 2 : 6.

Решение. Нека аглите на триаголникот се α, β и γ. Збирот на аглите е: и како $\alpha : \beta : \gamma = 1:2:6$ следува $\alpha = k, \beta = 2k$ и $\gamma = 6k$ следува $9k = 180^\circ$ добиваме $k = 20^\circ$. Според тоа,

$$\alpha = 20^\circ, \beta = 40^\circ \text{ и } \gamma = 120^\circ.$$

3. Да се пресметаат аглите на триаголникот, ако се знае дека тие се однесуваат како 1 : 3 : 5.

Решение. Нека аглите на триаголникот се α, β и γ. Збирот на аглите е: и како $\alpha : \beta : \gamma = 1:3:5$ следува $\alpha = k, \beta = 3k$ и $\gamma = 5k$. Значи, $9k = 180^\circ$ па затоа $k = 20^\circ$. Според тоа,

$$\alpha = 20^\circ, \beta = 60^\circ \text{ и } \gamma = 100^\circ.$$

4. Во триаголникот ABC, симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D. Докажи дека

$$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{CA}:\overline{CB}.$$

Решение. Од темето B на триаголникот ABC повлекуваме права $BE \parallel DC$, при што $E \in AC$.

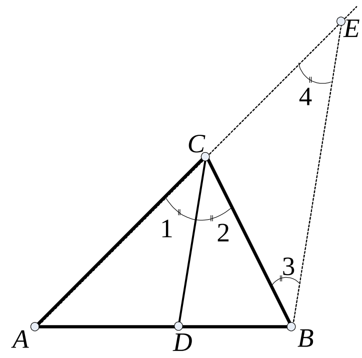
Аглите што при тоа се добиваат да ги означиме како на цртежот. Бидејќи $BE \parallel DC$, важи

$$\measuredangle 3=\measuredangle 2=\measuredangle 1.$$

Според тоа

$$\measuredangle 1+\measuredangle 2=\measuredangle 3+\measuredangle 4,$$

од каде добиваме $\measuredangle 1=\measuredangle 4$, т.е. $\measuredangle 3=\measuredangle 4$. Значи триаголникот BEC е рамнокрак, па $\overline{CE}=\overline{CB}$. Од сличноста на триаголниците ADC и ABE добиваме дека



$$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{CE}=\overline{AC}:\overline{CB}.$$

5. Над страните на триаголникот ABC се конструирани произволни паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажи дека постои триаголник чии страни како вектори се еднакви со векторите $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$.

Решение. Ќе покажеме дека $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=\vec{0}$, од што ќе следува дека бараниот триаголник постои, со забелешка дека таков триаголник постои кога векторите $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$ не се колинеарни. Од условот на задачата следува дека

$$\overrightarrow{A_1A_2}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}, \quad \overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{BB_2}-\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_2}-\overrightarrow{AA_2},$$

$$\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{CC_2}-\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BB_2}.$$

Тогаш ,

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{B_1B_2}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{BB_2}-\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BB_2}=\vec{0}.$$

6. Докажи дека производот на должините на двете отсечки на кои е поделена секоја висина со ортоцентарот во даден триаголник е константа за тој триаголник.

Решение. Триаголниците ARH и HPC се правоаголни и аглите кај темето H се еднакви, па значи тие се слични. Според тоа, имаме:

$$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{HR}:\overline{HP},$$

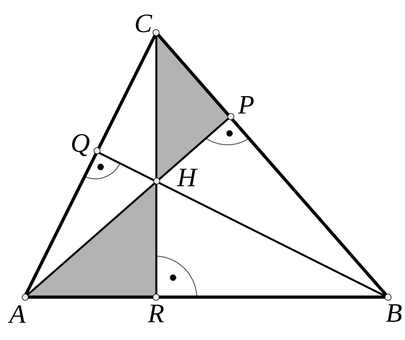
од каде што следува дека

$$\overline{AH}\cdot\overline{HP}=\overline{CH}\cdot\overline{HR},$$

а поради симетрија ќе имаме и

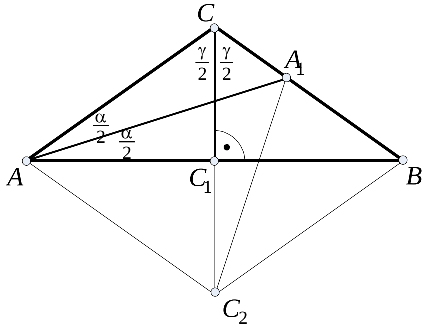
$$\overline{AH}\cdot\overline{HP}=\overline{BH}\cdot\overline{HQ},$$

што и требаше да се докаже.



7. Даден е рамнокрак триаголник ABC во кој $\overline{AC}=\overline{BC}$ и висината спуштена од темето C е еднаква на половина од симетралата на аголот кај темето A. Најди го аголот кај темето C.

Решение. Нека CC_1 е висина спуштена од темето C и нека AA_1 е симетрала на аголот α кај темето A (види цртеж). Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак, точката C_1 е средина на страната AB и CC_1 е симетрала на аголот γ кај темето C. Нека C_2 е точка од правата CC_1, така што $\overline{CC_1}=\overline{C_1C_2}$ (види цртеж). Од тоа што дијагоналите на четириаголникот AC_2BC се половат, следува

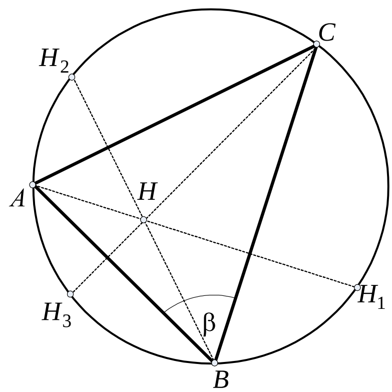


дека тој четириаголник е паралелограм. Бидејќи $AC_2 \parallel CA_1$ и $\overline{AA_1}=\overline{CC_2}$, четириаголникот AC_2A_1C е рамнокрак трапез, од што следува дека $\frac{\gamma}{2}=\measuredangle C_2CA_1=$ $\measuredangle CA_1A$. Од триаголниците AC_1C и AA_1C се добива $\gamma=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}=180^\circ-\gamma-\frac{\gamma}{2}$ соодветно. Тогаш од равенството $90^\circ-\frac{\gamma}{2}=2(180^\circ-\gamma-\frac{\gamma}{2})$ се добива дека $\gamma=108^\circ$.

8. Дадени се триаголникот ABC, кружницата k опишана околу него и точките H_1, H_2 и H_3 што се пресечни точки на висините на триаголникот ABC со k. Докажи дека ортоцентарот H на триаголникот ABC се совпаѓа со центарот на вписаната кружница на триаголникот $H_1H_2H_3$.

Решение. Да го разгледаме цртежот. Доволно е да се докаже дека се исполнети следните равенства

$$\measuredangle H_3H_2B=\measuredangle BH_2H_1$$
$$\measuredangle H_2H_1A=\measuredangle AH_1H_3 \;.$$
$$\measuredangle H_1H_3C=\measuredangle CH_3H_2$$



Ќе докажеме дека $\measuredangle H_3H_2B=\measuredangle BH_2H_1$, а другите равенства се докажуваат на ист начин. Имаме:

$$\measuredangle H_3H_2B=\measuredangle H_3CB$$

периферни агли над ист лак,

$$\measuredangle H_3CB=90^\circ-\beta$$

од правоаголниот $\triangle BNC$,

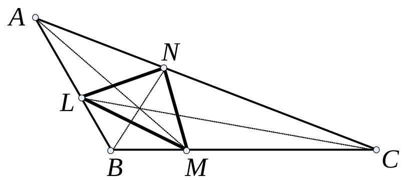
$$90^\circ-\beta=\measuredangle BAH_1$$

од правоаголниот $\triangle BMA$ и

$$\measuredangle BAH_1=\measuredangle BH_2H_1$$

периферни агли над ист лак.

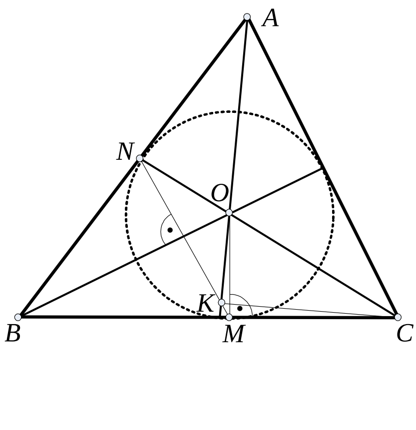
9. Ако во даден триаголник еден негов агол изнесува 120°, тогаш триаголникот со темиња во пресеците на симетралите на аглите со спротивни страни е правоаголен. Докажи!



Решение. Нека $\measuredangle ABC = 120^\circ$, а со L, M и N да ги означиме пресеците на симетралите на аглите кај темињата C, A и B со страните AB, BC и CA соодветно. Ќе докажеме дека NL е симетрила на аголот $\measuredangle ANB$. Навистина, растојанието од L до правата AC е еднакво со растојанието од L до правата BC, зашто CL е симетрала на аголот $\measuredangle BCA$. Но, растојанието од L до правата BC е еднакво со растојанието од L до правата BN, бидејќи $\measuredangle NBL = \measuredangle LBK = 60^\circ$. Затоа растојанието од L до правата AC е еднакво со растојанието од L до правата BN, и од овде следува дека NL е симетрала на аголот $\measuredangle ANB$. Аналогно се покажува дека MN е симетрала на аголот $\measuredangle BNC$. Затоа,

$$\measuredangle LNM = \measuredangle LNB + \measuredangle BNM = \tfrac{1}{2}\measuredangle ANB + \tfrac{1}{2}\measuredangle BNC = \tfrac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ .$$

10. Нека ABC е триаголник, при што $\gamma > \beta$ (со γ е означен аголот кај темето C, а со β аголот кај темето B). Нека O е центарот на впишаната кружница, а M, N и L се точките на страните BC, AB и AC, соодветно, во кои што впишаната кружница ги допира страните на триаголникот. Понатаму, нека K е пресечната точка на правите AO и MN. Докажи дека $\measuredangle AKC$ е прав.



Решение. Аголот $\measuredangle AKC$ е еднаков на аголот $\measuredangle OKC$. Аголот $\measuredangle OMC$ е прав бидејќи е агол меѓуи тангентата и соодветен радиус на впишаната кружница. За да докажеме дека $\measuredangle AKC = \measuredangle OKC$ е прав доволно е да покажеме дека четириаголникот $OKMC$ е тетивен (постои кружница опишана околу $OKMC$), затоа што во тој случај аглите $\measuredangle OKC$ и $\measuredangle OMC$ се еднакви како периферни агли над иста тетива OC.
Ќе покажеме дека $OKMC$ е тетивен на тој начин што ќе докажеме дека

$$\measuredangle KOC + \measuredangle KMC = 180^\circ .$$

Имаме

$\measuredangle KOC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$	($\measuredangle KOC$ е надворешен за OAC)	(1)
$\triangle BOM \cong \triangle BON$	(признак CAC)	(2)
$BMON$ е делтоид	(директно од (2))	(3)

$MN \perp BO$ (директно од (3)) (4)

$\measuredangle BOM = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ ($\measuredangle BMO = 90^\circ$) (5)

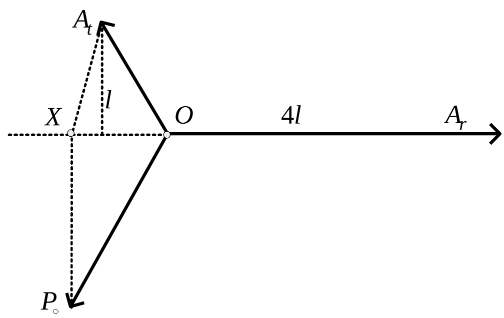
$\measuredangle KMO = \frac{\beta}{2}$ (од (4) и (5)) (6)

$\measuredangle KMC = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ ($\measuredangle OMC = 90^\circ$ и (6)) (7)

$$\measuredangle KOC + \measuredangle KMC = 180^\circ \quad \text{(од (1), (7) и } \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ \text{)}$$

Со тоа доказот е завршен.

11. Тројца мускетари Атос, Портос и Арамис по краткотрајно дружење во крајпатната кафеана заминале кон своите домови, во насоки кои зафаќале агли од 120°. Брзините со кои се движеле мускетарите соодветно се: $10, 20$ и 40 километри на час. Докажи дека во секој момент положбите на мускетарите се темиња на правоаголен триаголник.



Решение. Нека O е кафеаната, а $A_t, P_\circ$ и A_r точките во кои во одреден момент се наоѓаат мускетарите. Во секој момент Атос се наоѓа на растојание l, Портос на растојание $2l$ и арамис на растојание $4l$ од точката O. Јасно $\triangle P_0OX$ е правоаголен, со $\overline{XP_0} = l\sqrt{3}, \overline{XO} = l$, па затоа

$$\overline{P_0A_r} = \sqrt{(l\sqrt{3})^2 + (l+4l)^2} = \sqrt{28}l,\ \overline{P_0A_t} = \sqrt{(l\sqrt{3})^2 + (l+4l)^2} = \sqrt{28}l,$$

$$\overline{A_tA_r}^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{2}l\sqrt{3})^2 + (\tfrac{1}{2}l+4l)^2} = \sqrt{21}l.$$

Со проверка се уверуваме дека

$$\overline{P_0A_r}^2 = \overline{P_0A_t}^2 \text{"}+ \overline{A_tA_r}^2.$$

12. Ако аглите на триаголникот ABC се: $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 90^\circ$, тогаш за неговите страни важи равенството $a^2 = (b+c)c$. Докажете!

Решение. Да повлечеме права MH која зафаќа $\overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (направи цртеж), тогаш и $MH \parallel NC$, па триаголникот $MHCN$ е рамнокрак со $\overline{AD} = \overline{AC} = b$. Очигледно е дека $CH \perp MB$. Оттука

$$MN \perp MB \quad \measuredangle BMN = 90^\circ \quad c : a = a : (b+c) \ \Rightarrow\ a^2 = (b+c)c.$$

13. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC. На кружниот лак AB кој не ја содржи точката C, избрана е точка M различна од A и B. Нека правите AC и BM се сечат во точката K, а правите BC и AM во точката N. Докажете дека производот од должините на отсечките AK и BN не зависи од изборот на точката M.

Решение. Четириаголникот $ACBM$ е вписан во кружницата. Според тоа

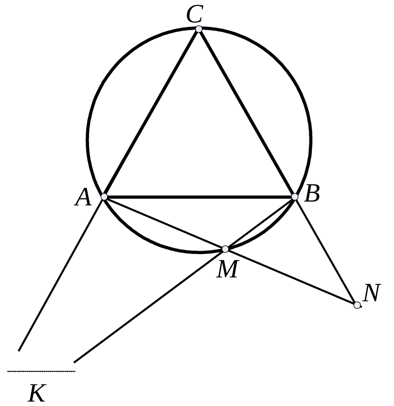
$$\measuredangle AMK = 180^\circ - \measuredangle AMB = \measuredangle ACB = 60^\circ.$$

Од особините на надворешен агол за триаголникот AMK добиваме

$$\measuredangle MAC = \measuredangle CKB + \measuredangle AMK.$$

Од друга страна $\measuredangle MAC = \measuredangle MAB + \measuredangle BAC$. Бидејќи $\measuredangle BAC = \measuredangle AMK = 60^\circ$ и последните две равенства добиваме $\measuredangle MAB = \measuredangle CKB$. Освен тоа, $\measuredangle KAB = \measuredangle ABN = 120^\circ$. Според тоа, триаголниците ABK и BNA се слични, што значи $\overline{AK} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{NB}$, т.е.

$$\overline{AK} \cdot \overline{NB} = \overline{AB}^2 = \text{cosnt}.$$



14. Нека во триаголникот ABC аголот при врвот на темето C е 120° и нека биектрисите на аглите во темињата A, B, C ги сечат спротивните страни во точките D, E, F, соодветно. Докажи дека $\measuredangle DEF = 90^\circ$.

Решение. Нека AD, BE, CF се бисектриси на аглите α, β, γ во триаголникот ABC (види цртеж). Очигледно CD е бисектриса на $\measuredangle KCF$, а AD на $\measuredangle CAB$. Затоа FD е бисектриса на $\measuredangle CFB$ (на надворешниот агол кај темето F на триаголникот AFC-бисектрисите се сечат во една точка која е центар на припишаната кружница). Значи,

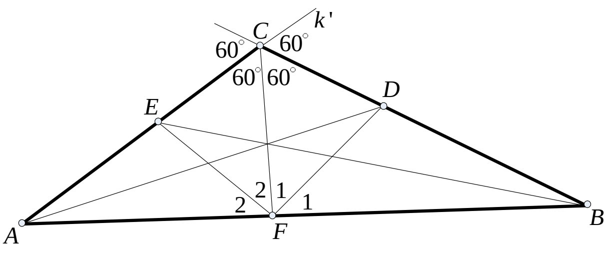
$$\measuredangle CFD = \measuredangle BFD = \measuredangle 1.$$

Слично, FE е бисектриса на $\measuredangle AFC$, па следува

$$\measuredangle AFE = \measuredangle EFC = \measuredangle 2.$$

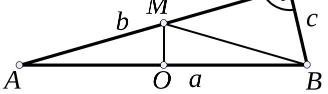
Оттука следува дека

$$\measuredangle EFD = \measuredangle 1 + \measuredangle 2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$



15. Во правоаголен триаголник со остар агол 15°, радиусот на опишаната кружница е геометриска средина од катетите a и b, т. е. $R = \sqrt{ab}$. Докажи!

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето C, аголот кај темето A е 15°, катетите BC и AC се a и b соодветно и хипотенузата е c. Нека M е точка на страната AC така што $\angle ABM = 15^\circ$.

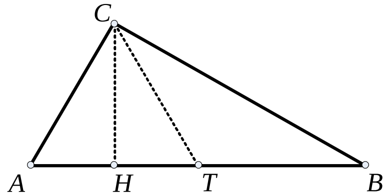


Центарот на опишаната кружница е во средината на хипотенузата, а бидејќи $\triangle ABM$ е рамнокрак следува дека MO е висина во $\triangle ABM$. $\triangle MOB \sim \triangle BCA$, па следува $\overline{BO}:\overline{BM}=\overline{AC}:\overline{AB}$. Аголот кај темето M во правоаголниот триаголник $\triangle BCM$ е 30°, а бидејќи во правоаголен триаголник катетата спроти аголот од 30° е половина од хипотенузата, следува дека $\overline{BM}=2a$. Имајќи предвид дека $\overline{AB}=2R,\ \overline{BO}=R,$ од горната пропорција следува $R=\sqrt{ab}$.

16. Одреди ги аглите во триаголникот, кај кој висината и тежишната линија повлечени од исто теме, го делат аголот при тоа теме на три еднакви дела.

Решение. Нека ABC е триаголник така што висината CH и тежишната линија CT го делат аголот кај темето C на три еднакви дела. $\triangle AHC\cong\triangle CHT$ бидејќи CH е заедничка, $\measuredangle AHC=\measuredangle CHT=90^\circ$ и од условот на задачата, $\measuredangle ACH=\measuredangle HCT$. Значи

$$\overline{AH}=\overline{HT}=\tfrac{1}{2}\overline{TB}=\tfrac{1}{4}\overline{AB}.$$



CT е симетрала на аголот кај темето C во $\triangle CHB$, па од својството на симетралата, следува $\overline{CH}:\overline{CB}=\overline{HT}:\overline{TB}$. Оттука добиваме

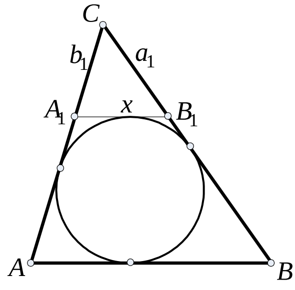
$$\overline{CH}=\frac{\overline{CB}\cdot\overline{HT}}{\overline{TB}}=\overline{CB}\cdot\frac{\frac{1}{2}\overline{TB}}{\overline{TB}}=\tfrac{1}{2}\overline{CB}.$$

Триаголникот CHB е правоаголен, така што едната катета е два пати помала од хипотенузата. Следува дека $\measuredangle HBC=30^\circ$ и $\measuredangle BCH=60^\circ$. Според тоа, аглите во триаголникот ABC се 30°, 60° и 90°.

17. Тангентата на впишаната кружница во триаголникот ABC, паралелна на страната AB, ги сече страните AC и BC во точките A_1 и B_1, соодветно. Пресметај ја должината на отсечката A_1B_1, ако должините на страните на триаголникот ABC се a, b и c.

Решение. Нека $\overline{A_1C}=b_1$, $\overline{B_1C}=a_1$, $\overline{A_1B_1}=x$. Од сличноста на триаголниците ABC и A_1B_1C следува $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{A_1B_1}:\overline{B_1C}$ односно

$$a_1=\tfrac{a}{c}x \qquad (1)$$



Од истата сличност следува $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{A_1B_1}:\overline{A_1C},$ односно

$$b_1=\tfrac{b}{c}x \qquad (2)$$

Бидејќи четириаголникот ABA_1B_1 е тангентен, следува: $\overline{AB}+\overline{A_1B_1}=\overline{AA_1}+\overline{BB_1}$ односно,

$$c+x=b-b_1+a-a_1.$$

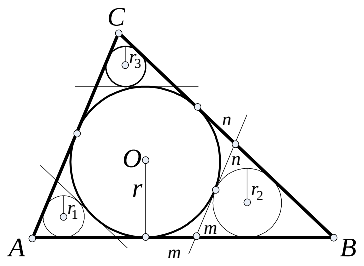
Од последното равенство и равенствата (1) и (2) следува $x=\frac{a+b-c}{a+b+c}c.$

18. Паралелно со страните на триаголникот ABC повлечени се тангенти на неговата впишана кружница. Секоја од тангентите од триаголникот отсекува триаголник. Ако r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ а r_1, r_2, r_3 се радиуси на впишаните кружници во отсечените триаголници, тогаш $r_1 + r_2 + r_3 = r$. Докажи!

Решение. Секој од малите триаголници е сличен со триаголникот ABC. Ако L е периметар на триаголникот ABC а L_1, L_2 и L_3 се периметри на малите триаголници со по едно теме A, B, C соодветно, тогаш

$$\frac{L_1}{L} = \frac{r_1}{r}, \ \frac{L_2}{L} = \frac{r_2}{r} \ \text{и} \ \frac{L_3}{L} = \frac{r_3}{r}.$$

Нека допирните точки на отсечките AB, BC, CA со впишаната кружница се

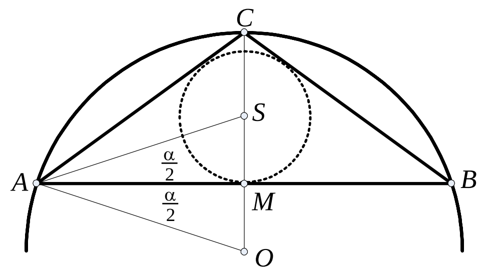


C_1, A_1, B_1 соодветно. Јасно, $L_1 = \overline{AB_1} + \overline{AC_1}$, $L_2 = \overline{BA_1} + \overline{BC_1}$ и $L_3 = \overline{CA_1} + \overline{CB_1}$. Од добиените равенства, јасно е дека $L_1 + L_2 + L_3 = L$.

Според тоа $\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} = \frac{L_1}{L} + \frac{L_2}{L} + \frac{L_3}{L} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L} = \frac{L}{K} = 1$, т.е. $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

19. Во ΔABC центрите на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на страната AB. Најди ги аглите на триаголникот.

Решение. Нека S е центар на впишаната кружница, а O е центар на опишаната кружница. Триаголникот ABC е рамнокрак триаголник (правата OS е симетрала на AB). Според тоа $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \alpha$. Ако $\{M\} = SO \cap AB$ тогаш $\overline{SM} = \overline{OM}$ и $\triangle AMO \cong \triangle AMS$, па затоа $\measuredangle MAO = \frac{\alpha}{2}$. Периферниот агол $\measuredangle ABC$ над тетивата AC е еднаков на половина од централниот $\measuredangle AOC$ над истата тетива. Според тоа



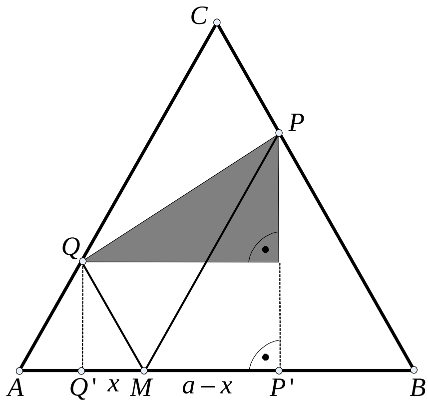
$$\alpha = \measuredangle ABC = \frac{1}{2}\measuredangle AOC = \frac{1}{2}(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) \ \text{т.е.} \ 4\alpha = 180^\circ - \alpha.$$

Според тоа, аглите на триаголникот се $\alpha = \beta = 36^\circ$ и $\gamma = 108^\circ$.

20. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC избрана е точка M. Низ точката M повлечени се прави паралелни со страните BC и AC, при што се добиени точките $P \in BC$ и $Q \in AC$. Одреди ја положбата на точката M така што отсечката PQ да има најмала должина.

Решение. Со повлекувањето на паралелните прави се добиваат триаголниците $\triangle MBP$, $\triangle AMQ$ кои се слични со $\triangle ABC$, па оттука се и рамнострани. Нека P', Q' се подножјата на нормалите спуштени од точките P, Q соодветно на страната AB.

Нека $\overline{AM} = x$. Тогаш $\overline{MB} = a - x$. Од правоаголниот $\triangle QRP$, $\overline{QP}^2 = \overline{QR}^2 + \overline{PR}^2$. Од рамностраните триаголници важи $\overline{QQ'} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $\overline{PP'} = \frac{(a-x)\sqrt{3}}{2}$. Од друга страна $\overline{PR} = \overline{PP'} - \overline{QQ'}$ па со замена добиваме



$\overline{PR} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}$. Исто така и

$\overline{QR} = \overline{Q'P'} = \overline{Q'M} + \overline{MP'} = \frac{x}{2} + \frac{a-x}{2} = \frac{a}{2}$.

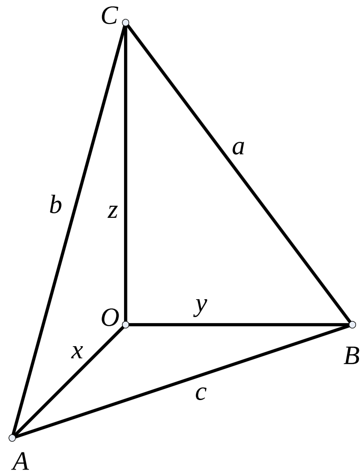
Конечно,

$\overline{QP}^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3})^2$,

т.е. $\overline{QP}^2 = 3x^2 - 3ax + a^2$. Отсечката PQ има најмала должина ако $\overline{QP}^2$ има најмала вредност. Бидејќи $\overline{QP}^2$ е квадратна функција по променливата x, нејзиниот график е парабола која има минимум, и тоа во темето $x = -\frac{-3a}{6} = \frac{a}{2}$. Значи, бараната положба на точката M е на растојание $\frac{a}{2}$ од точката A.

21. Нека OA, OB, OC се три заемно нормални отсечки. Дали може да се изберат должини за отсечките OA, OB, OC, за да страните на триаголникот ABC се однесуваат како $3:4:6$?

Решение. Нека $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$, $\overline{OC} = z$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ (цртеж десно). Нека $c:a:b = 3:4:6$, значи постои $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ така да $c = 3k,\ a = 4k,\ b = 6k$. Триаголниците $AOB,\ BOC, AOC$ се правоаголни, од каде се добива дека



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9k^2 \\ y^2 + z^2 = 16k^2 \\ x^2 + z^2 = 36k^2 \end{cases}$$

Ако ги собереме првата и втората равенка и од тој збир ја одземеме третата равенка ќе добиеме

$$(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) - (x^2 + z^2) = 9k^2 + 16k^2 - 36k^2 \Rightarrow 2y^2 = -11k^2 \Rightarrow y^2 = -\tfrac{11}{2}k^2,$$

што не е можно.

Заради добиената контрадикција, заклучуваме дека не може да се изберат должини за отсечките $OA,\ OB,\ OC$ на тој начин, за да односот на страните на триаголникот ABC биде $3:4:6$.

22. Нека a, b, c се должини на страните на триаголник, при што a е најдолгата. Докажи дека триаголникот е правоаголен ако и само ако важи

$$(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\cdot(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c})=\sqrt{2}(a+b+c).$$

Решение. Даденото равенство ќе го квадрираме и го добиваме равенството

$$2(a+\sqrt{a^2-b^2})(a+\sqrt{a^2-c^2})=(a+b+c)^2. \qquad (1)$$

Поради позитивноста на левата и десната страна на равенството двете равенства се еквивалентни. Нека триаголникот е правоаголен. Бидејќи a е најдолгата страна важи $a^2=b^2+c^2$. Тогаш

$$\begin{aligned}2(a+\sqrt{a^2-b^2})(a+\sqrt{a^2-c^2})&=2(a+c)(a+b)=2a^2+2ab+2ac+2bc\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2\end{aligned},$$

односно важи даденото равенство.

Обратно, нека е исполнето равенството (1) и нека $a^2>b^2+c^2$. Тогаш важи

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=2(a+\sqrt{a^2-b^2})(a+\sqrt{a^2-c^2})>2(a+c)(a+b)=2a^2+2ab+2ac+2bc\\&>a^2+b^2+c^2+2ab+ac+bc=(a+b+c)^2\end{aligned},$$

што ее е можно.

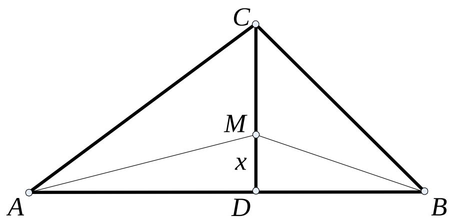
Слично, добиваме контрадикција ако претпоставиме дека $a^2<b^2+c^2$. Значи важи $a^2=b^2+c^2$ па триаголникот е правоаголен .

23. Даден е триаголникот ABC со страни $\overline{AC}=b, \overline{BC}=a$ и висината спуштена од темето C, $\overline{CD}=h$. Одреди точка M на висината таква што збирот $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2$ е најмал.

Решение. Нека $\overline{MD}=x$. Тогаш $\overline{CM}=h-x$, односно $\overline{CM}^2=(h-x)^2$. Користејќи ја Питагоровата теорема можеме да ги изведеме и следниве релации:

$$\overline{AM}^2=\overline{AD}^2+x^2=b^2-h^2+x^2 \text{ и}$$

$$\overline{BM}^2=\overline{BD}^2+x^2=a^2-h^2+x^2.$$



Со замена за збирот добиваме

$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=b^2-h^2+x^2+a^2-h^2+x^2+(h-x)^2,$$

односно $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=3x^2-2hx+a^2+b^2-h^2$.

Јасно, збирот ќе биде минимален во точката во која квадратната функција

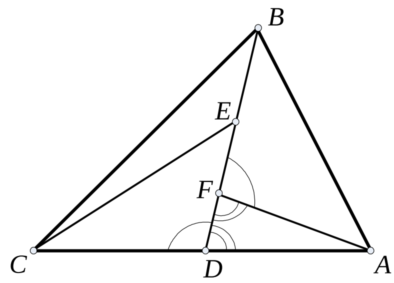
$$f(x)=3x^2-2hx+a^2+b^2-h^2$$

достигнува свој минимум, односно во темето на параболата. Темето на параболата е во точката $(\frac{h}{3},a^2+b^2-\frac{4}{3}h^2)$, од каде заклучуваме дека точката M е определена со растојанието $\overline{MD}=\frac{h}{3}$.

24. Во триаголникот ABC е повлечена тежишна линија BD. Точките E и F ја делат тежишната линија на три еднакви дела $\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FD}$. Ако $\overline{AB}=1$ и $\overline{AF}=\overline{AD}$, определи ја должината на отсечката CE.

Решение. Бидејќи $\overline{AF}=\overline{AD}$, триаголникот DAF е рамнокрак, па според тоа $\measuredangle ADF=\measuredangle AFD$, а оттука имаме $\measuredangle BFA=\measuredangle CDE$. Отсечката BD е тежишна линија, па затоа $\overline{CD}=\overline{AF}$, а од условот на задачата $\overline{BF}=\overline{DE}$.

Заради тоа, од признакот CAC, триаголниците CDE и AFB се складни , па според тоа $\overline{CE}=\overline{AB}=1$.

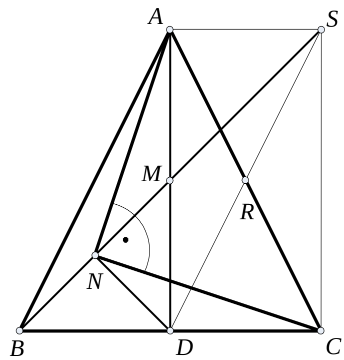


25. Нека ABC е рамнокрак триаголник со $\overline{AB}=\overline{AC}$. Нека D е средина на страната BC, M е средина на отсечката AD и N е проекцијата на точката D на BM. Докажи дека $\measuredangle ANC=90^\circ$.

Решение. Нека S е точка таква што четириаголникот $ABDS$ е паралелограм (цртеж десно). Тогаш, четириаголникот $ADCS$ е правоаголник и нека R е пресечната точка на неговите дијагонали AC и DS. Бидејќи N лежи на дијагоналата BS на паралелограмот $ABDS$ следува дека триаголникот SND е правоаголен. Тогаш R е центарот на опишаната кружница околу триаголникот SND и оттука

$$\overline{NR}=\tfrac{1}{2}\overline{DS}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}.$$

Значи, важи $\overline{RA}=\overline{RC}=\overline{RN}$ и затоа триаголникот ANC е правоаголен, односно $\measuredangle ANC=90^\circ$.



26. Дадени се четири точки $A,\ B,\ C$ и D во рамнината такви што $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\overline{AD}=\overline{BD}$. Нека E е точка од правата AC, така што A е меѓу E и C. Ако за аглите $\alpha=\measuredangle BAE$ и $\beta=\measuredangle ADC$ важи $\alpha+\beta=200^\circ$, определете го аголот $\varphi=\measuredangle BCD$.

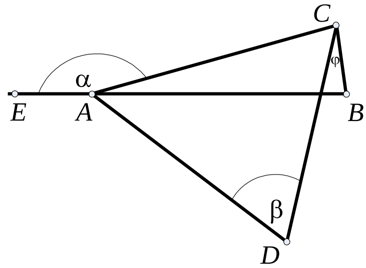
Решение. Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак со основа BC, а $\alpha=\measuredangle BAE$ следува дека

$$\measuredangle ACB=\measuredangle CBA=\frac{180^\circ-\measuredangle BAC}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

Бидејќи и триаголникот ABD е рамнокрак со основа AB, имаме

$$\measuredangle DBA=\measuredangle BAD=\frac{180^\circ-\beta}{2}.$$

Оттука, следува



$$\varphi = \measuredangle CBD = \measuredangle CBA - \measuredangle DBA = \frac{\alpha}{2} - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} - 90^\circ = 10^\circ$$

27. Периметарот на еден правоаголен триаголник е $2p$ ($p>0$), а неговата висина спуштена кон хипотенузата има должина h. Определи ги неговите страни.

Решение. Од условот на задачата имаме $a+b+c=2p$, каде a и b се должините на катетите, а c е должина на хипотенузата. Според тоа

$$a+b=2p-c \tag{1}$$

$$(a+b)^2=(2p-c)^2$$

$$a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2$$

$$c^2+2ab=(2p-c)^2$$

$$ab=2p^2-2pc. \tag{2}$$

Бидејќи $ab=ch$, ако замениме во (2) добиваме $ch+2pc=2p^2$ односно

$$c=\frac{2p^2}{h+2p}.$$

Ако добиеното c го замениме во (1) и (2) добиваме.

$$\begin{cases} a+b=\frac{2p(h+p)}{h+2p} \\ ab=\frac{2p^2h}{h+2p} \end{cases}$$

Според тоа, a и b се корени на квадратната равенка

$$x^2-\frac{2p(h+p)}{h+2p}x+\frac{2p^2h}{h+2p}=0.$$

Значи,

$$a=\frac{p}{h+2p}(h+p+\sqrt{(p-h)^2-2h^2}),\ b=\frac{p}{h+2p}(h+p-\sqrt{(p-h)^2-2h^2}),\ c=\frac{2p^2}{h+2p}.$$

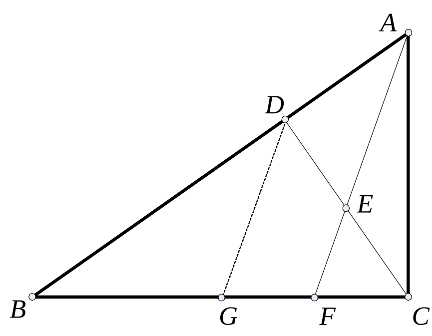
28. Во правоаголниот триаголник ABC, точката D е подножје на висината спуштена од темето C врз хипотенузата AB, точката E е средина на висината CD, а точката $\{F\}=AE\cap BC$. Ако $\overline{AD}=4$ и $\overline{BD}=9$.

Пресметај ја должината на отсечката AF.

Решение. Од равенството

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BD}$$

кое важи за правоаголниот триаголник ABC добиваме дека $\overline{CD}=6$, а бидејќи точката E е средина на висината CD, имаме $\overline{DE}=3$. Од правоаголниот триаголник AED имаме $\overline{AE}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Нека G е точка на страната BC, таква што $DG \| AF$. Бидејќи EF е средна линија на триаголникот CDG, ако озна-



чиме $\overline{EF}=x$, тогаш $\overline{DG}=2x$.

Од сличноста на триаголниците AFB и DGB следува дека $\frac{\overline{AF}}{\overline{DG}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$, т.е. $\frac{5+x}{2x}=\frac{13}{9}$, па затоа $x=\frac{45}{17}$.

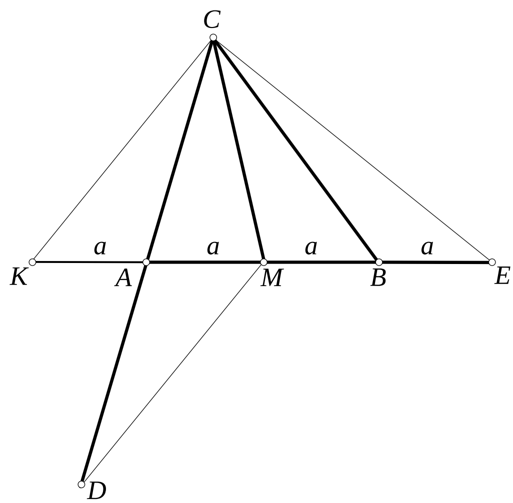
Значи, $\overline{AF}=\frac{130}{17}$.

29. Во триаголникот ABC должината на тежишната линија CM е еднаква на должината на страната AB. На продолженијата на страните AC и AB се избрани точки D и E соодветно, така што $\overline{AD}=\overline{AC}$ и $\overline{BE}=\overline{BM}$.

Докажи дека DM и CE се заемно нормални.

Решение. Воведуваме ознака $\overline{BM}=a$. Нека K е точка симетрична на точката M во однос на точката A. Тогаш

$$\overline{KM}=\overline{MC}=\overline{ME}=2a.$$

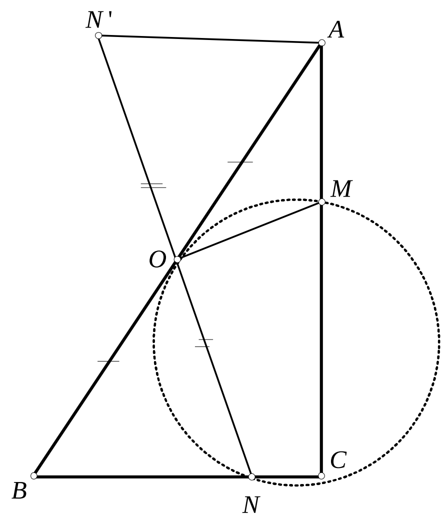


Во триаголникот KCE должината на тежишната линија CM е половина од страната кон која е повлечена. Според тоа, триаголникот KCE е правоаголен. Значи, $KC\perp CE$.

Четириаголникот $DMCK$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се половат. Според тоа $KC\parallel DM$, од каде добиваме $DM\perp CE$, што и требаше да се докаже.

30. Во правоаголниот триаголник ABC, точката O е средина на хипотенузата AB. На страната AC е земена точка M, а на страната BC точка N, така што $\angle MON$ е прав агол. Докажи дека

$$\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=\overline{MN}^2. \qquad (1)$$



Решение. Нека N' е симетрична точка на точката N во однос на точката O.

Триаголниците OAN' и OBN се складни, според признакот САС. Од друга страна

$$\measuredangle N'AM=\measuredangle N'AO+\measuredangle MAO$$

$$=\measuredangle ABC+\measuredangle CAB=90^\circ,$$

односно $\measuredangle N'AO$ е прав.

Според Питагоровата теорема,

$$\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=\overline{AM}^2+\overline{AN'}^2=\overline{MN'}^2 \qquad (2)$$

Точката O е средина на NN' и $OM\perp NN'$. Значи, $\Delta OMN\cong\Delta OMN'$, од каде добиваме $\overline{MN}=\overline{MN'}$.

Сега, ако замениме во (2) го добиваме (1).

31. Дали може рамностран триаголник со страна 3 да се подели на 2003 дисјунктни триаголници, така што за секој од нив сите страни да се поголеми од 1?

Решение. Можно е. Нека темињата на дадениот триаголник се A, B и C_0, нека K и L се точки на страната AB така што $\overline{AK}=\overline{KL}=\overline{LB}=1$, нека k и l се прави низ K и L соодветно кои се нормални на правата AB и нека C_1 е пресек на правата l и страната BC_0. Дефинираме точки C_n, $n\geq 2$ со $\{C_n\}=k\cap AC_{n-1}$, ако n е парен, и $\{C_n\}=l\cap BC_{n-1}$, ако n е непарен. Тогаш, триаголниците $AC_{2m}C_{2m+1}$ за $0\leq m\leq 1000$, $BC_{2m-1}C_{2m}$ за $1\leq m\leq 1001$ и триаголникот ABC_{2002} го даваат бараното разбивање, затоа што за $m>0$ имаме

$$\overline{C_mC_{m+1}}>\overline{KL}=1,\ \overline{AC_{2m}}>\overline{AK}=1,\ \overline{BC_{2m+1}}>\overline{BL}=1,$$
$$\overline{AC_{2m+1}}>\overline{AL}=2,\ \overline{BC_{2m}}>\overline{BK}=2.$$

32. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H. Опишаната кружница ω околу $\triangle HAB$ по втор пат ја сече отсечката BC во точката D. Правата DH ја сече отсечката AC во точката P, а Q е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ADP$. Докажи дека центарот на ω лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

Решение. Со R да го означиме центарот на ω и нека E е пресечната точка на правите BH и AC. Тогаш

$$\measuredangle RBD=90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle DRB=90^\circ-\measuredangle DHB=90^\circ-\measuredangle PHE=\measuredangle BPH=180^\circ-\measuredangle APD.$$

Од друга страна

$$\measuredangle MQD=\tfrac{1}{2}\measuredangle AQD=\tfrac{1}{2}(360^\circ-2\measuredangle APD)=180^\circ-\measuredangle APD=\measuredangle RBD$$

од каде следува дека R лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

33. Даден е $\triangle ABC$, $\overline{AB}<\overline{BC}$. Нека D е точка на страната AC таква што $\overline{AB}=\overline{BD}$. Вписаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира AB во K и AC во L, а J е центарот на вписаната кружница во $\triangle BCD$. Докажи дека правата KL ја полови отсечката AJ.

Решение. Нека M е точка на AC таква што $JM\,||\,KL$. Доволно е да докажеме дека $\overline{AM}=2\overline{AL}$.

Од $\measuredangle BDA=\alpha$ следува $\measuredangle JDM=90^\circ-\frac{\alpha}{2}=\measuredangle KLA=\measuredangle JMD$, па затоа $\overline{JM}=\overline{JD}$, а допирната точка на вписаната кружница во $\triangle BCD$ со CD е средината T на отсечката MD. Според тоа,

$$\overline{DM}=2\overline{DT}=\overline{BD}+\overline{CD}-\overline{BC}=\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CD},$$

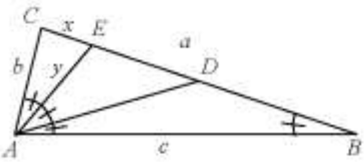
од каде следува

$$\overline{AM}=\overline{AD}+\overline{DM}=\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}=2\overline{AL}.$$

34. Нека се $a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$ и $c=\overline{AB}$ страни на триаголникот ABC во кој $\measuredangle BAC=3\measuredangle ABC$. Докажи дека $bc^2=(a-b)^2(a+b)$.

Решение. Нека D и E се точки од страната BC, такви што

$$\measuredangle BAD=\measuredangle DAE=\measuredangle EAC.$$



Нека $\overline{EC}=x$ и $\overline{AE}=y$. Од сличноста на триаголниците AEC и BAC, добиваме

$$c:y=a:b=b:x,$$

односно $x=\frac{b^2}{a}$, $y=\frac{bc}{a}$.

Триаголниците ADC и ADB се рамнокраки, па $\overline{DB}=a-b$ и $\overline{AD}=\overline{DB}$, односно $\overline{AD}=a-b$, $\overline{DE}=b-x$. Од сличноста на триаголниците BAE и ADE, добиваме $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{EB}:\overline{AE}$, односно

$$c:(a-b)=(a-x):y,$$

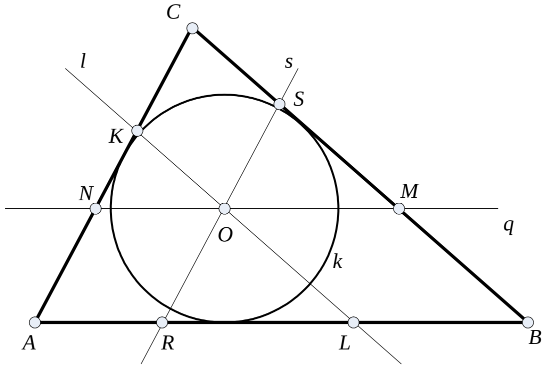
од каде со замена за x и y и со средување, се добива бараното равенство.

35. Нека m,n и p се должините на отсечките кои ги отсекуваат страните триаголникот ABC од правите кои минуваат низ центарот на впишаната кружница и се паралелни со BC,CA и AB соодветно. Докажи дека

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2,$$

каде $a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$ и $c=\overline{AB}$.

Решение. Нека k е впишаната кружница во триаголникот ABC со центар O и радиус r. Правите q,s и l минуваат низ точката O и се паралелни со AB, AC и BC соодветно.



Точките M и N се пресеци на q со BC и AC, R и S се пресеци на s со AB и CB, а K и L се пресеци на l со AC и AB соодветно. Тогаш

$$\overline{KL}=m,\ \overline{RS}=n \text{ и } \overline{MN}=p.$$

Нека h_a,h_b,h_c се стандардни ознаки за висините на триаголникот а $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ и $\overline{AB}=c$ се стандардни ознаки за должините на страните.

Паровите триаголници ABC и NMC, ABC и RBS, ABC и ALK се слични. Висините на триаголниците NMC, RBS и ALK од точките C,B и A се еднакви на h_c-r, h_b-r и h_a-r соодветно. Според тоа

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}=\frac{h_c-r}{h_c},\qquad \frac{\overline{RS}}{\overline{AC}}=\frac{h_b-r}{h_b},\qquad \frac{\overline{KL}}{\overline{BC}}=\frac{h_a-r}{h_a},$$

односно

$$\frac{p}{c}=1-\frac{r}{h_c}, \qquad \frac{n}{b}=1-\frac{r}{h_b}, \qquad \frac{m}{a}=1-\frac{r}{h_a}.$$

Сега

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=3-r(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})=3-r(\frac{a}{2P}+\frac{b}{2P}+\frac{c}{2P})=3-r\frac{a+b+c}{2P}=3-r\frac{1}{r}=3-1=2.$$

36. Нека должините на страните на еден правоаголен триаголник се β (γ е должината на хипотенузата), при што $\frac{12}{a}+\frac{12}{b}=\frac{35}{c}$. Докажи дека тој е „египетски“, т.е. односот на неговите страни е $3:4:5$.

Решение. Даденото равенство ќе го запишеме во видот

$$\frac{c(a+b)}{ab}=\frac{35}{12}. \tag{*}$$

За должините на катетите a и b, должината на хипотнузата c и радисуот на впишаната кружница r е исполнето равенството

$$a+b=c+2r, \tag{1}$$

и неговата плоштина е $P=\frac{1}{2}ab$, односно $ab=2P$. Исто така $2P=r(a+b+c)$, па според тоа,

$$ab=2P=r(a+b+c)=r(2c+2r). \tag{2}$$

Ако (1) и (2) ги замениме во (*), добиваме

$$\frac{c(c+2r)}{r(2c+2r)}=\frac{35}{12} \tag{3}$$

Равенката (3) можеме да ја запишеме во облик

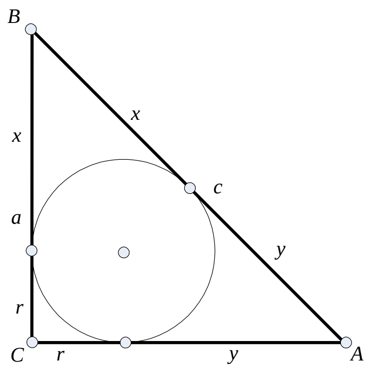
$$6c^2-23cr-35r^2=0$$
$$(c-5r)(6c+7r)=0.$$

Од тоа што $c,r>0$, решение на последната равенка е $c=5r$. Ако сега замениме во (1) и (2) го добиваме системот

$$\begin{cases} a+b=7r, \\ ab=12r^2. \end{cases}$$

Решенијата за a и b се решенија на равенката

$$t^2-7rt+12r^2=0$$
$$(t-3r)(t-4r)=0.$$



$c+2r=(x+r)+(y+r)=a+b$

Значи, страните на триаголникот се $3r, 4r$ и $5r$ и тие го исполнуваат условот на задачата.

37. На краците CA и CB на рамнокракиот триаголник ABC се избрани точки M и N соодветно, така што $CM=CN$. Должината на основата AB е $2a$. Определи го односот во кој точките M и N ги делат краците, ако триаголникот ABC има периметар $2P$, а четириаголникот $ABNM$ има периметар $2p$.

Решение. Должината на краците CA и CB на триаголникот ABC е

$$\frac{2P-2a}{2}=P-a\,.$$

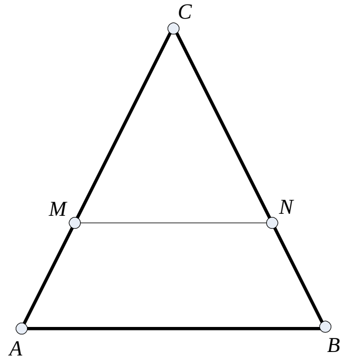
Нека $x=\overline{CM}=\overline{CN}$. Од сличноста на триаголниците ABC и MNC добиваме дека $\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{CA}}$, т.е. $\frac{\overline{MN}}{2a}=\frac{x}{P-a}$.Според тоа $\overline{MN}=\frac{2ax}{P-a}$. Оттука

$$2P-2x+\frac{2ax}{P-a}=2p\,,$$

од каде добиваме $x=\frac{(P-a)(P-p)}{P-2a}$. Значи,

$$\overline{AM}=P-a-\frac{(P-a)(P-p)}{P-2a}=\frac{(P-a)(p-2a)}{P-2a}\,.$$

Конечно, $\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{P-p}{p-2a}$.



38. Во триаголникот ABC, $\frac{1}{2}\overline{CA}<\overline{AB}<\overline{CB}$, на тежишната линија $\overline{BM}$ е избрана точка K, таква што $\overline{CK}=\overline{AB}$. Пресекот на правата CK со AB е точката P. Докажи дека триаголникот BKP е рамнокрак.

Решение. На полуправата BM ќе избереме точка L, така што $\overline{BM}=\overline{ML}$. Бидејќи $\overline{CM}=\overline{MA}$ добиваме дека $CLAB$ е паралелограм. Значи, $\overline{CL}=\overline{BA}=\overline{CK}$. Триаголникот CLK е рамнокрак со основа KL. Според тоа,

$$\measuredangle CLK=\measuredangle CKL=\measuredangle BKP\,. \qquad (1)$$

(последното равенство е од еднаквост на накрсни агли).

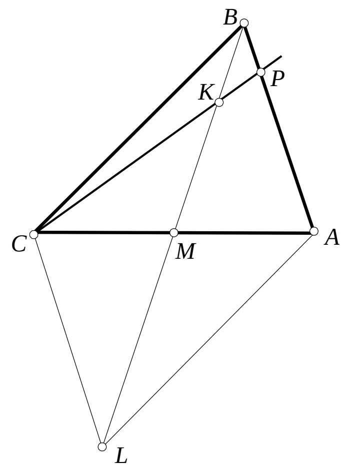
Бидејќи $CB\,||\,AL$ и BL е трансферзала, добиваме дека

$$\measuredangle CLB=\measuredangle BKP\,. \qquad (2)$$

Во триаголникот KPB, од (1) и (2), имаме

$$\measuredangle BKP=\measuredangle KBP\,,$$

односно тој е рамнокрак триаголник.



39. Во правоаголен триаголник, односот на радиусите на впишаната и опишаната кружница е $2:5$. Определи го односот на катетите.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со теме на правиот агол во темето C. Нека b е должината на поголемата катета AC и a е должината на помалата катета BC.

Нека r е радиус на впишаната кружница k_1 а R е радиус на опишаната кружница k_2 (види цртеж).

Тогаш $R=\frac{c}{2}$ и $r\frac{a+b-c}{2}$, па од условот на задачата, имаме

$$\frac{\frac{a+b-c}{2}}{\frac{c}{2}}=\frac{2}{5}\,.$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик

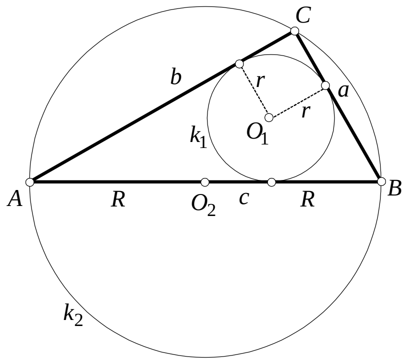
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{7}{5}. \qquad (1)$$

Од Питагорина теорема имаме

$$(\tfrac{a}{c})^2+(\tfrac{b}{c})^2=1. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) го добиваме системот

$$\begin{cases}\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{7}{5}\\ (\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1\end{cases}.$$



Ако воведеме смени $\frac{a}{c}=x, \frac{b}{c}=y$, го добиваме системот

$$\begin{cases}x+y=\frac{7}{5}\\ x^2+y^2=1\end{cases},$$

кој е еквивалентен со ситемот

$$\begin{cases}x+y=\frac{7}{5}\\ xy=\frac{12}{25}\end{cases}.$$

Според тоа, x и y се решенија на квадратната равенка

$$t^2-\frac{7}{5}t+\frac{12}{25}=0.$$

Решенија на квадратната равенка се $t_1=\frac{4}{5}$ и $t_2=\frac{3}{5}$. Сега имаме, $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$.

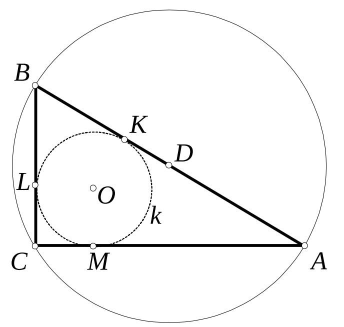
40. Во еден правоаголен триаголник, радиусот на опишаната кружница е R а неговата плоштина е P.

Определи го радисуот на впишаната кружница во триаголникот.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со теме на правиот агол во точката C. Точката D е средина на хипотенузата а K,L,M се допирните точки на впишаната кружница k. Бидејќи должината на хипотенузата е $c=\overline{AB}$, должината на радиусот на опишаната кружница е

$$R=\overline{AD}=\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

каде a и b се должините на катетите BC и AC соодветно.



Ако r е радиусот на впишаната кружница k, тогаш

$$r=\frac{a+b-c}{2}. \qquad (1)$$

Според тоа,

$$4R^2=a^2+b^2$$
$$2P=ab,$$

и ако првата равенка ја собереме со двојната вредност на втората равенка, имаме

$$(a+b)^2=4(R^2+P)$$
$$a+b=2\sqrt{R^2+P}.$$

Сега, од (1) заради $c=2R$, добиваме

$$r=\tfrac{1}{2}(a+b-2R)=\tfrac{1}{2}(2\sqrt{R^2+P}-2R)=\sqrt{R^2+P}-R.$$

41. Во триаголникот ABC, должините на страните AB, BC, CA се c, a, b соодветно, а должините на соодветните висини се h_c, h_a и h_b, За должините на страните и должините на висините се исполнето равенствата

$$a+h_a=b+h_b=c+h_c. \tag{*}$$

Докажи дека триаголникот е рамностран.

Решение. Бидејќи $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$, добиваме дека $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$ и $h_c=\frac{2P}{c}$. Ако замениме во (*), добиваме

$$a+\frac{2P}{a}=b+\frac{2P}{b}=c+\frac{2P}{c}=q.$$

Равенствата $a+\frac{2P}{a}=q$, $b+\frac{2P}{b}=q$, $c+\frac{2P}{c}=q$ можеме да ги запишеме во облик

$$a^2-qa+2P=0 \tag{1}$$

$$b^2-qb+2P=0 \tag{2}$$

$$c^2-qc+2P=0. \tag{3}$$

Според тоа, a,b,c се решенија на квадратната равенка

$$x^2-qx+2P=0. \tag{4}$$

Бидејќи квадратна равенка има најмногу две реални решенија, имаме $a=b$ или $b=c$ или $c=a$.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a=b\neq c$. Тогаш a и c се реални и различни решенија на квадратната равенка (4), т.е. исполнети се (1) и (2). Ако од равенката (1) ја одземеме равенката (3), се добива

$$(a-c)(a+c-q)=0,$$

и бидејќи $a-c\neq 0$, имаме $q=a+c$. Потполно аналогно, ако од (2) ја одземеме (3) се добива $q=b+c$. Значи, равенката (4) го добива обликот

$$x^2-(a+c)x+2P=0$$

односно

$$x^2-(b+c)x+2P=0,$$

и c е нејзино решение. Според тоа

$$c^2-(b+c)c+2P=0$$

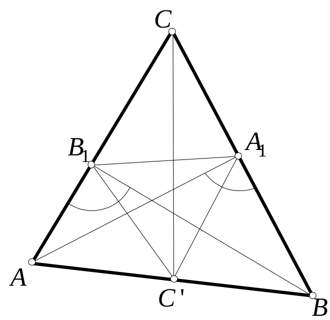
$$c^2-(a+c)c+2P=0.$$

Од последните две равенства добиваме

$$P=\frac{ac}{2} \text{ и } P=\frac{bc}{2}.$$

Значи, $a=b=h_c$, што е во спротивност со $h_c<a,b$.

Заради добиената контрадикција, $a=b=c$



42. Во остроаголниот триаголник ΔABC, аголот при темето C е 60°. Точките A_1 и B_1 се подножја на висините спуштени од темињата A и B врз страните BC и CA соодветно. Ако C' е средина на AB, тогаш триаголникот $\Delta C'A_1B_1$ е рамностран. Докажи!

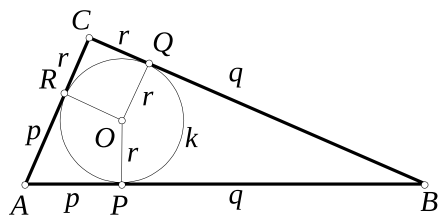
Решение. Четириаголникот ABA_1B_1 е тетивен, а кружницата која е опишана околу него има дијаметар AB. Точката C' е центар на опишаната кружница, при што $\overline{C'A_1} = \overline{C'B_1} = R$. Триаголникот CBB_1 е правоаголен и $\angle B_1CB = 60^\circ$.

Според тоа, $\measuredangle A_1BB_1 = \measuredangle CBB_1 = 30^\circ$. Аглите $\measuredangle A_1C'B_1$ и $\measuredangle A_1BB_1$ се централен и периферискиагол во кружница. Според тоа,

$$\measuredangle A_1C'B_1 = 2\measuredangle A_1BB_1 = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ .$$

43. Впишаната кружница во правоаголен триаголник, со допирната кружница ја дели хипотенузата на две отсечки со должини p и q. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C и нека k е впишаната кружница во него (види цртеж).



Нека кружницата k ги допира страните AB, BC и CA во точките P, Q и R соодветно.

Тогаш $\overline{AP} = \overline{AR} = p$, $\overline{BP} = \overline{BQ} = q$ и $\overline{CR} = \overline{CQ} = r$, каде r е радиусот на впишаната кружница k.

Сега, плоштината на триаголникот е

$$P = pr + qr + r^2 .$$

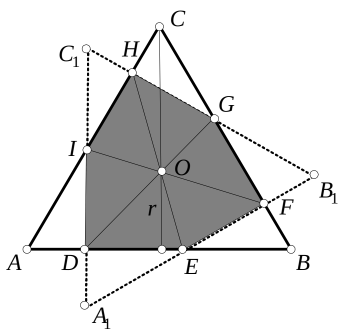
Од друга страна

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}(p+r)(q+r) = \frac{1}{2}(pq + pr + qr + r^2) = \frac{1}{2}(pq + P) .$$

Од последното равенство јасно е дека $P = pq$.

44. Рамностран триаголник со плоштина P е заротиран за 30° околу ортоцентарот во рамнината во кој лежи. Колку е плоштината на заедничкиот дел од почетниот и добиениот триаголник?

Решение. Нека ABC е зададениот триаголник чиј ортоцентар е O, и со зададената ротација нека се добива триаголникот $A_1B_1C_1$.



Да претпоставиме дека

$AC \cap A_1C_1 = I$, $AB \cap A_1B_1 = D$,

$AB \cap A_1B_1 = E$, $BC \cap A_1B_1 = F$,

$BC \cap B_1C_1 = I$ и $CA \cap C_1A_1 = I$

(види цртеж). Според тоа заедничкиот дел на двата триаголници е шестаголник.

Секоја страна на триаголникот и нејзината слика се сечат под агол од 30°. Од ротацијата, исто така паровите страни AB и A_1C_1, BC и A_1B_1, AC и B_1C_1 се заемно нормални.

Заради тоа, триаголниците IHC_1, CHG, GFB_1, BFE, EDA_1, ADI, што се надвор од заедничкиот шестаголник се правоаголни. Тие исто така се складни (разгледај го триаголникот B_1FB и определи ги неговите агли или разгледај го четириаголникот EBB_1G).

Според тоа, добиениот шестаголник е рамностран. Бидејќи вписаната кружница во триаголникот ABC е вписана кружница и во триаголникот $A_1B_1C_1$, добиваме дека триаголниците ODE, OEF, OFG, OGH, OHI и OID се складни, а нивна висина кон страна, што е страна на шестаголникот, е радиусот на вписаната кружница во триаголниците. Според тоа, доволно е да се определи $\overline{DE}$. Притоа

$$P_1 = 6\frac{\overline{DE}\cdot r}{2} = 3\overline{DE}\cdot r\,.$$

За да ја пресметаме $\overline{DE}$ ќе го разгледаме равенството

$$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EB}=\overline{AB}=a\,.$$

Од друга страна $\overline{DE}=\overline{DI}=\overline{AD}\sqrt{3}$, $\overline{EB}=2\overline{BF}=2\overline{AD}$, и

$$\overline{AD}+2\overline{AD}+\overline{AD}\sqrt{3}=a\,,$$

односно

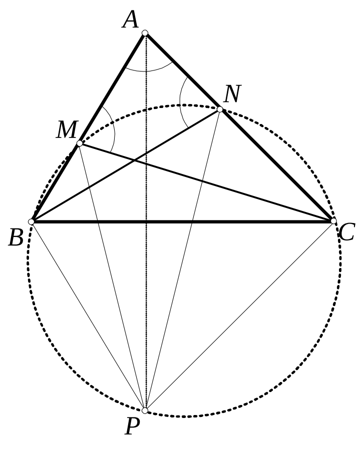
$$\overline{AD}=\frac{a}{3+\sqrt{3}},\quad \overline{DE}=\frac{a\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}\,.$$

Бидејќи $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, добиваме

$$P_1 = 3\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3}-1)P\,.$$

45. На страните AB и AC на триаголникот ABC се избрани точки M и N соодветно, различни од неговите темиња, при што $\overline{CM}=\overline{CA}$ и $\overline{BN}=\overline{BA}$. Точката P е симетрична на точката A во однос на правата BC. Докажи дека PA е симетрала на аголот MPN.

Решение. Бидејќи точката P е симетрична на точката A во однос на правата BC (види цртеж) имаме $\measuredangle BPC=\measuredangle BAC$. Од тоа што ΔMCA е рамнокрак со основа MA имаме $\measuredangle AMC=\measuredangle MAC=\measuredangle BAC$. Слично, од тоа што ΔABN е рамнокрак со основа NA имаме $\measuredangle ANB=\measuredangle BAN=\measuredangle BAC$.



Според тоа,

$$\begin{aligned}\measuredangle BPC+\measuredangle BMC &= \measuredangle BPC+(180^\circ-\measuredangle AMC)=\\ &= \measuredangle BPC+(180^\circ-\measuredangle BAC)=\\ &= \measuredangle BPC+(180^\circ-\measuredangle BPC)=180^\circ\end{aligned}$$

Значи, четириаголникот $PCMB$ е тетивен. Оттука

$$\measuredangle MPA = \measuredangle MPC - \measuredangle APC = \measuredangle MBC - \measuredangle PAC =$$
$$= \measuredangle ABC - (90^\circ - \measuredangle ACB) =$$
$$= \measuredangle ABC + \measuredangle ACB - 90^\circ$$
$$\measuredangle NPA = \measuredangle NPB - \measuredangle APB = \measuredangle ACB - \measuredangle BAP =$$
$$= \measuredangle ACB - (90^\circ - \measuredangle ABC) =$$
$$= \measuredangle ACB + \measuredangle ABC - 90^\circ$$

Бидејќи $\measuredangle MPA = \measuredangle NPA$, добиваме дека PA е симетрала на $\measuredangle MPN$, што и требаше и да се докаже.

46. Должините на страните на еден правоаголен триаголник се природни броеви. Производото на должините на катетите е еднаков на тројната вредност на неговиот периметар. Определи ги сите такви триаголници.

Решение. Нека a,b,c се должини на страните на правоаголниот триаголник, за кој можеме без ограничување на општоста да претпоставиме дека

$$a^2 = b^2 + c^2 .$$

Од условот пак на задачата имаме

$$bc = 3(a+b+c) .$$

Ако воведеме ознака $a+b+c = L$, тогаш $bc = 3L$ и

$$b^2 + c^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc = (b+c)^2 - 2bc = (L-a)^2 - 6L = L^2 - 2aL + a^2 - 6L$$
$$a^2 = L^2 - 2aL + a^2 - 6L$$

од каде добиваме $L = 2a - 6$. Сега $a+b+c = 2a-6$, т.е. $a = b+c-6$, а со квадрирање на последното равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 + 36 + 2bc - 12b - 12c$$
$$b^2 + c^2 = b^2 + c^2 + 36 + 2bc - 12b - 12c$$
$$(b-6)(c-6) = 18$$

Решенија на последната равенка во множеството природни броеви се

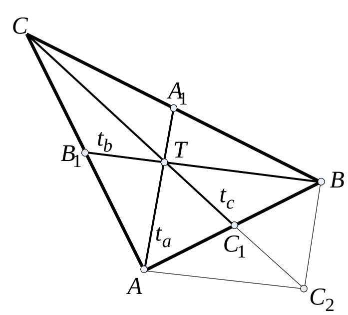
$$(a,b,c) \in \{(25,7,24),(25,24,7),(17,8,15),(17,15,8),(15,9,12),(15,12,9)\} .$$

47. Должините на тежишните линии на триаголникот ABC се 9,, 12 и 15. Определи ја неговата плоштина.

Решение. Нека a,b и c се должини на страните на триаголникот ABC при што $t_a = 9$, $t_b = 12$ и $t_c = 15$. Тогаш од формулите

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$
$$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$
$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} ,$$

го добиваме системот



$$\begin{cases} 4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{cases}$$

Негови решенија се

$$a^2 = 4\frac{2t_b^2 + 2t_c^2 - t_a^2}{9}, \quad b^2 = 4\frac{2t_a^2 + 2t_c^2 - t_b^2}{9}, \quad c^2 = 4\frac{2t_a^2 + 2t_b^2 - t_c^2}{9}.$$

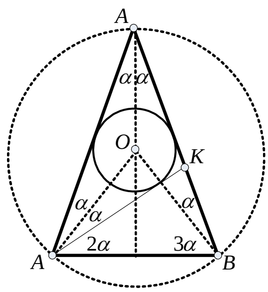
Ако се земе во предвид дека $t_a = 9$, $t_b = 12$ и $t_c = 15$, тогаш $a^2 = 292$, $b^2 = 208$ и $c^2 = 100$. Сега според Хероновата формула, добиваме дека

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} = 72.$$

48. Во триаголникот ABC е повлечена симетрала AK на аголот при темето A (точката K припаѓа на страната BC). Центрите на впишаната кружница во $\triangle AKC$ и на опишаната кружница околу триаголникот $\triangle ABC$ се совпаѓаат. Определи ги аглите на триаголникот $\triangle ABC$.

Решение. Нека O е центар на заедничката кружница (види цртеж) и $\measuredangle CAO = \alpha$. Тогаш

$$\measuredangle CAB = 2\measuredangle CAK = 4\measuredangle CAO = 4\alpha.$$



Бидејќи k е опишана кружница околу триаголникот ABC, имаме $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ односно триаголниците $\triangle AOC, \triangle BOC, \triangle BOA$ се рамнокраки. Но, тогаш

$$\measuredangle OCB = \measuredangle CBO = \alpha \text{ и } \measuredangle OBA = \measuredangle OAB = 3\alpha.$$

Бидејќи $\measuredangle OCA = \measuredangle ACO = \alpha$ имаме $\measuredangle ACB = 2\alpha$ и $\measuredangle BCA = 4\alpha$.

Од збирот на агли во триаголник имаме

$$4\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ,$$

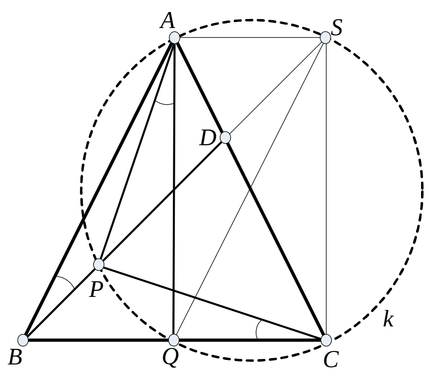
т.е. $\alpha = 18^\circ$.

Сега, аглите на $\triangle ABC$ се: $\measuredangle ACB = 36^\circ$, $\measuredangle ABC = 72^\circ$ и $\measuredangle CAB = 72^\circ$.

49. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак со $\overline{AB} = \overline{AC}$. Дадена е точка D на страната AC таква што $\overline{CD} = 2\overline{AD}$ и точка P на отсечката BD таква што $\measuredangle APC = 90^\circ$. Докажи дека $\measuredangle ABP = \measuredangle PCB$.

Решение. Нека Q е средина на основата BC и S е таква што $AQCS$ е правоаголник. Значи,

$$\overline{AS} = \overline{QC} = \overline{BQ} \text{ и } AS \parallel QC \parallel BQ.$$



Според тоа $BQSC$ е паралелограм, од каде добиваме

$$\measuredangle ABS = \measuredangle BSQ \qquad (1)$$

Од конструкцијата, повторно како агли на трансферзала имаме

$$\measuredangle BCD = \measuredangle CSA \qquad (2)$$

Од конструкцијата и претпоставките на задачата

$$\overline{BC}:\overline{BD}=2\overline{QC}:2\overline{DA}=\overline{QC}:\overline{AD}=\overline{AS}:\overline{AD}. \quad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме дека триаголниците $\triangle BDC$ и $\triangle SDA$ се слични, па $\measuredangle ADS=\measuredangle BDC$. Значи точките B,D,S се колинеарни. Заради претпоставките на задачата и конструкцијата

$$\measuredangle APC=\measuredangle AQC=\measuredangle ASC=90^\circ,$$

и точките P,Q,C,S,A лежат на кружница со дијаметар AC. Значи, четириаголникот $PQSCA$ е тетивен. Од еднаквост на агли над ист кружен лак, добиваме

$$\measuredangle PSQ=\measuredangle QCP. \quad (4)$$

Конечно, од (1) и (4) имаме
$\measuredangle ABP=\measuredangle ABS=\measuredangle BSQ=\measuredangle PSQ=\measuredangle QCP=\measuredangle BCP$.

50. Нека ABC е рамнокрак триаголник со $\overline{AB}=\overline{AC}$, и M е средна точка на основата BC. Нека X е точка од помалиот лак MA на опишаната кружница околу триаголникот ABM. Нека T е точка од внатрешноста на аголот BMA, така што $\measuredangle TMX=90^\circ$ и $\overline{TX}=\overline{BX}$. Докажи дека разликата $\measuredangle MTB-\measuredangle CTM$ не зависи од X.

Решение. Од условот на задачата триаголникот BXT е рамнокрак со краци BX и BT. Ако N е подножје на висината спуштена од X, тогаш $\overline{BN}=\overline{NT}$ и

$$\measuredangle BXN=\measuredangle NXT. \quad (1)$$

Од друга страна бидејќи M е средна точка на BC и N е средна точка на BT, отсечката MN е средна линија на триаголникот CTB, па според тоа $NM \parallel CT$, $\overline{NM}=\frac{1}{2}\overline{CT}$ и

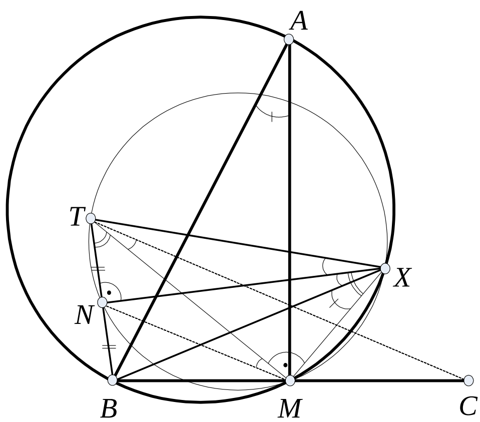
$$\measuredangle NMT=\measuredangle MTC \quad (2)$$

Бидејќи $\measuredangle TNX=\measuredangle TMX=90^\circ$, точките X,M,N,T припаѓаат на една кружница, од каде што добиваме дека

$$\measuredangle NXT=\measuredangle NMT \quad (3)$$

Од истата кружница имаме

$$\measuredangle BTM=\measuredangle NTM=\measuredangle NXM, \quad (4)$$



Од кружницата опишана околу триаголникот ABM, добиваме

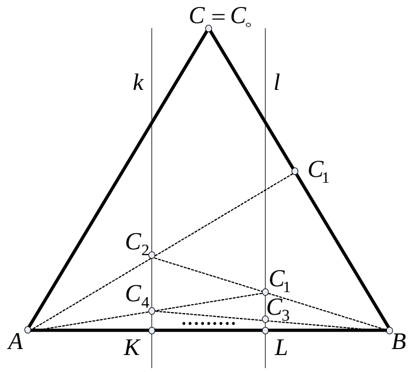
$$\measuredangle BAM=\measuredangle BXM \quad (5)$$

Според тоа (4) и (2),(3) и (1)

$$\begin{aligned}\measuredangle MTB-\measuredangle CTM &\overset{(4)}{=} \measuredangle MXN-\measuredangle CTM\\ &\overset{(2),(3),(1)}{=} \measuredangle MXN-\measuredangle BXN\\ &= \measuredangle MXB \overset{(5)}{=} \measuredangle MAB,\end{aligned}$$

односно разликата не зависи од изборот на точката X.

51. Дали може рамностран триаголник со страна 3 да се разбие на 2003 триаголници, такви што на секој од нив должините на страните му се поголеми од 1.



Решение. Ќе направиме конструкција која и ќе биде доказ дека такво разбивање е можна.

Нека A, B и $C=C_\circ$ се темиња на триаголникот. На отсечката AB ќе одбереме точки K и L така што $\overline{AK}=\overline{KL}=\overline{LA}$. Нека правите k и l се нормални на правата AB и минуваат низ K и L соодветно. Точката C_1 е средна точка на отсечката BC_0. Точките $C_n, n\in\mathbb{N}$, $n>1$ ги определуваме на следниот начин:

$C_{2n}=k\cap AC_{2n-1}$, $C_{2n+1}=l\cap BC_{2n}$,

за $n\geq 1$. Ќе покажеме дека триаголниците

$$\triangle AC_{2n}C_{2n+1},\ 0\leq n\leq 1000,\ \Delta BC_{2n-1}C_{2n},\ 1\leq n\leq 1001 \text{ и } \triangle ABC_{2002}$$

го даваат бараното разбивање.

Да забележиме дека

$$\overline{C_iC_{i+1}}>\overline{KL}=1,\ i=1,2,\dots .$$

При тоа:

а) За триаголникот $AC_1C_\circ$ имаме:

$$\overline{AC}=3,\ \overline{C_1C_\circ}=\tfrac{1}{2}\overline{BC}=\tfrac{3}{2} \text{ и } \overline{AC_1}>\overline{KL}=1.$$

б) За триаголникот ΔBC_2C_1 имаме:

$$\overline{BC_2}>\overline{AL}=1,\ \overline{BC_1}=\tfrac{1}{2}\overline{BC_\circ}=\tfrac{3}{2} \text{ и } \overline{C_2C_1}>\overline{KL}=1$$

в) За триаголниците $\Delta AC_{2n}C_{2n+1}$ имаме:

$$\overline{AC_{2n}}>\overline{AK}=1,\ \overline{AC_{2n+1}}>\overline{AL}=2 \text{ и } \overline{C_{2n}C_{2n+1}}>\overline{KL}=1,\ 1\leq n\leq 1001$$

г) За триаголниците $\triangle BC_{2n-1}C_{2n}$ имаме:

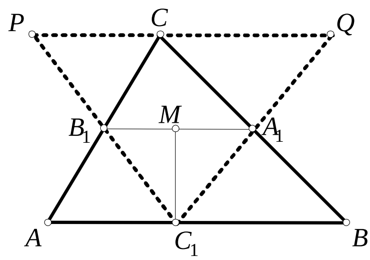
$$\overline{BC_{2n-1}}>\overline{AL}=1,\ \overline{BC_{2n}}>\overline{AK}=2 \text{ и } \overline{C_{2n-1}C_{2n}}>\overline{KL}=1,\ 1\leq n\leq 1000$$

д) За триаголникот $\triangle ABC_{2002}$ имаме:

$$\overline{AB}=3,\ \overline{AC_{2002}}>\overline{AL}=1 \text{ и } \overline{BC_{2002}}>\overline{BK}=2.$$

Според тоа, сите триаголници го исполнуваат условот од задачата.

52. Докажи дека секој триаголник може да се раздели на не повеќе од три дела од кои може да се состави (направи) рамнокрак триаголник.



Решение. Нека триаголникот ABC е остроаголен, и нека AB е неговата најголема страна (случаите на тапоаголен и правоаголен триаголник се разгледуваат аналогно). Нека A_1 е средина на BC, B_1 е средина на AC и

M е средина на A_1B_1. Ако $C_1 \in AB$ е таква што $MC_1 \perp AB$, тогаш триаголникот $B_1C_1A_1$ е рамнокрак.

На правата B_1C_1 ќе избереме точка P, а на правата A_1C_1 ќе избереме точка Q, така што $\overline{B_1C_1} = \overline{B_1P}$ и $\overline{C_1A_1} = \overline{A_1Q}$.

Јасно

$$\overline{PC_1} = \overline{PB_1} + \overline{B_1C_1} = \overline{B_1C_1} + \overline{B_1C_1} = \overline{A_1C_1} + \overline{A_1C_1} = \overline{A_1C_1} + \overline{QC_1} = \overline{QC_1}.$$

Сега, триаголникот PC_1Q е рамнокрак. Триаголниците AC_1B_1 и CPB_1 се складни, а исто така складни се и триаголниците C_1BA_1 и QCA_1 (според признакот САС). Сега е јасно дека точките P, C и Q се колинеарни.

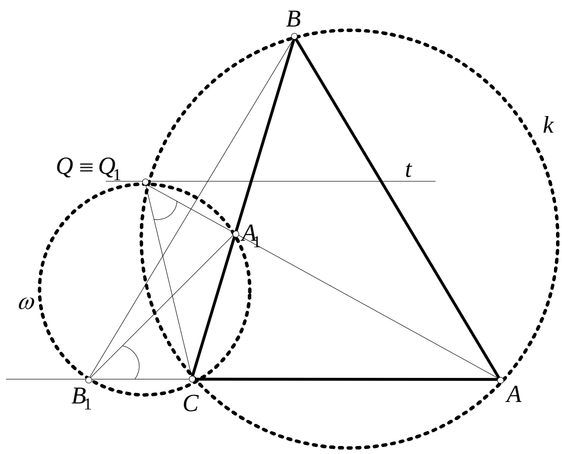
Според тоа, доволно е да се отсечат триаголниците AC_1B_1 и C_1BA_1 и да се стават на местата на CPB_1 и QCA_1 соодветно, за да се добие рамнокрак триаголник.

53. Даден е траиголник ABC. На правата AC е избрана точка B_1 за која што $\overline{AB} = \overline{AB_1}$, при што B_1 и C се на иста страна од точката A. Отсечката AA_1 е симетрала на аголот во темето A од триаголникот ABC, и ω е кружница која минува низ A_1, C и B_1. Кружницата ω повторно ја сече опишаната кружница околу триаголникот ABC во точката Q.

Докажи дека тангентата кон ω во точката Q е паралелна со AC.

Решение. Точките B и B_1 се симетрични во однос на правата AA_1, па според тоа

$$\measuredangle CBA = \measuredangle A\ BA = \measuredangle A_1B_1A = \measuredangle A_1B_1C. \qquad (1)$$



Пресечната точка на AA_1 со ω (различна од A_1) ќе ја означиме со Q_1. Како агли над ист кружен лак

$$\measuredangle AQ_1A_1 = \measuredangle CQ_1A = \measuredangle CBA \quad (2)$$

(во кружницата k).

Според тоа, од (1) и (2) имаме $\measuredangle CQ\ A_1 = \measuredangle CB_1A_1$, па значи точките $C, A_1,\ Q_1, B_1$ лежат на една иста кружница.

Бидејќи B_1, C, A_1 лежат на ω, добиваме дека и Q_1 лежи на ω, односно $Q = k \cap \omega = Q_1$.

Правата AA_1 е симетрала на $\measuredangle A$, па добиваме дека $Q \equiv Q_1$ е средина на лакот BC. Значи, $\overline{QC} = \overline{QB} = \overline{QB_1}$ (последното равенство е точно, бидејќи B и B_1 се симетрични во однос на симетралата AA_1 на $\measuredangle A$). Триаголникот CQB_1 е рамнокрак со основа B_1C и ω е опишана кружница околу него. Тангентата t во Q е паралелна со основата $CB_1 \parallel AC$.

54. На страните AB и BC од рамностраниот триаголник ABC се земени точки D и K соодветно, а на страната AC точки E и M така што

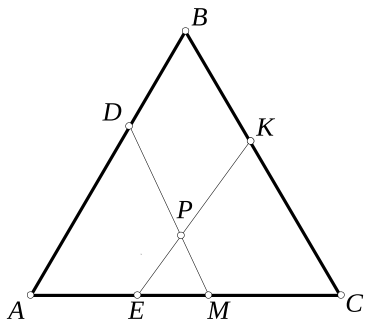
$$\overline{DA}+\overline{AE}=\overline{KC}+\overline{CM}=\overline{AB}.$$

Докажи дека аголот меѓу правите DM и KE е еднаков на 60°.

Решение. Од условот на задачата, бидејќи триаголникот $\triangle ABC$ е рамностран, имаме

$$\overline{CE}=\overline{AC}-\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{AE}=\overline{AD}$$

$$\overline{CK}=\overline{BC}-\overline{BK}=\overline{AB}-\overline{CM}=\overline{AM}$$



Значи, за триаголниците CKE и AMD имаме

$$\overline{CK}=\overline{AM},\ \overline{CE}=\overline{AD},\ \measuredangle A=\measuredangle C=60^\circ.$$

Според тоа, тие се складни, од каде пак следува

$$\measuredangle MPE=180^\circ-\measuredangle PME-\measuredangle PEM$$

$$=180^\circ-\measuredangle PKC-\measuredangle PEC$$

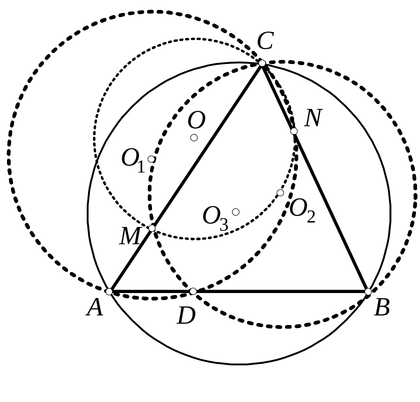
$$=\measuredangle KCE=60^\circ.$$

Ако отсечките DM и EK не се сечат, тогаш ќе работиме со нивните продолженија. Доказот е аналоген како и претходно.

55. На страната AB од триаголникот ABC е избрана точка D. Опишаната кружница околу триаголникот BCD ја сече AC во точката M, а опишаната кружница околу триаголникот ACD ја сече BC во точката N ($M,N\neq C$).

Докажи дека $OD\perp AB$, каде O е центар на опишаната кржница околу триаголникот CMN.

Решение. Нека m_1,m_2,l_1,l_2 се симетрали на отсечките CN,CB,CM и CA соодветно. Нека $l_1\cap m_1=O$, $m_1\cap l_2=O_1$, $m_2\cap l_1=O_2$ и $m_2\cap l_2=O_3$. Јасно е дека O,O_1,O_2,O_3 се центри на впишаните кружници во $\triangle CMN,\triangle ANC,\triangle CMB,\triangle ABC$ соодветно. Бидејќи $m_1\parallel m_2$ и $l_1\parallel l_2$ четириаголникот $OO_1O_3O_2$ е паралелограм. Притоа $\overline{OO_2}=\overline{O_1O_3}$. Нека K,P,Q,R се проекции на O,O_1,O_2,O_3 врз правата AB.



Јасно е дека $\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{RP}$ и уште повеќе

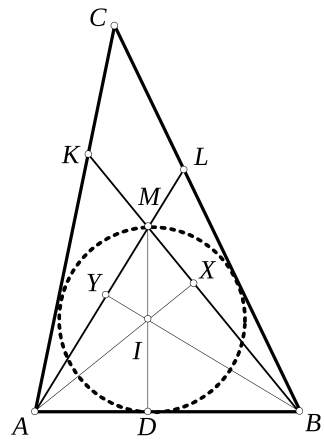
$$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{PA}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{QD}.$$

Сега, од $\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{RP}$, следува $\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{QD}$, односно $K\equiv D$. Значи $OD\perp AB$.

56. Страната AB е најмала во триаголникот ABC. На страните AC и BC се избрани точки K и L соодветно, така што $\overline{KA} = \overline{AB} = \overline{BL}$. Нека M е пресечна точка на AL и KC, а I е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC.

Докажи дека MI и AB се нормални.

Решение. Пресекот на правите AI и BK ќе го означиме со X, а пресекот на правите BI и AL ќе го означиме со Y (види цртеж). Правите AX и BY се симетрали на $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$ соодветно. Но, триаголниците KBA и ABL се рамнокраки. Според тоа, AX и BY се висини во KAB и ABL. Во исто време тие се висини и во $\triangle ABM$. Значи, $MI \perp AB$.



57. Во триаголникот ABC должината на тежишната линија CM е еднаква на должината на страната AB. На продолженијата на страните AC и AB се избрани точки D и E соодветно, така што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{BE} = \overline{BM}$.

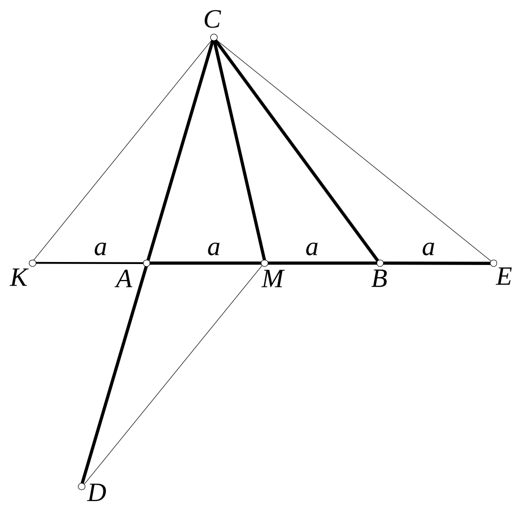
Докажи дека DM и CE се заемно нормални.

Решение. Воведуваме ознака $\overline{BM} = a$. Нека K е точка симетрична на точката M во однос на точката A. Тогаш

$$\overline{KM} = \overline{MC} = \overline{ME} = 2a.$$

Во триаголникот KCE должината на тежишната линија CM е половина од страната кон која е повлечена. Според тоа, триаголникот KCE е правоаголен. Значи, $KC \perp CE$.

Четириаголникот $DMCK$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се половат. Според тоа $KC \parallel DM$, од каде добиваме $DM \perp CE$, што и требаше да се докаже.



57. Точките K, L и M припаѓаат на страните BC, CA и AB од триаголникот ABC соодветно, при што AK е симетрала на $\measuredangle A$, BL е тежишна линија и CM е висина. Триаголникот KLM е рамностран.

Докажи дека и триаголникот ABC е рамностран.

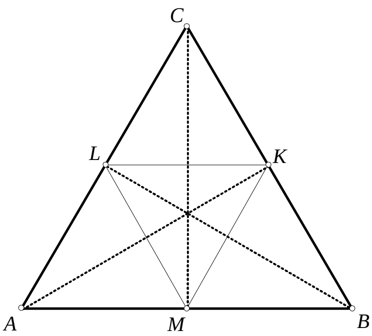
Решение. Бидејќи CM е висина во $\triangle ABC$, триаголникот AMC е правоаголен, Отсечката BL е тежишна линија во $\triangle ABC$, па L средина на AC и ML е тежишна линија во $\triangle AMC$. Од тоа што $\triangle AMC$ е правоаголен, имаме

$$\overline{AL} = \overline{LC} = \overline{ML},$$

а од тоа што триаголникот KLM е рамностран, имаме $\overline{ML} = \overline{KL}$.

Значи, во $\triangle AKC$ имаме $\overline{AL} = \overline{LC} = \overline{KL}$, па според тоа тој е правоаголен. Бидејќи $AK \perp KC$, т.е. $AK \perp BC$ и AK е симетрала на $\measuredangle A$, добиваме дека $\overline{BK} = \overline{KC}$, односно ABC е рамнокрак триаголник во кој $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Сега, KM е тежишна линија во правоаголниот триаголник $\triangle CMB$, па според тоа $\overline{KM} = \overline{BK} = \overline{CK}$, и $\overline{BC} = 2\overline{KM} = 2\overline{KL} = \overline{AC}$.



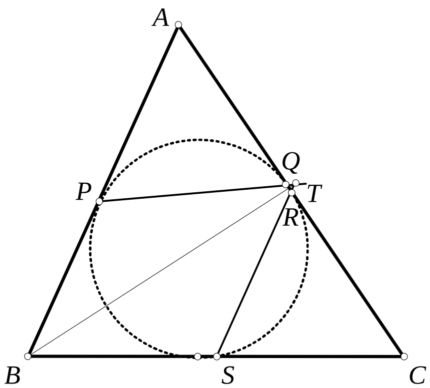
58. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC ($\overline{AB} > \overline{BC}$) во точките P и Q соодветно. Отсечката RS е средна линија која е паралелна со AB, а T е пресечна точка на правите PQ и RS.

Докажи дека T лежи на симетралата на аголот B од триаголникот.

Решение. Должините на страните AB, BC, CA ќе ги означиме со c, a, b соодветно. Нека p е полупериметарот на триаголникот, R припаѓа на AC, а S припаѓа на BC (види цртеж).

Тогаш

$$\overline{RQ} = |\overline{RA} - \overline{AQ}| = |\tfrac{b}{2} - (p-c)|$$
$$= |\tfrac{b}{2} - (\tfrac{a+b+c}{2} - c)|$$
$$= |\tfrac{b}{2} - \tfrac{a+b-c}{2}| = \tfrac{a-c}{2}.$$



Од друга страна, триаголниците PAQ и TRQ се слични, бидејќи $RT \parallel AP$. Триаголникот QAP е рамнокрак со основа PQ, и заради сличноста QRT е рамнокрак со основа QT. Значи $\overline{RQ} = \overline{TR}$ и

$$\overline{ST} = \overline{RS} + \overline{RT} = \overline{RS} + \overline{RQ} = \tfrac{c}{2} + \tfrac{a-c}{2} = \tfrac{a}{2} = \overline{BS}.$$

Сега, триаголникот TSB е рамнокрак и

$$\measuredangle SBT = \measuredangle STB = \measuredangle TBA$$

(агли во рамнокрак триаголник и агли на трансферзала), што и требаше да се докаже.

59. Точката D припаѓа на страната BC од триаголникот ABC. Во триаголниците ABD и ACD се впишани кружници и кон нив е повлечена заедничка тангента (различна од BC) која ја сече AD во точката K. Докажи дека должината на отсечката AK не зависи од изборот на точката D од страната BC.

Решение. За да докажеме дека должината на отсечката AK не зависи од изборот на точката D, доволно е да се пресмета нејзината должина.

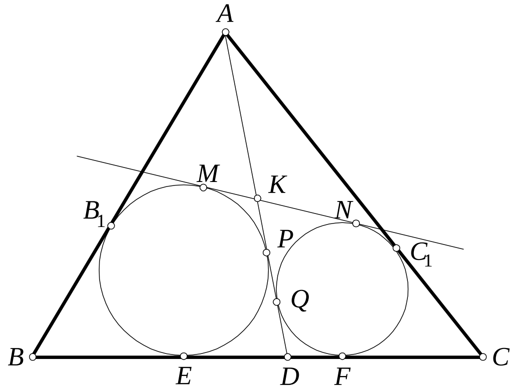
Во крајниот случај, кога $D = C$, отсечката AK се претвора во отсечка од тангента кон впишаната кружница во $\triangle ABC$.

Тогаш , $\overline{AK}=\overline{AL}$, $\overline{BL}=\overline{BM}$ и $\overline{CM}=\overline{CK}$. Сега,

$$\begin{aligned}2\overline{AK}&=\overline{AK}+\overline{AK}=\overline{AK}+\overline{AL}\\&=(\overline{AK}+\overline{CK})-\overline{CM}+(\overline{AL}+\overline{LB})-\overline{BM}\\&=\overline{AC}-\overline{CM}+\overline{AB}-\overline{BM}\\&=\overline{AC}+\overline{AB}-(\overline{CM}+\overline{BM})\\&=\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}\end{aligned}$$

Значи,

$$\overline{AK}=\tfrac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}}{2}$$



Ќе покажеме дека оваа формула е точна во општ случај. Според ознаките од цртежот можеме да видиме дека

$$\overline{AB_1}=\overline{AP},\ \ \overline{AC_1}=\overline{AQ},$$

$$\overline{KM}=\overline{KP},\ \ \overline{KN}=\overline{KQ}$$

(отсечки од тангенти повлечени од иста точка).

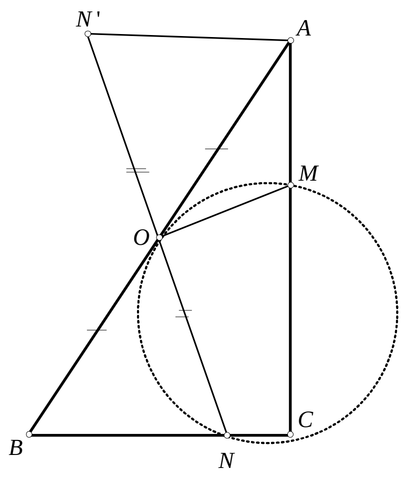
Освен тоа, според ознаките од цртежот $\overline{MN}=\overline{EF}$. Со помош на овие равенства добиваме

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}&=\overline{AB_1}+\overline{AC_1}+\overline{CC_1}+\overline{BB_1}-\overline{BE}-\overline{CF}-\overline{EF}=\overline{AB_1}+\overline{AC_1}-\overline{MN}=\\&=\overline{AP}+\overline{AQ}-\overline{MN}=\overline{AP}+\overline{AQ}-\overline{MK}-\overline{MN}=\overline{AP}-\overline{KP}+\overline{AQ}-\overline{KQ}=2\overline{AK}\end{aligned}$$

што требаше и да се докаже.

59. Во правоаголниот триаголник ABC, точката O е средина на хипотенузата AB. На страната AC е земена точка M , а на страната BC точка N , така што $\measuredangle MON$ е прав агол. Докажи дека

$$\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=\overline{MN}^2 . \qquad (1)$$



Решение. Нека N' е симетрична точка на точката N во однос на точката O .

Триаголниците OAN' и OBN се складни, според признакот САС. Од друга страна

$$\begin{aligned}\measuredangle N'AM&=\measuredangle N'AO+\measuredangle MAO\\&=\measuredangle ABC+\measuredangle CAB\\&=90^\circ,\end{aligned}$$

односно $\measuredangle N'AO$ е прав.

Според Питагоровата теорема,

$$\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=\overline{AM}^2+\overline{AN'}^2=\overline{MN'}^2 \qquad (2)$$

Точката O е средина на NN' и $OM\perp NN'$.

Значи, $\triangle OMN \cong \triangle OMN$, од каде добиваме $\overline{MN} = \overline{MN'}$. Сега, ако замениме во (2) го добиваме (1).

60. Две тежишни линии на еден триаголник се заемно нормални. Докажи дека тежишните линии од тој триаголник се страни на правоаголен триаголник.

Решение. Нека ABC е триаголник во кој што AD, BE и CF се негови тежишни линии такви што $BE \perp CF$. Нека T е пресекот на тежишните линии. Триаголникот CTB е правоаголен, па според тоа BC е дијаметар на неговата опишана кружница. Точката D како средина на BC е центар на опишната кружница околу CTB . Според тоа $\overline{BD} = \overline{CD} = \overline{DT}$, односно $\overline{BC} = 2\overline{DG}$.

Ќе повлечеме парва паралелна со CF низ точката E , а нејзиниот пресек со правата BC ќе го означиме со K . Бидејќи FE е паралелна со BC , добиваме дека четириаголникот $FCKE$ е паралелограм, во кој

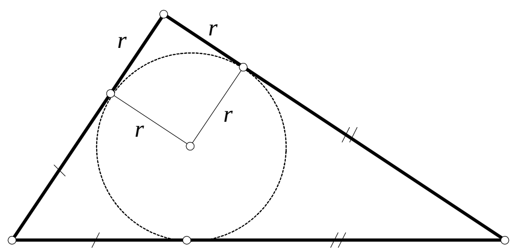
$$\overline{CK} = \overline{FE} = \tfrac{1}{2}\overline{BC} = \overline{DG} .$$

Значи, CK е третина од BK , DT е третина од AD и $\overline{CK} = \overline{DT}$, па според тоа $\overline{BK} = \overline{AD}$. Триаголникот KEB е правоаголен бидејќи $EK \parallel CF$ и $BE \perp CF$, при што $\overline{EK} = \overline{CF}$ и $\overline{AD} = \overline{BK}$.

61. Во еден правоаголен триаголник должината на едната катета е прост број, должината на другата катета е сложен број, а должината на хипотенузата е природен број. Количникот од периметарот на триаголникот и дијаметарот на впишаната кружница е исто така природен број.

Определи ги сите такви триаголници.

Решение. Нека p и m се должини на катетите на правоаголниот триаголник, а n е должина на хипотенузата, при што p е прост број. Тогаш според Питагоровата теорема



$$p^2 + m^2 = n^2 ,$$

односно

$$p^2 = n^2 - m^2 = (n-m)(n+m) .$$

Бидејќи p е прост број и $n > m$, добиваме

$$\begin{cases} n - m = 1 \\ n + m = p^2 \end{cases} .$$

Периметарот на траиголникот е еднаков на $p + m + n$. Од особините на тангенти повлечни од една точка кон дадена кружница имаме

$$d + 2n = m + n + p ,$$

каде d е дијаметар на впишаната кружница ($d = 2r$; види цртеж). Значи $d = m + p - n$ и $m + p - n \mid m + n + p$. Сега е јасно дека $p - 1$ е делител на

$p^2 + p = p(p+1)$. Бидејќи $(p, p-1) = 1$ добиваме дека $p-1 \mid p+1$. Но тоа е можно само ако $p-1=1$ или $p-1=2$.

Случај 1. $p=2$. Тогаш

$$\begin{cases} n-m=1 \\ n+m=4 \end{cases}$$

од каде добиваме $2n=5$, т.е. $n=\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}$.

Случај 2. $p=3$. Тогаш

$$\begin{cases} n-m=1 \\ n+m=9 \end{cases}$$

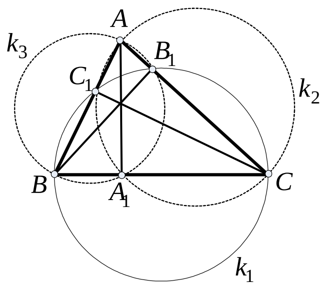
од каде добиваме $2n=10$, т.е. $n=5\in\mathbb{N}$. Во тој случај $m=4$.

Значи, постои еден таков триаголник и тоа со страни $3,4$ и 5.

62. Нека ABC е остроаголен триаголник и избрани се точки A_1, B_1 и C_1 на страните BC, CA и AB соодветно. Четириаголниците ABA_1B_1, BCB_1C_1 и CAC_1A_1 се тетивни.

Докажи дека центрите на опишаните кружници на овие четириаголници припаѓаат на страните на триаголникот ABC.

Решение. Бидејќи BCB_1C_1 е тетивен (види цртеж) имаме $\measuredangle BB_1C = \measuredangle BC_1C = \alpha$. Слично, $\measuredangle CC_1A = \measuredangle CA_1A = \beta$ и $\measuredangle AA_1B = \measuredangle AB_1B = \gamma$. Собирајќи ги аглите со темиња во точките A_1, B_1 и C_1 го добиваме следниот систем равенки:



$$\begin{cases} \beta+\gamma=180^\circ \\ \gamma+\alpha=180^\circ \\ \alpha+\beta=180^\circ \end{cases}.$$

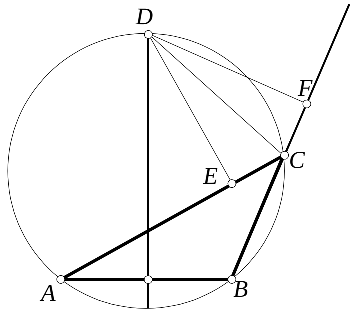
Со собирање на равенките на овој систем имаме $2(\alpha+\beta+\gamma)=540^\circ$, односно $\alpha+\beta+\gamma=270^\circ$. Оттука и од системот равенки имаме $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$.

Според тоа, од $\alpha=90^\circ$ добиваме дека BC е дијаметар на k_1 и нејзиниот центар лежи на BC. Аналогно, од $\beta=90^\circ$ добиваме дека AC е дијаметар на k_2 и нејзиниот центар лежи на AC, а од $\gamma=90^\circ$ добиваме дека AB е дијаметар на k_3 и нејзиниот центар лежи на k_3 што требаше и да се докаже.

63. Околу триаголникот ABC ($\overline{AC} > \overline{BC}$) е опишана кружница k. Симетралата на отсечката AB ја сече кружницата k во точка D од лакот AC што не ја содржи точката B. Точката E е подножје на нормалата спуштена од D кон AC. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{BC} + \overline{CE}$.

Решение. На полуправата BC ќе избереме точка F таква што $\overline{CF}=\overline{CE}$. Од претпоставката на задачата $\measuredangle ECD=\measuredangle ACD$. Бидејќи $AD=DB$, имаме

$$\measuredangle ECD=\frac{AD}{2}=\frac{DB}{2}=\frac{DC+CB}{2}$$
$$=180^\circ-\measuredangle DCB=\measuredangle DCF.$$



Сега, од $\measuredangle ECD=\measuredangle DCF$ ($\measuredangle DEC=90^\circ$), DC заедничка страна и $\overline{CE}=\overline{CF}$, добиваме дека

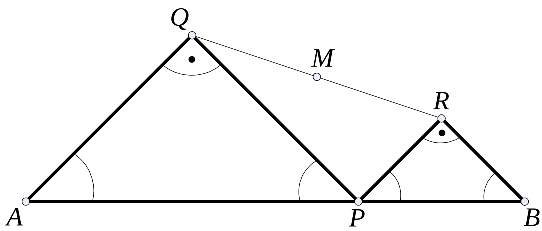
$\triangle ECD\cong\triangle FCD$.

Според тоа, $\overline{DF}=\overline{DE}$, $\measuredangle DEA=\measuredangle DFB$ и $\overline{AD}=\overline{DB}$, па $\triangle AED\cong\triangle BFD$. Но тогаш

$$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{BC}+\overline{CF}=\overline{BC}+\overline{CE},$$

што и требаше да се докаже.

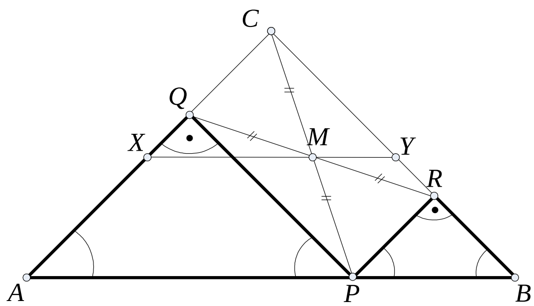
64. На отсечката AB е избрана точка P. Точките Q и R се на иста страна од правата AB така што триаголниците $\triangle AQP$ и $\triangle PRB$ се рамнокраки правоаголни. Точката M е средина на QR. Да се определи множеството точки M кога P припаѓа на отсечката AB.



Решение. Ќе разгледаме една страна на правата AB. Нека C е пресечна точка на AQ и BR. Од претпоставките на задачата, односно од самата конструкција имаме

$\measuredangle CAB=\measuredangle QAP=45^\circ$ и $\measuredangle CBA=\measuredangle RBP=45^\circ$,

па според тоа ΔBCA е рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза AB.



Бидејќи $\measuredangle QPA=\measuredangle RBP=45^\circ$ имаме $PQ\,||\,BR$. Слично $PR\,||\,AQ$, па според тоа $CQPR$ е паралелограм.

Точката M е средина на QR па според тоа е средина на CP. Нека X и Y се средини на CA и CB соодветно. Бидејќи X и M се средини на CA и CP соодветно, добиваме дека $XM\,||\,AP$. Слично, M и Y се средини на CP и CB па според тоа $MY\,||\,PB$. Значи, X, M и Y се колинеарни.

Но, X и Y како и A, B, C се фиксни точки, па кога P се менува од A до B, тогаш M се менува од X до Y на отсечката XY.

Значи, множеството од сите точки M се точките од отсечката XY.

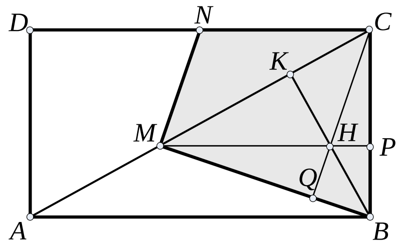
2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Аглите на еден четириаголник редоследно се $x, x+20, x+30, x+50$. Определи ги неговите агли, а потоа докажи дека тој е трапез.

Решение. Бидејќи збирот на аглите во било кој четириаголник е 360°, добиваме дека $x+x+20+x+30+x+50=360^\circ$, т.е. $x=65^\circ$. Според тоа аглите на четириаголникот се $65^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 115^\circ$. Бидејќи $85^\circ+95^\circ=115^\circ+65^\circ=180^\circ$, паровите агли $85^\circ, 95^\circ$ и $115^\circ, 65^\circ$ се агли на трансферзала. Бидејќи тие се агли во четириаголник, тој е трапез.

2. Во правоаголникот $ABCD$ повлечена е нормала BK на дијагоналата AC ($K \in AC$). Точките M и N се средини на AK и CD соодветно. Докажи дека $BMNC$ е тетивен четириаголник.

Решение. Ако $P \in BC$, таква што $MP \parallel AB$, тогаш MP е висина на ΔBMC. Ако $\{H\} = KB \cap MP$, тогаш H е ортоцентар на $\triangle BMC$ и $CH \perp MB$. Нека $\{Q\} = CH \cap MB$.



Бидејќи M е средина на AK и $MH \parallel AB$, MH е средна линија на $\triangle ABK$ па затоа

$$\overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{DC} = \overline{NC}.$$

Значи $MHCN$ е паралелограм, па според тоа $MN \parallel QC$. Конечно,

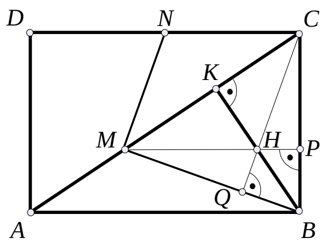
$$\measuredangle NMB = \measuredangle CQB = 90^\circ, \text{ т.е.}$$

$$\measuredangle NMB = \measuredangle NCB = 90^\circ,$$

од каде што следува дека $MBCN$ е тетивен (збирот на спротивните агли е 180°).

3. Во правоаголникот $ABCD$ е повлечена нормалата BK на дијагоналата AC. Точките M и N се средини на отсечките AK и CD, соодветно. Докажи дека $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

Решение. *Прв начин.* Нека $BK \perp AC$ (види цртеж). Тогаш BK е висина во триаголникот $\triangle MBC$. Да ги повлечеме другите две висини MP и CQ и нека тие се сечат во точката H, која е ортоцентар на триаголниккот $\triangle MBC$.



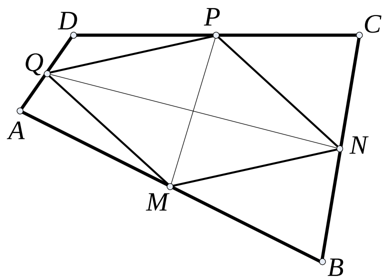
Бидејќи $MP \perp BC$ и M е средина на отсечката AK, следува дека MH е средна линија во триаголникот ABK, па имаме:

$$\overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AB}, \; MH \parallel NC.$$

Оттука следува дека четириаголникот $MHCN$ е паралелограм, т.е. $MN \parallel CH$. Но, $CH \perp MB$, па следува дека и $MN \perp MB$, т.е. $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

Втор начин. Како и во решението 1 докажуваме дека четириаголникот $MHCN$ е паралелограм, т.е. $MN \parallel CH$. Но, тогаш четириаголникот $MQCN$ е трапез, па следува $\measuredangle QMN + \measuredangle MQC = 180^\circ$, од каде што, поради $\measuredangle MQC = 90^\circ$ следува $\measuredangle QMN = 90^\circ$, т.е. $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

4. Нека точките M, N, P и Q се соодветно средини на страните AB, BC, CD и DA на четириаголникот $ABCD$. Ако $MN \perp NQ$ тогаш $\overline{AC} = \overline{BD}$. Докажи!



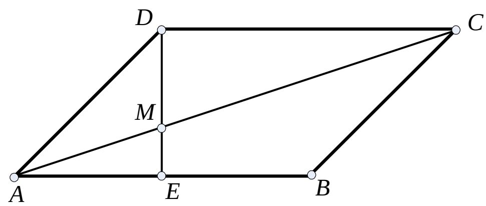
Решение. Четириаголникот $MNPQ$ (види цртеж) е паралелограм на кој дијагоналите MP и NQ се заемно нормални, па тој е ромб. Значи, $\overline{MN} = \overline{MQ}$. Но $\overline{AC} = 2\overline{MN}$, $\overline{BD} = 2\overline{MQ}$, па $\overline{AC} = \overline{BD}$.

5. Нека E е средина на страната AB од паралелограмот $ABCD$ и нека $M = AC \cap DE$. Најдаи ги соодносите $\overline{AM} : \overline{MC}$ и $\overline{DM} : \overline{ME}$.

Решение. Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (види цртеж). Имаме:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{DM} = \mu \overrightarrow{DE} = \mu(-\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a}),$$



за некои броеви λ и μ. Бидејќи

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM},$$

добиваме

$$\vec{b} + \mu(-\vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a}) = \lambda(\vec{a} + \vec{b}),$$

а по средувањето

$$(\tfrac{1}{2}\mu - \lambda)\vec{a} = (\lambda + \mu - 1)\vec{b}.$$

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, па од претходното равенство следува, дека

$$\tfrac{1}{2}\mu - \lambda = 0$$

$$\lambda + \mu - 1 = 0,$$

од каде што добиваме $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$. Според тоа,

$$\overline{AM} : \overline{MC} = \tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{3} = 1:2, \quad \overline{DM} : \overline{ME} = 2:1.$$

6. На страната AD од паралелограмот $ABCD$ земена е точка E, така што $3 \cdot \overline{AE} = \overline{AD}$. Да се најдат односите $\overline{AP} : \overline{PC}$ и $\overline{BP} : \overline{PE}$, каде што $P = AC \cap BE$.

Решение. Векторите $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни, па постои реален број x, така што $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC}$. Исто така, постои реален број y, така што $\overrightarrow{PE} = y\overrightarrow{BE}$. Од цртежот се гледа дека

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD},$$

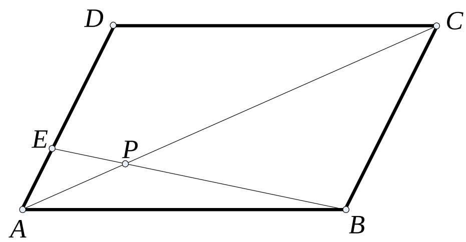
па следува

$$\overrightarrow{AP}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}),\ \overrightarrow{PE}=y(-\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}).$$

Бидејќи $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$, ќе имаме

$x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+y(-\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD})-\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

$(x-y)\overrightarrow{AB}+(x+\tfrac{y}{3}-\tfrac{1}{3})\overrightarrow{AD}=\vec{0}$



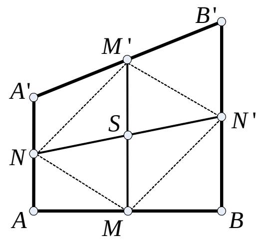
Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не се колинеарни, па следува дека

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+\frac{y}{3}=\frac{1}{3} \end{cases},$$

од каде што добиваме $x=y=\frac{1}{4}$. Според тоа, имаме $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$, а од тоа следува дека $\overline{AP}:\overline{PC}=1:3$, $\overline{BP}:\overline{PE}=3:1$.

7. Нека M е средина на отсечката AB, а M' е средина на отсечката $A'B'$. Докажи дека средините на отсечките AA',BB' и MM' се колинеарни.

Решение. Нека N е средина на отсечката AA', N' е средина на отсечката BB' и S е средина на отсечката MM' (види цртеж).



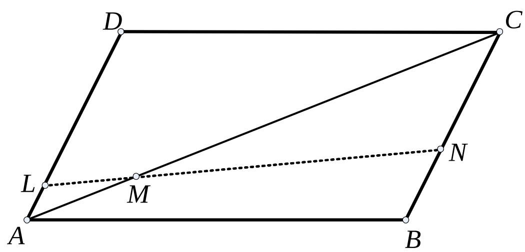
Доволно е да докажеме дека четириаголникот $MN'M'N$ е паралелограм (дијагоналите во секој паралелограм се преполовуваат; S е средина на дијагоналата MM'; значи, дијагоналата NN' мора да минува низ точката S, што повлекува дека точките N,S и N' се колинеарни). За таа цел ќе докажеме дека векторите $\overrightarrow{MN'}$ и $\overrightarrow{NM'}$ се еднакви, што повлекува дека четириаголникот $MN'M'N$ е паралелограм. Имаме:

$$\overrightarrow{MN'}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN'}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'})=\overrightarrow{NA'}+\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{NM'}.$$

8. Во паралелограм $ABCD$, на страната AD е земена точка L, на дијагоналата AC точка M и на страната BC точка N, така што важи $5\overline{AL}=\overline{AD}$, $4\overline{AM}=\overline{AC}$, $5\overline{BN}=2\overline{BC}$.

а) Да се докаже дека точките L,M и N се колинеарни.

б) Во кој однос точката M ја дели отсечката LN ?



Решение. а) Ставајќи $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (види цртеж) ќе имаме

$$\overrightarrow{AL}=\tfrac{1}{5}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AM}=\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{BN}=\tfrac{2}{5}\overrightarrow{BC},$$

од каде што добиваме

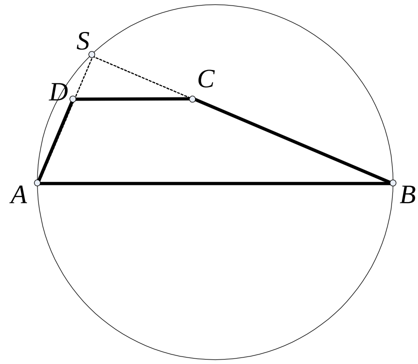
$$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AM}=-\tfrac{1}{5}\vec{b}+\tfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\tfrac{1}{4}\vec{a}+\tfrac{1}{20}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\tfrac{1}{5}\vec{b}+\vec{a}+\tfrac{2}{5}\vec{b}=\vec{a}+\tfrac{1}{5}\vec{b}\,.$$

Според тоа, имаме $\overrightarrow{LN}=4\overrightarrow{LM}$, т.е. векторите $\overrightarrow{LN}$ и $\overrightarrow{LM}$ се колинеарни, па и точките L, M и N се колинеарни.

б) Според а), имаме $\overrightarrow{LN}=4\overrightarrow{LM}$, т.е. $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{LM}$. Значи, точката M ја дели отсечката LN во однос $1:3$.

9. Ако краците на еден трапез се меѓусебно нормални, тогаш збирот од квадратите на неговите дијагонали е еднаков на збирот од квадратите на неговите основи. Докажи!



Решение. Нека краците на трапезот се сечат во точката S. Од ΔACS и ΔBDS имаме

$$\overline{AC}^2=\overline{AS}^2+\overline{CS}^2$$

$$\overline{BD}^2=\overline{BS}^2+\overline{DS}^2,$$

а од овде

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AS}^2+\overline{BS}^2+\overline{CS}^2+\overline{DS}^2.(1)$$

Од правоаголните триаголници $\triangle ABS$ и $\triangle DCS$ имаме

$$\overline{AB}^2=\overline{AS}^2+\overline{BS}^2,\quad \overline{DC}^2=\overline{DS}^2+\overline{CS}^2.$$

Со замена на ова во (1) се добива

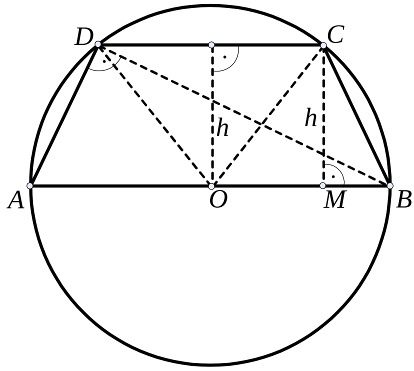
$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{DC}^2.$$

10. Над трапез $ABCD$ опишана е кружница со центар на основата AB и радиус R. Да се изрази должината на кракот AD преку R, ако важи

$$\overline{AD}^2+3\overline{CD}^2=2R^2.$$

Решение. Бидејќи над трапезот е опишана кружница со центар во основата, следува дека трапезот е рамнокрак. Нека O е центарот на опишаната кружница, (види цртеж). Триаголникот COD е рамнокрак со крак R и основа CD. Нека h е висината на трапезот. Тогаш

$$(\tfrac{\overline{CD}}{2})^2=R^2-h^2.$$



Од сличноста на триаголниците CMB и BDA, следува дека $h=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{2}$. Според тоа, $\overline{CD}^2=4R^2-\frac{\overline{AD}^2\cdot\overline{BD}^2}{R^2}$, од што, заедно со даденото равенство

$$\overline{AD}^2+3\overline{CD}^2=2R^2,$$

следува дека

$$3\overline{CD}^2 = 12R^2 - \frac{3\overline{AD}^2 \cdot \overline{BD}^2}{R^2} = 2R^2 - \overline{AD}^2 \qquad (1)$$

Бидејќи триаголникот ABD е правоаголен, $\overline{BD}^2 = 4R^2 - \overline{AD}^2$, од што со замена во (1) добиваме дека:

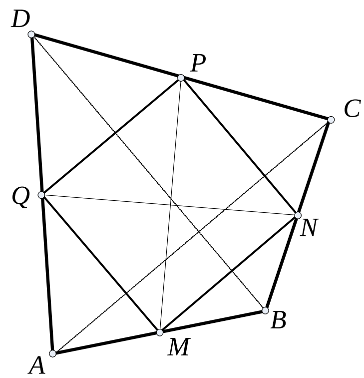
$$12R^4 - 12\overline{AD}^2 R^2 + 3\overline{AD}^4 = 2R^4 - \overline{AD}^2 R^2,$$

т.е.

$$3R^4 - 11\overline{AD}^2 R^2 + 10\overline{AD}^4 = 0.$$

Решавајќи ја горната равенка по $\overline{AD}^2$, добиваме: $\overline{AD} = \frac{11R^2 \pm R^2}{6}$. Бидејќи $ABCD$ е трапез (а не е триаголник), добиваме дека $\overline{AD}^2 = \frac{5R^2}{3}$, т.е. $\overline{AD} = R\frac{\sqrt{15}}{3}$.

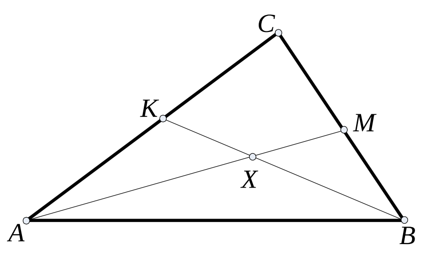
11. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и нека M, N, P и Q се средините на страните AB, BC, CD и DA соодветно. Докажи дека дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални, ако и само ако дијагоналите на $MNPQ$ се еднакви.



Решение. Ќе покажеме прво дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм. Навистина, MN и PQ се средни линии на триаголниците ABC и ADC, соодветно, па, значи двете се паралелни на AC. Добиваме дека MN, PQ и AC се паралелни. Аналогно се добива дека и NP, QM и BD се паралелни. Оттука е јасно дека $MNPQ$ е паралелограм чии страни се паралелни на дијагоналите на $ABCD$.

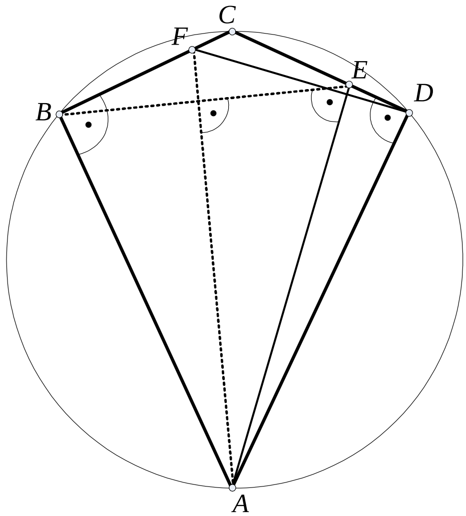
Ако дијагоналите на паралелограмот $MNPQ$ се еднакви, тогаш тој паралелограм е правоаголник, од каде што добиваме дека дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални.

12. Нека ABC е триаголник, K е точка на страната AC, различна од A и C, M е точка од страната BC различна од B и C и нека X е пресечна точка на KB и MA. Докажи дека не е можно да бидат исполнети равенствата $\overline{KX} = \overline{XB}$ и $\overline{MX} = \overline{XA}$.



Решение. Да претпоставиме дека е можно да се исполнети дадените равенства. Тогаш $ABMK$ е четириаголникот чии дијагонали се преполовуваат, од каде следува дека $ABMK$ е паралелограм. Од тука добиваме дека отсечките AK и BM, односно отсечките AC и BC се паралелни, што не е можно.

13. Даден е четириаголникот $ABCD$, во кој $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC=90^\circ$. На страните BC и CD се избрани точки F и E, соодветно, такви што $DF\perp AE$. Докажи дека $AF\perp BE$.



Решение. Знаеме дека дијагоналите на еден четириаголник се заемно нормални ако и само ако збировите на квадратите на неговите спротивни страни се еднакви. Од $DF\perp AE$, следува дека

$$\overline{AD}^2+\overline{FE}^2=\overline{AF}^2+\overline{ED}^2. \qquad (1)$$

Но, $\overline{AB}=\overline{AD}$, па затоа (1) е еквивалентно на

$$\overline{AB}^2+\overline{FE}^2=\overline{AF}^2+\overline{ED}^2. \qquad (2)$$

Од правоаголните триаголници FBA и EDA добиваме:

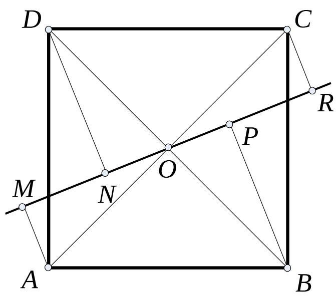
$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{BF}^2&=\overline{AF}^2\\ \overline{AD}^2+\overline{ED}^2&=\overline{AE}^2\end{aligned} \qquad (3)$$

Од (2) и (3) имаме

$$\overline{BF}^2+\overline{AE}^2=\overline{AF}^2-\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{ED}^2=\overline{AF}^2+\overline{ED}^2=\overline{AB}^2+\overline{FE}^2$$

т.е. важи $\overline{BF}^2+\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{FE}^2$, што значи $AF\perp BE$.

14. Низ пресекот O на дијагоналите на квадратот $ABCD$ е повлечена произволна права p, која не минува низ темињата на квадратот. Најди го збирот од квадратите на растојанијата од секое теме до правата p, ако должината на страната на квадратот е $1\,m$.



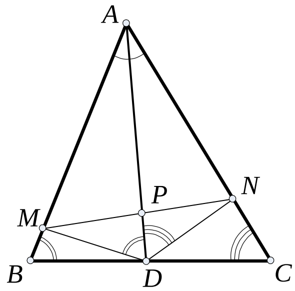
Решение. Од складноста на триаголниците AOM и COR следува $\overline{AM}=\overline{CR}=x$, а од складноста на триаголниците BPO и DNO следува $\overline{BP}=\overline{DN}=y$. Од складноста пак, на правоаголните триаголници AMO и BPO ($\overline{AO}=\overline{BO}$, $\angle AOM=\angle OBP$ агли со заемно нормални краци) следува $\overline{OP}=\overline{AM}=x$. Од правоаголниот триаголник OPB добиваме $\overline{OP}^2+\overline{BP}^2=\overline{BO}^2$ односно $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. Оттука имаме

$$\overline{AM}^2+\overline{BP}^2+\overline{CR}^2+\overline{DN}^2=2x^2+2y^2=1.$$

15. Нека AD е симетрала аголот BAC во триаголникот ABC. Нека M и N се точки од правите AB и AC соодветно такви што $\measuredangle MDA=\measuredangle ABC$, $\measuredangle NDA=\measuredangle ACB$ и AD и MN се сечат во точката P. Докажи дека

$\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$.

Решение. Бидејќи триаголниците AND и ADC се слични ($\measuredangle CAD$ е заеднички, $\measuredangle ADN = \measuredangle DCA$ по услов) следува



$$\overline{AD}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{AC} \qquad (1)$$

Бидејќи триаголниците AMD и ABD се слични ($\measuredangle BAD$ е заеднички, $\measuredangle ABD = \measuredangle ADM$ по услов) следува

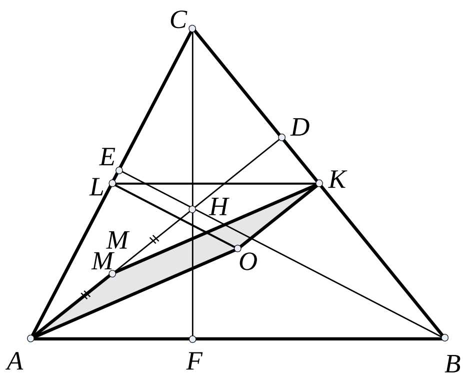
$$\overline{AD}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AB} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\overline{AD}^4 = \overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$. За да важи $\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$ доволно е да докажеме дека $\overline{AD} \cdot \overline{AP} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$. Четириаголникот $AMDN$ е тетивен бидејќи

$$\measuredangle MDN + \measuredangle MAN = \measuredangle MDA + \measuredangle ADN + \measuredangle MAN = \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle BAC = 180^\circ.$$

Значи, $\measuredangle ADN = \measuredangle AMN$ (периферни агли над ист кружен лак), па триаголниците AMP и AND се слични. Оттука следува дека $\overline{AD} \cdot \overline{AP} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$.

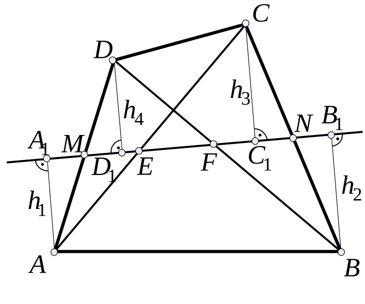
16. Точката H е ортоцентар, а точката O е центар на опишаната кружница во триаголникот ABC. Ако M е средина на отсечката AH, а K е средина на страната BC, докажи дека $\overline{AO} = \overline{KM}$.



Решение. Нека L е средина на страната AC. Бидејќи O е центар на опишаната кружница $OK \| AH$ и $OL \| BH$, а бидејќи L и K се средини на страните AC и c соодветно, $c > b$. Според тоа $c - b > 0$. Бидејќи $\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, коефициентот на сличност е $\frac{1}{2}$. Според тоа $\overline{OK} = \frac{1}{2}\overline{AH} = \overline{AM}$. Значи, четириаголникот $OKMA$ е паралелограм и $\overline{AO} = \overline{KM}$.

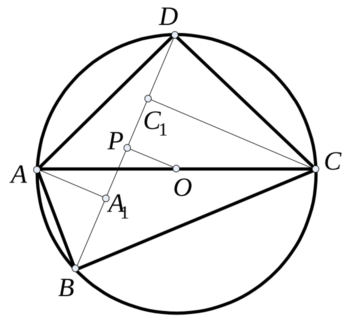
17. Докажи дека отсечката чии крајни точки се средините на спротивните страни на конвексен четириаголник, ги дели неговите дијагонали во ист однос.

Решение. Нека M е средина на отсечката AD, N е средина на BC, E и F се пресечните точки на MN со AC и BD соодветно, A_1, B_1, C_1, D_1 се подножјата на нормалите спуштени на правата MN од темињата A, B, C, D соодветно, и нека h_1, h_2, h_3, h_4 се растојанијата на темињата A, B, C и D од правата MN.



Од складноста на правоаголните триаголници AA_1M и DD_1M ($\measuredangle AMA_1 = \measuredangle DMD_1$ како накрсни агли и $\overline{AM} = \overline{MD}$) следува $h_1 = h_4$, а од складноста на правоаголните триаголници BB_1N и CC_1N ($\measuredangle BNB_1 = \measuredangle CNC_1$ како накрсни агли и $\overline{BN} = \overline{CN}$) следува $h_2 = h_3$. Од сличноста на триаголниците AA_1E и CC_1E следува $\overline{AE} : \overline{EC} = h_1 : h_3$, а од сличноста на триаголниците BB_1F и DD_1F следува $\overline{BF} : \overline{FD} = h_2 : h_4$. Бидејќи $h_1 = h_4$ и $h_2 = h_3$, следува дека $\overline{AE} : \overline{EC} = \overline{BF} : \overline{FD}$.

18. Дијагоналата AC на четириаголникот $ABCD$ вписан во кружница е дијаметар на кружницата. Докажи дека проекциите на страните AB и CD на дијагоналата BD се еднакви.



Решение. *Прв начин.* Нека P е подножјето на нормалата од центарот O на опишаната кружница кон дијагоналата BD, и нека A_1 и C_1 се подножјата на нормалите од A и C на BD соодветно. Тогаш, од $AA_1 \parallel OP \parallel CC_1$ и $\overline{AO} = \overline{CO}$, како радиуси на опишаната кружница,следува дека $\overline{A_1P} = \overline{PC_1}$. Користејќи дека $\overline{BP} = \overline{PD}$, (затоа што $OP \perp BD$ и O е центар на кружницата, па затоа P е средина на тетивата BD), се добива $\overline{BA_1} = \overline{BP} - \overline{A_1P} = \overline{DP} - \overline{PC_1} = \overline{C_1D}$, што требаше да се докаже.

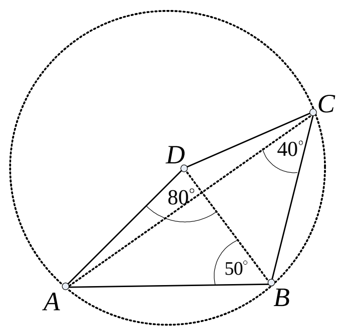
Втор начин. Нека A_1 и C_1 се подножјата на нормалите од A и C на BD соодветно. Тогаш, $\triangle ABA_1 \sim \triangle ACD$ ($\measuredangle AA_1B = \measuredangle ADC = 90°$ и $\measuredangle ABA_1 = \measuredangle ACD$, како периферни агли над ист кружен лак), од каде $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Од $\triangle CDC_1 \sim \triangle CAB$ ($\measuredangle CC_1D = \measuredangle CBA = 90°$ и $\measuredangle CDC_1 = \measuredangle CAB$, како периферни агли над ист кружен лак), следува дека $\frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Со изедначување на левите страни од равенствата се добива $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}}$, од каде $\overline{BA_1} = \overline{DC_1}$, што требаше да се докаже.

19. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ за кој важи:

$$\measuredangle ABD = 50^\circ,\ \measuredangle ADB = 80^\circ,$$

$$\measuredangle ACB = 40^\circ \text{ и } \measuredangle DBC = \measuredangle BDC + 30^\circ.$$

Најди го $\measuredangle DBC$.



Решение. Според условите на задачата добиваме дека $\measuredangle BAD = 50^\circ$, односно триаголникот ABD е рамнокрак. Нека k е кружницата со центар D и радиус $\overline{DA}$. Јасно е дека $B \in k$.

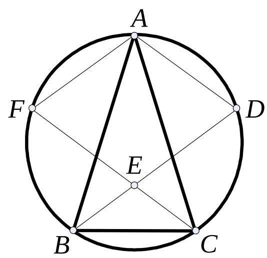
Бидејќи $\measuredangle ADB = 80^\circ$, $\measuredangle ACB = 40^\circ$ и притоа $\measuredangle ADB$ е централен агол над лакот AB, следува дека $C \in k$. Значи и триаголникот BCD е рамнокрак. Од условите на задачата имаме:

$$180^\circ = \measuredangle DBC + \measuredangle DCB + \measuredangle BDC = \measuredangle BDC + 30^\circ + \measuredangle BDC + 30^\circ + \measuredangle BDC,$$

од каде што $\measuredangle BDC = 40^\circ$, односно $\measuredangle DBC = 70^\circ$.

20. Нека k е опишаната кружница околу рамнокракиот триаголник ΔABC со основа BC. Нека E е пресечната точка на симетралите на внатрешните агли во темињата B и C. Нека D и F се пресечните точки на симетралите на аглите во темињата B и C со k соодветно. Докажи дека $EDAF$ е ромб.

Решение. Нека $\alpha = \measuredangle ABC = \measuredangle ACB$ и нека $\gamma = \measuredangle CAB$. Тогаш, бидејќи BD е симетрала на $\measuredangle CBA$ и CF е симетрала на $\measuredangle BCA$ следува дека:



$$\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \tfrac{\alpha}{2} = \measuredangle BCE = \measuredangle ACE.$$

Значи, $\measuredangle CED = \alpha$, па затоа $\measuredangle BEF = \alpha$. Понатаму $\measuredangle CFA = \measuredangle CBA = \alpha$ како агли над ист кружен лак, па $\measuredangle CFA = \alpha = \measuredangle CED$. Од каде $FA \| ED$. Аналогно $EF \| AD$.

Сега $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle BCF = \measuredangle BAF = \frac{\alpha}{2}$ од каде добиваме

$$\measuredangle FAC = \measuredangle FAB + \gamma = \tfrac{\alpha}{2} + \gamma \text{ и } \measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \gamma = \tfrac{\alpha}{2} + \gamma.$$

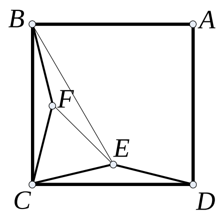
Значи $\measuredangle FAC = \measuredangle DAB$. Сега бидејќи и $\measuredangle ABD = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ACF$, $\overline{AC} = \overline{AB}$ следува дека $\Delta ACF \cong \Delta ABD$ па $\overline{AF} = \overline{AD}$. Според тоа $EDAF$ е ромб.

21. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ се дадени точки E и F така што триаголникот CDE е рамнокрак со агол 150° кај темето E и триаголникот BCF е рамнокрак со агол 150° кај темето F.

а) Докажи дека триаголникот CEF е рамностран.

б) Колкав е аголот ABE ?

Решение. а) Триаголниците BCF и CDE се складни (еднакви агли и страна) и затоа $\overline{CF} = \overline{CE}$. Имаме



$$\measuredangle FCE = 90^\circ - \measuredangle BCF - \measuredangle DCE = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ.$$

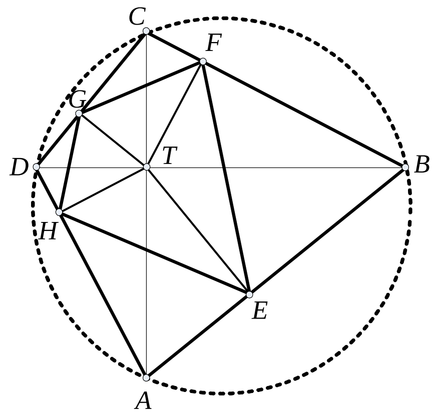
Значи, триаголникот CEF е рамнокрак со агол 60° и затоа е рамностран.

б) Бидејќи триаголникот CEF е рамностран, следува $\overline{FE} = \overline{FC}$. Но, $\overline{FC} = \overline{FB}$ па $\overline{FE} = \overline{FB}$. Значи, триаголникот BFE е рамнокрак.

Уште, $\measuredangle BFE = 360^\circ - \measuredangle BFC - \measuredangle CFE = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$ и затоа триаголникот EBF е складен со BCF. Оттука $\measuredangle EBF = \measuredangle CBF = 15^\circ$, односно $\measuredangle CBE = 30^\circ$ и затоа $\measuredangle ABE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

22. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ со заемно нормални дијагонали. Од пресекот на дијагоналите T се спуштени нормали кон страните на четириаголникот и тие ги сечат страните AB, BC, CD, DA во точките E, F, G, H соодветно.

Докажи дека четириаголникот $EFGH$ е тетивен.



Решение. Од тетивниот четириаголник $GCFT$ следува $\measuredangle TGF = \measuredangle TCF$, а од тетивниот четириаголник $ABCD$ имаме $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$. Затоа $\measuredangle TGF = \measuredangle ADB$.

Од тетивниот четириаголник $HTGD$ следува $\angle HDT = \angle HGT$. Па имаме дека

$$\measuredangle TGF = \measuredangle ADB = \measuredangle HGT.$$

Аналогно се покажува дека

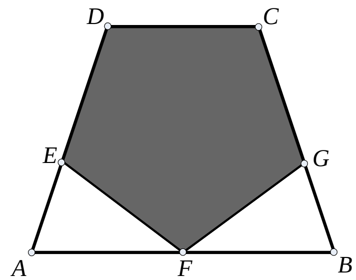
$$\measuredangle HET = \measuredangle DAC = \measuredangle DBC = \measuredangle TEF.$$

Следува дека

$$\begin{aligned}\measuredangle HGF + \measuredangle HEF &= 2\measuredangle HGT + 2\measuredangle HET\\ &= 2\measuredangle ADB + 2\measuredangle DAC\\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

каде што последното равенство важи од тоа што дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални.

23. На цртежот е прикажан правилен петаголник $CDEFG$ кој е во внатрешноста на трапезот $ABCD$. Докажи дека $\overline{AB} = 2\overline{CD}$.



Решение. Збирот на надворешните агли на правилниот петаголник е 360°. Според тоа, било кој надворешен агол е $360^\circ : 5 = 72^\circ$, (надворешните агли се еднакви меѓу себе) па според тоа било кој надворешен агол е еднаков на $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Според тоа $\measuredangle EDC = 108^\circ$ и $\measuredangle EAF = 72^\circ$. Бидејќи $\measuredangle AEF = 72^\circ$, добиваме дека ΔAFE е рамнокрак со основа AE. Триаголниците ΔAFE и ΔGFB се складни (имаат исти агли е една иста страна), па според тоа

$$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{AF} = \overline{FB}.$$

Бидејќи петаголникот е правилен, добиваме дека

$$\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{DC}$$

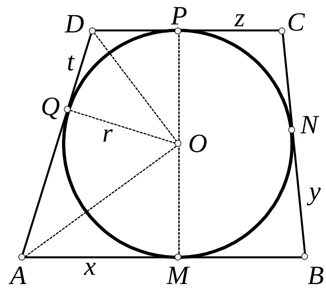
од каде се добива дека

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = \overline{CD} + \overline{CD} = 2\overline{CD}.$$

24. Околу кружница со радиус r опишан е трапез $ABCD$. Ако M, N, P и Q се допирните точки на страните AB, BC, CD и DA соодветно, тогаш

$$\overline{AM} \cdot \overline{BN} \cdot \overline{CP} \cdot \overline{DQ} = r^4.$$

Докажи!



Решение. Да ставиме

$$\overline{AM}=\overline{AQ}=x\,,\ \overline{BM}=\overline{BN}=y\,,$$

$$\overline{CN}=\overline{CP}=z\,,\ \overline{DP}=\overline{DQ}=t$$

(види цртеж). Имаме:

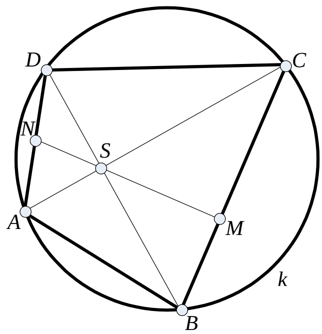
$$\measuredangle AOM=\measuredangle QOA \text{ и } \measuredangle QOD=\measuredangle DOP$$

од каде што следува дека

$$\measuredangle AOD=\measuredangle AOQ+\measuredangle QOD=90^\circ.$$

Значи, триаголникот AOD е правоаголен и $\overline{QO}=r$ е негова висина, спуштена од темето O на правиот агол, па затоа $r^2=xt$. Слично добиваме $r^2=yz$, т.е. $xyzt=r^4$, што требаше да се докаже.

25. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен и конвексен и неговите дијагонали AC и BD се заемно нормални. Нормалата низ пресечната точка S на AC и BD кон правата BC ја полови отсечката AD. Докажи!



Решение. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен и нека k е опишаната кружница околу него (види цртеж). Нека $N\in AD$ и $M\in BC$ при што $NM\perp BC$. Јасно, $\measuredangle DAC=\measuredangle DBC$ (како периферни агли над ист кружен лак DC во кружницата k).

Триаголниците ASD и BMS се слични бидејќи имаат по два еднакви агли. Значи, $\measuredangle BSM=\measuredangle ADS$. Од друга страна $\measuredangle BSM=\measuredangle DSN$ како накрсни агли. Значи, во триаголникот DNS внатрешните агли при страната DS се еднакви помеѓу себе. Добивме дека триаголникот DNS е рамнокрак со основа DS, и во кој $\overline{NS}=\overline{ND}$.

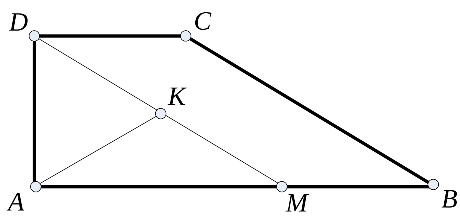
Отсечката DA е дијаметар на кружница која што минува низ S (аголот $\measuredangle ASD$ е прав). Според тоа, точките D и S се еднакво оддалечени од средината на отсечката AD. Но бидејќи тие се еднакво оддалечени и од $N\in DA$ добиваме дека N е центар на таа кружница. Конечно $\overline{AN}=\overline{NS}=\overline{ND}$, односно N е средина на AD.

26. Бочните страни на трапезот се однесуваат како $1:2$. Збирот на аглите при поголемата основа е 120°. Пресметај ги аглите на трапезот.

Решение. Нака $ABCD$ е трапез во кој што $\overline{AD}:\overline{BC}=1:2$ и $\measuredangle DAB+\measuredangle ABC=120^\circ$. Нека M е точка од отсечката AB така што $DM\,||\,BC$. Како агли на трансферзала

$$\measuredangle AMD=\measuredangle ABC\,,$$

па во триаголникот AMD имаме



$$\measuredangle ADM = 180^\circ - \measuredangle DAM - \measuredangle DMA = 60^\circ.$$

Ако K е средината на отсечката DM, бидејќи $MBCD$ е паралелограм, имаме

$$\overline{DK} = \tfrac{1}{2}\overline{DM} = \tfrac{1}{2}\overline{BC} = \overline{AD}.$$

Според тоа, триаголникот AKD е рамностран. Значи, $\overline{AK} = \overline{DK} = \overline{KM}$, па триаголникот MKA е рамнокрак со основа AM. Сега,

$$\measuredangle KAM = \measuredangle KMA = \measuredangle CBA,$$

од каде што добиваме

$$\measuredangle DAB = \measuredangle DAK + \measuredangle KAM = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,\ \measuredangle CAB = 120^\circ - \measuredangle DAB = 30^\circ.$$

Јасно, $\measuredangle ADC = 90^\circ$, па конечно

$$\measuredangle DCB = 360^\circ - \measuredangle DAB - \measuredangle ADC - \measuredangle ABC = 150^\circ.$$

Значи, аглите на трапезот се $90^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 30^\circ$.

27. Во четириаголникот $ABCD$, $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ и $\overline{AB} = \overline{AD}$. На страните CD и CB се избрани точки F и E соодветно, такви што $BF \perp AE$.

Докажи дека $DE \perp AF$.

Решение. **З**а да $DE \perp AF$ доволно е да покажеме дека

$$\overline{AE}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{FE}^2.$$

(Зошто?) Бидејќи $AE \perp BF$, за четириаголникот $ABEF$ имаме

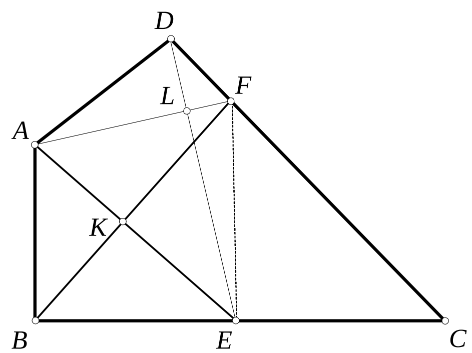
$$\overline{AB}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BE}^2,$$

(докажи!), а од $\overline{AB} = \overline{AD}$ добиваме

$$\overline{AD}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BE}^2.$$

Сега доволно е да докажеме дека

$$\overline{AF}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DF}^2. \qquad (1)$$



Според Питагоровата теорема

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2$$
$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$$

Равенството (1) е еквивалентно со

$$\overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{DF}^2,$$

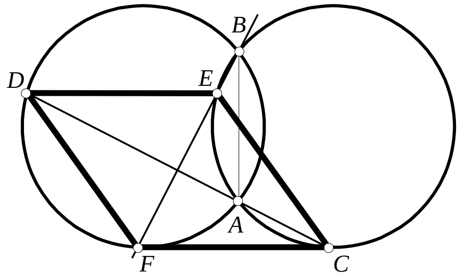
односно со $\overline{AB} = \overline{AD}$ кое е точно според претпоставката од задачата.

Значи, според истата задача $DE \perp AF$.

28. Две кружници со еднакви радиуси се сечат во точките A и B. Низ A е повлечена права која ги сече кружинците во точките C и D. Низ точката B е повлечена права нормална на правата CD, а која кружинците ги сече во точките E и F. Докажи дека точките C, D, E и F се темиња на ромб?

Решение. Бидејќи $\measuredangle BCD = \measuredangle BDC = \frac{AB}{2}$ (периферни агли над ист кружен лак) добиваме дека $\triangle CBD$ е рамнокрак триаголник. Според тоа правата BE ($BE \perp DC$) ја преполовува отсечката DC и триаголниците $\triangle DEC$ и $\triangle DFC$ се рамнокраки.

Освен тоа $\measuredangle ABE = \measuredangle ECA = \frac{AB}{2}$ (периферски агли над ист кружен лак). Бидејќи триаголникот CED е рамнокрак



$$\measuredangle EDC = \measuredangle ECA = \measuredangle ABE = \frac{AB}{2}.$$

Слично, бидејќи триаголникот DFC е рамнокрак

$$\measuredangle FDC = \measuredangle FCD = \measuredangle FDA = \measuredangle FBA$$

$$= \measuredangle EBA = \frac{AE}{2}.$$

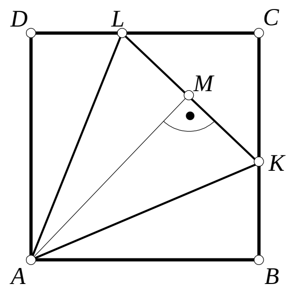
Значи,

$$\measuredangle EDEA = \measuredangle ECA = \measuredangle FCD = \measuredangle FDC,$$

од што следува дека $EC \parallel FD$ и $FC \parallel DE$ и од $EF \perp DC$, EF ја полови DC добиваме дека C, D, E и F се темиња на ромб.

29. Точките K и L се избрани од страните BC и CD од квадратот $ABCD$ соодветно, така што $\measuredangle AKB = \measuredangle AKL$. Преметај го аголот $\measuredangle KAL$.

Решение. Нека AM е висина во триаголникот AKL ($M \in KL$). Правоаголните триаголници AMK и ABK имаат ист остар агол и заедничка хипотенуза. Според тоа, тие се складни. Значи, $\overline{AM} = \overline{AB} = \overline{AD}$. Правоаголните триаголници AML и ADL имаат заедничка хипотенуза и иста катета, па тие се складни. Но, тогаш



$$\measuredangle KAL = \measuredangle KAM + \measuredangle MAL = \measuredangle KAB + \measuredangle DAL,$$

па според тоа

$$2\measuredangle KAL = \measuredangle KAM + \measuredangle MAL + \measuredangle KAB + \measuredangle DAL = 90^\circ.$$

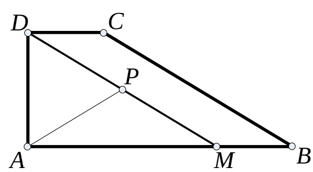
Значи $\measuredangle KAL = 45^\circ$.

30. Даден е трапез $ABCD$ во кој

$$2\overline{AD} = \overline{BC}, \ \overline{CD} < \overline{AB} \text{ и } \measuredangle DAB + \measuredangle CBA = 120^\circ.$$

Определи ги аглите на трапезот $ABCD$.

Решение. Нека $M \in AB$ така што $DM \parallel BC$. Тогаш $\measuredangle AMD = \measuredangle ABC$ (агли на трансферзала). Но тогаш



$$\measuredangle DAM + \measuredangle AMD = \measuredangle DAM + \measuredangle ABC = 120^\circ.$$

Но тогаш $\measuredangle ADM = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Од $\overline{DM} = \overline{CB}$ и условот на задачата $2\overline{AD} = \overline{BC}$, добиваме $\overline{DM} = 2a$, каде $a = \overline{AD}$. Нека $P \in MD$ е средина на DM. Тогаш триаголникот APD има две еднакви страни кои зафаќаат агол од 60°. Според тоа, тој е рамностран, од каде добиваме $\overline{AP} = a$. Но тогаш $\overline{PM} = \overline{PA} = a$ добиваме дека MPA е рамнокрак триаголник во кој

$$\measuredangle PAM = \measuredangle PMA = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle APM) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = \tfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ ,$$

Сега,

$$\measuredangle ABC = \measuredangle AMD = 30^\circ ,$$

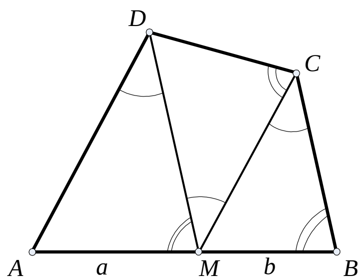
$$\measuredangle DAM = \measuredangle DAP + \measuredangle PAM = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ ,$$

$$\measuredangle ADC = \measuredangle ADP + \measuredangle MDC = \measuredangle ADP + \measuredangle ABC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ ,$$

и конечно

$$\measuredangle BCD = 360^\circ - (\measuredangle ADC + \measuredangle DAB + \measuredangle ABC) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 30^\circ) = 150^\circ .$$

31. Во тетивниот четириаголник $ABCD$ точката M лежи на страната AD при што $CM \parallel AD$ и $DM \parallel BC$. Да се определи должината на CD ако $\overline{AM} = a$ и $\overline{MB} = b$.



Решение. *Прв начен.* Од $CM \parallel AD$ добиваме $\measuredangle ADM = \measuredangle DMC$ и $\measuredangle AMD = \measuredangle MBC$. Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, имаме

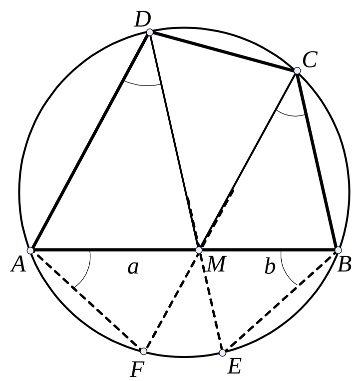
$$\measuredangle DCM = 180^\circ - \measuredangle BCM - \measuredangle BAD =$$

$$= 180^\circ - (\measuredangle ADM + \measuredangle MAD) = \measuredangle AMD.$$

Од сите претходно добиени равенства, добиваме дека триаголниците AMD, MDC и MBC се слични (имаат исти агли). Од сличноста на $\triangle AMD$ и $\triangle MDC$ добиваме $\frac{\overline{AM}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{MC}}$, а од сличноста на $\triangle MDC$ и $\triangle MBC$ добиваме $\frac{\overline{BM}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{DM}}$. Сега, ако ги помножиме последните две равенства добиваме

$$\frac{\overline{AM} \cdot \overline{DM}}{\overline{DC}^2} = 1, \text{ т.е. } \overline{DC}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{DM} = ab .$$

Значи, $\overline{DC} = \sqrt{ab}$.



Втор начин. Правите DM и CM ќе ги продолжиме до пресек со опишаната кружница околу $ABCD$. Нека пресечните точки се E и F соодветно (види цртеж). На тој начин добиваме два впишани трапези $ADCF$ и $DEBC$. Околу трапез може да се опише кружница ако и само тој е рамнокрак. Од еднаквост на агли над ист кружен лак и $DM \parallel BC$ добиваме:

$$\measuredangle BAF = \measuredangle FCB = \measuredangle ADE = \measuredangle ABE$$

$$\measuredangle AFC = \measuredangle ABC = \measuredangle AMD = \measuredangle BME .$$

Значи, триаголниците AFM и BME се слични (имаат исти агли), од каде добиваме $\frac{\overline{AM}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BM}}$, т.е. $\frac{a}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DC}}{b}$, односно $\overline{DC} = \sqrt{ab}$.

32. Дијагоналите на паралелограмот $ABCD$ се сечат во точката O. Кружницата која минува низ точките D,O и C ја допира правата BC. Докажи дека кружницата која минува низ точките B,O и C ја допира правата AB.

Решение. Од теоремата за агол меѓу тангента и тетива, за периферниот агол $\measuredangle ODC$ и $\measuredangle BCO$ имаме

$$\measuredangle ODC = \measuredangle BCO$$

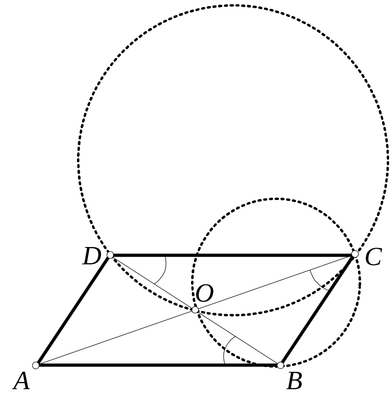
(види цртеж). Од друга страна

$$\measuredangle OBA = \measuredangle ODC$$

(наизменични агли). Сега

$$\measuredangle OCB = \measuredangle OBA .$$

Ако ја примениме обратната теорема за агол меѓу тетива и тангента, добиваме дека правата AB ја допира кружницата која минува низ B,O и C.



33. Аголот при темето C во ромбот $ABCD$ е еднаков на 40°, точката C е средина на BC, а F е подножје на висината спуштена од D кон AE.

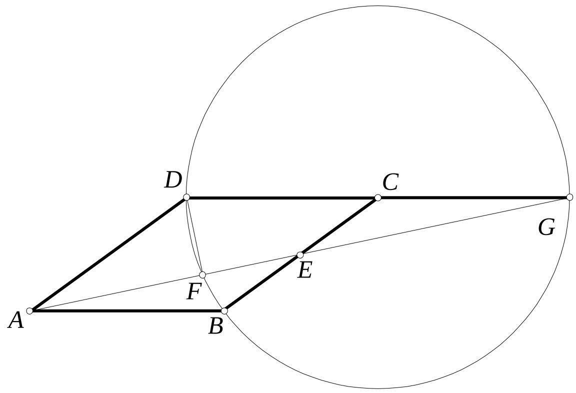
Пресметај го аголот AFB.

Решение. Нека правите AE и CD се сечат во точката G (види цртеж). Триаголниците ΔABE и ΔCGE се складни, бидејќи имаат еднакви агли и $\overline{CE} = \overline{BE}$. Сега

$$\overline{CD} = \overline{AB} = \overline{CG} = \overline{BC} ,$$

односно точките D,B,G лежат на една кружница со центар во C и радиус $R = \overline{AB}$. Бидејќи $DF \perp AG$, односно $DF \perp GF$ и DG е дијаметар, точката F лежи на истата кружница (агол над дијаметар во кружница). Сега

$$\measuredangle GFB = \tfrac{1}{2}\measuredangle GCB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ ,$$



од каде што добиваме

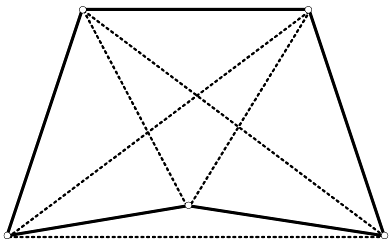
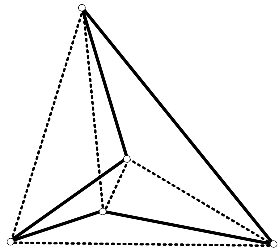
$$\measuredangle AFB = 180^\circ - \measuredangle GFB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ .$$

34. Дали постои петаголник, таков што било кои две негови дијагонали (од петте дијагонали кои тој ги има) не се сечат (освен во крајните точки некои од нив).

Решение. Петаголникот не може да е конвексен. Во тој случај, било кои две дијагонали кои почнуваат од две соседни темиња се сечат (направи цртеж сам).

Сега имаме две можности:

а) Конвексното затворање на петаголникот е четириаголник. Во тој случај секогаш има две дијагонали кои се сечат (види цртеж).

б) Конвексното затворање на петаголникот е триаголник. Постои таков петаголник во кој неговите дијагонали не се сечат, т.е. неговите дијагонали немаат заеднички точки, освен можеби крајните (види цртеж).

35. Даден е конвексен четириаголник $ABMC$ во кој $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\measuredangle BAM=30^\circ$ и $\measuredangle ACM=150^\circ$.

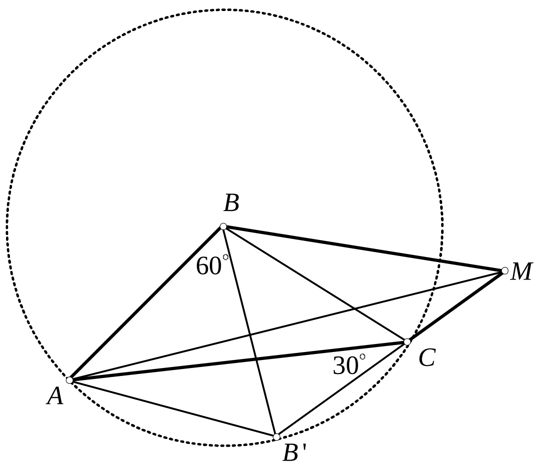
Докажи дека AM е симетрала на аголот $\measuredangle BMC$.

Решение. Нека B' е симетрична точка на точката B во однос на правата AM (види цртеж). Тогаш $\overline{AB}=\overline{AB'}$ и важи

$$\measuredangle B'AM=\measuredangle BAM=30^\circ.$$

Според тоа,

$$\measuredangle BAB'=\measuredangle BAM+\measuredangle B'AM=60^\circ$$



Сега, јасно е дека $\triangle BAB'$ е рамностран. Точките A,B',C лежат на една кружница со центар во точката B и радиус

$$R=\overline{BA}=\overline{B'B}=\overline{BC}.$$

Според тоа, $\measuredangle ACB'=30^\circ$ бидејќи е периферен агол за кој централниот агол е $\measuredangle ABB'=60^\circ$. Бидејќи $\measuredangle ACM=150^\circ$, имаме

$$\measuredangle B'CM=\measuredangle B'CA+\measuredangle ACM=30^\circ+150^\circ=180^\circ,$$

па според тоа точките M,C,B' лежат на една права. По конструкција AM е симетрала на $\measuredangle BAB'$ како и на $\measuredangle BMB'$. Конечно AM е симетрала на $\measuredangle BMC$.

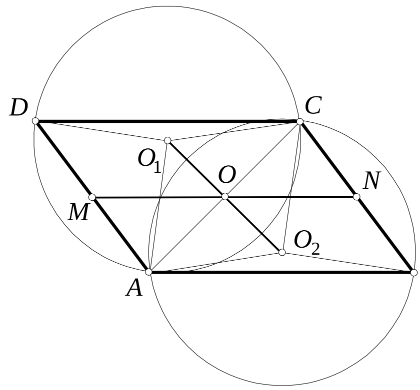
36. Нека $ABCD$ е четириаголник во кој $AB\,||\,CD$ и M и N се средни точки на AD и BC. Правата MN ја дели на половина отсечката што ги сврзува центрите на опишаните кружници околу триаголниците ΔABC и ΔACD.

Докажи дека $ABCD$ е паралелограм.

Решение. Отсечката MN е средна линија на $ABCD$. Според тоа, таа ја дели на половина дијагоналата AC. Нека $MN\cap AC=O$.

Нека O_1 е центар на опишаната кружница околу триаголникот ACD, а O_2 е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Тогаш $OO_1\perp AC$ и

$OO_2 \perp AC$. Значи, $O_1O_2 \perp AC$, и според условот на задачата MN ја дели на половина O_1O_2. Значи, точката O ја дели на половина O_1O_2. Значи, AO_2CO_1 е четириаголник во кој дијагоналите се полоцат и се заемно нормални. Добивме дека AO_2CO_1 е ромб, и уште повеќе $\overline{O_1C} = \overline{AO_2}$ и $O_1C \parallel AO_2$. Сега, од тоа што $AB \parallel CD$, добиваме дека ΔDO_1C и ΔBO_2A се складни (рамнокраки со еднакив агли и исти краци).



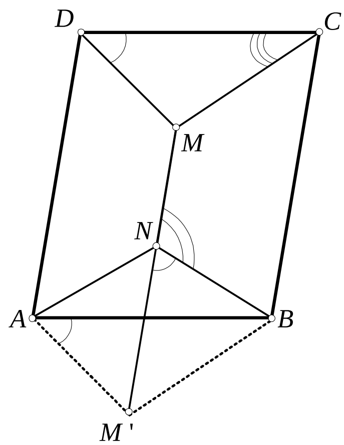
Сега $\overline{AB} = \overline{DC}$, односно $ABCD$ е паралелограм.

37. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е избрана точка M, а во внатрешноста на триаголникот ΔBMA е избрана точка при што

$$\measuredangle MNA + \measuredangle MCD = \measuredangle MNB + \measuredangle MDC = 180^\circ .$$

Докажи дека $MN \parallel AD$.

Решение. Бидејќи $ABCD$ е паралелограм, при транслација за вектор $\overrightarrow{DA}$, точката D преминува во A, точката C во B и M во M' (види цртеж).



Со непосредно пресметување, добиваме

$$\measuredangle AM'B + \measuredangle ANB = \measuredangle DMC + \measuredangle ANB$$

$$= 180^\circ - (\measuredangle MDC + \measuredangle MCD) +$$

$$+ 360^\circ - (\measuredangle ANM + \measuredangle MNB)$$

$$= 540^\circ - (\measuredangle MDC + \measuredangle MNB) - (\measuredangle MCD + \measuredangle MNA)$$

$$= 540^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

Според тоа, четириаголникот $AM'BN$ е тетивен.

Сега,

$$\measuredangle M'AB = \measuredangle M'NB,$$

$$\measuredangle M'NB + \measuredangle MNB = \measuredangle M'AB + \measuredangle MNB = \measuredangle MDC + \measuredangle MNB = 180^\circ .$$

Значи M', N и M лежат на една права. Од тоа што $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, добиваме $MM' \parallel AB$ и бидејќи $MN \parallel MM'$ имаме $MN \parallel AB$.

38. Во паралелограмот $ABCD$ на страните AB и BC се избрани точки M и N соодветно, така што $\overline{AM} = \overline{NC}$. Точката Q е пресек на отсечките AN и CM.

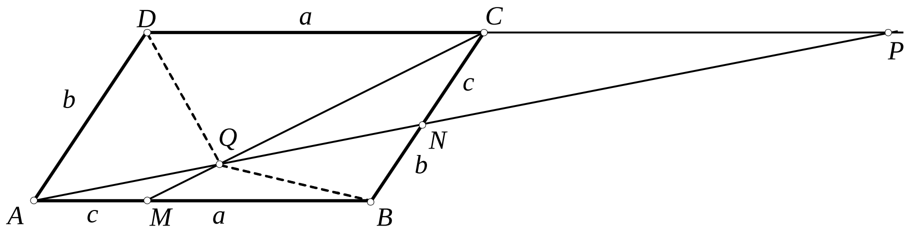
Докажи дека DQ е симетрала на аголот од паралелограмот во темето D.

Решение. Нека точката P е пресек на AN и DC (види цртеж). Ќе воведеме ознаки $\overline{CP} = x$, $\overline{CN} = c$, $\overline{AD} = b$, $\overline{DC} = a$. Триаголниците $\triangle NCP$ и $\triangle ADP$ се слични (бидејќи $AD \parallel CN$). Според тоа,

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{DP}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{AD}}\text{, т.е. } \frac{x}{x+a}=\frac{c}{b}\,,$$

од каде добиваме $x=\frac{ac}{b-c}$. Сега, од последното равенство добиваме

$$\overline{PD}=x+a=\frac{ac}{b-c}+a=\frac{ab}{b-c}\,.$$



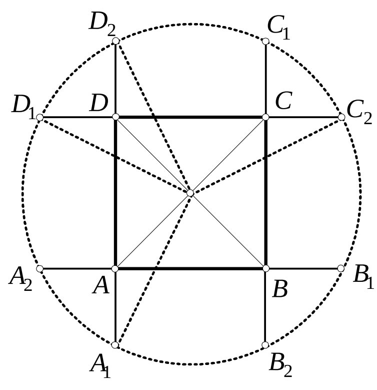
Од друга страна триаголниците $\triangle AMQ$ и $\triangle CPQ$ се слични (страните им се паралелни). Според тоа, $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{AM}}=\frac{x}{c}$, од каде добиваме

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}=\frac{x}{c}=\frac{a}{b-c}=\frac{ab}{b-c}:b=\frac{\overline{PD}}{\overline{DA}}\,.$$

Значи, DQ е симетрала на аголот $\measuredangle D$ во четириаголникот $ABCD$.

39. Страните на конвексен четириаголник се продолжени преку крајните точки. На секое од осумте продолженија се нанесени отсечки со еднакви должини и почеток во крајните точки на страните на четириаголникот. Добиените осум крајни точки на продолженијата се различни меѓу себе, и лежат на една кружница. Докажи дека почетниот четириаголник е квадрат.

Решение. Нека $ABCD$ е дадениот четириаголник, $A_2A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1$ е добиениот осумаголник и O е цантарот на опишаната кружница околу него. Точката O лежи на симетралата на A_1D_2 и бидејќи $\overline{AA_1}=\overline{DD_2}$, добиваме дека O лежи на симетралата на AD. Аналогно на O лежат симетралите на сите страни на четириаголникот $ABCD$. Значи, околу $ABCD$ може да се опише кружница, при што



$$\overline{OA_1}=\overline{OC_2}=R \text{ и } \overline{OA}=\overline{OC}=r$$

Бидејќи $\overline{AA_1}=\overline{CC_2}$, добиваме $\triangle OAA_1\cong\triangle OCC_2$. Значи $\measuredangle OA_1A=\measuredangle OC_2C$, од каде што следува дека рамнокраките триаголници $\triangle OD_2A_1$ и $\triangle OC_2D_1$ се складни. Значи, $\overline{A_1D_2}=\overline{C_2D_1}$, т.е. $\overline{AD}=\overline{BC}$. Аналогно се добива дека $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$, т.е. $ABCD$ е ромб. Бидејќи околу него може да се опише кружница тој е квадрат.

40. Даден е паралелограм $ABCD$ во кој $\measuredangle A=60^\circ$.Точката O е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABD. Правата AO ја сече симетралата на надворешниот агол во темето C во точката K .

Пресметај го количникот $\frac{\overline{AO}}{\overline{OK}}$.

Решение. За кружницата опишана околу триаголникот ABD, аголот $\angle BAD$ е периферен агол над лакот BD. Аголот $\angle BOD$ е периферен агол над истиот лак. Заради тоа

$$\measuredangle BOD = 2\measuredangle BAD = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ .$$

Од друга страна $\measuredangle BCD = 60^\circ$ ($ABCD$ е паралелограм), имаме

$$\measuredangle BOD + \measuredangle BCD = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ ,$$

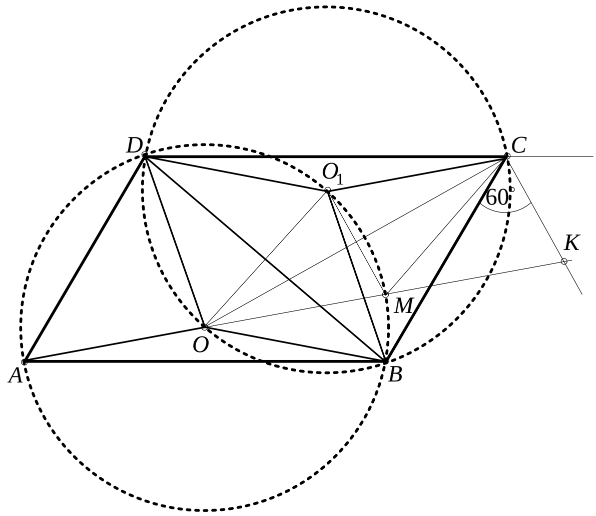
па според тоа $BCDO$ е тетивен четириаголник.

Триаголникот BOD е рамнокрак, па според тоа $\measuredangle ODB = \measuredangle OBD = 30^\circ$. Бидејќи CK е симетрала на агол од 120°, имаме

$$\measuredangle OCK = \measuredangle OCB + \measuredangle BCK = \measuredangle ODB + \measuredangle BCK = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ .$$

Но триаголниците ABD и BCD се складни, па имаат еднакви радиуси на опишани кружници. Бидејќи $\measuredangle ODB = \measuredangle O_1DB = 30^\circ$, триаголникот $\triangle O_1DO$ е рамностран, и следствено, $\overline{O_1O} = \overline{OD} = \overline{O_1C}$.

Нека пресекот на симатралата на OC со OK е точката M. Заради последното равенство, симетралата минува низ точката O_1.



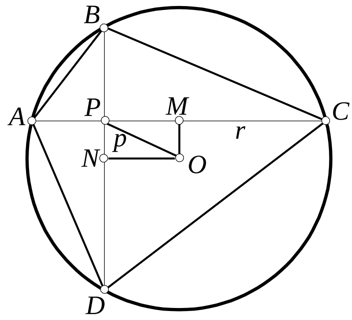
Триаголникот KCO е правоаголен, а O_1M е симетрала на катетата OC. Според тоа, M е средна точка на OK и центар на опишаната кружница за KCO, од каде добиваме

$$\overline{OM} = \overline{MK} = \overline{MC} .$$

Точките O и O_1 се центри на опишани кружници околу симетрични триаголници. Според тоа $AOCO_1$ е централно симетричен, односно тој е паралелограм. Сега $O_1C \parallel OM$ и четириаголникот $OMCO_1$ има взаемно нормални дијагонали. Значи, тој е ромб и $\overline{AO} = \overline{OM} = \overline{MK}$.

Сега, јасно е дека $\frac{\overline{AO}}{\overline{OK}} = \frac{1}{2}$.

41. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен и има заемно нормални дијагонали. Нека O е центар на опишаната кружница околу четириаголникот, а P е пресек на неговите дијагонали. Пресметај го збирот на квадратите на должините на дијагоналите на четираголникот ако опишаната кружница има радиус r, а $\overline{OP} = p$.



Решение. Нека M е средина на дијагоналата AC, а N е средина на дијагоналата BD (види цртеж). Од правоаголните триаголници ΔAOM и ΔBMO имаме

$$\overline{AM}^2+\overline{MO}^2=\overline{AO}^2 \text{ и}$$

$$\overline{BN}^2+\overline{NO}^2=\overline{BO}^2,$$

т.е.

$$\overline{AM}^2=\overline{AO}^2-\overline{MO}^2 \text{ и}$$

$$\overline{BN}^2=\overline{BO}^2-\overline{NO}^2.$$

Според тоа

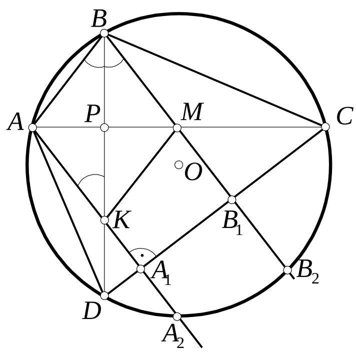
$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=(2\overline{AM})^2+(2\overline{BN})^2=4(\overline{AM}^2+\overline{BN}^2)=4[(\overline{AO}^2-\overline{MO}^2)+(\overline{BO}^2-\overline{NO}^2)]$$

$$=4(\overline{AO}^2+\overline{BO}^2)-4(\overline{MO}^2+\overline{NO}^2).$$

Бидејќи $\overline{AO}=\overline{BO}=r$ и $\overline{MO}^2+\overline{NO}^2=\overline{OP}^2=p^2$, добиваме

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=8r^2-4p^2.$$

42. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен и има заемно нормални дијагонали. Нека O е центар на опишаната кружница околу четириаголникот, а P е пресекот на неговите дијагонали. Од темињата A и B се спуштени нормали на страната CD кои ги сечат дијагоналите во точките K и M. Докажи дека четириаголникот $AKMB$ е ромб.



Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека опишаната кружница има радиус 1. Нека правите AK и BM ја сечат страната CD во точките A_1 и B_1 соодветно, а опишаната кружница k во точките A_2 и B_2 исто така соодветно (види цртеж).

Тогаш

$$90^\circ-\measuredangle APD=\tfrac{1}{2}(AD+CB)$$

$$90^\circ=\measuredangle BB_1C=\tfrac{1}{2}(DB_2+CB).$$

Од каде што добиваме

$$AD=DB_2 \text{, т.е. } \measuredangle ABD=\measuredangle DBB_2.$$

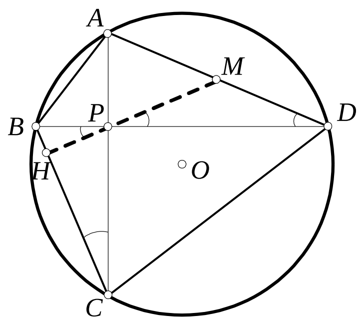
Во четириаголникот $AKMB$ страната AK е паралелна со страната MB па заради тоа

$$\measuredangle AKB=\measuredangle KBM=\measuredangle ABK,$$

т.е. $\overline{BP}=\overline{PK}$. Од исти причини како и претходно $\overline{AP}=\overline{PM}$.

Значи $\triangle ABP\cong\triangle MPK$, т.е. $AKMB$ е ромб (може да се заклучи и од тоа што дијагоналите се половат).

43. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен и има заемно нормални дијагонали. Нека O е центар на опишаната кружница k околу четириаголникот, а P е пресек на неговите дијагонали. Докажи дека нормалата повлечена од точката P кон страната BC ја дели страната AD на половина.



Решение. Нека нормалата спуштена од точката P на страната BC ја сече BC во точката H , а страната AD во точката M (види цртеж). Користејќи еднаквост на агли над ист кружен лак, еднаквост на агли со заемно нормални краци и еднаквост на накрсни агли добиваме

$$\measuredangle PDA = \measuredangle BDA = \measuredangle BCA = \measuredangle HPB = \measuredangle PAM .$$

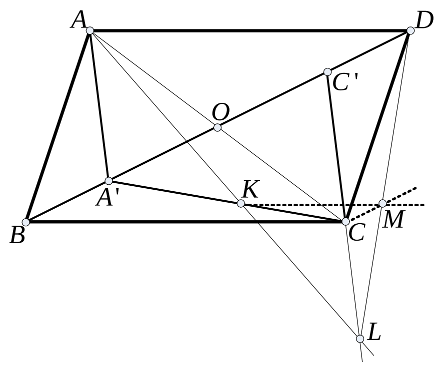
Според тоа, триаголникот $\triangle PMD$ е рамнокрак со основа PD. Значи $\overline{PM} = \overline{MD}$. Од друга страна

$$\measuredangle APM = 90^\circ - \measuredangle MPD = 90^\circ - \measuredangle MDP = \measuredangle PAM ,$$

односно, и триаголникот ΔPMA е рамнокрак со основа AP. Сега $\overline{AM} = \overline{PM}$.

Конечно, $\overline{MD} = \overline{PM} = \overline{AM}$, што и требаше да се докаже.

44. Точките A' и C' припаѓаат на дијагоналата BD од паралелограмот $ABCD$, така што $AA' \| CC'$. Точката K припаѓа на отсечката $A'C$, а правата AK ја сече правата CC' во точката L. Низ K е повлечена права паралелна со BC , а низ C е повлечена права која е паралелна со BD. Двете прави се сечат во точката M . Докажи дека D, M и L се колинеарни.



Решение. Нека O е пресек на дијагоналите AC и BD. Бидејќи $ABCD$ е паралелограм имаме $\overline{AO} = \overline{OC}$.

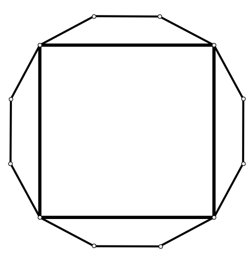
Бидејќи $AA' \| CC'$ триаголниците $AA'O$ и $CC'O$ се слични, од каде добиваме

$$\overline{A'O} : \overline{OC'} = \overline{AO} : \overline{OC} = 1,$$

односно $\overline{A'O} = \overline{OC'}$. Значи, дијагоналите на четириаголникот $AA'CC'$ се полoват. Според тоа, тој е паралелограм и $AC' \| A'C$. Бидејќи $AD \| KM, C'D \| CM$, $AC' \| KC$ и $AC' \neq KC$ добиваме дека AK, CC' и DM се сечат во една точка.

Значи, D, M и L се колинеарни.

45. На страните на квадрат со должина 2, конструирани се од надворешната страна, рамнокраки трапези, така што темињата на сите трапези се истовремено темиња на правилен дванаестоаголник.



Колку е периметарот на дванаестоаголникот?

Решение. Да разгледаме еден трапез од дванаестаголникот.

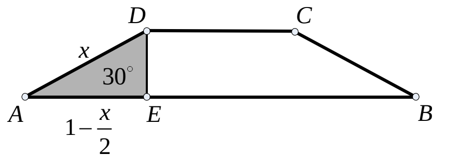
Внатрешниот агол на дванестоаголникот е

$$\frac{12-2}{12}\cdot 180^\circ = 150^\circ.$$

Следува $\alpha = 30^\circ$. Од $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = x$ и $\overline{AB} = 2$, следува $\overline{AE} = 1 - \frac{x}{2}$. Од друга страна за правоаголниот триаголник AED, со агли 30° и 60°, важи $\overline{AE} = x\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значи $x\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{x}{2}$, односно

$$x = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

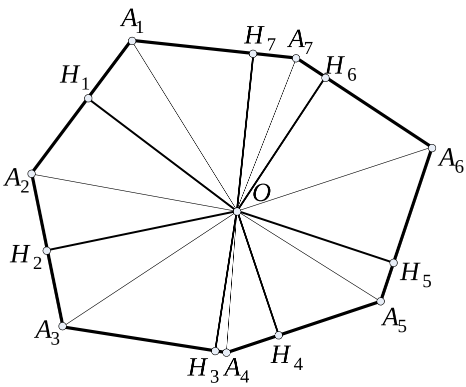


Затоа периметарот на дванестоаголникот

$$L = 12x = 12(\sqrt{3} - 1).$$

46. Должините на страните на конвексниот седумаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ се еднакви меѓу себе. Точката O припаѓа на неговата внатрешност. Точките $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7$ се подножја на нормалите од O кон страните $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_1$ и не се на нивните продолженија.

Докажи дека $\sum_{i=1}^{7}\overline{A_iH_i} = \sum_{i=1}^{7}\overline{H_iA_{i+1}}$, при што $A_8 = A_1$.



Решение. Со a ќе ја означиме должината на страната на седумаголникот, при што ќе сметаме дека $A_8 = A_1$. Од правоаголните триаголници OA_iH_i и $OA_{i+1}H_i$ имаме

$$\overline{OA_i}^2 - \overline{A_iH_i}^2 = \overline{OH_i}^2 = \overline{OA_{i+1}}^2 - \overline{A_{i+1}H_i}^2$$

Но, тогаш

$$\begin{aligned}\overline{OA_i}^2 - \overline{OA_{i+1}}^2 &= \overline{A_iH_i}^2 - \overline{A_{i+1}H_i}^2\\ &= (\overline{A_iH_i} - \overline{A_{i+1}H_i})(\overline{A_iH_i} + \overline{A_{i+1}H_i})\\ &= a(\overline{A_iH_i} - \overline{A_{i+1}H_i})\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{7}(\overline{OA_i}^2 - \overline{OA_{i+1}}^2) = a\sum_{i=1}^{7}(\overline{A_iH_i} - \overline{H_iA_{i+1}})$$

Збирот на левата страна од последното равенство е 0, па од $a \neq 0$ добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{7}(\overline{A_iH_i} - \overline{H_iA_{i+1}}) = 0,$$

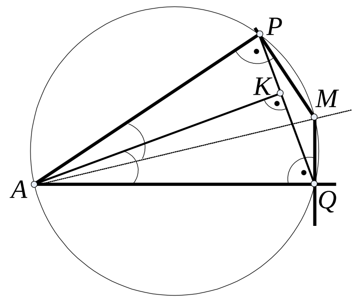
т.е.

$$\sum_{i=1}^{7}\overline{A_iH_i} = \sum_{i=1}^{7}\overline{H_iA_{i+1}}.$$

3. КРУЖНИЦА

1. Од произволна точка M, што се наоѓа во внатрешноста на даден остар агол со теме во A, се спуштени нормали MP и MQ кон краците на аголот, при што P и Q лежат на краците на аголот. Од темето A е спуштена нормал AK кон PQ, така што K лежи на правата PQ. Докажи дека

$$\measuredangle PAK = \measuredangle MAQ.$$



Решение. Нека k е кружница со дијаметар AM. Точките P и Q лежат на кружницата k, бидејќи $\measuredangle APM = \measuredangle AQM = 90^\circ$. Тогаш

1) $\measuredangle MAQ = \measuredangle MPQ$, (како периферериски агли над MQ);

2) $\measuredangle PAK = 90^\circ - \measuredangle APK$;(бидејќи $MP \perp AP$)

3) $\measuredangle MPQ = 90^\circ - \measuredangle APK$;(бидејќи $MP \perp AP$)

Од 2) и 3) следува $\measuredangle PAK = \measuredangle MPQ$, па од 1) имаме $\measuredangle PAK = \measuredangle MAQ$.

2. Во кружница со радиус $25cm$, вписан е правоаголник чии должини на страни се во однос 3:4. Да се најдат должините на страните на правоаголникот.

Решение. Нека страните на правоаголникот се a и b. Тогаш, $a^2 + b^2 = 50^2$. Од тоа што односот $a:b = 3:4$, следува дека $a = \frac{3}{4}b$. Според тоа, од $b^2 + \frac{9}{16}b^2 = 50^2$, следува дека $25b^2 = 16 \cdot 2500$, односно $b = 40$. Тогаш $a^2 = 50^2 - 40^2 = 900$ односно $a = 30$. Значи, страните на правоаголникот се $40cm$ и $30cm$.

3. Во кружница со радиус $26cm$, вписан е правоаголник чии должини на страни се во однос 5:12. Да се најдат должините на страните на правоаголникот.

Решение. Нека страните на правоаголникот се a и b. Тогаш, $a^2 + b^2 = 52^2$. Од тоа што односот $a:b = 5:12$, следува дека $a = \frac{5}{12}b$. Сега, од $b^2 + \frac{25}{144}b^2 = 52^2$, следува дека $169b^2 = 144 \cdot 13^2 4^2$, односно $b = 48$. Тогаш $a^2 = 52^2 - 48^2 = 40$ односно $a = 20$. Значи, страните на правоаголникот се $48cm$ и $20cm$.

4. Ако H е ортоцентар на триаголникот ABC, тогаш кружниците опишани околу триаголниците ABH, BCH и CAH имаат еднакви радиуси. Докажи!

Решение. Нека H е ортоцентарот на ΔABC, нека k_1 и k_2 се кружници опишани околу триаголниците ABH и BCH и нека HL и HM се дијаметри на k_1 и k_2 (види цртеж). Доволно е да докажеме дека $\overline{HL} = \overline{HM}$. Од $\measuredangle HBL = 90^\circ = \measuredangle HBM$, следува дека точките L, B и M се колинеарни. Ќе докажеме дека $\measuredangle HLM = \measuredangle HML$.

(1) $\measuredangle HLB = \measuredangle HAB,$ како периферни агли над лакот HB од кружницата k_1.

(2) $\measuredangle HMB = \measuredangle HCB,$ како периферни агли над лакот HB од кружницата k_2.

Од сличноста на правоаголните триаголници HAC_1 и HCA_1 следува

(3) $\measuredangle HAC_1 = \measuredangle HCA_1,$ т.е.

$$\measuredangle HAB = \measuredangle HCB .$$

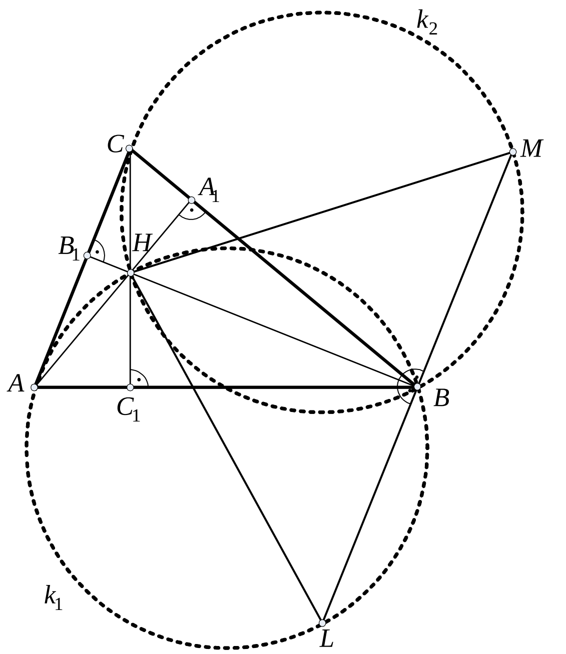
Од (1), (2) и (3) следува дека

$$\measuredangle HLB = \measuredangle HMB,$$

т.е.

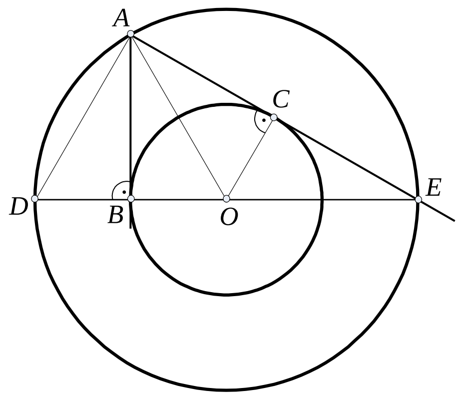
$$\measuredangle HLM = \measuredangle HML .$$

Значи $\triangle LMH$ е рамнокрак, па $\overline{HL} = \overline{HM}$, т.е. дијаметрите на кружниците k_1 и k_2 се еднакви.



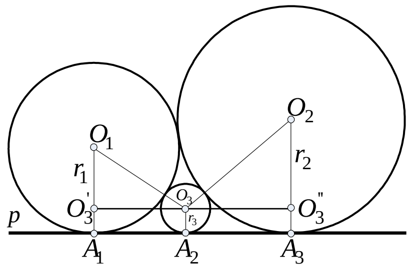
5. Ако две кружници се концентрични и притоа дијаметарот на едната е двапати поголем од дијаметарот на другата, тогаш аголот што го зафаќаат тангентите повлечени од која било точка на поголемата кружница кон помалата кружница е 60°.

Решение. Нека AB и AC се тангентите повлечени од точката A на малата кружница. Во правоаголниот триаголник OAB е: $\overline{OB} = r$, $\overline{OA} = 2\,r$, т.е. $\overline{OA} = 2\overline{OB}$, значи катетата OB е двапати помала од хипотенузата OA, па следува дека $\measuredangle OAB = 30^\circ$. Аналогно наоѓаме $\measuredangle OAC = 30^\circ$, па следува $\measuredangle BAC = 60^\circ$.



6. Три кружници со центри O_1, O_2 и O_3 и радиуси r_1, r_2 и r_3 соодветно, се допираат попарно меѓу себе од надворешна страна и сите три ја допираат правата p. Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$ (r_3 е радиус на најмалата кружница).

Решение. Со A_1, A_2, A_3 ги означуваме проекциите на точките O_1, O_2, O_3 на правата p. Нека O_3' е проекцијата на точката O_3 на правата O_1A_1 (кружницата со радиус O_3 има најмал радиус). Од Питагоровата теорема за $\triangle O_3O_3'O_1$ имаме $\overline{O_3O_3'}^2 = 4r_1r_3 = \overline{A_1A_3}^2$. Со слична постапка се добива дека $\overline{A_2A_3}^2 = 4r_2r_3$ и $\overline{A_1A_2}^2 = 4r_1r_2$, од каде го добиваме бараното равенство.



Значи $\overline{A_1A_3} = 2\sqrt{r_1r_3}$, $\overline{A_1A_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$ и $\overline{A_2A_3} = 2\sqrt{r_2r_3}$.

Бидејќи $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A_3} + \overline{A_2A_3}$, имаме $\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3}$ што и требаше да се докаже.

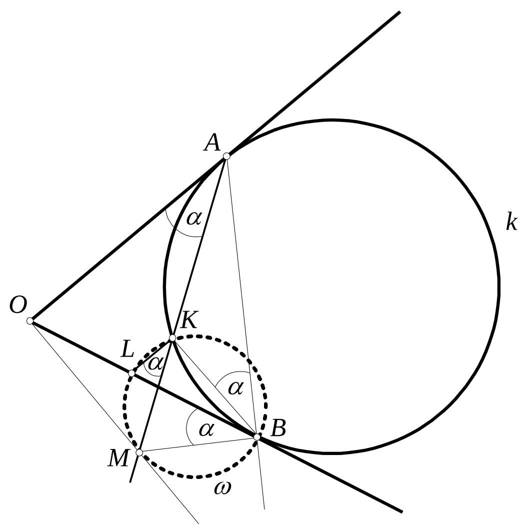
7. Дадена е кружница k со центар O и точка A надвор од кружницата. Од A се повлечени тангенти AX и AY, $X,Y \in k$, а точките P и Q од правите AX и AY (P е меѓу A и X, Y е меѓу A и Q) се такви, што $\overline{OP} = \overline{OQ}$. Докажи, дека средината на отсечката PQ припаѓа на отсечката XY.

Решение. Нека R е средината на PQ, направи цртеж. Тогаш $\measuredangle ORQ = \measuredangle OYQ = 90^\circ$. Според тоа, четириаголникот $OQYR$ е тетивен, па затоа $\measuredangle QRY = \measuredangle QOY$. Аналогно, $\measuredangle PRX = \measuredangle POX$. Бидејќи $\triangle OYQ \cong \triangle OXP$, добиваме $\measuredangle QOY = \measuredangle POX$. Според тоа, $\measuredangle QRY = \measuredangle PRX$, што значи дека точките X, R, Y лежат на една права.

8. Кружницата k е впишана во агол со теме O, и таа во точките A и B ги допира краците на аголот. Точката K припаѓа на помалиот кружен лак AB, а L припаѓа на кракот OB така што $OA \parallel LK$. Нека ω е опишаната кружница околу триаголникот LKB и $M = \omega \cap AK$.

Докажи дека правата OM е тангента на ω.

Решение. Ќе воведеме ознака $\measuredangle OAK = \alpha$, и бидејќи по конструкција $LK \parallel AO$, а AM е нивна трансферзала следува $\measuredangle LKM = \alpha$.



Правата OA е тангента на k, а KA е тетива на k, па според теоремата за агол меѓу тетива и тангента, добиваме

$$\angle KBA = \angle OAK = \alpha$$

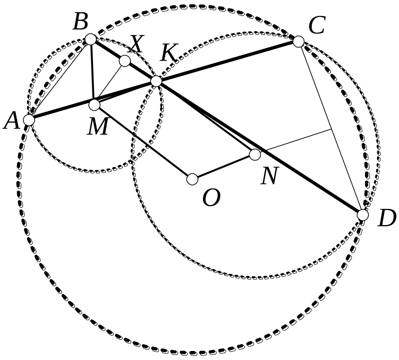
(периферен агол над лакот KA). Од друга страна

$$\angle LKM = \angle LBM$$

како агли над ист кружен лак во кружницата ω.

Бидејќи $\measuredangle OBM = \measuredangle OAM = \alpha$, точките A, O, M, B лежат на една иста кружница, т.е. четириаголникот $AOMB$ е тетивен.

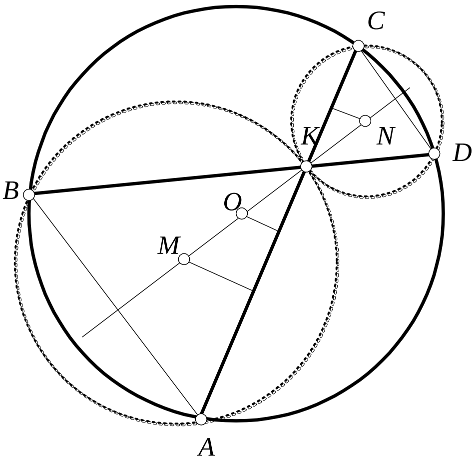
Сега, $\measuredangle OMA = \measuredangle OBA$ како агли над ист кружен лак. Од друга страна $\measuredangle OBA = \measuredangle KBM$, бидејќи $\measuredangle OBM = \measuredangle KBA = \alpha$. Значи, $\measuredangle OMA = \measuredangle MBK$, и за правата OM и тетивата MK според обратната теорема за агол меѓу тангента и тетива, OM е тангента на ω.



9. Тетивите AC и BD, во кружницата k со центар во точката O, се сечат во точката K. Точките M и N се центри на кружинците опишани околу триаголниците AKB и CKD.

Докажи дека $\overline{OM} = \overline{KN}$.

Решение. Нека X е средина на KB. Тогаш $\measuredangle KMX = \frac{1}{2}\measuredangle KMB = \measuredangle KAB = \measuredangle KDC$. Од друга страна, јасно е дека $MX \perp BD$, па според тоа $KM \perp CD$ (еднакви агли, на кои едниот пар на краци им се нормални). Од друга страна $ON \perp CD$, па затоа $ON \parallel KM$. Потполно аналогно $OM \parallel KN$.

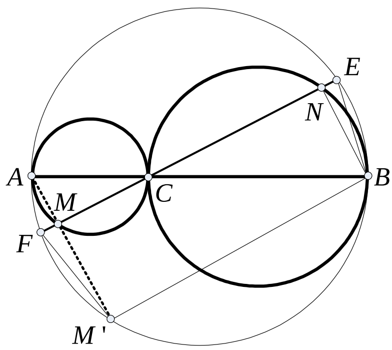


Случај 1. Ако O, K, M, N не лежат на една права, тогаш $OMKN$ е паралелограм, па според тоа $\overline{OM} = \overline{KN}$.

Случај 2. Ако O, K, M, N лежат на една права, ќе ги разгледаме ортогоналните проекции на OM и KN на AC. Точките O, M, N се проектираат во средините на AC, AK и KC соодветно.

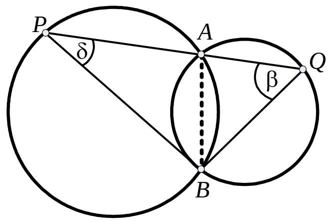
Проекциите на OM и KN се еднакви на $\frac{1}{2}\overline{KC}$. Бидејќи тие лежат на една права, тогаш од еднаквоста на должините на проекциите добиваме дека се еднакви и самите отсечки.

10. Точката C припаѓа на отсечката AB ($C \neq A, B$). Правата што минува низ точката C, кружницата со дијаметар AB ја сече во точките F и E, кружницата со дијаметар AC повторно ја сече во точката M, а кружницата со дијаметар BC повторно ја сече во точката N. Докажи дека $\overline{MF} = \overline{NE}$.



Решение. Нека правата AM ја сече по вторпат кружницата со дијаметар AB во точката M'. Бидејќи AB и AC се дијаметри, имаме $\measuredangle AMC = \measuredangle AM'B = 90^\circ$. Значи, тетивите EF и $M'B$ се нормални на AM', па тие се паралелни меѓу себе. Според тоа, $EFM'B$ е рамнокрак трапез. Но, BC е дијаметар, па според тоа $\measuredangle BNC = 90^\circ$. Правоаголните триаголници MFM' и NEB се складни, па според тоа $\overline{MF} = \overline{NE}$.

11. Две кружници k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Правата $PQ,\ P \in k_1$, $Q \in k_2$, минува низ точката A. Докажи дека $\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$ е константен за било кој избор на правата PQ.



Решение. Бидејќи AB е заедничка фиксна тетива за кружинците k_1 и k_2, добиваме дека аглите $\beta = \measuredangle BQA$ и $\delta = \measuredangle BPA$ не зависат од изборот на точките P и Q. Според тоа $\measuredangle PBQ = 180^\circ - \beta - \delta$ не зависи од изборот на точките P и Q.

Ако P_1 и Q_1 односно P_2 и Q_2 се парови точки за кои се исполнети условите од задачата, тогаш $\triangle P_1BQ_1 \sim \triangle P_2BQ_2$. Но, сега $\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BQ_1}} = \frac{\overline{BP_2}}{\overline{BQ_2}}$, па од произволноста на P_1 и Q_1 односно P_2 и Q_2 следува дека $\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$ не зависи од изборот на правата PQ.

4. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКА ФИГУРА

1. Одреди го најмалиот природен број n така што да важи пропорцијата
$$h_a : h_b : h_c = n:(n+1):(n+2)$$
ако h_a, h_b, h_c се должини на висините во триаголникот ABC.

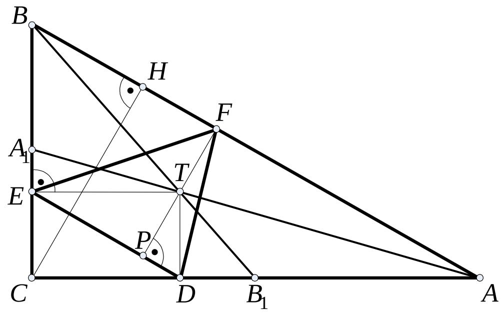
Решение. Од $2P = ah_a = bh_b = ch_c$ добиваме
$$a:b:c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n+2},$$
односно
$$a:b:c = (n+1)(n+2) : n(n+2) : n(n+1) = (n^2+3n+2):(n^2+2n):(n^2+n).$$
Бидејќи $h_a < h_b < h_c$, следува $a > b > c$, па доволно е да најдеме природен број n за кој важи неравенството $a < b+c$. Добиваме $n^2+3n+2 < n^2+2n+n^2+n$, а оттука $n^2 > 2$. Бараниот најмал природен број е 2.

2. Плоштината на еден правоаголен триаголник е $45\ \text{cm}^2$. Најди ја плоштината на триаголникот, чии темиња се ортогонални проекции на тежиштето врз страните на триаголникот.

Решение. Нека D, E и F се ортогоналните проекции на тежиштето T на триаголникот ABC на страните AC, BC и AB, соодветно. Ќе докажеме дека $P_{\Delta DEF} = \frac{2}{3}P$, каде што P е плоштината на триаголникот ABC. Очигледно, четириаголникот $CDTE$ е правоаголник, па според Талсовата теорема добиваме:

$$\overline{CD}:\overline{CA} = \overline{A_1T}:\overline{AA_1} = 1:3,$$

$$\overline{CE}:\overline{CB} = \overline{B_1T}:\overline{BB_1} = 1:3.$$



Оттука следува дека $DE \parallel AB$ и $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Ако $FP \perp DE$, т.е. $FP \perp AF$, тогаш важи $FP \parallel CH$ и $\overline{FP} = \frac{2}{3}\overline{CH}$.

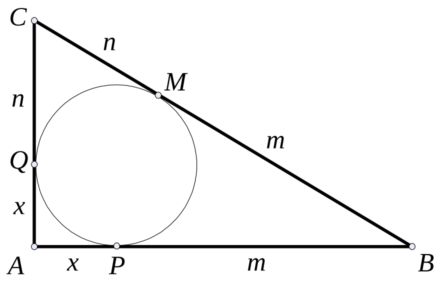
За плоштината на $\triangle DEF$ добиваме

$$P_{DEF} = \frac{\overline{DE}\cdot\overline{FP}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\overline{AB}\cdot\frac{2}{3}\overline{CH} = \frac{2}{9}P.$$

Во нашиот случај добиваме $P_{DEF} = \frac{2}{9}\cdot 45 = 10$. Значи, бараната плоштина е $10\ \text{cm}^2$.

3. Даден е правоаголен триаголник ABC и во него е впишана кружница, која што ја допира хипотенузата BC во точката M. Ако $\overline{BM} = m$, $\overline{MC} = n$, тогаш $P_{ABC} = mn$. Докажи!

Решение. Нека P и Q се допирните точки на впишаната кружница со катетите AB и AC соодветно (види цртеж). Тогаш $\overline{BP} = \overline{BM} = m$ и $\overline{CQ} = \overline{CM} = n$. За плоштината P_{ABC} имаме:



$$2P_{ABC} = (x+m)(x+n)$$
$$= x^2 + (m+n)x + mn.$$

Според Питагоровата теорема,

$$(x+m)^2 + (x+n)^2 = (m+n)^2,$$

т.е. $x^2 + (m+n)x = mn$, што значи дека $P_{ABC} = mn$.

4. Плоштината на правоаголен триаголник е $24cm^2$, а неговиот периметар е $24cm$. Да се најдат страните на триаголникот .

Решение. Нека катетите на триаголникот се a,b и c е неговата хипотенуза. Тогаш,

$$ab = 48 \text{ и } a+b+c = 24$$

од што следува дека

$$c^2 = (24-a-b)^2 = 576 + a^2 + b^2 - 48a - 48b + 2ab = 576 + c^2 - 48(a+b) + 96$$

т.е. $48(a+b) = 24\cdot(24+4) = 24\cdot 28$, од каде $a+b=14$. Со решавање на системот

$$\begin{cases} a+b=14 \\ ab=48 \end{cases}$$

се добива квадратната равенка $b^2 - 14b + 48 = 0$, чии решенија се $x_1 = 6$ и $x_2 = 8$. Според тоа, страните на триаголникот се: $a = 6$, $b = 8$ и $c = 10$.

5. Плоштината на правоаголен триаголник е $120cm^2$, а неговиот периметар е $60cm$. Да се најдат страните на триаголникот .

Решение. Нека катетите на триаголникот се a,b и c е неговата хипотенуза. Тогаш, $ab = 60$ и $a+b+c=30$, од што следува дека

$$c^2 = (30-a-b)^2 = 30^2 + a^2 + b^2 - 60a - 60b + 2ab = 30^2 + c^2 - 60(a+b) + 120,$$

т.е. $60(a+b) = 30\cdot(30+4) = 30\cdot 34$. Според тоа, $a+b=17$. Со решавање на системот

$$\begin{cases} a+b=17 \\ ab=60 \end{cases}$$

се добива квадратната равенка $b^2 - 17b + 60 = 0$, чии решенија се $b_1 = 5$ и $b_2 = 12$. Според тоа, страните на триагоникот се $a = 5$, $b = 12$ и $c = 13$.

6. Нека P е внатрешна точка на триаголникот ABC. Да ги означиме со p_a, p_b и p_c растојанијата од точката P до страните BC, CA и AB соодветно, а со h_a, h_b и h_c висините спуштени од A, B и C соодветно. Докажи дека

$$\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = 1.$$

Решение. Да ја означиме со S плоштината на триаголникот ABC, а со S_1, S_2 и S_3 плоштините на триаголниците PBC, PCA и PAB соодветно. Според тоа, имаме

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot p_a}{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot h_a} = \frac{p_a}{h_a},$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot p_b}{\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot h_b} = \frac{p_b}{h_b},$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot p_c}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h_c} = \frac{p_c}{h_c}.$$

Имајќи предвид дека плоштината на триаголникот ABC е збир на плоштините на триаголниците PBC, PCA и PAB, т.е. $S_1 + S_2 + S_3 = S$ па имаме

$$\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S_1+S_2+S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1.$$

7. Точките A, B и E лежат на иста права, така што B е помеѓу A и E. Од иста страна на правата се конструирани квадрат $ABCD$ и рамностран триаголник

BEF. Ако $\overline{BE} = 2\overline{AB}$, да се покаже дека плоштината на четириаголникот $CDEF$ е еднаква на плоштината на триаголникот BEF.

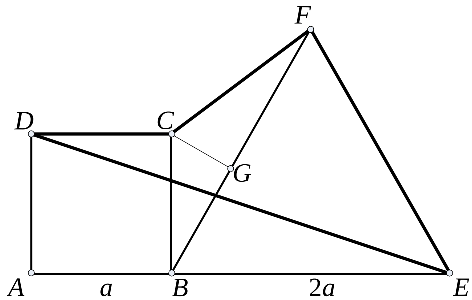
Решение. Нека е CG висина на триаголникот BCF. Бидејќи

$$\measuredangle ABC = 90^\circ \text{ и } \measuredangle FBE = 60^\circ,$$

а

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CBG + \measuredangle FBE = 180^\circ,$$

наоѓаме дека $\measuredangle CBG = 30^\circ$. Според тоа, во правоаголниот триаголник BCG катетата CG е еднаква на половината од хипотенузата BC, т.е. $\overline{CG} = \frac{a}{2}$. Според тоа, плоштината P на четириаголникот $CDEF$ е:



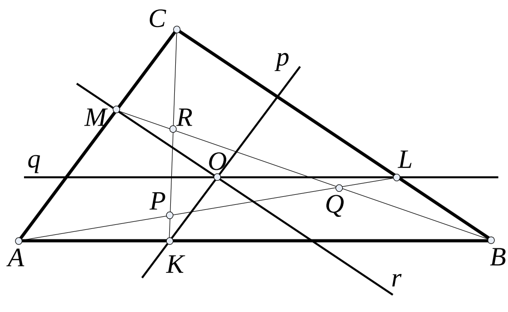
$$P = P_{ABCD} + P_{BEF} + P_{BCF} - P_{ADE}$$
$$= a^2 + P_{BEF} + \frac{1}{2} 2a \frac{a}{2} - \frac{1}{2} 3a \cdot a$$
$$= a^2 + P_{BEF} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} = P_{BEF}$$

8. Нека O е внатрешна точка во $\triangle ABC$. Понатаму, нека правите p, q и r минуваат низ точката O при што $p \parallel AC$, $q \parallel AB$ и $r \parallel BC$ и нека K, L и M се пресечните точки на p, q и r со правите AB, BC и AC соодветно. Точките P, Q и R се пресечните точки на правите CK и AL, AL и BM, BM и CK, соодветно. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците AKP, BLQ и CMR е еднаков на плоштината на триаголникот PQR.

Решение. Имаме

$$P_{PQR} = P_{ABC} - P_{ABL} - P_{BCM} - P_{CAK} + P_{AKP} + P_{BLQ} + P_{CMR}. \quad (1)$$

Претходното важи бидејќи плоштината на PQR може да се пресмета на тој начин што од плоштината на $\triangle ABC$ ќе се одземат плоштините на $\triangle ABL$, $\triangle BCM$ и $\triangle ACK$, а потоа, бидејќи со ваквото одземање на плоштините на $\triangle AKP$, $\triangle BLQ$, $\triangle CMR$ се одземени по два пати, истите плоштини се додадат по еднаш.



Триаголниците ABL и ABO имаат иста основа AB и еднаква висина ($q \parallel AB$), па значи $P_{\triangle ABL} = P_{\triangle ABO}$. Аналогно, важи и $P_{\triangle BCM} = P_{\triangle BCO}$ и $P_{\triangle CAK} = P_{\triangle CAO}$. Но, бидејќи

$$P_{\triangle ABO} + P_{\triangle BCO} + P_{\triangle CAO} = P_{\triangle ABC},$$

добиваме

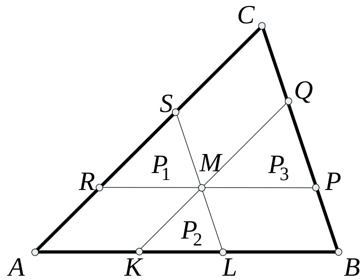
$$P_{\triangle ABL} + P_{\triangle BCM} + P_{\triangle CAK} = P_{\triangle ABC},$$

од каде што со замена во (1) се добива бараното тврдење.

9. Низ внатрешна точка M на триаголникот ABC повлечени се прави паралелни на страните на триаголникот ABC. Истите го делат триаголникот на шест делови од кои три се триаголници со плоштини P_1, P_2 и P_3. Изрази ја плоштината на триаголникот ABC преку плоштините P_1, P_2 и P_3.

Решение. Нека P е плоштината на ΔABC. Секој од триаголниците RMS, KLM и MPQ е сличен на триаголникот ABC, па затоа

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{AB}}, \quad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{AB}} \text{ и } \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{AB}}.$$



Со собирање на горните равенства имајќи предвид дека

$\overline{RM} = \overline{AK}$ и $\overline{MP} = \overline{LB}$,

добиваме

$$\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{AK}+\overline{KL}+\overline{LB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1,$$

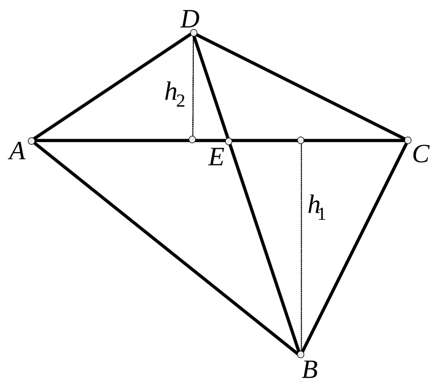
од каде што следува дека

$$P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2.$$

10. Дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката E. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ ако плоштините на триаголниците ABD, ACD и AED соодветно изнесуваат 10 cm^2, 9 cm^2 и 6 cm^2.

Решение. Нека

$$P_1 = P_{\Delta AED}, P_2 = P_{\Delta DEC},$$
$$P_3 = P_{\Delta CEB}, P_4 = P_{\Delta ABE}.$$



Ќе докажеме дека

$$P_1P_3 = P_2P_4, \qquad (*)$$

Навистина, нека со h_1 ја означиме висината спуштена од темето D на дијагоналата AC, а со h_2 ја означиме висината спуштена од темето D на истата дијагонала AC. Тогаш

$$P_1P_3 = \frac{\overline{AE}\cdot h_1}{2}\cdot\frac{\overline{EC}\cdot h_2}{2} = \frac{\overline{AE}\cdot\overline{EC}\cdot h_1\cdot h_2}{4} \qquad (1)$$

$$P_2P_4 = \frac{\overline{EC}\cdot h_1}{2}\cdot\frac{\overline{AE}\cdot h_2}{2} = \frac{\overline{AE}\cdot\overline{EC}\cdot h_1\cdot h_2}{4}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува (*). Сега добиваме

$$P_3 = P_{\Delta AEB} = P_{\Delta ABD} - P_{\Delta AED} = 10cm^2 - 6cm^2 = 4cm^2.$$

Од (*) и од горните пресметки, добиваме $P_3 = \frac{P_2P_4}{P_1} = 2\ cm^2$. Конечно,

$$P_{ABCD} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = (6+3+4+2)cm^2 = 15cm^2.$$

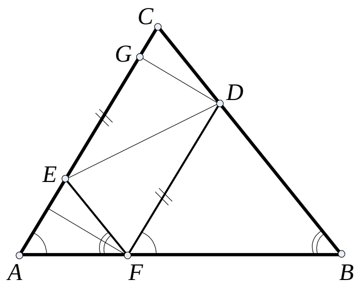
11. На страната AB на триаголникот ABC е избрана произволна точка F, а точките D и E се на страните BC и AC, такви што $FD \parallel AC$ и $FE \parallel BC$. Изрази ја плоштината P на триаголникот CDE преку плоштините P_1 и P_2 на триаголниците AFE и BDF.

Решение. Од условот на задачата следува дека $FDCE$ е паралелограм, па важи $\overline{FD} = \overline{EC}$. Триаголниците AFE и FDB се слични, и заради $\overline{FD} = \overline{EC}$ добиваме

$$P_1 : P_2 = \overline{AE}^2 : \overline{FD}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{EC}^2. \qquad (1)$$

Понатаму, триаголниците AFE и EDC имаат еднакви висини ($\overline{FH} = \overline{DG}$), па имаме

$$P_1 : P = \overline{AE} : \overline{EC}. \qquad (2)$$



Од (1) и (2) добиваме $P_1 : P_2 = P_1^2 : P^2$, т.е. $P = \sqrt{P_1 P_2}$.

12. Нека O е пресечната точка на дијагоналите на трапезот $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, а P_1 и P_2 се плоштините на триаголниците ABO и CDO соодветно. Да се изрази плоштината на трапезот $ABCD$ преку плоштините P_1 и P_2.

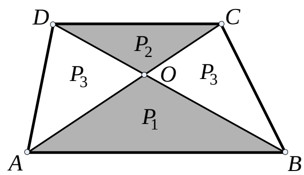
Решение. Триаголниците ABC и ABD имаат еднакви плоштини, бидејќи имаат заедничка основа и еднакви висини. Според тоа, од $P_{AOD} = P_{ABD} - P_1$ $P_{BCO} = P_{ABC} - P_1$, се добива $P_{ADO} = P_{BCO} = P_3$.

Бидејќи триаголникот ADO и ABO имаат еднакви висини, односот на нивните плоштини е еднаков на односот на нивните основи, т.е.

$$P_3 : P_1 = \overline{OD} : \overline{OB}. \qquad (1)$$

Аналогно, за плоштините на триаголниците CDO и CBO важи

$$P_2 : P_3 = \overline{OD} : \overline{OB}. \qquad (2)$$



Од (1) и (2) се добива $P_3 = \sqrt{P_1 P_2}$, па за плоштината на трапезот добиваме

$$P = P_1 + 2P_3 + P_2 = P_1 + 2\sqrt{P_1 P_2} + P_2 = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

13. Во кружница со радиус $r = 25cm$, должините на две паралелни тетиви се $a = 40cm$ и $b = 14cm$. Да се најде плоштината на впишаниот трапез што го формираат дадените тетиви. Колку решенија има задачата?

Решение. Плоштината на трапезот е $P = \frac{a+b}{2} h = 27h$, каде h е висината на трапезот $ABCD$. Триаголниците AOB и DOC се рамнокраки и $h = h_1 + h_2$ каде h_1 е висина на AOB а h_2 висината на DOC. Од правоаголните триаголници AOO_1 и DOO_2 имаме

$$h_1 = \sqrt{r^2 - (\tfrac{a}{2})^2} = \sqrt{5 \cdot 45} = 15cm, \quad h_2 = \sqrt{r^2 - (\tfrac{b}{2})^2} = \sqrt{18 \cdot 32} = 24cm.$$

Значи, $h=39cm$ па затоа $P=27\cdot 39cm^2=953cm^2$.

Задачата има две решенија. Во вториот случај

$$h=h_2-h_1=(24-15)cm=9cm \text{ и } P=27\cdot 9cm^2=243cm^2.$$

14. Во кружница со радиус $r=35cm$, е впишан рамнокрак трапез чии паралелни страни се $a=48cm$ и $b=30cm$. Да се пресмета плоштината P на трапезот. Колку решенија има задачата?

Решение. Плоштината на трапезот е $P=\frac{a+b}{2}h=39h$, каде h е висината на трапезот $ABCD$. Триаголниците AOB и DOC се рамнокраки и $h=h_1+h_2$ каде h_1 е висина на AOB а h_2 висината на DOC. Од правоаголните триаголници AOO_1 и DOO_2 имаме

$$h_1=\sqrt{r^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{11\cdot 59}=\sqrt{649}cm,\ h_2=\sqrt{r^2-(\tfrac{b}{2})^2}=\sqrt{20\cdot 50}=\sqrt{1000}cm.$$

Значи, $h=(\sqrt{649}+\sqrt{1000})cm$ па затоа

$$P=39(\sqrt{649}+\sqrt{1000})cm^2.$$

Задачата има две решенија. Во вториот случај

$$h=(\sqrt{1000}-\sqrt{649})cm \text{ и } P=39(\sqrt{1000}-\sqrt{649})cm^2.$$

15. Да се пресмета плоштината на даден паралелограм ако должините на неговите дијагонали се $26cm$ и $10cm$, а една негова страна е $12cm$. Да се пресмета и другата страна на паралелограмот.

Решение. Нека паралелограмот е $ABCD$ и S е пресекот на неговите дијагонали. Триаголникот ABS со страни $\frac{d_1}{2}=13\ cm$, $\frac{d_2}{2}=5\ cm$ и $a=12cm$ е правоаголен триаголник со катети $\overline{AB}=12\ cm$, $\overline{BS}=5\ cm$ и хипотенуза $\overline{AS}=13\ cm$. Неговата плоштина е: $P=\frac{12\cdot 5}{2}=30\ cm^2$. Плоштината на паралелограмот е: $P=4\cdot 30\ cm^2=120\ cm^2$. Другата страна е:

$$b=\sqrt{12^2+10^2}cm=\sqrt{244}cm=2\sqrt{61}cm.$$

16. Да се пресмета плоштината на даден паралелограм ако должините на неговите дијагонали се $20cm$ и $12cm$, а една негова страна е $8cm$. Да се пресмета и другата страна на паралелограмот.

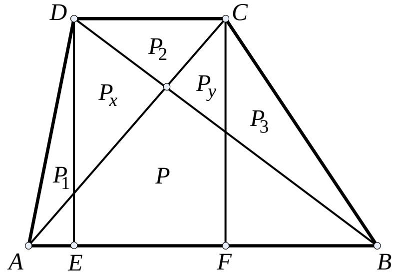
Одговор. $P=96cm^2$, $b=\sqrt{208}\ cm.$

17. Да се пресмета плоштина рамнокрак трапез со висина $h=20cm,$ крак $c=25cm$ и поголема основа $a=50cm.$

Решение. Од $x^2=c^2-h^2$ следува дека $x=15cm.$ За помалата основа b од $b=a-2x$ следува $b=20cm$. Бараната плоштина е $P=\frac{a+b}{2}h=700cm^2.$

18. Низ крајните точки на помалата основа на трапезот $ABCD$ се повлечени две паралелни прави, коишто заедно со дијагоналите го делат трапезот на седум триаголника и еден петаголник. Докажи дека плоштината на тој петаголник е еднаква на збирот на плоштините на трите триаголници, чија што една страна е или крак или помалата основа на трапезот.

Решение. Нека $ABCD$ е трапез со помала основа CD. Повлекуваме две паралелни прави низ C и D кои ја сечат поголемата основа (за да имаме 7 триаголници, види цртеж). Нека со P ја означиме плоштината на петаголникот, а со P_1, P_2, P_3 плоштините на триаголниците чија една страна е кракот AD, помалата основа CD и кракот BC, соодветно.



Најпрво да забележиме дека $P_{ACD} = P_{BCD}$. Од друга страна четириаголникот $EFCD$ е паралелограм чија плоштина е двапати поголема од плоштината на секој од триаголниците ACD, односно BCD. Според тоа

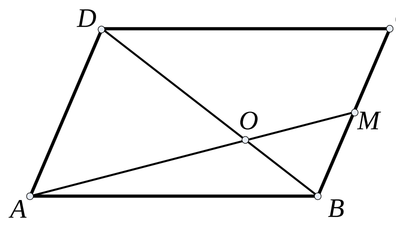
$$P + P_x + P_2 + P_y = P_1 + P_x + P_2 + P_y + P_2 + P_3,$$

т.е. $P = P_1 + P_2 + P_3$.

19. Нека M е средина на страната BC на паралелограмот $ABCD$ и нека AM ја сече дијагоналата BD во точката O. Одреди ја плоштината на четириаголникот $OMCD$, ако плоштината на паралелограмот $ABCD$ е P.

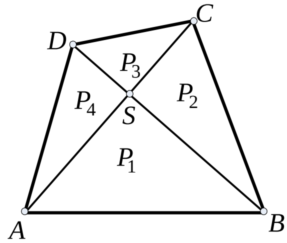
Решение. Очигледно е дека важи $P_{ABM} = \frac{1}{4}P$, $P_{BCD} = \frac{1}{2}P$ и $\triangle BMO \sim \triangle ADO$ со коефициент на сличност 2. Оттука следува дека $\overline{AO} : \overline{OM} = 2:1$ и $\overline{AM} : \overline{OM} = 3:1$. Значи $P_{ABM} = 3P_{BMO}$ (имаат исти висини). Бидејќи $P_{ABM} = \frac{1}{4}P$, следува дека $P_{BMO} = \frac{1}{12}P$. Конечно добиваме

$$P_{OMCD} = P_{BCD} - P_{BMO} = \frac{1}{2}P - \frac{1}{12}P = \frac{5}{12}P.$$



20. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ со S е означен пресекот на дијагоналите. Нека $P_1 = P_{ABS}$, $P_2 = P_{BCS}$, $P_3 = P_{CDS}$, $P_4 = P_{DAS}$. Ако $P^2 = P_1P_3$ и $2P_4 = P_1 + P_3$, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

Решение. Нека h_1 е висината во триаголниците ABS и BCS спуштена од темето B, а h_2 е висината спуштена во триаголниците ASD и CDS спуштена од темето D. Тогаш $P_1 = \frac{1}{2}\overline{AS} \cdot h_1$, $P_2 = \frac{1}{2}\overline{CS} \cdot h_1$, $P_3 = \frac{1}{2}\overline{CS} \cdot h_2$ и $P_4 = \frac{1}{2}\overline{CS} \cdot h_2$, а оттука добиваме $P_1P_3 = P_2P_4$. Од ова равенство и од условот $P_2^2 = P_1P_3$



следува $P_2 = P_4$. Оттука добиваме дека $P_2 = \sqrt{P_1P_3}$ и $2P_2 = P_1 + P_3$. Значи $2\sqrt{P_1P_3} = P_1 + P_3$, а оттука со елементарни трансформации, следува дека $P_1 = P_3$. Бидејќи $P_1 + P_4 = P_3 + P_4$, добиваме дека триаголниците ABD и ACD имаат иста плоштина. Бидејќи имаат заедничка страна (AD), следува дека висините спуштени од темињата B и C кон страната AD се еднакви, односно, темињата B и C се на еднакво растојание од правата AD. Ова значи дека $AD \| BC$. Бидејќи $P_1 + P_2 = P_1 + P_4$, следува дека триаголниците ABD и ABC имаат еднаква плоштина, па аналогно како во претходниот случај, заклучуваме дека $AB \| CD$. Со тоа докажавме дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

21. Даден е $\triangle ABC$ и $M \in AB$, $K \in BC$ се такви што $MK \| AC$. Ако L е произволна точка од страната AC на триаголникот, $P_{\triangle ABC} = P$, $P_{\triangle MBK} = S$, определи ја P_{LMBK}.

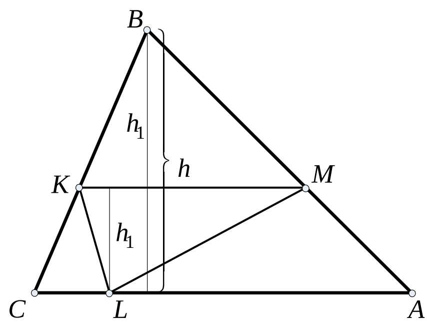
Решение. Плоштината на $\triangle KLM$ ја означуваме со Q, т.е. $P_{\Delta KLM} = Q$. Бидејќи триаголниците KLM и KMB имаат иста страна KM имаме

$$\frac{Q}{S} = \frac{\frac{1}{2}\overline{KM}\cdot h_2}{\frac{1}{2}\overline{KM}\cdot h_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h-h_1}{h_1} = \frac{h}{h_1} - 1 = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{S}} - 1 .$$

Оттука добиваме $Q = \sqrt{P\cdot S} - S$, т.е.

$$Q + S = \sqrt{P\cdot S} .$$

Значи, $P_{LMBK} = \sqrt{P\cdot S}$.



22. Точката M од внатрешноста на триаголникот ABC е таква што триаголниците ABM, BCM и ACM имаат еднакви плоштини. Докажи дека M е тежиште на триаголникот.

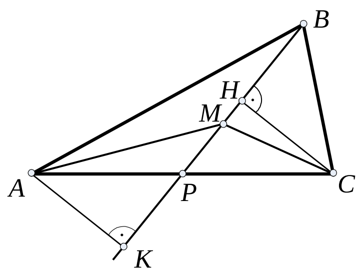
Решение. Ќе покажеме дека ако триаголниците ABM и BCM имаат еднакви плоштини, тогаш точката M припаѓа на тежишната линија повлечена од темето B. Нека K и H се ортогоналните проекции од точките A и C на правата BM, и нека правата BM ја сече отсечката AC во точката P (види цртеж). Тогаш

$$\frac{\overline{BM}\cdot\overline{AK}}{2} = P_{\triangle ABM} = P_{\triangle BCM} = \frac{\overline{BM}\cdot\overline{CH}}{2},$$

па според тоа $\overline{AK} = \overline{CH}$.

Ако $AC \perp BM$, тогаш $K = H = P$, па $\overline{AP} = \overline{CP}$, т.е. $\overline{BP}$ е медијана.

Ако AC не е нормално на BP, тогаш јасно е дека триаголниците AKP и CHP се складни. Навистина, тие имаат еднакви агли и една иста страна. Според тоа $\overline{AP} = \overline{CP}$, т.е. $\overline{BP}$ е медијана.



23. Многуаголник, опишан околу кружница со радиус r, е разбиен на произволен начин на триаголници. Докажи дека збирот на радиусите на вписаните кружници во тие триаголници е поголем од r.

Решение. Да ги означиме радиусите на вписаните кружници во триаголниците со $r_1, r_2, ..., r_n$, периметрите на триаголниците со $L_1, L_2, ..., L_n$, а нивните плоштини со $P_1, P_2, ..., P_n$ соодветно. Нека плоштината и периметарот на многуаголникот се означени со P и L, соодветно.

За плоштината на секој од триаголниците важи $P_k = r_k s_k$, каде s_k е полузбирот од страните на триаголникот, односно $s_k = \frac{L_k}{2}$. Тогаш $P_k = \frac{r_k L_k}{2}$, од каде $r_k = \frac{2P_k}{L_k}$. Од друга страна периметарот на секој триаголник е помал од периметарот на многуаголникот, односно $L_k < L$ или уште повеќе $\frac{1}{L} < \frac{1}{L_k}$. Сега за збирот на радиусите на вписаните кружници важи

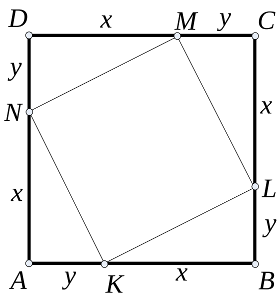
$$r_1 + r_2 + ... + r_n = \frac{2P_1}{L_1} + \frac{2P_2}{L_2} + ... + \frac{2P_n}{L_n} > \frac{2P_1}{L} + \frac{2P_2}{L} + ... + \frac{2P_n}{L} = \frac{2}{L}(P_1 + P_2 + ... + P_n)$$

Да забележиме дека плоштината на многуаголникот претставува збир од плоштините на триаголниците на кои е разбиен, односно $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$. Уште повеќе, плоштината на многуаголникот се пресметува и како $P = \frac{rL}{2}$. Тогаш имаме

$$r_1 + r_2 + ... + r_n > \frac{2}{L}(P_1 + ... + P_n) = \frac{2}{L}P = \frac{2}{L} \cdot \frac{Lr}{2} = r.$$

Со тоа покажавме дека навистина $r_1 + r_2 + ... + r_n > r$.

24. Темињата на еден квадрат лежат на страните на друг квадрат (на една страна едно теме). Да се најде односот на кој се разделени страните на вториот квадрат со темињата на првиот квадрат, ако односот на нивните плоштини е еднаков на p, ($p < 1$).



Решение. Нека $ABCD$ и $KLMN$ се дадените квадрати, така што K, L, M и N припаѓаат на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Ќе воведеме ознаки $\overline{BL} = y$, $\overline{KB} = x$, $\overline{KL} = b$ и $\overline{AB} = a$, при што можеме да претпоставиме $x > y$. Тогаш

$$P_1 = P_{ABCD} = a^2 = (x+y)^2,$$

а според Питагоровата теорема $b^2 = x^2 + y^2$, па затоа

$$P_2 = P_{KLMN} = b^2 = x^2 + y^2.$$

Од условот на задачата $\frac{P_2}{P_1} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = p$, каде $0 < p < 1$. Равенството $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = p$ можеме да го запишеме во обликот

$$(1-p)x^2 - 2pxy + (1-p)y^2 = 0$$

$$(1-p)(\frac{x}{y})^2 - 2p\frac{x}{y} + (1-p) = 0,$$

Ако воведеме ознака $\frac{x}{y}=t$ добиваме

$$(1-p)t^2-2pt+(1-p)=0\,. \qquad (1)$$

Решенија на равенката (1) се

$$t_1=\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}\,, \qquad t_1=\frac{p-\sqrt{2p-1}}{1-p}\,.$$

Јасно, $\frac{x}{y}=\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$ е бараното решение.

25. Нека a, b, c се должините на страните, s е полупериметарот и P е плоштината на триаголникот ABC, при што $a<c$ и $b<c$. Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен ако и само ако $(s-a)(s-b)=P.$

Решение. Ако триаголникот ABC е правоаголен, тогаш c е хипотенуза. Имаме:

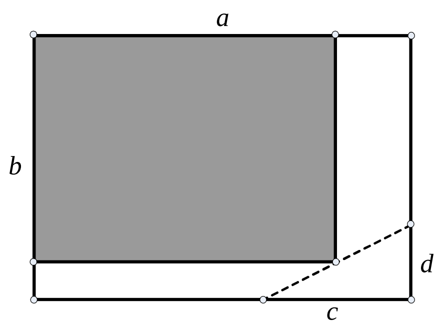
$$(s-a)(s-b)=\frac{c+b-a}{2}\cdot\frac{c-b+a}{2}=\frac{c^2-(b-a)^2}{4}=\frac{c^2-b^2-a^2+2ab}{4}=\frac{ab}{2}=P\,.$$

Обратно, ако триаголникот ABC важи $(s-a)(s-b)=P$. Тогаш,

$$\frac{c^2-b^2-a^2+2ab}{4}=\frac{ab}{2}$$

и оттука $c^2=a^2+b^2$, па триаголникот ABC е правоаголен.

26. Од правоаголна плоча со страни a,b исечено е триаголно ќоше со катети $c=\frac{a}{3}$ и $d=\frac{b}{3}$ (види цртеж). Од преостанатиот дел исечи нова правоаголна плоча со страни паралелни на страните од дадената правоаголна плоча (види цртеж), така што нејзината плоштина P да биде најголема. Колку изнесува таа плоштина?



Решение. Од цртежот, имаме:

$$P=(b-y)(a-x)\,.$$

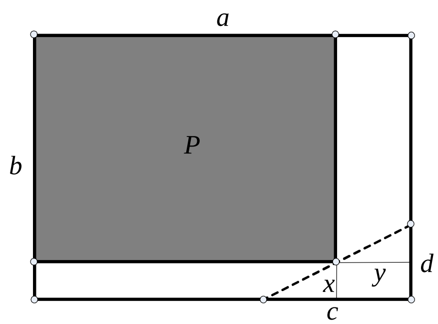
Бидејќи $y:d=(c-x):c$, $y=d-\frac{d}{c}x$,

$$P=(b-d+\frac{d}{c}x)(a-x)=ab-ad+\frac{(ad+cd-bc)^2}{4cd}-\frac{d}{c}\underbrace{[x-\frac{1}{2d}(ad+cd-bc)]^2}_{*}\,.$$

Членот * не може да биде негативен, па според тоа плоштината е најголема ако овој член е најмал, т.е. нула, односно

$$x=\frac{1}{2d}(ad+cd-bc) \qquad \Rightarrow$$

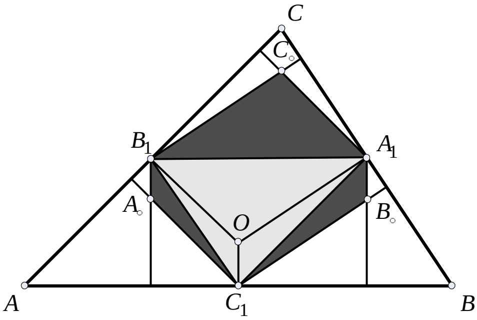
$$P=ab-ad+\frac{1}{4cd}(ad+cd-bc)^2\,.$$



27. Од средините A_1, B_1 и C_1 на страните на триаголникот ABC, се спуштени висини кон секоја од останатите две страни. Докажи дека плоштината шестаголникот ограничен со тие висини е еднаква на половина од плоштината на триаголникот.

Решение. Бидејќи $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$ се средни линии на триаголникот ABC, важи

$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} P_{ABC}.$$



Од точките A_1, B_1 и C_1, повлекуваме нормали на страните AB, BC и CA. Тие се симетрали на страните и се сечат во центатот на опишаната кружница O.

Четириаголникот $A_0C_1OB_1$ е паралелограм. Следува $P_{A_0C_1B_1} = P_{C_1OB_1}$ (види цртеж). Аналогно

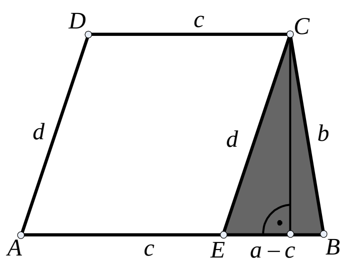
$$P_{C_1B_0A_1} = P_{C_1A_1O} \text{ и } P_{A_0C_1B_1} = P_{C_0B_1A_1}.$$

Следува плоштината на шестоаголникот е два пати поголема од плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$, што требаше да се покаже.

28. Определи ја плоштината на трапез на кој должините на страните му се a,b,c и d.

Решение. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD при што $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ и $\overline{DA}=d$. Нека $E \in AB$ е таква што $AD \parallel CE$. Тогаш

$$P_{\Delta EBC} = \frac{(a-c)h}{2},$$



каде h е висината на трапезот. Ако s' е полупериметарот на триаголникот EBC, тогаш

$$s' = \frac{a-c+b+d}{2}.$$

Според Хероновата формула имаме

$$P_{\Delta EBC} = \sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}$$

од каде добиваме

$$\frac{(a-c)h}{2} = \sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)},$$

$$h = \frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}.$$

Сега, плоштината на трапезот е

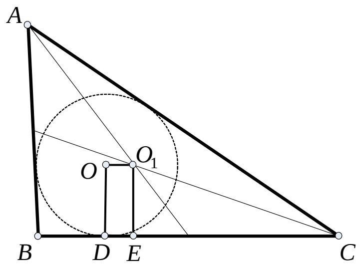
$$P = \frac{a+c}{2}h = \frac{a+c}{2}\,\frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(a-c+b+d)(a-b-c+d)(a-c+b-d)(-a+b+c+d)}.$$

Ако воведеме ознака $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, добиваме

$$P = \frac{a+c}{a-c}\sqrt{(s-a)(s-c)(s-b-c)(s-d-c)}.$$

29. Страните на триаголникот образуваат аритметичка прогресија. Докажи дека отсечката што ги сврзува тежиштето на триаголникот и центарот на впишаната кружница е паралелна со средната по должина страна на триаголникот.

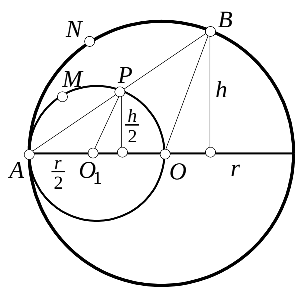


Решение. Нека претпоставиме дека ABC е триаголник за кој

$\overline{AB}=c$, $a=\overline{BC}=c+d$ и $b=\overline{AC}=c+2d$.

Нека точката O е центар на впишаната кружница, точката O_1 е пресек на тежнишните линии, а D и E се нивни ортогонални проекции на страната BC (цртеж). Бидејќи r е радиус на впишаната кружница имаме $\overline{OD}=r$. Плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на $P=rs$, каде s е полупериметарот на триаголникот, т.е. $s=\frac{a+b+c}{2}$. Бидејќи $s=\frac{c+d+c+c+2d}{2}=\frac{3(c+d)}{2}$, добиваме $r=\frac{P}{s}=\frac{2P}{3(c+d)}$. Бидејќи O_1 е тежиштето на триаголникот ABC, добиваме $P_{O_1BC}=\frac{1}{3}P_{ABC}=\overline{O_1E}\cdot\frac{1}{2}(c+d)$, па според тоа $\overline{O_1E}=\frac{2P}{3(c+d)}=r$. Конечно, четириаголникот DOO_1E е паралелограм, па според тоа $OO_1 \parallel DE$, т.е. $OO_1 \parallel BC$.

30. Во круг со радиус r и центар O е повлечена тетива AB, а радиусот AO е дијаметар на круг k_1 со центар O_1. Да се докаже дека плоштините на двата одсечоци кои AB ги отсекува од k и k_1 се однесуваат како $4:1$.



Решение. Со k_1 ќе ја означиме помалата кружница (види цртеж). Пресечната точка на k_1 со AB ќе ја означиме со P. Со S_1 ќе го означиме отсечокот AMP ($M\in AP$), а со S_2 ќе го означиме отсечокот ANB ($N\in AB$) каде M и N се во иста полурамнина во однос на правата AB (види цртеж).

Јасно е дека триаголниците AO_1P и AOB се слични (со коефициент на сличност 2), бидејќи

$$\measuredangle APO_1=\measuredangle O_1AP=\measuredangle OAB=\measuredangle OBA.$$

Нека $\measuredangle AO_1P=\measuredangle AOB=\alpha$. Бидејќи триаголниците $\triangle AO_1P$ и $\triangle AOB$ имаат плоштини кои се однесуваат како $1:4$,

$$P_{\Delta AO_1P}=\frac{1}{2}\frac{r}{2}\frac{h}{2}=\frac{1}{4}\frac{rh}{2}=\frac{1}{4}P_{\triangle AOB},$$

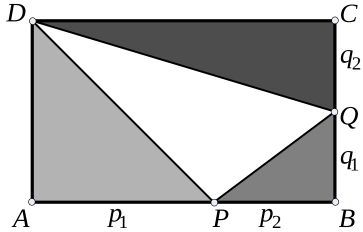
добиваме

$$S_1=\frac{\pi(\frac{r}{2})^2\alpha}{360^\circ}-P_{\triangle AO_1P}=\frac{1}{4}\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}-\frac{1}{4}P_{\triangle AOB}=\frac{1}{4}(\frac{\pi r^2\alpha}{360^\circ}-P_{\triangle AOB})=\frac{1}{4}S_2.$$

Значи, $S_1:S_2=1:4$.

31. Во правоаголникот $ABCD$, точките P и Q се точки од страните AB и BC соодветно, така што триаголниците APD, PBQ и QCD имаат иста плоштина.

Најди го количникот $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

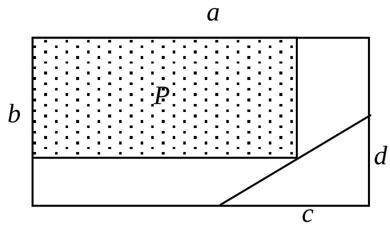


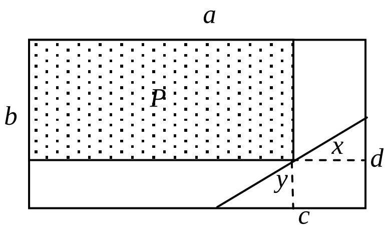
Решение. Воведуваме ознаки $\overline{AP} = p_1$, $\overline{PB} = p_2$, $\overline{QB} = q_2$ и $\overline{QC} = q_1$.

Од равенството $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)q_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)p_1$ добиваме $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$, а од $\frac{1}{2}(q_1 + q_2)p_1 = \frac{1}{2}q_2 p_2$, добиваме $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1+q_2}$.

Според тоа $\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{q_1+q_2} = \frac{1}{\frac{q_1}{q_2}+1} = \frac{1}{\frac{p_1}{p_2}+1}$. Значи, $\frac{p_1}{p_2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

32. Од правоаголна плоча со страни a и b исечено е триаголно ќоше со две страни c и d (види цртеж). Од преостанатиот дел треба да се исече нова правоаголна плоча, така што нејзината плоштина P да биде најголема. Пресметај ја плоштината на исечената нова правоаголна плоча.





Решение. Нека x и y се нормалните растојанија од допирната точка на новата плоча со исеченото ќоше, соодветно до страните на првобитната плоча (види цртеж). Тогаш, плоштината на новата плоча ќе биде $P = (a-x)(b-y)$. Од сличноста на триаголниците добиени со повлекувањето на растојанието y паралелно со страната d кај триаголното ќоше, се добива пропорцијата $y : d = (c-x) : c$, од каде $y = d - \frac{d}{c}x$. Со замена во плоштината на новата плоча добиваме,

$$P = (a-x)(b-d+\frac{d}{c}x) = ab - ad + \frac{1}{4cd}(ad+cd-bc)^2 - \frac{d}{c}(x - \frac{1}{2d}(ad+cd-bc))^2.$$

Членот $\frac{d}{c}(x - \frac{1}{2d}(ad+cd-bc))^2$ во изразот за плоштината P е секогаш ненегативен, значи достигнува најмала вредност 0 кога

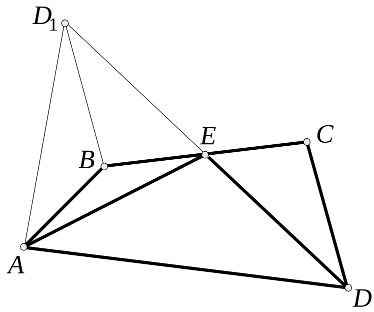
$$x = \frac{1}{2d}(ad+cd-bc),$$

и тогаш P достигнува најголема вредност

$$P = ab - ad + \frac{1}{4cd}(ad+cd-bc)^2.$$

33. Во четириаголникот $ABCD$, E е средина на страната BC, и плоштината на триаголникот AED е двпати помала од плоштината на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека AB е паралелна со CD.

Решение. Нека $ABCD$ е четириаголникот во кој E е средина на BC, при што $P_{ABCD}=2P_{AED}$. Точката D ќе ја пресликаме централно симетрично со центар на симетрија E. Нека D_1 е нејзината слика. Бидејќи $ECD\cong EBC$ имаме $P_{ECD}=P_{EBC}$, од каде добиваме



$P_{ABCD}=2(P_{ABE}+P_{ECD})=2(P_{ABE}+P_{EBD_1})$. (1)

Од друга страна $P_{AED}=P_{AED_1}$ (имаат иста должина на основа и висината спуштена врз неа). Значи

$$P_{ABCD}=2P_{AED_1} \qquad (2)$$

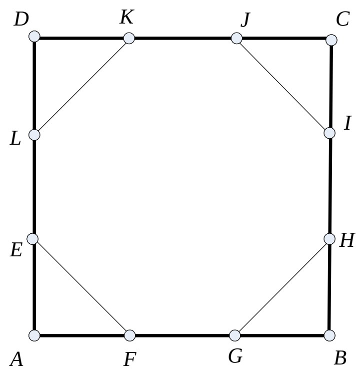
Од (1) и (2) добиваме

$$P_{ABE}+P_{EBD_1}=P_{AED_1}.$$

Ако A,B и D_1 не се колинеарни, последното равенство не е точно. Значи A,B и D_1 се колинеарни. Од колинеарноста на A,B и D_1 и од тоа што $DC\,||\,BD_1$, добиваме дека $AB\,||\,CD$.

34. Од квадрат со страна a отсечени се четири триаголници. Секое теме на квадратот е теме и на еден од отсечените триаголници. Остатокот на квадратот е правилен осумаголник. Определи ја неговата плоштина.

Решение. Нека $ABCD$ е квадрат со страна a од кој се отсечени триаголниците AFE, BHG, CJI и DLK така што $EFGHIJKL$ е правилен (види цртеж).



Тогаш,

$\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JK}=\overline{KL}=\overline{LE}=\overline{EF}=x$,

$\measuredangle EFG=\measuredangle FGH=\measuredangle GHI=\measuredangle HIJ$

$$=\measuredangle IJK=\measuredangle JKL=\measuredangle KLE=\measuredangle LEF.$$

Заради последните равенства добиваме

$$\measuredangle AEF=\measuredangle AFE=\measuredangle BGH=\measuredangle BHG=\measuredangle CIJ$$

$$=\measuredangle CJI=\measuredangle DKL=\measuredangle DLK.$$

Според тоа, триаголниците EAF, GBH, ICJ и KDL се рамнокраки правоаголни.

Должината на катетите на секој од нив е $\frac{a-x}{2}$, а должината на хипотенузата е $x=\frac{a-x}{2}\sqrt{2}$, односно $x=a(\sqrt{2}-1)$. Значи, должините на катетите на отсечените триаголници е $\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$, а нивната плоштина $P=\frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}$. Ако $P_\circ$ е плоштината на осумаголникот, тогаш

$$P_\circ=a^2-4\frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}=a^2-a^2(3-2\sqrt{2})=2(\sqrt{2}-1)a^2.$$

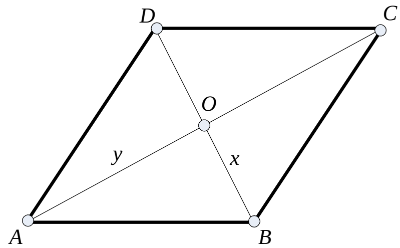
35. Периметарот на еден ромб е $2p$, а збирот на неговите дијагонали е m. Определи ја неговата плоштина.

Решение. Нека $ABCD$ е ромб и O е пресек на неговите дијагонали AC и BD. Ќе воведеме ознаки $\overline{AO}=y$ и $\overline{BO}=x$ (види цртеж). Тогаш

$$x+y=\frac{1}{2}(2x+2y)=\frac{1}{2}m. \qquad (1)$$

Ако a е должина на страната на ромбот, тогаш $a=\frac{2p}{4}=\frac{p}{2}$. Бидејќи дијагоналите на ромбот се заемно нормални, од правоаголниот триаголник BOA добиваме

$$x^2+y^2=\frac{p^2}{4}.$$



Ако равенството (1) го квадрираме, добиваме

$$(x+y)^2=\frac{m^2}{4},$$

$$x^2+y^2+2xy=\frac{m^2}{4},$$

$$2xy=\frac{m^2}{4}-\frac{p^2}{4}=\frac{m^2-p^2}{4}.$$

Бидејќи $P=4\frac{1}{2}xu=2xy$, добиваме $P=\frac{m^2-p^2}{4}$.

36. Должината на страната на ромбот $ABCD$ е a. Колку различни правоаголници со плоштина $\frac{1}{3}$ од плоштината на ромбот може да се може да се впишат во ромбот?

Решение. Нека $KLMN$ е бараниот правоаголник(види цртеж). Задачата се сведува на определување на точката K.

Нека страната на ромбот A и $\overline{AK}=x$. Тогаш $\overline{KB}=a-x$, и од сличноста на триаголниците ABC и KBL имаме

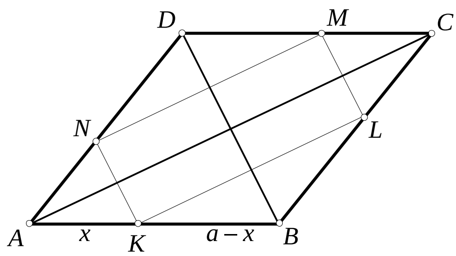
$$\overline{AC}:\overline{KL}=\overline{AB}:\overline{KB}$$

$$\overline{AC}:\overline{KL}=a:(a-x) \qquad (1)$$

Од друга страна, од сличноста на триаголни-ците ABD и AKN, имаме

$$\overline{BD}:\overline{KN}=\overline{AB}:\overline{AK}$$

$$\overline{AC}:\overline{KN}=a:x \qquad (2)$$



Ако ги помножиме (1) и (2) член по член, ќе доби-еме

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{KL}}\frac{\overline{BD}}{\overline{KN}}=\frac{a}{a-x}\frac{a}{x}.$$

Но тогаш, од $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=2P_{ABCD}$ и $\overline{KL}\cdot\overline{KN}=P_{KLMN}=\frac{1}{3}P_{ABCD}$, имаме

$$\frac{2P_{ABCD}}{\frac{1}{3}P_{ABCD}}=\frac{a^2}{ax-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad 6=\frac{a^2}{ax-x^2}$$

Решенија на равенката $6x^2-6ax+a^2=0$ се $x_1=\frac{3a-a\sqrt{3}}{6}$, $x_2=\frac{3a+a\sqrt{3}}{6}$.

Јасно, постојат два такви правоаголници.

37. Да се докаже дека за секој природен број n, $n \geq 6$, квадрат може да се рздели на n помали квадрати (така што плоштината на квадратот е збир од плоштините на помалите квадрати), но не може да се раздели на 5 помали квадрати.

Решение. Можеме да претпоставиме дека квадратот Q има страница 1. Ако $k \geq 2$, тогаш лентите со ширина $\frac{1}{k}$ до 2 соседни страни на квадратот можеме да ги поделиме на $2k-1$ квадрати со страна $\frac{1}{k}$, како на цртежот. Остатокот од површината на Q е пак квадрат (означен на цртежот со $Q_\circ$). Со ова покажавме дека квадратот може да се подели на $2k$ ($k \geq 2$) квадрати.

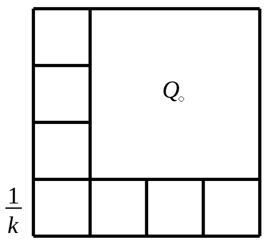
Ако пак квадратот $Q_\circ$ го поделиме на 4 еднакви квадрати, тогаш тие заедно со квадратите со страна $\frac{1}{k}$ ќе дадат поделба на квадратот Q на $2k+3$ квадрати ($k \geq 2$). Со ова покажавме дека Q може да се подели и на произволен непарен број (≥ 7) квадрати.

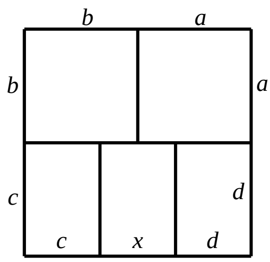
Сега да претпоставиме дека квадратот Q може да се подели на 5 помали квадрати. Јасно е дека овие квадрати мора да имаат страна паралелна со страните на квадратот. Можни се следниве два случаи:

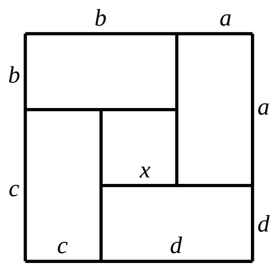
1) Ниеден од квадратите да не биде целосно во внатрешноста на Q како што е прикажано на цртежот. Ова не е возможно бидејќи

$$a+b=b+c=d+a=c+d+x,$$

Повлекува дека страната на средниот квадрат е $x=0$.







2) Некој од квадратите (а возможно е само еден) да биде целосно во внатрешноста на квадратот Q (како на цртежот) што повторно не е можно бидејќи

$$a+b=b+c=c+d=d+a$$

повлекува дека $a=c$ и $b=d$, па понатаму бидејќи плоштината на квадратот Q е еднаква на збирот од плоштините на помалите квадраати имаме

$$(a+b)^2=a^2+b^2+a^2+b^2+x^2,$$

т.е. $x^2=-(a-b)^2$, од каде $x=0$.

38. Во петокраката на цртежот важат следниве равенства:

$$\overline{AK}=\overline{LC}, \overline{BL}=\overline{MD},$$

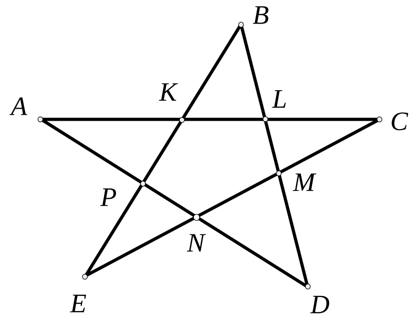
$$\overline{CM}=\overline{NE}, \overline{DN}=\overline{PA}.$$

Докажи дека важи и $\overline{EP}=\overline{KB}$.

Решение. Да ги повлечеме отсечките AB, BC, CD, DE, EA. Од дадените равенства во условот следува дека триаголниците

AKB, LCB, MCD, NED, PEA

се еднакво-плоштни користејќи дека имаат по еден пар еднакви страни и заедничка соодветна висина. Но тогаш $\triangle EPA, \triangle KBA$ се еднаквоплоштни, и имаат заедничка висина од темето A, па затоа точно е равенството $\overline{EP} = \overline{KB}$.



39. Секое теме на правоаголниот триаголник ABC со катети $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ и $\overline{AC} = 4$ е центар на кружница при што трите кружници се допираат меѓусебно и ни една кружница не лежи во внатрешноста на друга кружница. Пресметај ја плоштината на делот од триаголникот ABC што лежи надвор од трите кружници.

Решение. Бидејќи

$$\overline{BC} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8 = 2\overline{AC},$$

аглите α, β и γ при темињата A, B и C ќе бидат $90^\circ, 30^\circ$ и 60° соодветно. Користејќи ги ознаките од цртежот, ќе ставиме

$x = \overline{AB_1} = \overline{AC_1}$, $y = \overline{BA_1} = \overline{BC_1}$,

$x = \overline{AC_1} = \overline{CB_1}$.

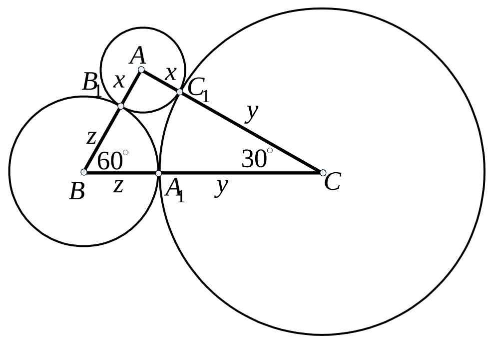
Според тоа го добиваме системот равенки:

$x + y = 4\sqrt{3}$; $y + z = 8$; $z + x = 4$.

Негово решение е

$x = 2\sqrt{3} - 2$, $y = 2\sqrt{3} + 2$, $z = 6 - 2\sqrt{3}$.

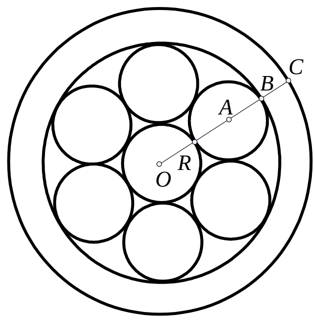
Значи, збирот од плоштините на исечоците со темиња во A, B и C ќе биде:



$$\frac{x^2\pi}{4} + \frac{y^2\pi}{12} + \frac{z^2\pi}{6} = \frac{\pi(3x^2+y^2+2z^2)}{12} = \frac{8\pi(5-2\sqrt{3})}{3}.$$

Бараната плоштина е $P = 8\sqrt{3} - \frac{8\pi(5-2\sqrt{3})}{3}$.

40. Дадена е кружница што допира шест еднакви на неа кружници што се допираат меѓу себе. Околу нив е опишан концентричен прстен со плоштина еднаква на плоштината на сите седум кругови заедно. Да се докаже дека ширината на прстенот е еднаква на радиусот на круговите.



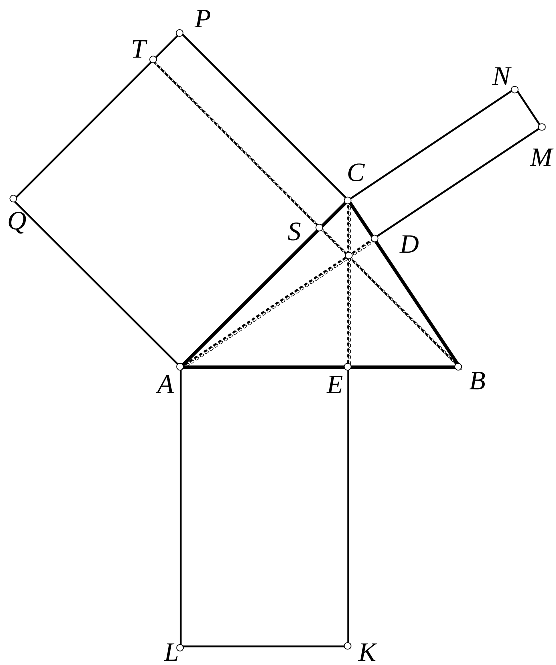
Решение. Да го означиме центарот на дадениот круг со O, радиусот со R, а ширината на прстенот BC со x. Плоштината на концентричниот прстен по услов на задачата е еднаква нап лоштината на сите кругови заедно. Затоа

$$\pi(\overline{OC}^2 - \overline{OB}^2) = \pi[(3R+x)^2 - (3R)^2] = 7\pi R^2,$$

од каде што следува $x^2 + 6Rx - 7R^2 = 0$. Бидејќи $x > 0$, од квадратната равенка се добива $x = R$.

41. Во остроаголниот триаголник ABC, AD и CE се висини. На страната AC е конструиран квадрат $ACPQ$, а над CD и AE правоаголници $AEKL$ и $CDMN$, такви што $\overline{AL} = \overline{AB}$ и $\overline{CN} = \overline{CB}$. Докажи дека

$$P_{ACPQ} = P_{AEKL} + P_{CDMN}. \qquad (1)$$



Решение. Нека продолжението на третата висина BS ја сече PQ во точката T (види цртеж). Ќе докажеме дека правоаголниците $ASTQ$ и $AEKL$ имаат еднакви плоштини.

Триаголниците BSA и CEA се слични (бидејќи имаат еднакви агли). Според тоа, од сличноста имаме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AB}}.$$

Сега,

$$\overline{AC} \cdot \overline{AS} = \overline{AB} \cdot \overline{AE},$$

од каде добиваме

$$P_{ASTQ} = \overline{AS} \cdot \overline{AQ} = \overline{AS} \cdot \overline{AC} =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AE} \cdot \overline{AL} = P_{AEKL}$$

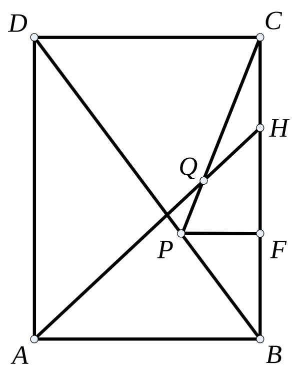
На потполно ист начин, од сличноста на триаголниците ADC и BSC следува дека

$$P_{SCPT} = P_{CDMN},$$

по што следува и точноста на (1).

42. Нека P е точка на дијагоналата од правоаголникот $ABCD$. Точката F е проекција од точката P на страната BC. Точката H припаѓа на страната BC така што $\overline{BF} = \overline{FH}$. Отсечките PC и AH се сечат во точката Q. Докажи дека

$$P_{\triangle APQ} = P_{\triangle CHQ}.$$



Решение. Бидејќи F е средна точка на BH, триаголникот $\triangle PHB$ е рамнокрак триаголник и

$$\measuredangle PBH = \measuredangle DBC = \measuredangle PHB. \qquad (1)$$

Триаголниците ACB и DCB се складни. Според тоа,

$$\measuredangle DBC = \measuredangle ACB \,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\measuredangle PHB = \measuredangle ACB \,. \qquad (3)$$

Според тоа правата PH е паралелна со правата AC, па затоа $P_{\triangle APC} = P_{\triangle ACH}$, од каде што добиваме

$$P_{\triangle APQ} = P_{\triangle APC} - P_{\triangle AQC} = P_{\triangle ACH} - P_{\triangle AQC} = P_{\triangle CHQ} \,.$$

43. Конвексниот четириаголник $ABCD$ има плоштина 1. Точките E, F, G, H припаѓаат на продолженијата на AB, BC, CD, DA соодветно, така што $\overline{AB} = \overline{BE}$, $\overline{BC} = \overline{CF}$, $\overline{CD} = \overline{DG}$ и $\overline{DA} = \overline{AH}$.

Определи ја плоштината на четириаголникот $EFGH$.

Решение. Плоштината на $n-$аголникот $P_1P_2...P_n$ ќе ја означиме со $[P_1P_2...P_n]$. Точките B и A се средини на AE и DH соодветно, па според тоа

$$[HEB] = [HAB] = [ABD]$$

од каде добиваме

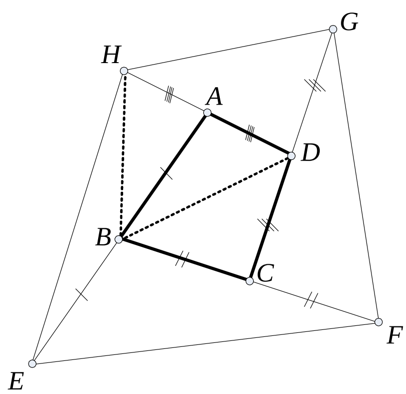
$$[AEH] = 2[ABD] \,.$$

На сличен начин добиваме

$$[CFG] = 2[CBD] \,,$$

па затоа

$$[AEH] + [CFG] = 2[ABD] + 2[CBD] = 2[ABCD] = 2.$$



На потполно ист начин добиваме $[BEF] + [DGH] = 2$.

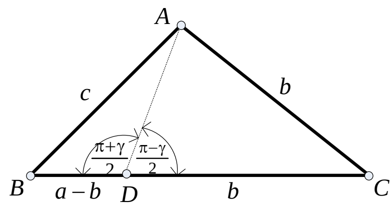
Според тоа,

$$[EFGH] = [ABCD] + ([AEH] + [CFG]) + ([BEF] + [DGH]) = 1 + 2 + 2 = 5$$

5. КОНСТРУКЦИИ

1. Конструирај го триаголникот ABC ако се познати следните елементи: разликата $a-b$ на страните BC и AC, страната $\overline{AB} = c$ и збирот на аглите $\alpha + \beta$ кај темињата A и B.

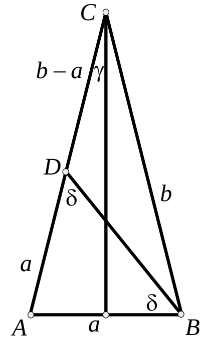
Решение. Ако на страната BC на триаголникот ABC земеме точка D таква што $\overline{CD} = \overline{CA}$ (цртеж десно), тогаш триаголникот ADC е рамнокрак. Од тука следува дека $\measuredangle ADC = \dfrac{\pi - \gamma}{2}$, односно аголот



$$\measuredangle BDA = \frac{\pi+\gamma}{2} = \frac{\pi+\pi-(\alpha+\beta)}{2} = \pi - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Сега, триаголникот BDA може да се конструира, бидејќи се познати две негови страни: $\overline{BD} = a-b$, $\overline{BA} = c$ и еден негов агол $\measuredangle BDA = \pi - \frac{\alpha+\beta}{2}$. Во пресекот на правата BD со симетралата на страната AD се наоѓа третото теме C на бараниот триаголник ABC.

2. Да се конструира рамнокрак триаголник, ако се дадени аголот при врвот и разликата на кракот и основата.



Решение. Нека ΔABC има страна $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = \overline{CA} = b$ и $\gamma = \measuredangle ACB$ е дадениот агол. Нека точката D е избрана на отсечката AC така што $\overline{CD} = b-a$. Од условот

$$2\cdot\measuredangle ACB + \gamma = 180^\circ,$$

добиваме $\measuredangle BAC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Користејќи дека ΔABD е рамнокрак се добива дека $\measuredangle ABD = \delta$. Тогаш од условот

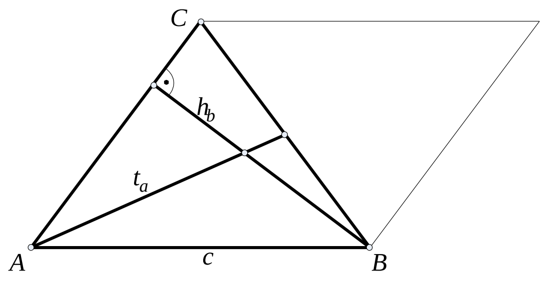
$$\measuredangle BAC + 2\delta = 180^\circ,$$

заменувајќи ја добиената вредност за аголот $\measuredangle BAC$, се добива $\delta = 45^\circ + \frac{\gamma}{4}$. Одовде следува дека

$$\measuredangle BDC = 180^\circ - \delta = 135^\circ - \frac{\gamma}{4}.$$

Затоа, $\triangle BDC$ може да се конструира(имено, познати се: страната $\overline{CD} = b-a$, аголот γ и $\measuredangle BDC$). Нека s е симетрала на страната BD. Тогаш $s \cap CD = \{A\}$.

3. Конструирај триаголник ABC со познати: страна c, висина h_b и тежишна линија t_a.



Решение. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена и да го разгледаме паралелограмот $ABCD$ од цртежот, каде што $BD \parallel AC$ и $CD \parallel AB$.

Од тоа што дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат, следува дека дијагоналата $\overline{AD} = 2t_a$. Според тоа, доволно е да конструираме параллелограм со страна C, дијагонала $2t_a$ и висина кон другата страна h_b.

Конструкција.

1°. $p \parallel q$, растојанието меѓу p и q е h_b.

2°. на p избираме произволна точка A,

3°. цртаме кружница $k(A,c)$.

4°. $k \cap q = B$

5°. цртаме кружница $k_1(A, 2t_a)$,

6°. $k_1 \cap q = D$,

7°. M, средината на AD,

8°. $C = BM \cap p$.

<u>*Доказ.*</u> Доказот следува од анализата и конструкцијата.

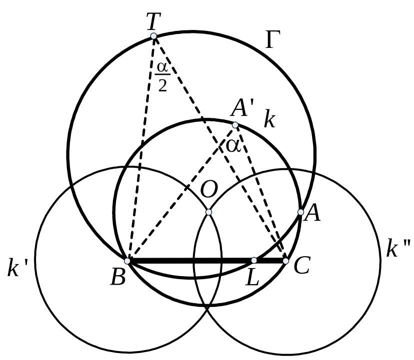
<u>*Дискусија.*</u> Од конструкцијата се гледа дека задачата нема решение ако и само ако $2t_a < h_b$ или $c < h_b$ или $2t_a = h_b = c$.

Ако $2t_a < h_b$ и $c > h_b$ задачата има две решенија, а во останатите случаи во кои има, има единствено решение.

4. Да се конструира триаголник ABC со познати: страната BC, точката L на страната BC низ која минува симетралата на аголот кај темето A, и радиусот на опишаната кружница.

Решение. <u>*Анализа.*</u> Нека ABC е триаголник со радиус R на опишаната кружница и нека L е точка од BC така што AL е симетрала на аголот α кај темето A. Отсечките BC и BL се гледаат под агол α и $\frac{\alpha}{2}$ од A соодветно. Аголот α е определен со опишаната кружница и отсечката BC, како перифериски агол. Според тоа, A е пресечна точка на опишаната кружница со геометриското место на точки од кои отсечката BL се гледа под агол $\frac{\alpha}{2}$.

<u>*Конструкција.*</u> Ги цртаме отсечката BC и точката L. Цртаме кружници k' и k'' со радиус R и центри во B и C соодветно. Ако $R < \frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш $k' \cap k'' = \varnothing$, па задачата нема решение. Нека $R \geq \frac{1}{2}\overline{BC}$ и нека $O = k' \cap k''$. Конструираме кружница k со центар во O и радиус R. Нека A' е точка од k и нека $\alpha = \measuredangle BA'C$. Го конструираме геометриското место Γ на точки од кои отсечката BL се гледа под агол $\frac{\alpha}{2}$. Γ е лак од кружница. Тогаш бараниот триаголник е ABC каде што A е пресечната точка на k и Γ различна од B (види цртеж).

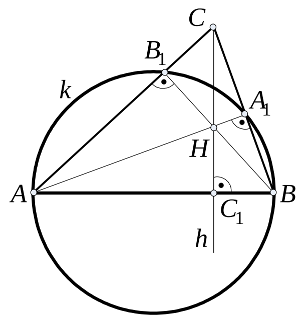


<u>*Доказ.*</u> Следува од: теоремата за периферски агли, конструкцијата и анализата.

<u>*Дискусија.*</u> Веќе докажавме дека задачата нема решение ако $R < \frac{1}{2}\overline{BC}$. Ако $R > \frac{1}{2}\overline{BC}$ тогаш во зависност од изборот на лакот на кој лежи A' се добиваат две различни вредности на аголот α, па задачата има две решенија. Ако $R = \frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш аголот α е еднозначно определен, па задачата има единствено решение.

5. Нека во рамнината е дадена кружница k и на неа се нанесени две дијаметрално спротивни точки A и B. Во рамнината е дадена и точка C која што не лежи на кружницата k ниту на правата AB. Само со помош на линијар да се конструира нормала од точката C кон правата AB.

Решение. _Конструкција._



1° Повлекуваме прави AC и BC; нека $AC \cap k = B_1$ и $BC \cap k = A_1$.

2° Ги повлеуваме правите AA_1 и BB_1; нека $AA_1 \cap BB_1 = H.$

3° Правата CH е бараната нормала.

Доказ. Навистина, по конструкција, точките A_1 и B_1 лежат на кружница k, па, според Талесовата теорема, $\triangle AB_1B$ и $\triangle AA_1B$ се правоаголни со прави агли во B_1 и A_1 соодветно. Со други зборови, AA_1 и BB_1 се висини на триаголникот ABC спуштени кон страните BC и AC соодветно, па значи точката H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Бидејќи правата CH минува низ ортоцентарот на триаголникот ABC и низ темето C, јасно е дека таа е нормална на страната AB на триаголникот ABC.

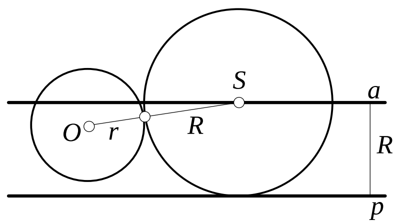
Досегашната дискусија (а и конструкцијата) важи само ако $A_1 \neq B$ и $B_1 \neq A$. Но, доколку, на пример важи $A_1 = B$, тогаш правата CB е тангента на кружницата k во точката B, па значи е нормална на дијаметарот AB.

6. Нека се дадени една кружница и една права.

а) Конструирај кружница со даден радиус која ги допира дадената кружница и дадената права.

б) Да се изврши дискусија за бројот на решенија на дадената задача.

Решение. а) Нека p е дадената права, $k(O,r)$ дадената кружница и $k(S,R)$ бараната кружница (види цртеж). Бидејќи $k(S,R)$ ја допира p, следува дека S лежи на правата a, паралелна со p и на растојание R од неа. Исто така, S ќе мора да лежи на кружницата $k(O,R+r)$ односно на $k(O,|R-r|)$, па S ќе биде пресек на таа кружница со правата a.



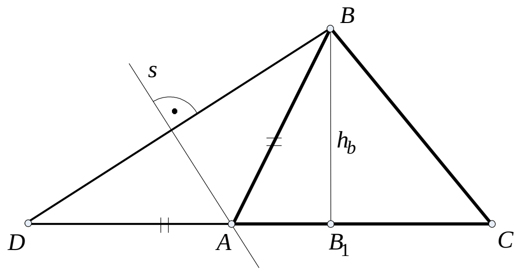
б) Задачата може да има најмногу 8 решенија, зошто две прави и две кружници се сечат најмногу во 8 точки, а има најмалку две решенија.

Задачата не ќе има решение ако правата p и кружницата $k(O,R+r)$ односно $k(O,|R-r|)$ не се сечат, а тоа е можно во случај кога $2R+r$ е помало од растојанието на O од правата p.

7. Да се конструира ΔABC, ако се познати должините $\overline{BC}=a$, $\overline{BB_1}=h_b$ (висината спуштена од темето B, со подножје во B_1) и $\overline{AC}+\overline{AB}=b+c$.

Да се изврши дискусија за постоењето на решенија, како и за нивниот број, во зависност од дадените должини.

Решение. *Анализа.* Нека ΔABC е бараниот триаголник. Триаголникот BB_1C може да се конструира, бидејќи е правоаголен триаголник со познати катета и хипотенуза. Точката A лежи на правата $p=CB_1$. На правата CB_1 може да се определи точката D, така што



$$\overline{CD}=\overline{CA}+\overline{AD}=b+c\,.$$

Да го разгледаме триаголникот BAD. Бидејќи

$$\overline{AD}=b+c-\overline{CA}=c=\overline{AB}\,,$$

добиваме дека триаголникот BAD е рамнокрак со теме во A и основа BD. Значи, темето A лежи на симетралата на страната BD. Од тука следува дека темето A е во пресекот на правата $p=CB_1$ и симетралата на страната BD.

Дискусија. Јасно е дека за да постои решение мора да биде исполнето $h_a \le a < b+c$ (ова важи за секој триаголник).

Нека $h_a < a < b+c$. Бидејќи точката D можеме да ја конструираме на правата CB_1 мерејќи го растојанието $b+c$ кон точката B_1, но и во спротивна насока, јасно е дека задачата има две решенија и тоа во првиот случај аголот кај темето C е остар, а во вториот аголот кај темето C е тап.

Ако $h_a = a < b+c$, тогаш бараниот триаголник е правоаголен со теме во C и точките C и B_1 се совпаѓаат. Во овој случај правата p на која што лежат точките A и D се добива како нормала на правата BB_1 во точката B_1. Понатамошната конструкција е иста како и во претходниот случај, со тоа што е сеедно на која страна ќе го нанесеме растојанието $b+c$ за да ја определиме точката D, т.е. двата добиени триаголници се складни.

Конструкцијата и доказот се јасни од анализата и дискусијата.

8. Дадени се рамнината Σ и правите a и b, кои не лежат во Σ. Низ секоја од правите a и b да се повлече рамнина, така што двете рамнини да се различни и правата во која се сечат да лежи во Σ.

Решение. Нека a и b се меѓусебно паралелни прави и нека Π е рамнина во која лежат правите a и b. Ако M е произволна точка од Σ и не лежи во Π, тогаш бараните рамнини Σ_1 и Σ_2 се определени со M и a односно M и b.

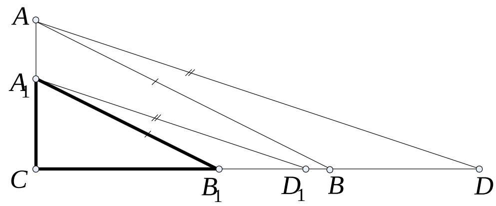
Нека правите a и b се сечат во точката P. Ако P лежи во Σ, тогаш бараните рамнини се произволни рамнини Σ_1 и Σ_2 низ правите a и b соодветно; ако, пак, P не лежи во Σ, тогаш таквите рамнини не постојат.

Нека правите a и b се разминувачки. Ако тие се паралелни со Σ, тогаш такви рамнини не постојат; ако $a\cap\Sigma=A$, $b\parallel\Sigma$, тогаш бараните рамнини се произволна рамнина Σ_1 низ правата а и рамнината Σ_2 определена со A и b; ако $a\cap\Sigma=A$, $b\cap\Sigma=B$, тогаш барнаните рамнини се рамнините Σ_1 и Σ_2 определени со A и b односно со B и a.

9. Да се конструира правоаголен триаголник кај кој едната катета е двапати поголема од другата и е познат збирот од катетите и висината спуштена на хипотенузата (т.е. познато е $a+b+h_c$).

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник, така што $\overline{BC}=2\overline{AC}$ и нека h е висината спуштена на хипотенузата. Тогаш $\overline{AB}^2=5\overline{AC}^2$, па за плоштината P добиваме

$$P=\overline{AC}^2 \quad \text{и} \quad P=\frac{\sqrt{5}\cdot\overline{AC}\cdot h}{2}.$$



Оттука добиваме

$$h=\frac{\overline{AC}}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{AC}+\overline{BC}+h}{\overline{AC}}=3+\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Од дискусијата произлегува следнава конструкција.

Конструираме правоаголен триаголник A_1B_1C за кој $\overline{B_1C}=2\overline{A_1C}$ (види цртеж). На полуправата нанесуваме точки D и D_1, така што $\overline{CD_1}=\overline{A_1C}+\overline{B_1C}+h$ и $\overline{CD}=a+b+h$ (дадениот збир). Од односите

$$\overline{CD_1}:\overline{CA_1}=3+\frac{2}{\sqrt{5}}=\overline{CD}:\overline{CA} \quad \text{и} \quad \overline{BC}=2\overline{AC}$$

ги наоѓаме точките A и B со што триаголникот е конструиран.

Да забележиме дека задачата има единствено решение.

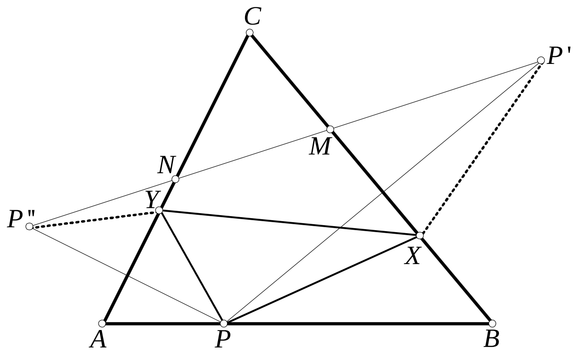
10. Нека $ABCD$ е правоаголник. Во делот од рамнината меѓу правите AB и CD да се определи множеството точки од кои отсечките AB и CD се гледаат под ист агол.

Решение. Од точките од симетралата s на отсечката BC, јасно е дека AB и CD се гледаат под ист агол. Претпоставуваме дека од некоја точка M надвор од таа симетрала отсечките AB и CD се гледаат под ист агол. Истото важи и за точката N која е симетрична на точката M во однос на s, заради симетрија. Бидејќи од точките M и N, отсечката AB (CD) се гледа под ист агол, тоа значи дека точките A, B, M, N (односно C, D, M, N) припаѓаат на иста кружница која е опишана околу правоаголникот $ABCD$. Значи, M припаѓа на лакот на таа кружница содржан во разгледуваниот дел од рамнината.

Обратно, нека од секоја точка M од тој лак отсечките AB и CD се гледаат под ист агол, затоа што и нејзината симетрична точка во однос на s го има истото својство. Затоа, бараното множество точки е унија од симетралата s и пресекои на опишаната кружница околу правоаголникот $ABCD$ и разгледуваниот дел од рамнината меѓу правите AB и CD.

11. Даден е $\triangle ABC$ и точка P на страната AB. Во $\triangle ABC$ впишете триаголник со најмал периметер, а едно негово теме да е точката P.

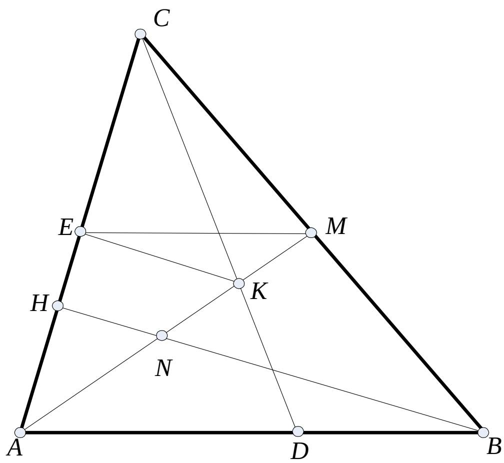
Решение. Нека ΔPXY е произволен триаголник впишан во $\triangle ABC$, за кој едно теме е точката P. Нека P' и P'' се точки симетрични на P во однос на BC и AC соодветно. Јасно е дека $\overline{PX} = \overline{P'X}$ и $\overline{PY} = \overline{P''Y}$. Според тоа, периметарот на триаголникот $\triangle PXY$ е еднаков на должината на искршената линија $P'XYP''$.



Триаголник што е впишан, а има најмал периметер ќе прави искршена линија што е отсечка, Тоа е отсечка со почеток P' и крај P''. Нека $P'P'' \cap BC = M$ и $P'P'' \cap AC = N$. Бараниот триаголник е PMN.

6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. На страната AB на остроаголниот триаголник ABC е избрана точка D. Тежишната линија AM ја сече висината BH и отсечката CD во точките N и K соодветно. Ако $\overline{AK} = \overline{CK}$, пресметај го количникот $\frac{\overline{AN}}{\overline{KM}}$.



Решение. Од условот на задачата триаголникот AKC е рамнокрак, со краци AK и CK. Проекцијата на точката K врз AC ќе ја означиме со E. Бидејќи триаголникот AKC е рамнокрак, добиваме дека $\overline{AE} = \overline{EC}$, т.е. E е средна точка на AC.

Значи, EM е средна линија на триаголникот ABC, па според тоа $EM \parallel AB$ и $2\overline{EM} = \overline{AB}$.

Од друга страна $EK \parallel BH$ (бидејќи $EK \perp AC$ и $BH \perp AC$). Добивме дека страните на триаголниците ABN и KME се паралелни соодветно. Според тоа $\frac{\overline{AN}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EM}} = 2$.

2. Дадени се бесконечно многу точки во рамнината, такви што растојанието меѓу кои било две од нив е цел број. Докажи дека сите точки се колинеарни.

Решение. Нека A, B и C се неколинеарни точки за кои растојанијата меѓу нив се природни броеви. Нека M е точка од рамнината таква што $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ и $\overline{MC}$ се природни броеви. Заради неравенството на триаголник имаме

$$|\overline{MA}-\overline{MB}|\in\{1,2,...,\overline{AB}\},\ |\overline{MA}-\overline{MC}|\in\{1,2,...,\overline{AC}\} \text{ и } |\overline{MB}-\overline{MC}|\in\{1,2,...,\overline{BC}\}.$$

Тоа значи дека точката M може да има само конечен број позиции во рамнината.

3. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се n точки во рамнината. Да се покаже дека постои една и само една точка T таква што

$$\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+...+\overrightarrow{TA_n}=\vec{0}$$

Решение. Нека O е произволна точка во рамнината и нека точката T е определена со равенството

$$\overrightarrow{OT}=\tfrac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}).$$

Тогаш имаме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+...+\overrightarrow{TA_n}&=(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_2})+...+(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_n})\\&=n\overrightarrow{TO}+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n})\\&=n\overrightarrow{TO}+n\overrightarrow{OT}=\vec{0}\end{aligned}$$

Ако Q е точка од рамнината, таква што

$$\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{QA_2}+...+\overrightarrow{QA_n}=\vec{0}$$

тогаш

$$\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{QA_2}+...+\overrightarrow{QA_n}=\vec{0}=\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+...+\overrightarrow{TA_n},$$

од каде што добиваме

$$(\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{A_1Q})+(\overrightarrow{TA_2}+\overrightarrow{A_2Q})+...+(\overrightarrow{TA_n}+\overrightarrow{A_nQ})=\vec{0}.$$

Но, $\overrightarrow{TA_k}+\overrightarrow{A_kQ}=\overrightarrow{TQ}$ за $k=1,2,3,...,n$, па последното равенство се сведува на равенството $n\overrightarrow{TQ}=\vec{0}$, т.е. $\overrightarrow{TQ}=\vec{0}$, од каде што се добива $T\equiv Q$.

4. Да се најде најмалиот природен број $n>1$ со следново својство: постои множество M од n точки во рамнината такви што секоја права AB ($A,B\in M$) е паралелна со некоја друга права CD ($C,D\in M$).

Решение. Очигледно е дека $n\neq 2,3$. Исто така не постои множество M од четири точки во рамнината со бараното својство, бидејќи во произволен четириаголник дијагоналата не е паралелна со другата дијагонала, ниту со која било страна.

Множеството M составено до темињата на еден правилен петаголник го има бараното својство. Според тоа, $n=5$.

5. Во внатрешноста на агол со теме M е избрана точка A. Од точката A е стркалана топка, која од едниот крак на аголот се одбила во точката B, а потоа од другиот крак на аголот се одбила од точката C и се вратила во точката A (аголот под кој топката удира и аголот под кој точката се одбива се еднакви меѓу себе).

Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот BMC лежи на правата MA.

Решение. Нека точката M' припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот BMC и нека е дијаметрално спротивна на M.

Според конструкцијата, аглите $\angle MBM'$ и $\angle MCM'$ се прави агли (периферни агли над полукружница). Значи, $M'B \perp MB$ и $M'C \perp MC$.
Од претпоставките на задачата

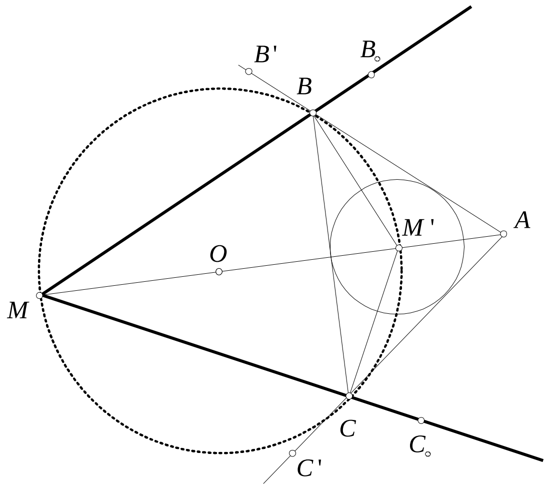
$\measuredangle MCB = \measuredangle ACC_{\circ}$ и

$\measuredangle MBC = \measuredangle ABB_{\circ}$,

па според тоа $M'C$ е симетрала на аголот BCA и $M'B$ е симетрала на аголот $\measuredangle CBA$.

Заради тоа, точката M' е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC.

Точките B' и C' се избрани на AB и AC соодветно (види цртеж). Јасно е дека MB е симетрала на $\measuredangle B'BC$, а MC е симетрала на $\measuredangle BCC'$. Според тоа, M е центар на надворешно опишаната кружница во триаголникот ABC, која ја допира страната BC.

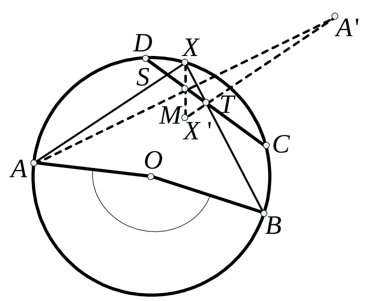


Значи, M лежи на симетралата на $\measuredangle BAC$ и дијаметарот MM', а со тоа и O лежи на симетралата AM.

6. На кружница k дадени се четири точки A, B, C, D а на тетивата CD една точка M. На кружницата k да се најде точка X, така што правите AX и BX отсекуваат на тетивата CD отсечка ST чија средина е точката M.

Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена (види цртеж). Тогаш имаме $\sigma_M(S) = T$. Нека $\sigma_M(A) = A', \sigma_M(X) = X'$. Правите $A'X'$ и AX се паралелни, па имаме

$$\measuredangle X'TB = \measuredangle AXB = \tfrac{1}{2}\measuredangle AOB.$$



Од анализата следува следнава конструкција.

1) Ја конструираме точката $A' = \sigma_M(A)$;

2) го конструираме геометриското место Γ на точки од кои отсечката $A'B$ се гледа под агол $\pi - \frac{1}{2}\measuredangle AOB$;

3) точката $T \in \Gamma \cap CD$.

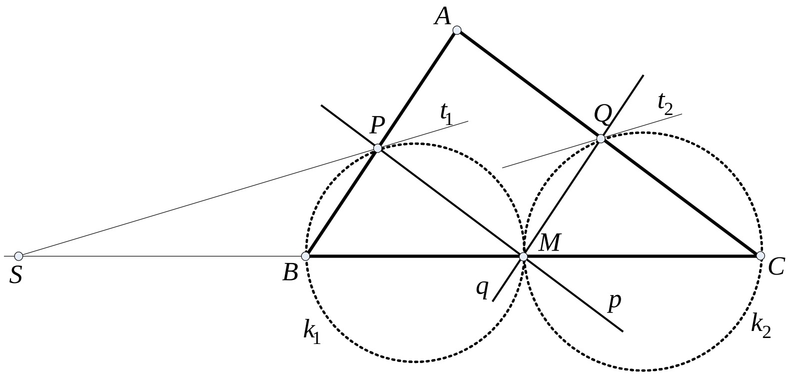
Со тоа задачата е решена.

7. Нека M точка од страната BC на триаголникот ABC. Низ точката M се повлечени прави p и q паралелни со AC и AB соодветно. Нека $P = p \cap AB,$

$Q = q \cap AC$, а k_1 и k_2 се кружниците опишани околу триаголниците BMP и CMQ соодветно.

Да се докаже дека тангентите t_1 и t_2, повлечени на k_1 и k_2 соодветно во точките P и Q се паралелни.

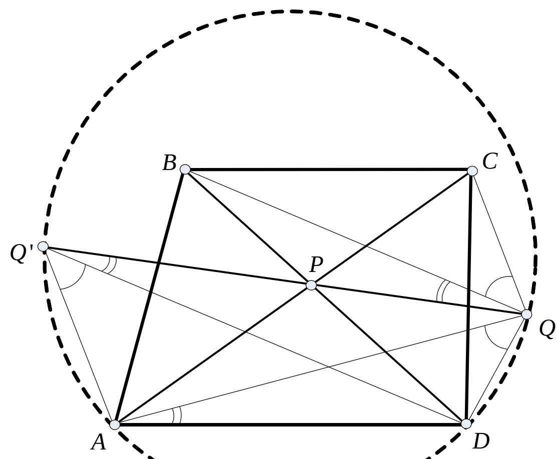
Решение. Нека $S = PQ \cap BC$, а χ нека е хомотетија со центар S и коефициент $m = \frac{\overline{SM}}{\overline{SB}}$; тогаш $\chi(B) = M$. Од $BP \parallel MQ$ и $MP \parallel CQ$ следува дека $\chi(M) = C$ и $\chi(P) = Q$, а од тоа пак $\chi(k_1) = k_2$.



Од $\chi(k_1) = k_2$ и $\chi(P) = Q$, следува дека $\chi(t_1) = t_2$, што значи дека $t_1 \parallel t_2$.

8. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се сечат во точката P. Точката Q се наоѓа меѓу паралелните прави BC и AD, така што $\measuredangle AQD = \measuredangle CQB$ и правата CD ги раздвојува точките P и Q. Докажи дека $\measuredangle BQP = \measuredangle DAQ$.

Решение. Нека $t = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$ (види цртеж). Ќе разгледаме хомотетија h со центар во точката P и коефициент $-t$. Триаголникот PDA е сличен со триаголникот PBC со коефициент на сличност t, па според тоа $h(B) = D$ и $h(C) = A$.



Со Q' ќе ја означиме сликата на Q со h, т.е. $Q' = h(Q)$. Од конструкцијата е јасно дека Q, P и Q' се колинеарни точки.

Точки P и Q припаѓаат на иста страна од AD па според тие ќе припаѓаат на иста страна од BC. Според тоа Q' и P ќе припаѓаат од иста страна од

$h(BC) = AD$. Значи, Q и Q' се наоѓаат на иста страна од AD. Точките Q и C се на иста страна од BD па според тоа Q' и A се на спротивна страна од BD.

Од конструкцијата имаме

$$\measuredangle AQ'D = \measuredangle CQB \ \ (h(BCD) = DAQ),$$

а од условот на задачата имаме $\measuredangle AQD = \measuredangle CQB$. Значи, од точките Q и Q' отсечката AD се гледа под ист агол. Според тоа A, Q', Q, D припаѓаат на една иста кружница и заради тоа $AQ'QD$ е тетивен четириаголник.

Според $h(PBQ) = PDQ'$ и бидејќи $AQ'QD$ е тетивен четириаголник, добиваме

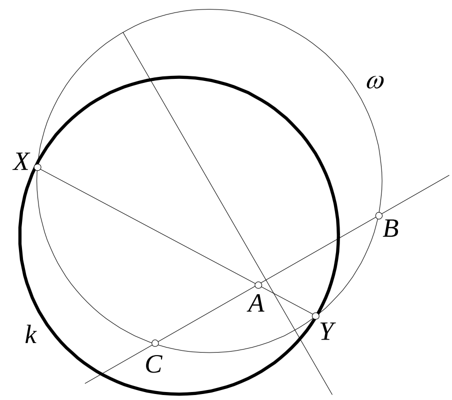
$$\measuredangle DAQ = \measuredangle DQ'Q = \measuredangle PQB,$$

(првото равенство е заради агли над ист кружен лак а второто равенство е од сличност на хомотетични фигури).

9. Точката A припаѓа на внатрешноста на кружницата k и дадена е точка B различна од точката A. Тетивата XY од кружницата k минува низ точката A. Центрите на опишаните кружници околу BXY лежат на една права. Докажи!

Решение. За избраната точка A од внатрешноста на кружницата k, постои реален број d таков што за било која тетива XY која минува низ A,

$$\overline{XA} \cdot \overline{AY} = d.$$



На правата AB ќе избереме точка C, таква што A е меѓу B и C и

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = d$$

(таква точка секогаш можеме да избереме и таа е единствена). Но тогаш од условот

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{XA} \cdot \overline{AY} = d,$$

добиваме дека X, C, Y, B лежат на една кружница. Значи, независно од изборот на точките X и Y, кружницата опишана околу $\triangle BXY$ минува низ точката C.

Центарот на таа кружница лежи на симетралата на отсечката BC.

Обратно, ако ω е било која кружница што минува низ точките B и C, а нејзиниот центар е на симетралата на отсечката BC, таа ја сече k во две точки X и Y такви што X, A, Y се колинеарни, т.е. XY е тетива која минува низ A.

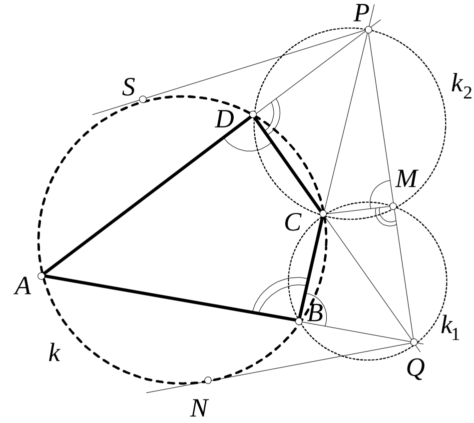
10. Еден четириаголник е впишан во кружница k и паровите несоседни страни се сечат во точките P и Q. Должините на тангентните отсечки од точките P и Q се еднакви на b и a соодветно.

Определи го растојанието меѓу точките P и Q.

Решение. Нека PS и QN се тангенти на кружницата k, при што $\overline{QN} = a$ и $\overline{PS} = b$ (види цртеж). Околу триаголникот CBQ ќе опишеме кружница k_1, која правата PQ ја сече во точката M. Бидејќи четириаголниците $ABCD$ и $CBQM$ се тетивни, имаме

$$\measuredangle ABC = \measuredangle QMC$$
$$\measuredangle ABC = \measuredangle CDP$$

односно $\measuredangle QMC = \measuredangle CDP$. Според тоа, четириаголникот $DCMP$ е тетивен. Нека k_2 е опишаната околу него кружница.



Сега од кружницата k имаме

$$b^2 = \overline{PS}\cdot\overline{PS} = \overline{PC}\cdot\overline{PB}$$
$$a^2 = \overline{QN}\cdot\overline{QN} = \overline{QC}\cdot\overline{QD}.$$

Од друга страна, од кружинците k_2 и k имаме

$$\overline{QP}\cdot\overline{QM} = \overline{QC}\cdot\overline{QD} = a^2$$
$$\overline{PQ}\cdot\overline{PM} = \overline{PB}\cdot\overline{PC} = b^2$$

од каде добиваме

$$\overline{PQ}(\overline{PM}+\overline{MQ}) = \overline{PQ}\cdot\overline{PM} + \overline{PQ}\cdot\overline{MQ} = b^2 + a^2$$

Значи,

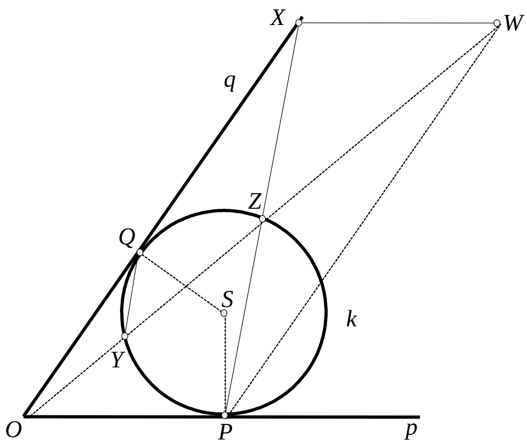
$$\overline{PQ} = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

11. Кружницата k ги допира краците Op и Oq на аголот $\measuredangle pOq$ во точките P и Q соодветно. Точката X припаѓа на полуправата Oq при што $k \cap PX = Z \neq P$ ја полови отсечката PX. Докажи дека $PX \parallel QY$ каде $k \cap OZ = Y \neq Z$.

Решение. Точката W е таква што $OPWX$ е паралелограм (види цртеж). Од равенството на паралелограм имаме

$$\overline{OW}^2 + \overline{PX}^2 = 2\overline{OX}^2 + 2\overline{OP}^2,$$

од каде заради равенствата $\overline{OZ} = \overline{ZW}$ и $\overline{ZX} = \overline{ZP}$ добиваме



$$2\overline{ZX}^2 + 2\overline{OZ}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{OP}^2.$$

Од условите на задачата имаме

$$\overline{OX} = \overline{OQ} + \overline{QX},$$
$$\overline{QX}^2 = \overline{XZ}\cdot\overline{ZP} = 2\overline{XZ}^2$$

(степен на точка во однос на k),

$$\overline{OP} = \overline{OQ}$$

(тангенти кон кружница k од иста точка O).

Од претходните равенства добиваме

$$2\overline{ZX}^2 + 2\overline{OZ}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{OP}^2 = (\overline{OQ} + \overline{QX})^2 + \overline{OP}^2$$

$$=\overline{OQ}^2+2\overline{OQ}\cdot\overline{QX}+\overline{QX}^2+\overline{OP}^2$$
$$=2\overline{OQ}^2+2\overline{OQ}\cdot\overline{QX}+2\overline{XZ}^2,$$

од каде добиваме

$$\overline{OZ}^2=\overline{QO}(\overline{QO}+\overline{QX})=\overline{OQ}\cdot\overline{OX},$$
$$\frac{\overline{OZ}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OX}}{\overline{OZ}}.$$

Од последното равенство добиваме дека $\Delta OQZ\sim\Delta OZX$, па според тоа

$$\measuredangle OQZ=\measuredangle OXZ \qquad (1)$$

Како периферен агол над кружен лак и агол меѓу тангента и тетива имаме

$$\measuredangle OXZ=\measuredangle OQY, \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $PX\parallel QY$.

12. Нека k е кружница која минува низ темињата B и C на триаголникот ABC, а страните AB и AC ги сече во точките C' и B' соодветно. Докажи дека правите BB', CC' и HH' минуваат низ иста точка, каде H и H' се ортоцентри на триаголниците ABC и $AB'C'$.

Решение. Нека BB' и CC' се сечат во точката P (види цртеж). Бидејќи

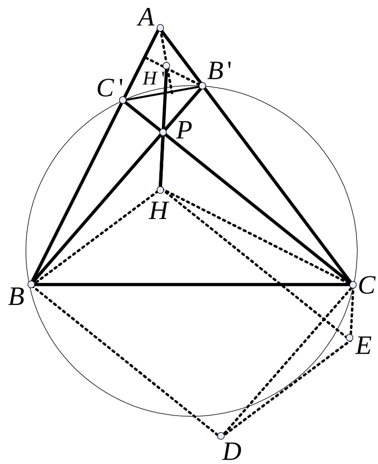
$$\measuredangle B'CB=\measuredangle B'CC'$$

(како агли над ист кружен лак) и од тоа што

$$\measuredangle ACH=\measuredangle ABH$$

(H е ортоцентар), добиваме

$$\measuredangle PBH=\measuredangle ABH-\measuredangle C'BP$$
$$=\measuredangle ACH-\measuredangle B'CP=\measuredangle PCH.$$



Нека D и E се точки, такви што $BPCD$ и $HECP$ се паралелограми (во тој случај и $BHED$ е исто така паралелограм). Четириаголникот $BCB'C'$ е тетивен. Според тоа

$$\measuredangle BC'B'=180^\circ-\measuredangle BCB'=180^\circ-\measuredangle BCA.$$

Слично, $\measuredangle C'B'C=180^\circ-\measuredangle ABC$ од каде што добиваме

$$\measuredangle AB'C'=180^\circ-\measuredangle C'B'C=\measuredangle ABC.$$

Бидејќи $\triangle BAC$ и $\triangle C'AB'$ се слични, и H и H' се нивни ортоцентри соодветно, добиваме дека $\triangle B'H'C'$ и $\triangle BHC$ се слични.

Бидејќи $\measuredangle C'PB'=\measuredangle BPC$ и $DCPB$ е парелелограм имаме $\measuredangle C'PB'=\measuredangle BDC$. Од друга страна $DC\parallel PB\parallel PB'$ и $PC'\parallel PC\parallel BD$. За точката P и кружницата k имаме $\overline{PB}\cdot\overline{PB'}=\overline{PC}\cdot\overline{PC'}$, т.е. $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{PB'}}$. Но $\overline{PB}=\overline{DC}$ и $\overline{PC}=\overline{BD}$, па според тоа $\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{PB'}}$. Сега е јасно дека $\triangle B'PC'\sim\triangle BDC$, и конечно четириаголниците $H'C'PB'$ и $HCDB$ се слични.

Оттука следува $\measuredangle H''PB = \measuredangle HDB$. Сега од $\measuredangle CDE = \measuredangle PBH = \measuredangle PCH = \measuredangle CHE$. Значи, четириаголникот $HCED$ е тетивен четириаголник. Според тоа

$$\measuredangle HPB \overset{(a)}{=} \measuredangle DCE \overset{(b)}{=} \measuredangle DHE \overset{(c)}{=} \measuredangle HDB \overset{(d)}{=} \measuredangle H'PB'.$$

(a) сличност на ΔBPH и ΔDCE;

(b) $DECH$ е тетивен (агли над ист кружен лак)

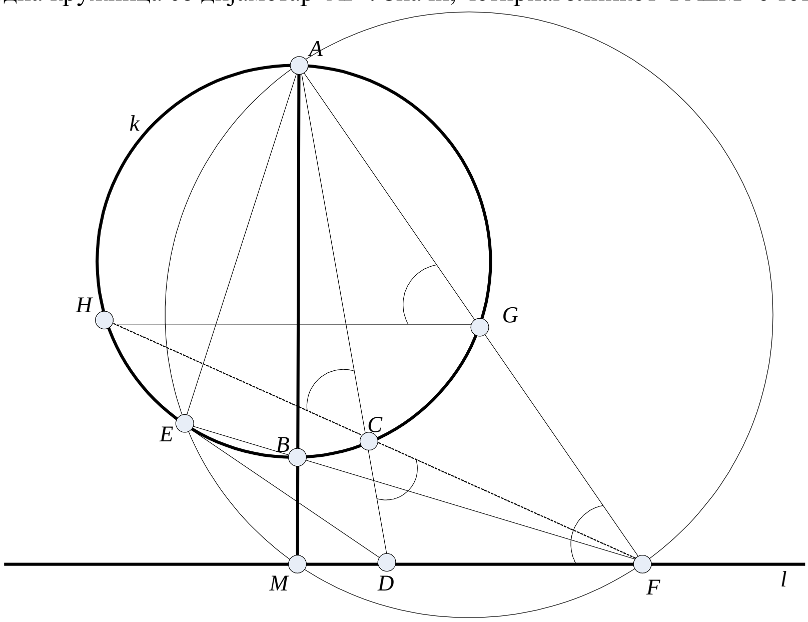
(c) паралелограм $BHED$

(d) сличност на $BHCD$ и $C'PB'A'$

Значи, $\measuredangle HPB$ и $\measuredangle H'PB'$ се накрсни, па од тоа H', P и H се колинеарни. Конечно HH' минува низ P, што требаше и да се докаже.

13. Нека кружницата k и правата l не се сечат и AB е дијаметар на кружницата k кој е нормален на правата l при што B е поблиску до l од A. Избрана е точка $C \neq A, B$ која припаѓа на кружницата k. Правата AC ја сече l во точката D. Точката E припаѓа на k така што DE е тангента на k и B и E се на иста страна од AC.Правата BE ја сече правата l во точка F, а AF ја сече k во точка $G \neq A$. Да с е докаже дека симетричната точка G во однос на AB припаѓа на CF.

Решение. Пресекот на дијаметарот AB со правата l ќе го означиме со M и нека H е симетричната точка на G во однос на AB. Јасно е дека $H \in k$. Бидејќи AB е дијаметар на кругот k добиваме дека $\measuredangle BEA = 90^\circ$. Според конструкцијата $\measuredangle FEA = 90^\circ$. Бидејќи $\measuredangle FMA = 90^\circ$ добиваме дека точките F, A, E, M припаѓаат на една кружница со дијаметар AF. Значи, четириаголникот $FAEM$ е тетивен.



Аглите $\measuredangle DFE = \measuredangle MFE$ и $\measuredangle BAE = \measuredangle MAE$ се еднакви како агли над ист кружен лак во кружницата опишана над четириаголникот $MFAD$. Бидејќи DE е тангента на k, добиваме дека $\measuredangle DEF = \measuredangle BAE = \measuredangle MAE$. Според тоа во триаголникот EDF имаме два ист агли, $\measuredangle DEF = \measuredangle DFE$, па затоа $\overline{DE} = \overline{DF}$.

Според степенот на точка во однос на кружница, и последното равенство добиваме

$$\overline{DF}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{DA}.$$

Заради последното равенство имаме

$$\measuredangle DCF = \measuredangle DFA = \measuredangle HGA = \measuredangle HCA.$$

Бидејќи D, C, A се колинеарни и од равенството $\measuredangle DCF = \measuredangle HCA$ добиваме дека H, C, F се колинеарни, т.е. $H \in CF$.

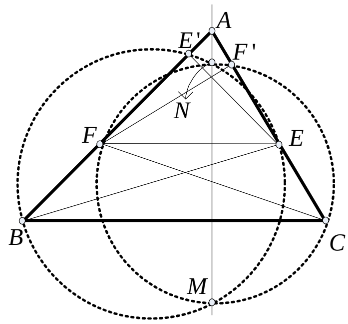
14. Нека E е F се точки кои припаѓаат на страните AC и AB на триаголникот ABC соодветно, при што $EF \| BC$. Докажи дека пресечните точки на кружниците со дијаметри BE и CF припаѓаат на висината на триаголникот спуштена од темето A.

Решение. Од точките E и F ќе спуштиме нормали на страните AB и AC соодветно, а нивните подножја ќе ги означиме со E' и F'. Четириаголникот $EF'E'F$ е тетивен, па според тоа

$$\overline{AF'} \cdot \overline{AE} = \overline{AE'} \cdot \overline{AE}. \qquad (1)$$

Од сличноста на триаголниците ABC и AFE имаме

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \qquad (2)$$



Од (1) и (2) добиваме

$$\overline{AF'} \cdot \overline{AC} = \overline{AF'} \cdot \overline{AE} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \overline{AE'} \cdot \overline{AF} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \overline{AE'} \cdot \overline{AB}.$$

Значи, точката A припаѓа на радикалната оска на кружниците со дијаметри BE и CF. Затоа, точките A, M, N се колинеарни, каде M и N се пресек на

Тетивата MN е нормална на отсечката што ги сврзува центрите на двете кружници, односно на средната линија на трапезот $BCEF$, па е нормална и на BC (средната линија на трапезот е парлалена со неговите основи).

15. Точката L припаѓа на страната BC од триаголникот ABC. Точките M и N се на продолженијата на страните AB и AC соодветно, така што B е меѓу A и M, а C е меѓу N и A, и

$$2\measuredangle AMC = \measuredangle ALC, \quad 2\measuredangle ANB = \measuredangle ALB.$$

Нека O е центар на опишаната кружница за ΔAMN.

Докажи дека $OL \perp BC$.

Решение. Нека MC и NB ја сечат опишаната кружница k околу триаголникот AMN во точките Z и Y соодветно. Тогаш од равенството

$$\measuredangle AMC + \measuredangle ANB = \tfrac{1}{2}(\measuredangle ALB + \measuredangle ALC) = 90^\circ,$$

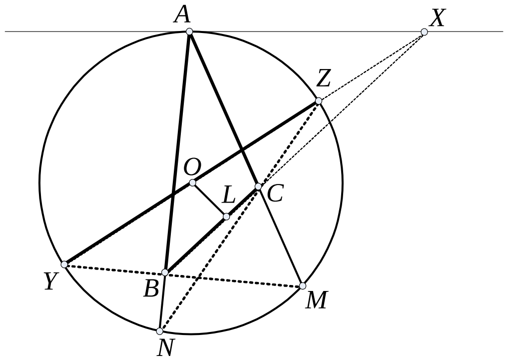
добиваме дека Y и Z се крајни точки на дијаметар на кружницата k.

Нека X е точка на пресек на BC и YZ. Според теоремата на Паскал за $ANYZMA$ добиваме дека X припаѓа на тангентата кон опишаната кружница околу триаголникот AMN во точката A (види цртеж).

Сега доволно е да докажеме дека четриаголникот $LOAX$ е тетивен четриаголник. Имаме

$$\measuredangle AOX = \measuredangle AOZ = 2\measuredangle AMC$$
$$= \measuredangle ALC = \measuredangle ALX,$$

од каде следува тетивноста на четриаголникот $LOAX$



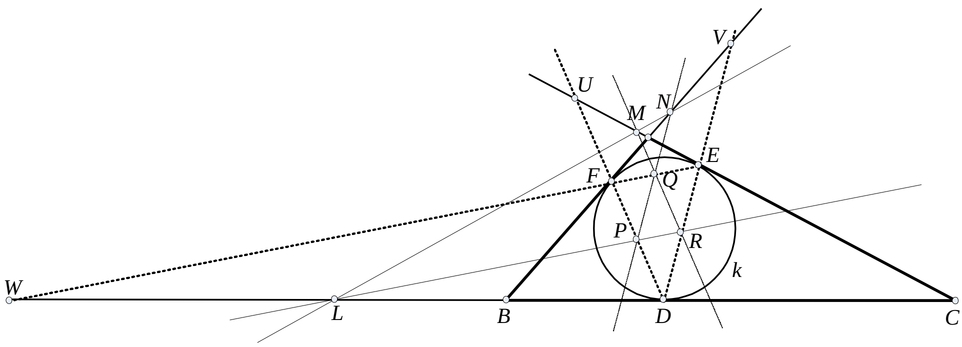
16. Триаголникот ABC не е рамнокрак и k е неговата впишана кружница. Точките D, E и F се допирни точки на кружницата k со страните BC, CA и AB соодветно. Нека FD, DE и EF ги сечат CA, AB и BC во точките U, V и W соодветно.

Ако L, M и N се средини на DW, EU и FV, тогаш тие се колинеарни. Докажи!

Решение. Низ точката N ќе повлечеме права p паралелна со ED. Правата p ќе минува низ Q средина на EF и ќе минува низ P средина на ED. Последните две тврдења се последица од тоа што PN и QN се средни линии во триаголниците VED и VFE.

Аналогно, низ точката M ќе повлечеме права q паралелна со FD. Правата q ќе минува низ средината Q на FE и средината R на отсечката DE. Последните две тврдења се последица од тоа што MQ и MR се средни линии на триаголниците UEF и UDE.

Исто, низ точката L ќе повлечеме права s паралелна со FE. Таа ќе минува низ P средина на FD и низ R средина на DE. Аналогно, последните две тврдења се последица на тоа што LP и LR се средни линии на триаголниците WFD и WED.



Бидејќи триаголниците FBD, DCE, EAF се рамнокраки и P,R,Q се средини на нивните основи соодветно, добиваме дека BP,CR,AQ се симетрали на внатрешните агли на триаголникот ABC. Тие се сечат во центарот I на вписаната кружница k во него.

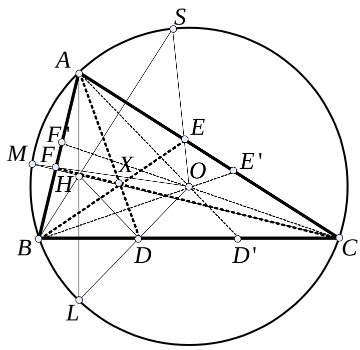
Сега ќе ги разгледаме триаголниците ABC и PQR. Правите AQ,BP и CR се сечат во една точка. Според теоремата на Дезарг точките $L=BC\cap RP$, $M=RQ\cap AC$ и $N=AB\cap PQ$ лежат на една права.

17. Нека O е центар на опишаната кружница, а H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC. Докажи дека постојат точки D,E и F од страните BC,CA и AB соодветно, такви што

$$\overline{OD}+\overline{DH}=\overline{OE}+\overline{EH}=\overline{OF}+\overline{FH}$$

и правите AD,BE и CF минуваат низ иста точка.

Решение. Нека H е ортоцентар, а O центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC.



Симетричната точка на ортоцентарот H во однос на правата BC ќе ја означиме со L, и како што е познато таа припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Нека D е точка на пресек на OL и BC.

Од самата конструкција е јасно дека

$$\overline{OD}+\overline{DH}=\overline{OD}+\overline{DL}=R$$

(R е радиус на опишаната кружница околу триаголникот ABC). На потполно ист начин ги определуваме точките E и F и за нив ќе важи

$$\overline{OD}+\overline{DH}=\overline{OE}+\overline{EH}=\overline{OF}+\overline{FH}=R\,.$$

Нека D' е точка на пресек на OA и BC (види цртеж). Ќе ги разгледаме триаголниците AOL и HDL. Тие се рамнокраки со основи AL и HL. Според тоа

$$\measuredangle LAO=\measuredangle ALO=\measuredangle HLD\,,$$

од каде добиваме дека AOL и HDL се слични. Значи $HD\parallel AO$. Бидејќи BC е трансферзала на паралелните прави HD и AO, добиваме дека

$$\measuredangle AD'C=\measuredangle HDC=\measuredangle CDL\,.$$

Според тоа триаголникот $\triangle D'OD$ е рамнокрка со основа DD'. Значи, симетралата на DD' е симетрала и на BC, од каде добиваме $\overline{BD}=\overline{CD'}$.

На потполно аналоген начин се докажува дека $\overline{CE}=\overline{AE'}$ и $\overline{AF}=\overline{BF'}$. Правите AD',BE' и CF' минуваат низ иста точка, точката O, па според теоремата на Чева

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}\cdot\frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}}\cdot\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}=1\,.$$

Но, сега, исполнето е и равенството

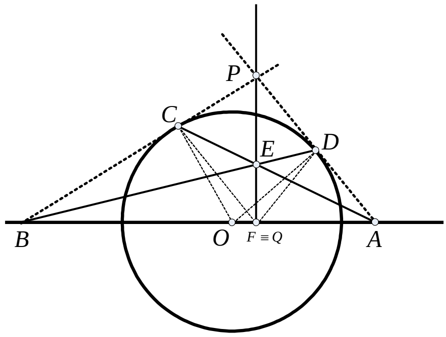
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=1\,.$$

Според обратната теорема на Чева, правите AD,BE и CF минуваат низ иста точка X.

18. Полукружницата Γ се наоѓа во една од полурамнините на кои е разделена рамнината со правата l и нејзиниот центар O е на правата l. Точките C и D припаѓаат на Γ. Тангентите кон Γ во C и D ја сечат l во точките B и A, при што O е меѓу A и B. Точката E е пресечна за правите AC и BD, а F е точка од l така што $EF \perp l$.

Докажи дека EF е симетрала на $\measuredangle CFD$.

Решение. Со P ќе ја означиме пресечната точка на тангентите BC и AD, и нека Q е подножјето на нормалата повлечена од P кон l. Бидејќи OD и OC се радиуси, имаме $OC \perp BP$ и $OD \perp PA$. Бидејќи $PQ \perp AB$, имаме



$\triangle PQA \sim \triangle ODA$ (имаат исти агли; еден прав и еден заеднички)

$\triangle PQB \sim \triangle OBC$ (имаат исти агли; еден прав и еден заеднички)

Од овие сличности, добиваме

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}.$$

(средното равенство важи бидејќи $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ се радиуси). Од равенството $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}$, имаме $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{DA}} = 1$ (бидејќи важи равенство $\overline{PC} = \overline{PD}$, степен на точка).

Според теоремата на Чева правите AC, BD и PQ минуваат низ иста точка. Бидејќи $AC \cap BD = E$, добиваме дека $E \in PQ$. Но, $EF \perp AB$ и $PQ \perp AB$ и $E \in PQ$, значи $PE \perp AB$ од каде добиваме $F \equiv Q$.

Значи, сега $D, O, F \equiv Q, C$ и P се конциклични ($\measuredangle ODP = 90^\circ, \measuredangle OCP = 90^\circ$, $\measuredangle PFO = 90^\circ$), бидејќи лежат на кружница со дијаметар OP. Бидејќи $\overline{PC} = \overline{PD}$, добиваме дека $\measuredangle CFP = \measuredangle PFD$, т.е. PF е симетрала на $\measuredangle CFD$.

19. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA и AB во точките D, E и F соодветно. Точката X е во внатрешноста на ABC, при што впишаната кружница во XBC ја допира BC во D, а CX и XB во точките Y и Z. Докажи дека $EFZY$ е тетивен четириаголник.

Решение. *Случај 1.* Ако EF е паралелна со BC, тогаш ABC е рамнокрак триаголник со основа BC. Тогаш E и Y се симетрични на F и Z во однос на правата AD. Значи, $EFZY$ е рамнокрак трапез и тој е тетивен четириаголник.

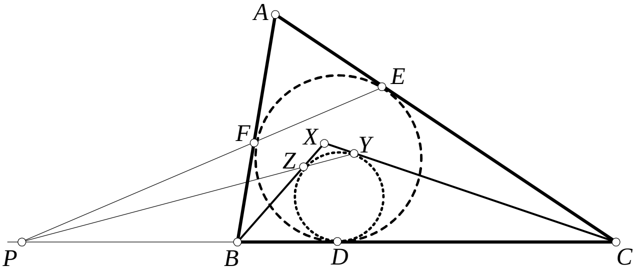
Случај 2. Нека $EF \nparallel BC$. Со P ќе го означиме пресекот на правите EF и BC. Значи, $E \in AC, F \in AB, P \in BC$ и E, F, P се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Значи, $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}\cdot\frac{\overline{FB}}{\overline{AF}}$. Од равенството $\overline{EA}=\overline{AF}$, добиваме

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

(последното равенство се добива бидејќи $\overline{BF}=\overline{BD}$ и $\overline{CE}=\overline{CD}$).

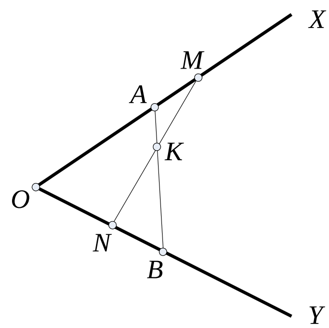


Според тоа, точката P која припаѓа на правата BC зависи само од изборот на точката D а не од A. Со други зборови за ΔBCX, ако $YZ\cap BC=Q$, тогаш од $\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$, односно $P\equiv Q$. Сега,

$$\overline{PZ}\cdot\overline{PY}=\overline{PD}^2=\overline{PE}\cdot\overline{PF},$$

од каде следува дека E,F,Z,Y лежат на една кружница, односно четириаголникот $EFZY$ е тетивен.

20. Даден е агол XOY и a е позитивен број. Точките M и N припаѓаат на краците OX и OY соодветно, така што $\overline{OM}+\overline{ON}=2a$. Определи го геометриското место на средините на отсечките MN.



Решение. Нека A и B се точки од OX и OY соодветно, такви што $\overline{OA}=\overline{OB}=a$. Тогаш средината на отсечката AB припаѓа на бараното геометриско место на точки.

Нека M и N се точки такви што

$$\overline{OM}+\overline{ON}=2a.$$

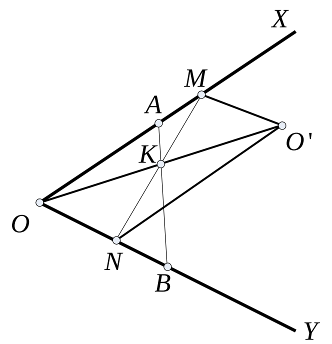
Јасно е дека, ако $M\neq A$ тогаш $N\neq B$. Притоа, ако $\overline{OM}>a$, тогаш $\overline{ON}<a$. Во тој случај

$$\overline{AM}=\overline{OM}-\overline{OA}=\overline{OM}-\overline{OB}=\overline{OM}+\overline{ON}-\overline{ON}-\overline{OB}$$
$$=2a-a-\overline{ON}=a-\overline{ON}=\overline{OB}-\overline{ON}=\overline{NB},$$

и AB и MN се сечат во внатрешноста на XOY. Ако $K=AB\cap MN$ (види цртеж), тогаш според теоремата на Менелај за триаголникот ΔOMN и за правата AB (како пресечна права), имаме

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{BO}}{\overline{BN}}=1,$$

од каде следува дека $\overline{KN}=\overline{KM}$. Според тоа, K е средина на MN и припаѓа на AB.

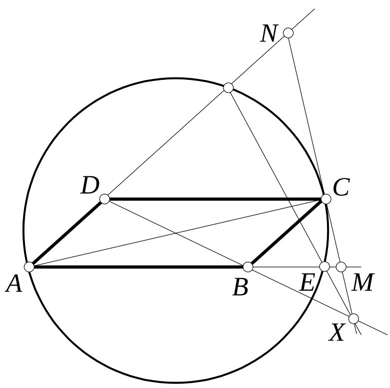


Обратно, нека $K\in AB$. Нека O' е точка од внатрешноста на аголот XOY така што K е средина на OO' (види цртеж). Избираме точки $M\in OX$ и $N\in OY$ такви што $O'M\parallel OY$ и $O'N\parallel OX$. Во тој случај $ONO'M$ е паралелограм. Со примена на теоремата на Менелај за ΔOMN и правата AB, добиваме $\overline{AM}=\overline{BN}$. Но, тогаш

$$\overline{OM}+\overline{ON}=a+\overline{AM}+a-\overline{BN}=2a.$$

Значи, точката K припаѓа на бараното геометриско место точки. Според тоа, бараното геометриско место точки е отсечката AB.

21. Кружницата k минува низ темињата A и C на паралелограмот $ABCD$ и ги сече правите AB и AD во точките E и F соодветно. Правите BD, EF и тангентата кон k се сечат во една точка. Докажи дека AC е дијаметар на k.



Решение. Нека тангентата кон кружницата k во точката C ги сече полуправите AB и AD во точките M и N соодветно (види цртеж). Ќе ја примениме теоремата на Менелај за $\triangle AMN$ два пати. Притоа

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{ND}}\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}\frac{\overline{NC}}{\overline{CM}}=1 \text{ и } \frac{\overline{AF}}{\overline{FN}}\frac{\overline{ME}}{\overline{EA}}\frac{\overline{NC}}{\overline{CM}}=1. \qquad (1)$$

Од овие две равенства добиваме

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{ND}}\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FN}}\frac{\overline{ME}}{\overline{EA}}. \qquad (2)$$

Бидејќи $ABCD$ е паралелограм имаме

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{ND}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}. \qquad (3)$$

Бидејќи MN е тангента кон k имаме

$$\overline{MC}^2=\overline{ME}\cdot\overline{MA}, \quad \overline{NC}^2=\overline{NF}\cdot\overline{NA}. \qquad (4)$$

Сега, од (2), (3) и (4) имаме $\overline{AE}\cdot\overline{AM}=\overline{AF}\cdot\overline{AN}$ па според тоа $EFNM$ е тетивен (односно околу него може да се опише кружница). Тогаш $\measuredangle AEF=\measuredangle ANM$, па затоа $AF=AEC-FC$.

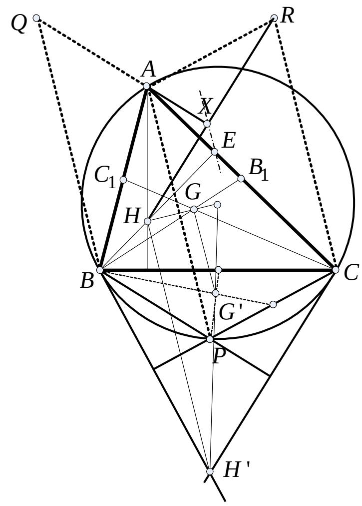
Според тоа $AC=180^\circ$, т.е. AC е дијаметар на k.

22. Триаголникот ABC има ортоцентар H, а P е точка од неговата опишана кружница различна од A,B и C. Точката E е подножје на нормалата BH, а $PAQB$ и $PARC$ се паралелограми. Нека AQ и HR се сечат во X. Докажи дека EX и AP се паралелни.

Решение. Нека G,G' и H' се соодветно тежиште на $\triangle ABC$, тежиште на $\triangle PBC$ и ортоцентар на $\triangle PBC$. Бидејќи триаголниците ABC и BPC имаат заеднички центар на опишаната кружница, од особините на ојлеровата права имаме $\overrightarrow{HH'}=3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AP}$.

Точката G ја дели HO во однос $2:1$, а исто така G' ја дели $H'O$ во однос $2:1$. Бидејќи HO и $H'O$ имаат заедничка пресечна точка O, според теоремата на Талес $GG'\parallel HH'$ и $\overline{GG'}=\frac{1}{3}\overline{HH'}$.

Ако низ G и G' повлечеме прави паралелни со BA и BP нивниот пресек е точка S која припаѓа на BC при што $\overline{SG'} = \frac{1}{3}\overline{BP}$ и $\overline{SG} = \frac{1}{3}\overline{BA}$. Според тоа $\triangle GG'S$ и $\triangle APB$ се слични со коефициент на сличност $\frac{1}{3}$ од каде добиваме $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{GG'}$.



Триаголникот QAR е слика на триаголникот BPC со транслација за вектор $\overrightarrow{PA}$. Сликата на ортоцентарот H' е ортоцентарот на триаголникот QAR, а тоа е точката H. Значи, $RH \perp QA$, од каде следува $\measuredangle AXH = 90^\circ = \measuredangle AEH$. Од последните равенства добиваме дека четириаголникот $AHEX$ е тетивен. Според тоа

$$\measuredangle EXQ = 180^\circ - \measuredangle AHE = 180^\circ - \measuredangle ACB$$

$$= 180^\circ - \measuredangle APB = \measuredangle PAQ,$$

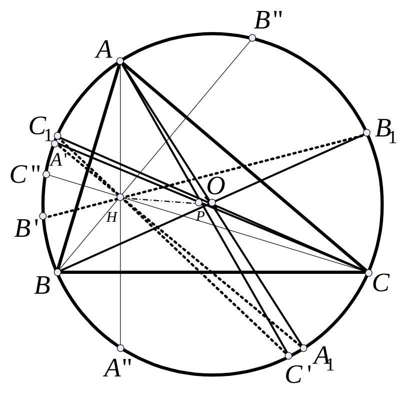
од каде непосредно следува $AP \parallel XE$.

23. Нека k е опишаната кружница околу триаголникот ABC и нека O е нејзиниот центар. Точката H е ортоцентар на ΔABC и правата AH ја сече по втор пат во точката A''. Правата AO ја сече k во A_1, а правата A_1H ја сече k во точката A'. Слично се определуваат точките B', B'', C', C''.

Докажи дека правите $A'A'', B'B''$ и $C'C''$ се сечат во точка од Ојлеровата права за триаголникот ABC.

Решение. Нека правите AC' и CA' се сечат во точката P. Тогаш за $A'AA_1C'CC_1$, според теоремата на Паскал добиваме дека H, O и P се колинеарни (види цртеж). Од друга страна, пак, за $AA''A'CC''C'$ повторно според теоремата на Паскал добиваме дека

$$AA'' \cap CC'' = H$$
$$CA' \cap AC' = P$$



и пресекот на $A'A''$ и $C'C''$ припаѓаат на правата HP, односно на правата HO.

Аналогно, правите $A'A''$ и $C'C''$ се сечат во точката од правата HO.

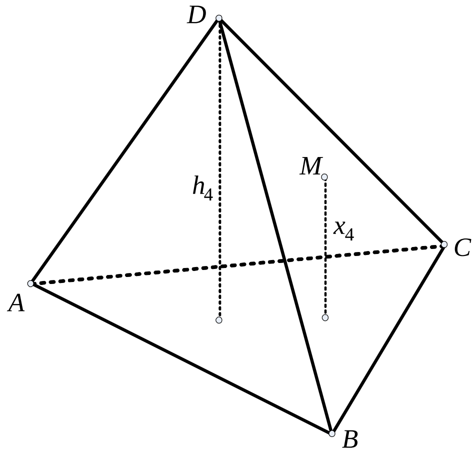
Значи, $A'A'', B'B''$ и $C'C''$ се сечат во една точка од правата HO.

IV СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. РАБЕСТИ ТЕЛА

1. Ако x_1, x_2, x_3 и x_4 се растојанијата од произволна точка M во еден тетраедар $ABCD$ до неговите ѕидови, а h_1, h_2, h_3 и h_4 се соодветните висини на тетраедарот, тогаш

$$\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}=1.$$



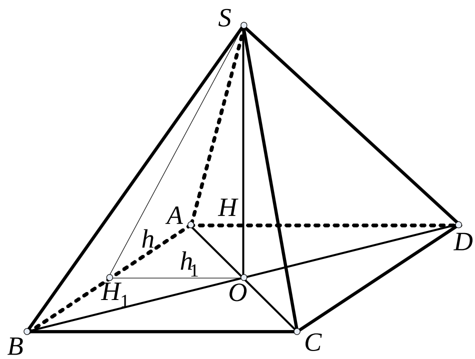
Решение. Нека h_1, h_2, h_3 и h_4 се висините спуштени од темињата A, B, C и D соодветно. Плоштините на триаголниците BCD, ACD, ABD и ABC да ги означиме соодветно со S_1, S_2, S_3 и S_4. Тогаш

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}&=\frac{\frac{1}{3}x_1\cdot S_1}{\frac{1}{3}h_1\cdot S_1}+\frac{\frac{1}{3}x_2\cdot S_2}{\frac{1}{3}h_2\cdot S_2}+\frac{\frac{1}{3}x_3\cdot S_3}{\frac{1}{3}h_3\cdot S_3}+\frac{\frac{1}{3}x_4\cdot S_4}{\frac{1}{3}h_4\cdot S_4}\\ &=\frac{V_{BCDM}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ACDM}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ABDM}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ABCM}}{V_{ABCD}}\\ &=\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}}=1\end{aligned}$$

2. Основата на правилна четириаголна пирамида е ромб со страна $a=2\text{ cm}$, составен од два рамнострани триаголници. Пократкиот раб на пирамидата има должина $b=2\text{ cm}$. Да се определи плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Бидејќи основата на пирамидата е ромб составен од два рамнострани триаголници со страна $a=2\ cm$ имаме

$$B=2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$



За да ја определиме плоштината на обвивката на пирамидата треба да ја определиме висината $h=\overline{SH_1}$. Триаголникот ACS е рамностран со страна a, па неговата висина е $H=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи ΔAEO е половина од рамностран триаголник, неговата висина h_1 е половина од висината на ΔAEC, т.е. $h_1=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Но ΔH_1OS е правоаголен па $h=\sqrt{H^2+h_1^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{16}a^2}=\frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Значи, плоштината на пирамидата е $P = B + 4 \cdot \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2\frac{a^2\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{3}(1+\sqrt{5})$, а волуменот на пирамидата е $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4} = 2$.

3. Основата на права четиристрана призма е ромб чии дијагонали се разликуваат за $14\ cm$. Ако помалата дијагонала се зголеми за 2, а поголемата се намали за 4, плоштината на ромбот останува иста. Да се пресмета плоштината на призмата ако нејзината висина е два пати поголема од страната на ромбот.

Решение. Дијагоналите на ромбот да ги означиме со d_1 и d_2, $d_1 > d_2$. Од условите на задачата имаме: $d_1 - d_2 = 14$, $\frac{d_1 d_2}{2} = \frac{(d_1-4)(d_2+2)}{2}$, од каде што добиваме $d_1 = 24$, $d_2 = 10$.

Бидејќи дијагоналите во секој ромб се заемно нормални(направи цртеж), следува дека

$$a^2 = (\tfrac{d_1}{2})^2 + (\tfrac{d_2}{2})^2 = 12^2 + 5^2 = 169,\ \text{т.е. } a = 13.$$

На крајот, за плоштината P на призмата ќе имаме $P = 2\frac{d_1 d_2}{2} + 4aH = 1592$.

4. Да се пресмета волуменот на правилна четристрана пирамида со основен раб $14cm$ и апотема $25cm$.

Решение. За висината на пирамидата имаме

$$H = \sqrt{h^2 - (\tfrac{a}{2})^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24,\ H = 24cm$$

од каде што следува дека волуменот

$$V = \tfrac{1}{3}BH = \tfrac{1}{3}a^2 H = \tfrac{1}{3}14^2 \cdot 24 = 1568,\ V = 1568cm^3.$$

5. Ортогоналната проекција на едно теме на тетраедарот $ABCD$ врз спротивната страна се совпаѓа со ортоцентарот на таа страна. Да се докаже дека важи равенството $\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$.

Решение. *Прв начин.* Согласно правилото на триаголник за собирање на вектори, имаме:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC}) + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

па затоа

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC})^2. \tag{1}$$

Понатаму:

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}. \tag{2}$$

Но, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{HD} \perp \overrightarrow{BC}$ па затоа

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$$

тоа од (2) имаме:

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2 \cdot 0 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2. \tag{3}$$

Слично,

$$(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC})^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2 \tag{4}$$

Од (1), (3) и (4) следува

$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2.$$

Втор начин. Нека отсечката B_1D е апотема на бочната страна ACD од тетраедарот $ABCD$, т.е. $B_1D\perp AC$ (направи цртеж). Имаме:

$$\overline{AD}^2=\overline{AB_1}^2+\overline{B_1D}^2 \quad \text{и} \quad \overline{BC}^2=\overline{BB_1}^2+\overline{B_1C}^2,$$

од каде што:

$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB_1}^2+\overline{B_1D}^2+\overline{BB_1}^2+\overline{B_1C}^2$$

$$=(\overline{AB_1}^2+\overline{BB_1}^2)+(\overline{B_1D}^2+\overline{B_1C}^2)=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$$

што и требаше да се докаже.

6. Една правилна четириаголна пирамида има плоштина $P=800cm^2$ и бочна плоштина $M=544cm^2$. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

Решение. Основата на пирамидата е квадрат. Нека страната на квадратот е a, а висината на бочната страна е h. Имаме:

$$P=\tfrac{4ah}{2}+a^2=800 \;\text{ и }\; M=\tfrac{4ah}{2}=544$$

од што следува $a^2=800-544=256$, па затоа $a=16cm,\ h=17cm$. Понатаму, од правоаголниот триаголник $\angle SOL$ имаме

$$H^2=h^2-OL^2=17^2-(\tfrac{16}{2})^2=225 \;\text{ т.е. }\; H=15cm.$$

Конечно, за волуменот на пирамидата наоѓаме

$$V=\tfrac{a^2H}{2}=\tfrac{256\cdot 15}{3}=1280cm^3.$$

7. Основата на една права призма е ромб со плоштина $6cm^2$, плоштините на дијагоналните пресеци се $Q_1=21cm^2$ и $Q_2=28cm^2$. Да се пресметаат волуменот V и плоштината P на призмата.

Решение. Основата на пирамидата да ја означиме со a, работ со b. Волуменот на призмата е $V=BH=\frac{d_1d_2}{2}b$ каде d_1 и d_2 се дијагоналите на ромбот, а плоштината е $P=B+4ab=\frac{d_1d_2}{2}+4ab$. Од условот на задачата имаме

$$Q_1=d_1b=21, Q_2=d_2b=28, B=\tfrac{d_1d_2}{2}=6$$

од што го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} d_1b=21 \\ d_2b=28 \\ d_1d_2=12 \end{cases} \tag{1}$$

Ако ги помножиме првите две равенки во (1) и ги поделиме со третата равенка добиваме $b^2=49$, од што следува $b=7$. Сега, со замена во првите две равенки на

(1) наоѓаме $d_1 = 3$ и $d_2 = 4$. Понатаму, дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол, па од Питагоровата теорема следува $a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2 = \frac{25}{4}$, што значи $a = \frac{5}{2}$. Конечно, со замена во формулите за плоштината и волуменот наоѓаме $V = 42cm^3$ и $P = 76cm^2$.

8. Основата на една пирамида е правоаголник со димензии $a = 5cm$ и $b = 6cm$, а секој бочен раб изнесува $c = 13cm$. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

Решение. Волуменот на пирамидата е $V = \frac{BH}{3} = \frac{abH}{3} = 10H$. Од правоаголниот триаголник AOS следува $H^2 = c^2 - \overline{AO}^2$. Но,

$$\overline{AO} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 6^2} = \frac{1}{2}\sqrt{61}$$

па затоа $H = \sqrt{169 - \frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{615}}{2} cm$. Конечно, $V = 5\sqrt{615} cm^3$.

9. Основата на една правилна пирамида е правоаголник со димензии $a = 16cm$ и $b = 12cm$. Ортогоналната проекција на врвот од пирамидата се совпаѓа со пресекот на дијагоналите на правоаголникот и дијагоналниот пресек има плоштина $Q = 240cm^2$. Да се пресмета волуменот V на пирамидата.

Решение. Волуменот на пирамидата е $V = \frac{BH}{3} = \frac{16 \cdot 12H}{3} = 64H.$ Од триаголникот ABC имаме $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{256 + 144} = 20$. Понатаму,

$$240 = Q = \frac{dH}{2} = \frac{20H}{2} = 10H,$$

па затоа $H = 24cm$. Конечно,

$$V = 64H = 64 \cdot 24cm^3 = 1536cm^3.$$

10. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $384cm^2$, а основниот раб и висината се однесуваат како $3:2$.

а) Да се најдат рабовите и висината на пирамидата.

б) Да се најде волуменот на пирамидата.

в) Да се најде волуменот на коцката впишана во пирамидата.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $a : H = 3 : 2$ т.е. $H = \frac{2a}{3}$. Понатаму, од правоаголниот триаголник во кој апотемата е хипотенуза, а едната катета е висината добиваме

$$h^2 = H^2 + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{2a}{3})^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{9} + \frac{a^2}{4} = \frac{25a^2}{36}$$

па затоа $h = \frac{5a}{6}$. Значи,

$$P = B + M = a^2 + 4\frac{ah}{2} = a^2 + 2ah = a^2 + 2a \cdot \frac{5a}{6} = \frac{8a^2}{3}$$

па затоа $384 = \frac{8a^2}{3}$, од што следува $a = 12cm$. Според тоа, $h = \frac{5a}{6} = 10cm$ и $H = \frac{2a}{3} = 8cm$. Конечно, од правоаголниот триаголник во кој околниот раб е хипотенузата, а апотемата е едната катета добиваме

$$b=\sqrt{h^2+(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{136}cm\,.$$

б) За волуменот на пирамидата имаме

$$V=\tfrac{BH}{3}=\tfrac{a^2H}{3}=\tfrac{12^2 8}{3}cm^3=384cm^3.$$

в) Нека c е работ на коцката впишана во пирамидата (направи цртеж). Тогаш дијагоналата на страната е $d_1=c\sqrt{2}$, а дијагоналата на основата на пирамидата е $d=a\sqrt{2}$. Имаме

$$(H-c):H=c\sqrt{2}:a\sqrt{2}$$

од што следува дека

$$c=\tfrac{aH}{a+H}=\tfrac{12\cdot 8}{12+8}=\tfrac{24}{5}cm\,.$$

Конечно, за волуменот на впишаната коцка добиваме

$$V=c^3=(\tfrac{25}{4})^3cm^3\,.$$

11. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $360cm^2$, а работ на основата е $10cm$.

а) Да се најде волуменот на пирамидата.

б) Да се најде волуменот на впишаната топка во пирамидата.

Решение. а) Волуменот на пирамида е $V=\tfrac{BH}{3}=\tfrac{a^2H}{3}$

Плоштината на пирамида е $P=B+M=a^2+2ah$, каде h е висината на бочната страна, па затоа $10^2+20h=360$ т.е. $h=13cm$. Од правоаголниот ΔSS_2O_1 добиваме $H=\sqrt{h^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{169-25}=12cm$. Според тоа, волуменот на пирамидата е

$$V=\tfrac{a^2H}{3}=\tfrac{10^2\cdot 12}{3}cm^3=400cm^3\,.$$

б) Волуменот на топка е $V=\tfrac{4}{3}R^3\pi$. Имаме $(H-R):h=R:\tfrac{a}{2}$ од што добиваме $R=\tfrac{aH}{2h+a}$, па затоа $R=\tfrac{10}{3}cm$. Конечно,

$$V=\tfrac{4}{3}R^3\pi=\tfrac{4}{3}(\tfrac{10}{3})^3\pi cm^3=\tfrac{4000}{81}\pi cm^3\,.$$

12. Пет бакарни коцки со должини на рабовите 15, 16, 20, 24 и 30 cm соодветно, треба да се слеат во една топка. Да се пресмета дијаметарот на топката и односот од збирот на плоштините на коцките и плоштината на топката.

Решение. Да го означиме со V (P) волуменот (плоштината) на топката чиј што радиус треба да се определи, а со V_1,V_2,V_3,V_4 и V_5 (P_1,P_2,P_3,P_4 и P_5) волумените (плоштините) на коцките чиишто должини на рабовите се 15, 16, 20, 24 и 30 cm, соодветно.

Јасно е дека збирот од волумените на коцките е еднаков со волуменот на топката, т.е.

$$V_1+V_2+V_3+V_4+V_5=V\,,$$

т.е.

$$15^3+16^3+20^3+24^3+30^3=\tfrac{4}{3}R^3\pi ,$$

од каде што добиваме $R=\sqrt[3]{\frac{42221,25}{\pi}}\ cm$, па дијаметарот на топката е

$$D=2R=2\sqrt[3]{\frac{42221,25}{\pi}}\ cm .$$

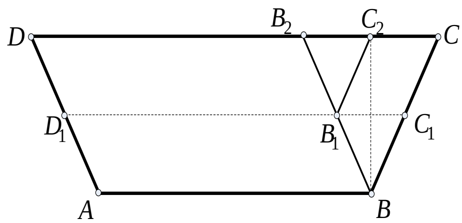
Сега да го определиме односот на збирот на плоштините на коцките спрема плоштината на топката. Имаме:

$$\frac{P_1+P_2+P_3+P_4+P_5}{P}=\frac{6(15^2+16^2+20^2+24^2+30^2)}{4\cdot 23,8^2\cdot\pi}\approx 1,9 .$$

13. Канал за вода со должина од $5\ m$ може да прими вода од $1,440\,m^3$. Напречниот пресек на каналот е рамнокрак трапез чиј крак е $52\ cm$ и висина $48\ cm$.

Колку вода може да прими тој канал ако се наполни до половина висина?

Решение. На цртежот , трапезот $ABCD$ го претставува пресекот на каналот, $BB_2 \parallel AD$, B_1 е средина на BB_2, $B_1C_1 \parallel AB$ и C_2 е подножната точка на висината, спуштена од B. Бидејќи $\triangle BCB_2$ е рамнокрак, точката C_2 е средина на CB_2. Според тоа, $B_1C_1 \parallel BC$ и



$$\overline{CC_2}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{C_2B}^2}=\sqrt{0,52^2-0,48^2}=0,2\ m .$$

Нека V е волуменот на водата кога каналот е наполнет со вода до половина на висината, а $V_1=1,440\ m^3$ кога е полн. Бидејќи трапезите ABC_1D_1 и $D_1B_1C_2D$ се складнии, $V_1=2V+P\cdot 5$ каде што P е плоштината на паралелограмот $B_1C_1CC_2$

$$P=\overline{CC_2}\cdot\frac{\overline{C_2B}}{2}=0,2\cdot 0,24=0,048\ m^2.$$

Според тоа,

$$V=\frac{1,44-0,048\cdot 5}{2}=0,6\ m^3 .$$

14. Основата на права четиристрана призма е ромб чии дијагонали се разликуваат за $10\ cm$. Ако поголемата дијагонала се зголеми за $2\ cm$, а помалата се намали за $1\ cm$, плоштината на ромбот останува иста.

Пресметај ја плоштината на призмата ако нејзината висина е двапати поголема од страната на ромбот.

Решение. Ако d_1 и d_2 се дијагоналит на ромбот, тогаш според условот на задачата, имаме:

$$d_1-d_2=10 , \qquad \frac{d_1d_2}{2}=\frac{(d_1+2)(d_2-1)}{2} ,$$

од каде што добиваме $d_1=22\ cm$, $d_2=12\ cm$.

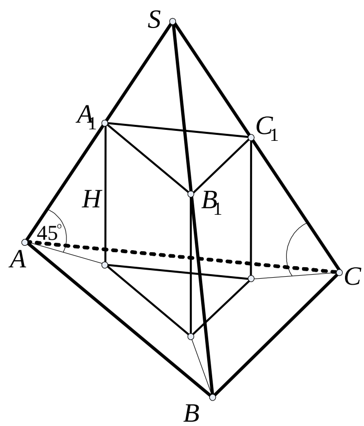
Дијагоналите на секој ромб се заемно нормални, па за страната a на ромбот ќе имаме:

$$a^2 = (\tfrac{d_1}{2})^2 + (\tfrac{d_2}{2})^2 = 157 \text{, т.е. } a = \sqrt{157}\ cm .$$

Висината на призмата е $H = 2\sqrt{157}\ cm$, па за плоштината P на призмата ќе имаме: $P = 2B + M = 2\frac{d_1 d_2}{2} + 4aH = 1520\ cm^2$.

15. При тристрана пресечена пирамида рабовите на помалата основа се $7\ cm$, $5\ cm$ и $3\ cm$, а бочните рабови со рамнината на поголемата основа зафаќаат агол од 45°. Да се пресмета волуменот на пресечената пирамида, ако нејзината висина е $\frac{2}{3}$ од висината на соодветната пирамида.

Решение. Нека $ABCA_1B_1C_1$ е пресечената пирамида, а $ABCS$ соодветната пирамида (види цртеж). Од тоа што бочните рабови на поголемата основа зафаќаат агол од 45°, следува дека $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$, па значи, проекцијата на S врз рамнината ABC е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Сега, лесно се увидува дека $H = 2R_1$, каде што H е висината на пресечената пирамида, а R_1 е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот $A_1B_1C_1$.



Според Хероновата формула, за плоштината P_1 на триаголникот $A_1B_1C_1$ имаме:

$$P_1 = \sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)} = \frac{15\sqrt{3}}{4}\ cm^2,$$

па

$$R_1 = \frac{a_1b_1c_1}{4P_1} = \frac{7\sqrt{3}}{3}\ cm, \qquad H = \frac{14\sqrt{3}}{3}\ cm.$$

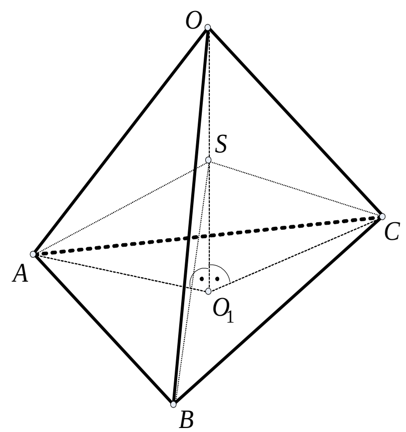
Висината на соодветната пирамида е $H_1 = \frac{3}{2}H = \frac{14\sqrt{3}}{2} cm$, па за плоштината P на триаголникот ABC ќе имаме: $P : P_1 = (\frac{14\sqrt{3}}{2})^2 : (\frac{14\sqrt{3}}{2} - \frac{14\sqrt{3}}{3})^2$, т.е. $P = 9P_1$. На крајот за волуменот V на пресечената пирамида ќе имаме:

$$V = \frac{H}{3}(P + P_1 + \sqrt{PP_1}) = \frac{13}{3}HP_1 = 227{,}5 cm^3$$

16. Во правилен тетраедар $ABCO$, средината S на висината, спуштена од темето O, е сврзана со темињата A, B, C. Да се докаже дека отсечките SA, SB, SC се заемно нормални.

Решение. Ќе покажеме само дека триаголникот ASC е правоаголен со прав агол кај темето S (види цртеж). Нека a е работ на тетраедарот; тогаш имаме

$$\overline{AO_1} = \overline{CO_1} = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ \overline{SO_1} = \frac{a}{6}\sqrt{6},\ \overline{AS} = \overline{CS} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



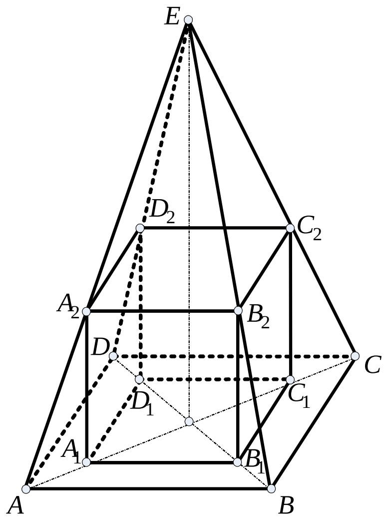
Бидејќи $\overline{AS}^2+\overline{CS}^2=a^2=\overline{AC}^2$, следува дека ASC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето S, т.е. $AS\perp CS$.

17. Во правилна четиристрана пирамида е впишана коцка, така што 4 нејзини темиња лежат на рабовите на пирамидата, а останатите 4 на основата на пирамидата. Определи ја страната на коцката, ако страната на пирамидата е a а висината е H.

Решение. Нека коцката $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ со страна y, е впишана во пирамидата $ABCDE$, со страна a и висина H, со дадениот услов, како на цртежот. Веднаш се гледа дека $\triangle ACE\sim\triangle A_2C_2E$, од што следува дека

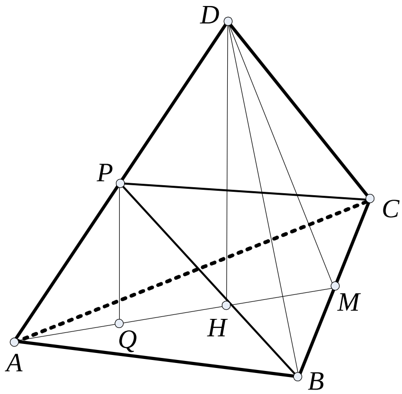
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A_2C_2}}=\frac{a\sqrt{2}}{y\sqrt{2}}=\frac{H}{H-y},$$

т.е. $a(H-y)=Hy$. Од ова равенство следува $y=\frac{aH}{a+H}$.



18. Дадена е правилна триастрана пирамида со основен раб a и висина h. Да се најде плоштината на пресекот на пирамидата со рамнина која минува низ еден од основните рабови и низ средината на спротивниот бочен раб.

Решение. Нека $ABCD$ е дадената пирамида со основа ABC, нека P е средина на AD, нека пресекот е BPC, нека M е средина на BC и нека H е тежиштето на триаголникот ABC. Тогаш $\overline{DH}=h$ и $\overline{AM}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Нека Q е точка од MA за која $PQ\parallel DH$ (види цртеж). Бидејќи P е средина на AD, следува дека PQ е средна линија на триаголникот ADH и $\overline{PQ}=\frac{h}{2}$. Значи,



$\overline{AQ}=\overline{QH}=\overline{MH}=\frac{\overline{AM}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $\overline{MQ}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

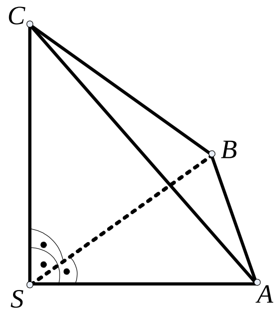
Бидејќи $DH\perp MA$, следува дека $PQ\perp MQ$. Според тоа

$$\overline{PM}^2=\overline{MQ}^2+\overline{QP}^2=\frac{a^2}{3}+\frac{h^2}{4}$$

па бараната плоштина е

$$P=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{PM}}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{h^2}{4}}.$$

19. Бочните рабови на тристрана пирамида се нормални меѓу себе. Плоштините на бочните ѕидови се B_1, B_2, B_3. Да се докаже дека волуменот на пирамидата е $\frac{1}{3}\sqrt{2B_1B_2B_3}$.



Решение. Пирамидата е прикажана на цртежот, при што B_1, B_2, B_3 се плоштините на ѕидовите ABS , BCS и CAS соодветно. Волуменот на пирамидата е

$$V=\frac{1}{3}B_3\cdot\overline{SB}=\frac{1}{6}\overline{AS}\cdot\overline{BS}\cdot\overline{CS}\,.$$

Од тоа што

$$B_1\cdot B_2\cdot B_3=\frac{1}{8}\overline{AS}\cdot\overline{BS}\cdot\overline{BS}\cdot\overline{CS}\cdot\overline{CS}\cdot\overline{AS}=\frac{1}{8}\overline{AS}^2\cdot\overline{BS}^2\cdot\overline{CS}^2$$

следува дека

$$V=\frac{1}{6}\sqrt{8B_1\cdot B_2\cdot B_3}=\frac{1}{3}\sqrt{2B_1\cdot B_2\cdot B_3}\,.$$

20. Отсечките OA, OB и OC се заемно нормални и нивните должини се a, b и c соодветно. Да се докаже дека растојанието од точката O до рамнината ABC е

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение. Земајќи го триаголникот OAB за основа на пирамидата, за волуменот на пирамидата ќе имаме $V=\frac{abc}{6}$. Земајќи го пак триаголникот ABC за основа, ќе имаме

$$\frac{abc}{6}=\frac{P_{ABC}\cdot H}{3},$$

т.е.

$$H=\frac{abc}{2P_{ABC}}\,. \tag{1}$$

За плоштината P_{ABC}, според Хероновата формула, ќе имаме (x, y и z се страните на триаголникот ABC):

$$\begin{aligned}16P_{ABC}^2&=16s(s-x)(s-y)(s-z)=16\,\frac{x+y+z}{2}\cdot\frac{y+z-x}{2}\cdot\frac{x+z-x}{2}\cdot\frac{x+y-z}{2}\\&=(x^2+y^2+2xy-z^2)(z^2-x^2-y^2+2xy)\end{aligned}$$

Но, $x^2=a^2+b^2$, $y^2=b^2+c^2$, $z^2=c^2+a^2$, па:

$$\begin{aligned}16P_{ABC}^2&=(2b^2+2xy)(2xy-2b^2)=4(b^4-x^2y^2)=4[b^4-(a^2+b^2)(b^2+c^2)]\\&=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\end{aligned}$$

Значи,

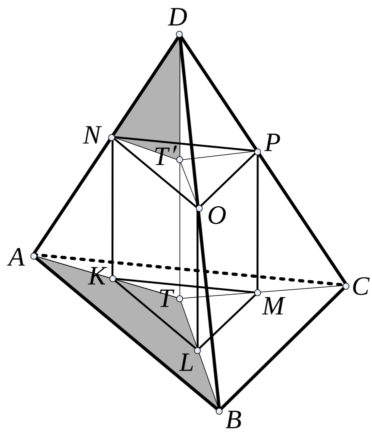
$$P_{ABC}^2=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\,.$$

Заменувајќи во (1), добиваме:

$$H^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-1},$$

од каде следува тврдењето на задачата.

21. Во еднакворабна тристана пирамида (правилен тераедар) со волумен V , впишана е правилна еднакворабна тристрана призма така што три нејзини темиња лежат на основата, а другите три на бочните рабови на пирамидата. Да се пресмета волуменот на призмата!



Решение. Нека a,H,b се соодветно должините на: работ на тетраедарот, висината на тетраедарот, и работ на призмата. Нека DT е висината спуштена од врвот D на основата ABC (види цртеж). Од сличноста на триаголниците ATD и $NT'D$ следува

$$\overline{AT}:\overline{NT'}=\overline{DT}:\overline{T'D}.$$

Бидејќи $AB\,||\,KL$, триаголниците ABT и KTL се слични, па според тоа

$$\overline{AT}:\overline{KT}=\overline{AB}:\overline{KL}.$$

Од горните две равенства и од $\overline{KT}=\overline{NT'}$ добиваме дека $a:b=H:(H-b)$, што заедно со $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, повлекува $b=\frac{aH}{a+H}=a(\sqrt{6}-2)$.

Значи, волуменот V_1 на призмата е

$$V_1=\frac{b^3\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}(6-\sqrt{2})^3.$$

Бидејќи $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, добиваме

$$\frac{V_1}{V}=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)^3}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } V_1=6V(27-11\sqrt{6}).$$

22. Да се пресмета волуменот и плоштината на правилна пресечена четиристрана пирамида со основни рабови $a_1=7cm$, $a_2=5cm$ и дијагонала $D=9cm$.

Решение. Ос d_1 и d_2 да ги означиме дијагоналите на основите на пресечената пирамида. Имаме $d_1=7\sqrt{2}cm$ и $d_2=5\sqrt{2}cm$. Дијагоналниот пресек на пресечената пирамида (види цртеж) е рамнокрак трапез со основи d_1 и d_2, висина H еднаква на висината на пресечената пирамида и крак s еднаков на страничниот раб на пресечената пирамида. Според тоа,

$$H=\sqrt{D^2-(d_2+\tfrac{d_1-d_2}{2})^2}=3cm \text{ и } s=\sqrt{H^2+(\tfrac{d_1-d_2}{2})^2}=\sqrt{11}cm.$$

Понатаму, ако со h ја означиме висината на бочната страна, тогаш

$$h=\sqrt{s^2-(\tfrac{a_1-a_2}{2})^2}=\sqrt{10}cm.$$

Конечно, за волуменот на пресечената пирамида наоѓаме

$$V=\tfrac{H}{3}(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)=109cm^3,$$

а нејзината плоштина е $V=a_1^2+a_2^2+4\frac{a_1+a_2}{2}h=(74+24\sqrt{10})cm^2$.

23. Дадена е пирамида со висина H. Да се пресмета на кое растојание од основата треба да се пресече пирамидата со рамнина паралелна со основата, така што таа да биде поделена на два дела со еднакви волумени.

Решение. Нека пирамидата треба да се пресече со рамнина на висина x од основата. Ако плоштината на основата на пирамидата ја означиме со B, а на пресекот со B_1, тогаш $\frac{B}{B_1}=\frac{H^2}{(H-x)^2}$, од каде

$$B_1=(\tfrac{H-x}{H})^2 B \qquad (1)$$

Од условот на задачата $\frac{BH}{3}=2\frac{B_1(H-x)}{3}$ и равенството (1) имаме

$$BH=2(\tfrac{H-x}{H})^2 B(H-x)$$

т.е. $(\frac{H-x}{H})^3=\frac{1}{2}$, од каде што $\frac{H-x}{H}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ т.е. $x=(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})H\ cm.$

24. Даден е просторен четириаголник $ABCD,$ при што точките $A,B,C,\ D$ не се компланарни. Докажи дека отсечките што ги сврзуваат средините на спротивните страни и отсечката што ги сврзува средините на дијагоналите од четириаголникот, минуваат низ една иста точка која што ги преполовува.

Решение. Нека P,Q,R,S се средини на AB,BC,CD,DA соодветно. Тогаш SP и QR се средни линии на триаголниците ABD и BCD соодветно, па затоа $SP\,||\,DB\,||\,QR$. Слично, PQ и SR се средни линии на триаголниците ABC и ACD, па: $PQ\,||\,AC\,||\,SR$. Значи, четириаголникот $PQRS$ е параллелограм, а паралелограм е рамнински четириаголник во кој дијагоналите (PR и QS) се сечат и преполовуваат. Истата дискусија применета на четириаголникот $ABCD$ покажува дека PR и EF се сечат и се преполовуваат, каде што E и F се средини на BD и CA соодветно. Со тоа, задачата е решена.

25. Плоштините на двете основи на пресечена пирамида се Q и G и висината е H. Да се определи волуменот на целата пирамида и волуменот на отсечената пирамида.

Решение. Нека висината на отсечената пирамида е h. Тогаш висината на целата пирамида е $H+h$. Според теоремата за паралелни пресеци кај пирамиди, важи:

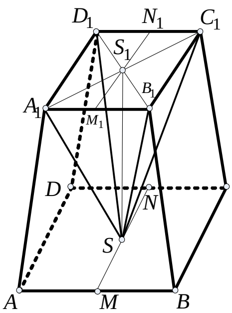
$$\frac{Q}{G}=\frac{(H+h)^2}{h^2},$$

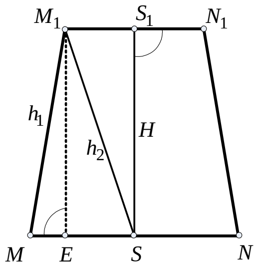
од каде што добиваме дека $h=H\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}}$. Според тоа, волуменот на целата пирамида е $V_c=\frac{1}{3}Q(H+h)=\frac{1}{3}\frac{QH\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}}$, а на отсечената пирамида е

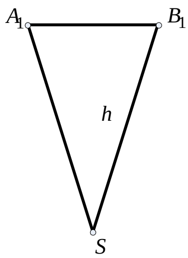
$$V_\circ=\frac{1}{3}Gh=\frac{1}{3}GH\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}}, \text{ т.е. } V_c=\frac{HQ(Q+\sqrt{QG})}{3(Q-G)} \text{ и } V_\circ=\frac{HG(G+\sqrt{QG})}{3(Q-G)}.$$

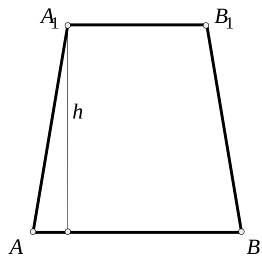
26. Во една правилна четиристрана пресечена пирамида да се впише пирамида, земајќи го за основа горниот квадрат, а за теме центарот на долниот квадрат. Страните на квадратите се: на долниот a, на горниот b. Колку изнесува висината на пирамидата, ако бочните плоштини на двете пирамиди се еднакви?

Решение. Нека M,N,M_1 и N_1 се средини на рабовите AB ,CD, A_1B_1 и C_1D_1 соодветно (види цртеж). Тогаш четириаголникот MNM_1N_1 е трапез со основи $\overline{MN}=a$ и $\overline{M_1N_1}=a$. Се бара висината $H=\overline{SS_1}$ на овој трапез. Нека $\overline{MM_1}=h_1$, $\overline{M_1S}=h_2$. За бочните плоштини P_1 и P_2 на дадената пирамида и вписханата соодветно, ќе имаме:









$$P_1=\frac{4(a+b)}{2}h_1=2(a+b)h_1, \qquad P_2=\frac{4bh_2}{2}=2bh_2.$$

Со $P_1=P_2$ добиваме

$$2(a+b)h_1=bh_2. \tag{1}$$

Од правоаголниот триаголникк MEM_1 (види цртеж) имаме

$$H^2=h_1^2-\frac{(a-b)^2}{4},$$

а од правоаголниот триаголник SS_1M_1 имаме $H^2=h_2^2-\frac{b^2}{4}$. Значи,

$$h_1^2-\frac{(a-b)^2}{4}=h_2^2-\frac{b^2}{4},$$

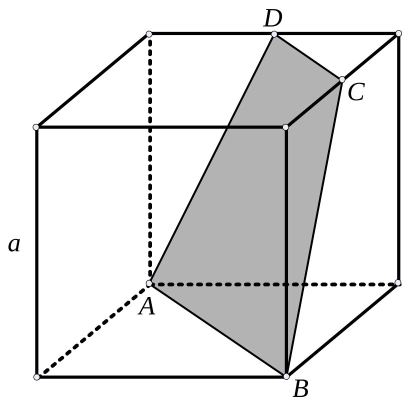
т.е.

$$4h_2^2=4h_1^2-a^2+2ab. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $h_1^2=\frac{b^2(2b-a)}{4(2b+a)}$ па $H^2=\frac{b^2(2b-a)}{4(2b+a)}-\frac{(a-b)^4}{4}=\frac{a(2b^2-a^2)}{4(2b+a)}$.

Задачата има решение ако и само ако $2b^2-a^2>0$, т.е. $a<b\sqrt{2}$.

27. Коцка со раб a пресечена е со рамнина која минува низ дијагоналата на еден ѕид и низ средините на два соседни раба од спротивниот ѕид. Да се пресмета плоштината на пресекот.

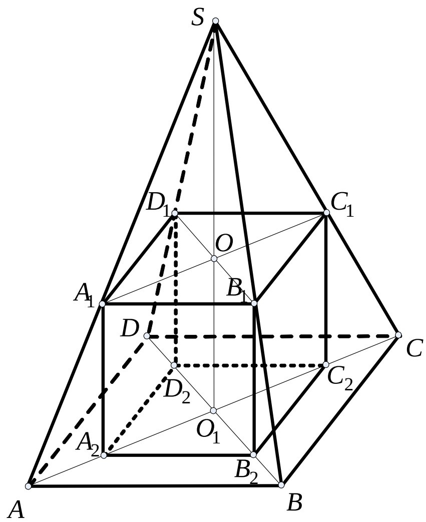


Решение. Пресекот $ABCD$ (види цртеж) е рамнокрак трапез со основи $\overline{AB}=a\sqrt{2}$, $\overline{CD}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и крак $\overline{BC}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. За висината h на трапезот ќе имаме

$$h^2=(\tfrac{a\sqrt{5}}{2})^2-(\tfrac{1}{2}(a\sqrt{2}-\tfrac{a\sqrt{2}}{2}))^2=\tfrac{9a^2}{8}.$$

Значи, $P=\frac{a\sqrt{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{9a^2}{8}$.

28. Во права правилна четириаголна пирамида е впишана коцка, така што четири нејзини раба се на бочните ѕидови на пирамидата, а други четири раба се на основата на пирамидата. Да се определи волуменот и плоштината на коцката ако пирамидата има висина h и основен раб a.

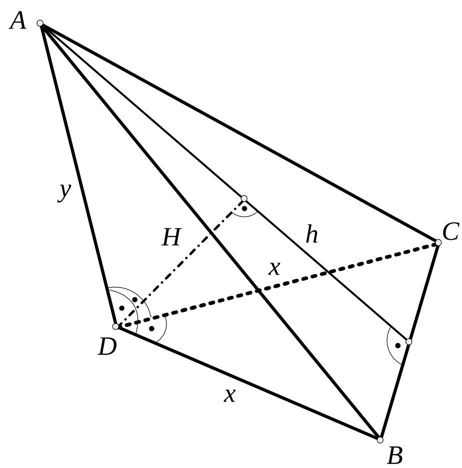


Решение. Пирамидата да ја означиме со $SABCD$, а коцката впишана во неа со $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Да го означиме со x работ на коцката. Од сличноста $\triangle SO_1B\sim\triangle SOB_1$ добиваме $\overline{SO}:\overline{SO_1}=\overline{OB_1}:\overline{O_1B}$. Знаеме дека
$SO_1=h$, $\overline{SO}=h-x$, $\overline{ON}=\frac{x}{2}$, $\overline{O_1B}=\frac{a}{\sqrt{2}}$
од каде се добива $\frac{h-x}{h}=\frac{x}{a}$, т.е. $x=\frac{ah}{a+h}$.

Од овде, за плоштината и волуменот на коцката се добива

$$P=6x^2=6\left(\frac{ah}{a+h}\right)^2,\qquad V=x^3=\left(\frac{ah}{a+h}\right)^3.$$

29. Нека $ABCD$ е тристрана пирамида при што сите три агли кај темето D се прави. Да се пресмета висината на пирамидата спуштена од темето D, ако се дадени должините на рабовите $\overline{AB}=\overline{AC}=5$ и $\overline{BC}=4\sqrt{2}$.



Решение. Триаголниците ABD и ACD се складни, бидејќи се правоаголни триаголници со теме во D, заедничка катета AD и еднакви хипотенузи $\overline{AB}=\overline{AC}$. Од складноста на овие триаголници, добиваме дека $\overline{BD}=\overline{CD}$. Ќе ја означиме оваа должина со x. Триаголникот BCD е правоаголен со теме во D. Според Питагоровата теорема, за неговите страни важи $x^2+x^2=(4\sqrt{2})^2$, од каде што се добива $x=4$.

Да ја означиме должината на работ AD со y. Триаголникот ADB е правоаголен со теме во D. Според Питагоровата теорема, за неговите страни важи $x^2+y^2=5^2$, од каде што се добива $y=3$.

Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак со теме во A, висината спуштена од темето A кон основата BC (чија што должина ја означуваме со h) истата ја преполовува. Според Питагоровата теорема, добиваме

$$h=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}\ .$$

Да ја означиме непознатата должина на висината на пирамидата со H. Волуменот на пирамидата е

$$V=\tfrac{1}{3}P_{ABC}H=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}\cdot H=\tfrac{2}{3}\sqrt{34}\cdot H\ .$$

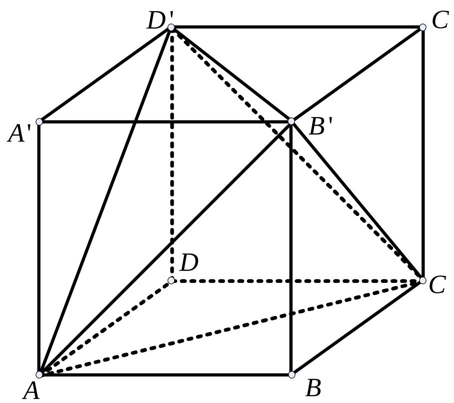
Од друга страна, бидејќи аглите кај темето D се прави, волуменот на пирамидата е

$$V=\tfrac{1}{3}P_{BCD}\cdot y=\tfrac{1}{6}x\cdot x\cdot y=\tfrac{1}{6}\cdot 4\cdot 4\cdot 3=8.$$

Бидејќи, е $B=\frac{2}{3}\sqrt{34}H$, добиваме дека $H=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6}{17}\sqrt{34}$.

30. Нека $ABCDA'B'C'D'$ е коцка со раб a, каде $ABCD$ е еден од ѕидовите на коцката, а AA',BB',CC' и DD' се рабови на коцката. Да се пресмета (во зависност од a) висината на пирамидата $ACB'D'$, спуштена од темето D.

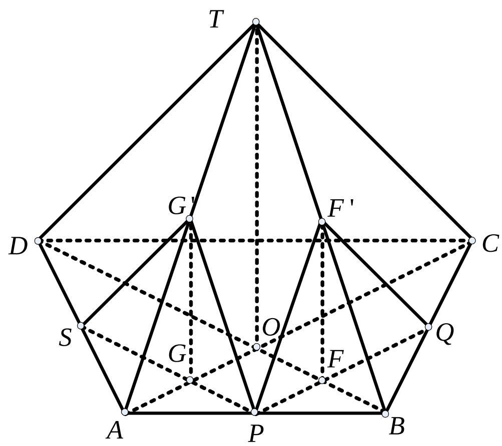
Решение. Веднаш да забележиме дека сите рабови на пирамидата $ACB'D'$ се еднакви и имаат должина $b=a\sqrt{2}$. Значи, $ACB'D'$ се добива од дадената коцка, кога ќе се отстранат четирите еднакви тристрани пирамиди $ACB'B, ACD'D,\ AB'D'A'$ и $CB'D'C'$ со волумени еднакви на $\frac{a^3}{6}$. Значи, волуменот V на $ACB'D'$ е $\frac{a^3}{3}$. Од друга страна за волуменот V важи $V=\frac{b^2h\sqrt{3}}{12}$, каде h е бараната висина, па со изедначување на двата волумени по средувањето, добиваме $h=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.



31. Нека $ABCDT$ е пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња), чии дијагонали AC и BD се сечат во точката O, која е подножје на висината на пирамидата од врвот T. Нека P, Q, R и S се средините на отсечките AB, BC, CD и DA, соодветно. Низ отсечките PQ, QR, RS и SP се повлечени 4 рамнини, нормално на основата на пирамидата кои од пирамидата отсекуваат 4 тристрани пирамиди кои ги отфрламе. Докажи дека плоштината на преостанатиот дел на пирамидата е еднаква на вкупната плоштина на четирите отфрлени пирамиди.

Решение. Нека F е пресечна точка на отсечките PQ и $BD.$ Отсечката PQ е средна линија за триаголникот ABC. Затоа F е средина на отсечката $BO,$ а висината FF' на отфрлената пирамида со основа PQB е средна линија на триаголникот OTB. Заклучуваме дека отсечките PF и QF' се средни линии на триаголниците ATB и CTB, соодветно. Аналогни заклучоци можат да се изведат за секоја од отфрлените пирамиди.

За да се пресмета вкупната плоштина на отфрлените пирамиди, од интерес е да се знае вкупната плоштина на нивните основи. Од друга страна, не е тешко да се покаже дека средните линии на секој триаголник истиот го делат на четири триаголници со еднаква плоштина, односно секој од добиените четири дела има плоштина еднаква на четвртина од плоштината на дадениот триаголник. Оттаму следува дека вкупната плоштина $B_\circ$ на основите на отфрлените пирамиди е



$$B_\circ = P_{PQB} + P_{RSD} + P_{QRC} + P_{SPA} = \tfrac{1}{4}(P_{ACB} + P_{BDC} + P_{CDA} + P_{DBA}) = \tfrac{1}{4}2B = \tfrac{B}{2},$$

каде со B е означена плоштина на основата $ABCD$. Значи, половина од плоштината на основата на почетната пирамида е во преостанатиот дел, а половина учествува во плоштината на отфрлените пирамиди.

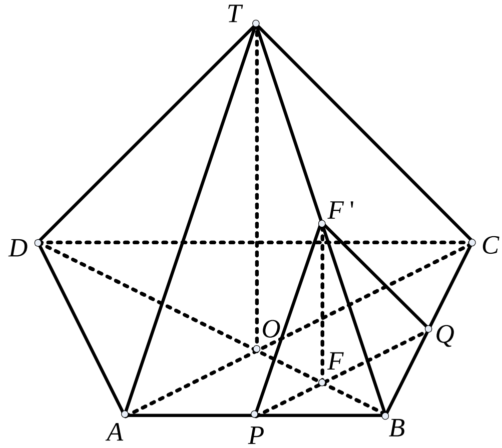
Нека плоштината на обвивката на почетната пирамида е M. Да го разгледаме триаголникот ABT. Два од четирите дела на кои тој е поделен со своите средни линии се во преостанатиот дел, а два се во отфрлените пирамиди. Аналогна дискусија може да се изврши и за другите бочни ѕидови на почетната пирамида. Значи, половина од плоштината на обвивката на почетната пирамида е во преостанатиот дел, а половина учествува во плоштината на отфрлените пирамиди.

Сите преостанати ѕидови се всушност ѕидовите по кои е вршено отсекувањето на отфрлените делови и истите се заеднички заз преостанатиот дел и за отфрлените пирамиди. Нека нивната плоштина е Z.

Значи, плоштината на преостанатиот дел, како и вкупната плоштина на отфрлените пирамиди, е еднаква на $\frac{B}{2} + \frac{M}{2} + Z$.

32. Нека $ABCDT$ е пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња), чии дијагонали AC и BD се сечат во точката O, која е подножје на висината на пирамидата од врвот T. Нека P, Q, R и S се средини на отсечките AB, BC, CD и DA соодветно. Низ отсечките PQ, QR, RS и SP се повлечени четири рамнини, нормално на основата на пирамидата, кои од пирамидата отсекуваат 4 тристрани пирамиди кои ги отфрламе. Докажи дека волуменот на преостанатиот дел на пирамидата е три четвртини од волуменот на пирамидата $ABCDT$.

Решение. Нека F е пресечната точка на отсечките PQ и BD. Отсечката PQ е средна линија за триаголникот ABC. Затоа F е средина на отсечката BO, а висината на отфрлената пирамида со основа PQB е средна линија на



триаголникот OTB. Значи, висината $H_\circ$ на оваа пирамида е половина од висината H на почетната пирамида. Истото важи за висината на секоја од четирите отфрлени пирамиди. За да се пресмета вкупниот волумен на отфлените пирамиди од интерес е да се знае вкупната плоштина на нивните основи. Од друга страна, не е тешко да се покаже дека средните линии на секој триаголник истиот го делат на четири триаголници со еднаква плоштина, односно секој од добиените четири дела има плоштина еднаква на четвртина од плоштината на дадениот триаголник. Оттаму следува дека вкупната плоштина $B_\circ$ на основите на отфрлените пирамиди е:

$$B_\circ = P_{PQB} + P_{QRC} + P_{RSD} + P_{SPA} = \tfrac{1}{4}(P_{ABC} + P_{BCD} + P_{CDA} + P_{DBA}) = \tfrac{1}{4}2B = \tfrac{B}{2}.$$

каде со B е означена плоштината на основата $ABCD$. Вкупниот волумен на отфрлените пирамиди $V_\circ$ е

$$V_\circ = \tfrac{1}{3}B_\circ H_\circ = \tfrac{1}{3}\tfrac{B}{2}\tfrac{H}{2} = \tfrac{1}{4}\tfrac{BH}{3},$$

па волуменот на преостанатиот дел е $\frac{3}{4}\frac{BH}{3}$.

33. Даден е квадрат $ABCD$ со страна a и центар во точката O. Низ спротивните темиња A и C на квадратот се повлечени полуправи AX и CY нормални на рамнината на квадратот и од иста страна на таа рамнина. На AX е земена точка M таква што $\overline{OM} = a$, а на CY точка N таква што $\overline{MN} = 2a$. Докажете дека MN е нормална на рамнината DMB.

Решение. Ќе покажеме дека ΔMON е правоаголен, т.е.

$$\overline{OM}^2 + \overline{NM}^2 = \overline{ON}^2.$$

Од $\triangle OMA$ (нацртај цртеж) наоѓаме

$$\overline{MA}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2 = a^2 - \tfrac{a^2}{2} = \tfrac{a^2}{2}$$

па според тоа $\overline{MA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Нека P е точка на полуправата CY таква што $\overline{PC} = \overline{MA}$. Од ΔMPN катетата NP изнесува $\overline{NP} = \sqrt{(2a)^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$. Бидејќи $\overline{PC} = \overline{MA}$, имаме

$$\overline{NC} = \overline{PC} + \overline{NP} = \overline{MA} + \overline{NP} = \tfrac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2} = \tfrac{3a}{2}\sqrt{2}.$$

За $\triangle OCN$ важи:

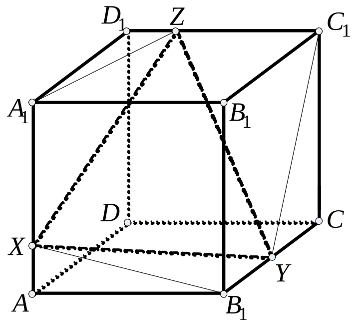
$$\overline{ON}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{NC}^2 = (\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2 + (\tfrac{3a\sqrt{2}}{2})^2 = 5a^2.$$

Тогаш,

$$\overline{ON}^2 + \overline{NM}^2 = a^2 + 4a^2 = \overline{ON}^2 .$$

34. На три разминувачки рабови на коцка со раб a се избрани темиња на триаголник, различни од темињата на коцката, такви што збирот од квадратите на страните на тој триаголник да биде најмал. Колкав е тој збир?

Решение. На рабовите AA_1, BC и C_1D_1 ги избираме точките X, Y и Z соодветно. Означуваме $\overline{AX} = x$, $\overline{BY} = y$, $\overline{C_1Z} = z$, и $\overline{AB} = a$. Тогаш:



$$\overline{XY}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{BY}^2 = \overline{XA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BY}^2$$
$$= x^2 + a^2 + y^2$$
$$\overline{YZ}^2 = \overline{YC_1}^2 + \overline{C_1Z}^2 = \overline{YC}^2 + \overline{CC_1}^2 + \overline{C_1Z}^2$$
$$= (a-y)^2 + a^2 + z^2$$
$$\overline{ZX}^2 = \overline{ZA_1}^2 + \overline{A_1X}^2 = \overline{ZD_1}^2 + \overline{D_1A_1}^2 + \overline{A_1X}^2 = (a-z)^2 + a^2 + (a-x)^2$$

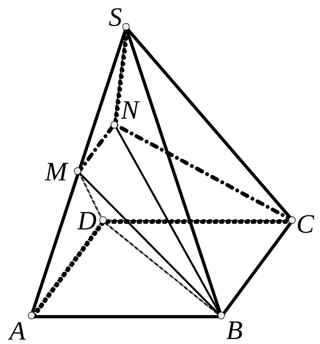
Со собирање на последните три равенства добиваме:

$$\overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 + \overline{ZX}^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x+y+z) + 6a^2$$
$$= 2[(x-\tfrac{a}{2})^2 + (y-\tfrac{a}{2})^2 + (z-\tfrac{a}{2})^2 + \tfrac{9}{4}a^2] .$$

Овој збир ќе биде најмал ако $x = y = z = \frac{a}{2}$, односно ако точките X, Y и Z се средини на соодветните рабови. Значи, најмалиот збир е $\frac{9}{4}a^2$.

35. Дадена е правилна четириаголна пирамида $SABCD$ со основа $ABCD$. Низ темињата B, C и низ средината $z + \sqrt{x} = 3$ на работ SA е повлечена рамнина. Најди го соодносот на волумените на деловите од пирамидата, на кои е поделена со дадената рамнина.

Решение. Нека волуменот на дадената пирамида е V, а должината на висината на пирамидата $ABCDS$ е H. Рамнината низ точките B, C и M го сече работ SD во точката N која е негова средина. Со V_1 ќе го означиме волуменот на $ABCDMN$, а со V_2 волуменот $BCMNS$. Забележуваме дека



$$V_1 = V_{ABDM} + V_{DMNB} + V_{BCDN}$$
$$V_{ABDM} = \tfrac{1}{3} P_{ABD} \tfrac{H}{2} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} P_{ABCD} \tfrac{H}{2} = \tfrac{1}{4} V$$
$$V_{BCDN} = \tfrac{1}{3} P_{BCD} \tfrac{H}{2} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} P_{ABCD} \tfrac{H}{2} = \tfrac{1}{4} V .$$

Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ADS, следува дека $P_{DNM} = \frac{1}{4} P_{ADS}$. Ако со H_1 ја означиме висината на пирамидата $ABDS$ спуштена од темето B

кон ѕидот ADS, тогаш за волуменот на пирамидата имаме $V_{ADSB}=\frac{1}{3}P_{ADS}\cdot H_1$. Но, $V_{ADSB}=\frac{1}{2}V$, па за волуменот на пирамидата $DNMB$ добиваме

$$V_{DNMB}=\frac{1}{3}P_{DNM}\cdot H_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}P_{ADS}\cdot H_1=\frac{1}{4}V_{ABDS}=\frac{1}{8}V$$

Конечно,

$$V_1=\frac{1}{4}V+\frac{1}{8}V+\frac{1}{4}V=\frac{5}{8}V\text{ , а }V_2=V-V_1=\frac{3}{8}V\text{ .}$$

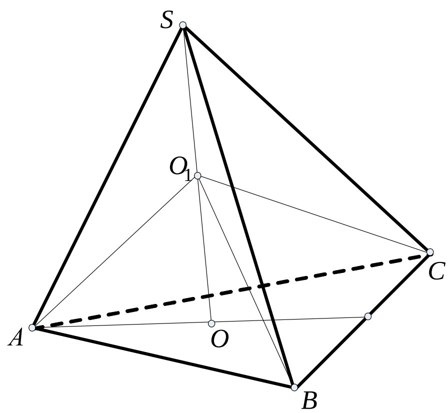
Следува $V_1:V_2=5:3$.

36. Три отсечки ги сврзуваат средината на висината на тетраедар со темињата на основата. Докажи тие се по парови нормални меѓу себе.

Решение. Нека

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=a$,

SO-висина во тетраедарот $ABCS$, и O_1-средина на SO. Тогаш,



$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

каде D е подножје на висината на ABC, кој е рамностран. Тогаш

$$\overline{SO}=\sqrt{\overline{SA}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{a^2-(\frac{a}{\sqrt{3}})^2}$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{6},$$

па затоа $\overline{OO_1}=\frac{1}{2}\overline{SO}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Конечно,

$$\overline{AO_1}=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{OO_1}^2}=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{3}})^2+(\frac{a\sqrt{6}}{6})^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{6}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Слично се добива и

$$\overline{BO_1}=\overline{CO_1}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Бидејќи,

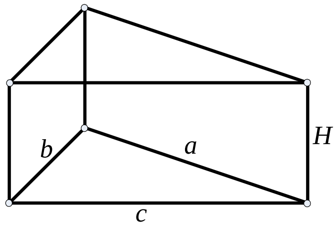
$$\overline{AO_1}^2+\overline{BO_1}^2=(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2$$

$$=a^2=\overline{AB}^2$$

следува дека $\triangle ABO_1$ е правоаголен со $\measuredangle AO_1B=90^\circ$, од каде $AO_1\perp BO_1$. Слично, се докажува дека $AO_1\perp CO_1$ и $BO_1\perp CO_1$.

37. Основата на права призма е правоаголен триаголник, со катети кои се однесуваат како $24:7$, хипотенузата на основата се однесува кон висината на призмата како $5:2$, а бочната површина на призмата е $140m^2$. Најди го волуменот на призмата.

Решение. Од $a:b=24:7$ и $c:H=5:2$ имаме дека $b=\frac{7}{24}a$ и $c=\frac{5}{2}H$. Од Питагоровата теорема за правоаголен триаголник имаме



$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+\tfrac{49}{576}a^2=\tfrac{25}{4}H^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tfrac{625}{576}a^2=\tfrac{25}{4}H^2 \Rightarrow a^2=\tfrac{144}{25}H^2 \Rightarrow a=\tfrac{12}{5}H$$

Со замена во $b=\tfrac{7}{24}a$, добиваме

$$b=\tfrac{7}{24}\cdot\tfrac{12}{5}H=\tfrac{7}{10}H .$$

Имаме, $M=140m^2$, а од друга страна

$$M=(a+b+c)\cdot H ,$$

што значи

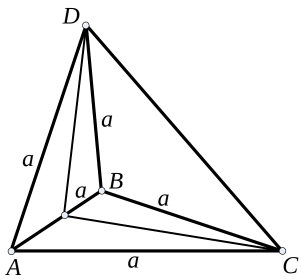
$$140m^2=(a+b+c)H=(\tfrac{12}{5}H+\tfrac{7}{10}H+\tfrac{5}{2}H)H=\tfrac{56}{10}H^2$$

$$H^2=140\cdot\tfrac{10}{56}m^2=25m^2.$$

Според тоа, $H=5m$, од каде се добива дека $a=\tfrac{12}{5}H=12m$ и $b=\tfrac{7}{10}H=3{,}5m$. Тогаш, за волуменот на призмата имаме

$$V=B\cdot H=\tfrac{a\cdot b}{2}\cdot H=\tfrac{12\cdot 3{,}5}{2}\cdot 5=105m^3 .$$

38. Две страни на тристрана пирамида се рамнострани триаголници со страна $a\,\mathrm{cm}$. Рамнините на овие триаголници се нормални меѓу себе. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.



Решение. Нека е дадена тристраната пирамида $ABCD$, каде страните ABC и ABD се рамнострани триаголници со страна $a\,cm$, т.е.

$$\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BD}=a\,\mathrm{cm} .$$

Нека CN и DN се висини во триаголниците ABC и ABD соодветно, кон заедничката страна AB, значи и $DN\perp AB$. Од условот на задачата имаме дека и $CN\perp DN$ (цртеж десно). Ако земеме еден од рамностраните триаголници за база на пирамидата, на пример триаголникот ABC, тогаш висина на пирамидата ќе биде DN, па волуменот на пирамидата е

$$V=\tfrac{1}{3}\cdot P_{\Delta ABC}\cdot\overline{DN}=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\tfrac{a\sqrt{3}}{2}=\tfrac{a^3}{8}\,\mathrm{cm}^3 .$$

Триаголникот CND е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол кај темето N и $\overline{CN}=\overline{DN}=\tfrac{a\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}$. Тогаш,

$$\overline{CD}=\sqrt{(\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2+(\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2}=\tfrac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}=\tfrac{a\sqrt{6}}{2}\,\mathrm{cm} .$$

Триаголниците CDA и CDB се складни рамнокраки триаголници со основа $\tfrac{a\sqrt{6}}{2}\,\mathrm{cm}$ и крак $a\,cm$. Тогаш, нивната плоштина е

$$P_{\Delta CDA}=P_{\Delta CDB}=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{a^2-(\tfrac{a\sqrt{6}}{4})^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\tfrac{a\sqrt{10}}{4}=\tfrac{a^2\sqrt{15}}{8}\,\mathrm{cm}^2 .$$

и конечно, плоштината на пирамидата е

$$P = 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2\cdot\frac{a^2\sqrt{15}}{8} = \frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}\,\mathrm{cm}^2 .$$

39. Нека P_1, P_2, P_3 се плоштините на три страни од еден квадар кои имаат заедничко теме. Пресметај го волуменот и должините на страните на квадарот.

Решение. Нека a, b и c се должините на страните на квадарот. Можеме да сметаме дека $P_1 = ab$, $P_2 = bc$, $P_3 = ca$. Јасно, дека $V = abc$, од каде добиваме

$$V = abc = \sqrt{(abc)^2} = \sqrt{(ab)\cdot(bc)\cdot(ca)} = \sqrt{P_1P_2P_3} .$$

Од друга страна, ако ги помножиме равенките од системот

$$\begin{cases} ab = P_1 \\ bc = P_2 \\ ca = P_3 \end{cases},$$

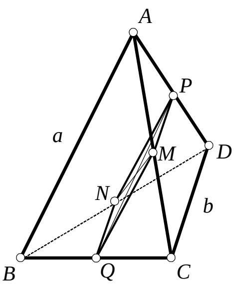
добиваме

$$a^2b^2c^2 = P_1P_2P_3 .$$

Од последната равенка добиваме $(ab)^2c^2 = P_1P_2P_3$, односно $P_1^2c^2 = P_1P_2P_3$. Сега лесно се добива дека $c = \sqrt{\frac{P_2P_3}{P_1}}$. На потполно ист начин добиваме $b = \sqrt{\frac{P_1P_2}{P_3}}$ и $a = \sqrt{\frac{P_1P_3}{P_2}}$.

40. Во триаголна пирамида $ABCD$, рабовите AB и CD имаат должини a и b соодветно. Пресметај го збирот на квадратите на должините на отсечките, едната од кои ги поврзува средините на рабовите AC и BD, а друга ги поврзува средините на рабовите AD и BC.

Решение. Нека во пирамидата $ABCD$, точките M, N, P, Q се средини на AC, BD, AD, BC соодветно.



Бидејќи QM е средна линија на триаголникот ABC, добиваме $MQ \parallel AB$ и $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$.

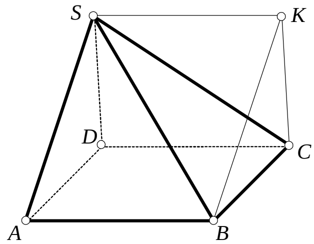
Слично, PN е средна линија на триаголникот ABD, па имаме $PN \parallel AB$ и $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$. Според тоа, $QMPN$ е паралелограм со страни $\frac{a}{2}$ и

$$b - d = (c-a)(a+c+1)$$

(на ист начин се проверува дека другите две страни на паралелограмот имаат должина $\frac{b}{2}$ и $c-a=(d-b)(d+b+1)$). Зададените отсечки од условот на задачата чиј збир на квадрати на нивните должини треба да го пресметаме се дијагонали на паралелограмот. Сега останува да го примениме равенството на паралелограм. Деталите ги оставаме на читателот за вжба.

41. Четириаголна пирамида со волумен V има основа паралелограм со различни страни. Должината на бочните рабови се различни меѓу себе и имаат различни должини од рабовите на основата. Пресметај го волуменот на триаголната пирамида формирана од шесте рабови на дадената пирамида со различна должина.

Решение. Нека $SABCD$ е дадената пирамида чиј волумен е V и основа е паралелограмот $ABCD$. Ќе конструираме отсечка SK која е паралелна и еднаква со AB и CD. Тогаш $SABK$ паралелограм и $\overline{SK}=\overline{AB}=\overline{DC}$ и $\overline{KB}=\overline{SA}$. Слично, $SKCD$ е паралелограм и $\overline{KC}=\overline{SD}$. Од $\overline{AD}=\overline{BC}$ и претходните две забелешки, добиваме дека



$$\triangle SBK \cong \triangle SAB$$
$$\triangle BKC \cong \triangle ASD$$
$$\triangle SKC \cong \triangle SDC$$

па според тоа $SKBC$ е бараната пирамида. При тоа

$$V_{SKBC}=V_{SDBC}$$

(имаат иста основа и висина). Но, од друга страна

$$V_{SBCD}=\tfrac{1}{2}V_{SABCD},$$

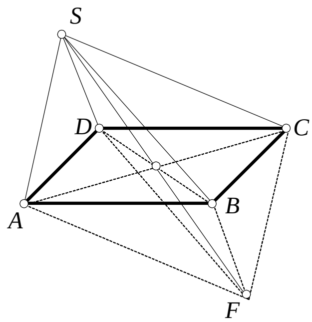
од каде што следува

$$V_{SKCB}=\tfrac{1}{2}V\ .$$

42. Даден е правоаголник и точка S (точката S не мора да лежи во рамнината на правоаголникот). Дали растојанијата од точката S до темињата на правоаголникот може да бидат во некој редослед еднакви на $1,3,5,7$.

Решение. Нека $ABCD$ е правоаголник и S е точка за која во некој редослед растојанијата то темињата на правоаголникот се еднакви на $1,3,5,7$.

Точката S централно ќе ја пресликаме во однос на точката E која е пресек на дијагоналите на $ABCD$. Нека F е нејзината слика. Четириаголниците $AFCS$ и $BFDS$ се паралелограми. Според равенството за паралелограм имаме



$$2(\overline{SA}^2+\overline{SC}^2)=\overline{SF}^2+\overline{AC}^2$$
$$2(\overline{SB}^2+\overline{SD}^2)=\overline{SF}^2+\overline{BD}^2.$$

Бидејќи $\overline{AC}=\overline{BD}$, дијагонали на паралелограмот, добиваме

$$\overline{SA}^2+\overline{SC}^2=\overline{SB}^2+\overline{SD}^2\ .$$

За било каков распоред на $1,3,5,7$ на местата на $\overline{SA}, \overline{SC}, \overline{SB}, \overline{SD}$ последното равенство не е точно. Навистина

$$1^2+7^2=50\neq 34=3^2+5^2,$$
$$1^2+5^2=25\neq 58=7^2+3^2,$$
$$1^2+3^2=10\neq 74=7^2+5^2.$$

2. ВАЛЧЕСТИ ТЕЛА

1. Една топка е пресечена со паралелни рамнини кои се наоѓаат на иста страна на нејзиниот центар и на растојание $3cm$ меѓу себе. Круговите добиени како пресеци на топката со рамнините имаат радиуси $9cm$ и $12cm$. Да се пресмета радиусот на топката.

Решение. Ако топката со двете пресечни паралелни рамнини ги пресечеме со рамнина што минува низ центарот на топката и стои нормално на паралелните рамнини, тогаш се добива цртежот десно.

Од правоаголните триаголници OMN и OST добиваме

$$R^2 = 12^2 + x^2 \text{ и } R^2 = 9^2 + (3+x)^2$$

од каде што се добива:

$$12^2 + x^2 = 9^2 + (3+x)^2$$

односно $x = 9$. Радиусот на топката е $R=\sqrt{12^2+9^2} = 15cm$.

2. Прав кружен цилиндар и прав кружен конус со еднакви радиуси на основата од 3 cm имаат еднакви плоштини. Изводницата на конусот е 5 cm. За колку се разликуваат нивните волумени?

Решение: Нека H е висината на цилиндарот, а s изводницата на конусот. Плоштината на цилиндарот е

$$P_{cil} = 2r^2\pi + 2r\pi H = 18\pi + 6\pi H,$$

а плоштината на конусот е

$$P_{con} = r^2\pi + \tfrac{2rs\pi}{2} = 9\pi + 15\pi = 24\pi.$$

Од условот $P_{cil} = P_{con}$ следува дека $H = 1$. Висината на конусот е

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4.$$

Тогаш,

$$V_{cil} = r^2\pi H = 9\pi,$$

додека

$$V_{con} = \tfrac{r^2\pi h}{3} = \tfrac{36\pi}{3} = 12\pi.$$

Нивната разлика е $3\pi cm^3$.

3. Прав кружен цилиндар и прав кружен конус со еднакви радиуси на основата од $6cm$ имаат еднакви плоштини. Изводницата на конусот е $10cm$. За колку се разликуваат нивните волумени?

Решение. Нека H е висината на цилиндарот, а s изводницата на конусот. Плоштината на цилиндарот е

$$P_{cil} = 2r^2\pi + 2r\pi H = 72\pi + 12\pi H,$$

додека плоштината на конусот е

$$P_{con} = r^2\pi + \tfrac{2r\pi s}{2} = 36 + 60\pi = 96\pi.$$

Од $P_{cil} = P_{con}$ следува дека H=2. Висината на конусот е

$$h=\sqrt{s^2-r^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8.$$

Тогаш,

$$V_{cil}=r^2\pi H=72\pi,$$

додека

$$V_{con}=\frac{r^2\pi h}{3}=\frac{36\pi\cdot 8}{3}=96\pi.$$

Нивната разлика е $24\pi cm^3$.

4. Топка и прав цилиндар со радиус на основата 6cm и висина 10cm имаат еднакви плоштини. За колку се разликуваат нивните волумени?

Решение. Имаме дека $V_{top}=\frac{4R^3\pi}{3}$; $V_{cil}=r^2\pi H=36\cdot 8\cdot\pi$ од каде што следува дека $R=6$. Тогаш, $P_{top}=4R^2\pi=144\pi$, $P_{cil}=2r^2\pi+2r\pi h=72\pi+96\pi=168\pi$, а нивната разлика е $24\pi cm^2$.

5. Топка и прав цилиндар со радиус на основата $3cm$ и висина $32cm$ имаат еднакви волумени. За колку се разликуваат нивните плоштини?

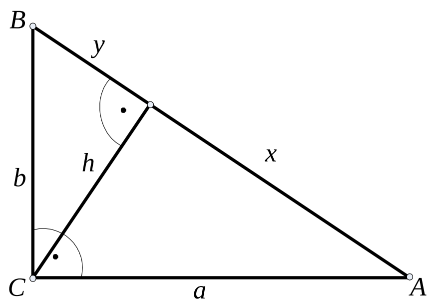
Решение. За волумените на топката и цилиндарот имаме $V_{top}=\frac{4R^3\pi}{3}$; $V_{cil}=r^2\pi H=9\cdot 32\cdot\pi$ од каде што следува дека $R=6$. Тогаш, $P_{top}=4R^2\pi=144\pi$, $P_{cil}=2r^2\pi+2r\pi h=18\pi+192\pi=210\pi$, а нивната разлика е $66\pi cm^2$.

6. Ако со V_a,V_b,V_c се означат волумените на телата добиени со ротација на правоаголен триаголник околу катетата a, катетата b и хипотенузата c соодветно, тогаш важи равенството

$$\frac{1}{V_a^2}+\frac{1}{V_b^2}=\frac{1}{V_c^2}.$$

Докажи!

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето C, $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{CD}=h$ - висината спуштена од темето C на хипотенузата, $x=\overline{AD}$ и $y=\overline{BD}$ (види цртеж). Тогаш



$$V_c=\frac{\pi}{3}h^2x+\frac{\pi}{3}h^2y=\frac{\pi}{3}h^2c$$
$$=\frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{c^2}c=\frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{c}.$$

Од друга страна

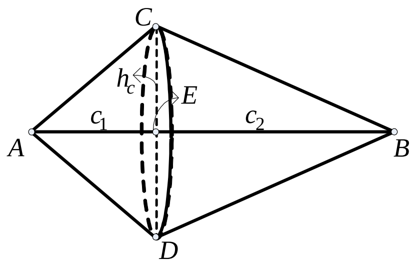
$$\frac{1}{V_a^2}+\frac{1}{V_b^2}=\frac{1}{(\frac{\pi}{3}b^2a)^2}+\frac{1}{(\frac{\pi}{3}a^2b)^2}=\frac{1}{(\frac{\pi}{3})^2\frac{a^4b^4}{c^2}}=\frac{1}{V_c^2}$$

7. Ако еден остроаголен триаголник со страни a, b, c ротира околу секоја од своите страни, се добиваат три тела. Да се најде односот на волумените на така добиените тела.

Решение. Да го најдеме волуменот V_c на телото кога триаголникот ABC ротира околу страната AB (види цртеж). Добиеното тело е составено од два слепени конуса со ист радиус h_c и висини c_1 и c_2 соодветно. За волуменот V_c ќе имаме:

$$V_c = \tfrac{1}{3}h_c^2\pi c_1 + \tfrac{1}{3}h_c^2\pi c_2 = \tfrac{1}{3}h_c^2\pi(c_1+c_2) = \tfrac{1}{3}h_c^2\pi c\,,$$

каде што $c = \overline{AB} = c_1 + c_2$.



Слично, за волумените V_a и V_b на другите две тела ќе добиеме:

$$V_a = \tfrac{1}{3}h_a^2\pi a\,,\ V_b = \tfrac{1}{3}h_b^2\pi b\,,$$

па

$$V_a : V_b : V_c = h_a^2 a : h_b^2 b : h_c^2 c\,.$$

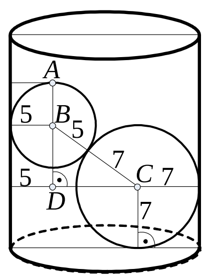
Но,

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2P$$

па

$$V_a : V_b : V_c = h_a : h_b : h_c = \tfrac{1}{a} : \tfrac{1}{b} : \tfrac{1}{c}$$

8. Даден е прав кружен цилиндер со дијаметар на основата 22 cm. Во него има две метални топки кои: го допираат ѕидот цилиндерот во две дијаметрално спротивни точки; се допираат меѓу себе и едната едната од нив го допира дното на цилиндерот. Топките имаат радиуси 5 cm и 7 cm. Во цилиндерот се турени $4,5$ l вода. Дали водата ги покрива топките? Одговорот да се образложи.



Решение. Нека A е точка од топките чие растојание до дното на цилиндерот е најголемо и нека тоа растојание го означиме со h (види цртеж). Од правоаголниот триаголник BCD се добива дека

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{12^2 - (22-12)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}\,.$$

Значи, $h = 7 + 5 + \overline{BD} = 12 + 2\sqrt{11}$. Нека V е волуменот на цилиндерот со висина h, V_1 и V_2 волумените на топките со радиус 5 и 7 соодветно. За водата да ги покрие топките, треба $V - V_1 - V_2$ да биде помало од $4,5\ \mathrm{dm}^3$. Со пресметување на волумените се добива дека:

$$V = 2\pi\cdot 11^2\cdot(6+\sqrt{11})\ \mathrm{cm}^3\,,\ \ V_1 = \tfrac{4\pi}{3}5^3\ \mathrm{cm}^3\,,\quad V_2 = \tfrac{4\pi}{3}7^3\ \mathrm{cm}^3\,,$$

од што следува дека

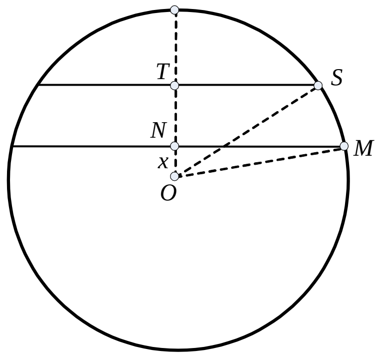
$$V - V_1 - V_2 = 2\pi[121(6+\sqrt{11}) - \tfrac{250}{3} - \tfrac{686}{3}]\ \mathrm{cm}^3\,,$$

што е поголемо од $4,5\ l$. Значи, водата не ги покрива топките.

9. Една топка е пресечена со две паралелни рамнини кои се наоѓаат од иста страна на нејзиниот центар и на растојание од 3 cm меѓу себе. Круговите добиени како пресеци на топката со рамнините, имаат радиуси 9 cm односно 12 cm.

Пресметај го волуменот на топката.

Решение. Ако топката, заедно со нејзините пресеци, ортогонално ја проектираме на рамнина, нормална на пресечните рамнини, ја добиваме сликата како на цртежот. Од правоаголните триаголници OMN и OST, согласно Питагоровата теорема, ги добиваме равенствата



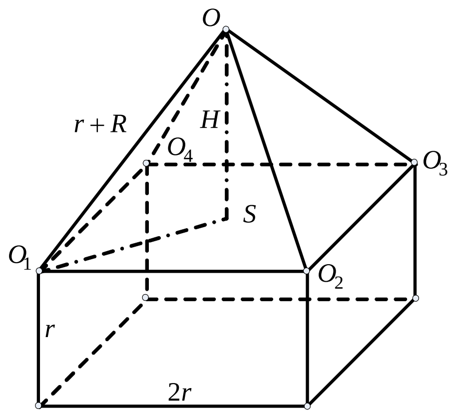
$$R^2 = 12^2 + x^2$$
$$R^2 = 9^2 + (3+x)^2,$$

од каде што добиваме $x = 9$ и $R = 15\text{ cm}$. Според тоа,

$$V = \frac{4R^3\pi}{3} = 4500\pi\text{ cm}^3.$$

9. На една рамнина се поставени четири топки со ист радиус r, така што секоја од нив допира две други. Друга топка, со радиус R, поставена е така што ги допира сите четири топки. Колкаво е растојанието d од центарот на таа топка до рамнината? Дискутирај ги сите можности.

Решение. Да го сврземе центарот O на петтата топка со центрите O_i, $i = 1,2,3,4$, на дедените четири топки (види цртеж). Тогаш ќе имаме



$$d = H + r = r + \sqrt{(R+r)^2 - \overline{O_1S}^2}$$
$$= r + \sqrt{(R+r)^2 - 2r^2}$$
$$= r + \sqrt{R^2 + 2rR - r^2}.$$

За $R = r(\sqrt{2}-1)$ имаме $d = r$, т.е петтата е меѓу четирите топки.

За $R > r(\sqrt{2}-1)$, петтата топка е поставена над четирите топки.

10. Даден е конус со висина h. Да се пресмета на кое растојание од основата треба да се пресече конусот со рамнина паралелна со основата, така што тој да биде поделен на два дела со еднакви волумени.

Одговор. $x = (1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}})\,h.$

11. Една топка е пресечена со паралелни рамнини кои се наоѓаат од иста страна на нејзиниот центар и на растојание $2cm$ една од друга. Круговите добиени како пресеци на топката со рамнините имаат радиуси $6cm$ и $8cm$. Да се пресмета радиусот на топката.

Одговор. Радиусот на топката е $R=10cm$.

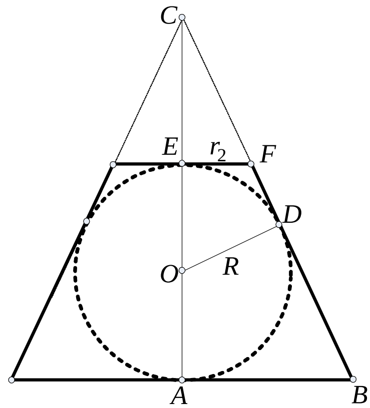
12. Околу топка со радиус R е опишан пресечен конус при кој плоштината на едната основа е четирипати поголема од плоштината на другата основа. Да се пресмета волуменот на пресечениот конус.

Решение. Од условот $P_1=4P_2$ добиваме дека $r_1=2r_2$. Триаголниците ABC и EFC се слични, па имаме $r_1:r_2=(h+2R):R$. Исто така, триаголниците CEF и CDO се слични, па имаме $r_2:R=h:\overline{CD}$. Од триаголникот $\triangle CDO$ добиваме $\overline{CD}=\sqrt{2Rh+h^2}$. Значи, ги добиваме равенствата:

$$r_1=2r_2,\quad r_1R=r_2(h+2R),\ r_2\sqrt{2Rh+h^2}=hR,$$

од каде што следува дека:

$$h=2R,\quad r_2=\tfrac{R\sqrt{2}}{2},\ r_1=R\sqrt{2}.$$



Следствено, за волуменот V на пресечениот конус добиваме:

$$V=\tfrac{2R\pi}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\tfrac{7R^3\pi}{3}.$$

13. Во конус се поставени две топки со радиуси 2 и 1. Поголемата топка ја допира основата и обвивката. Да се пресмета волуменот на конусот.

Решение. Да го разгледаме напречниот пресек на конусот (види цртеж). Нека $\overline{CO_1}=x$. Од сличноста на триаголниците CO_1M и CO_2N добиваме $\overline{CO_1}:\overline{CO_2}=\overline{O_1M}:\overline{O_2N}$, т.е. $x:(x+3)=1:2$, од каде што $x=3$. За висината H на конусот ќе имаме

$$H=\overline{CD}=\overline{CO_1}+\overline{O_1O_2}+\overline{O_2D}=8.$$

Од сличноста, на триаголниците CO_1M и CDB добиваме

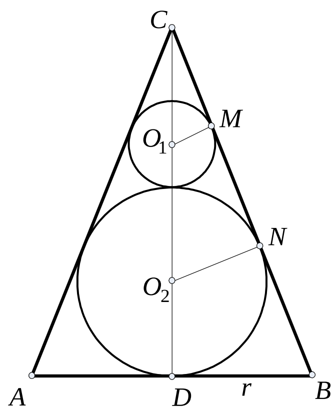
$$\overline{O_1M}:\overline{CM}=r:\overline{CD}.$$

Бидејќи

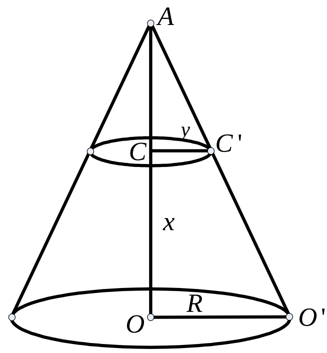
$$\overline{O_1M}=1,\ \overline{CD}=8 \text{ и } \overline{CM}^2=\overline{O_1C}^2-\overline{O_1M}^2=8,$$

добиваме $r=2\sqrt{2}$. Значи,

$$V=\tfrac{1}{3}r^2\pi H=\tfrac{64\pi}{3}.$$



14. Прав цилиндар со радиус $r=\sqrt{39}$ и прав конус со радиус $R=9$ имаат еднаква висина $H=15$. На која ненулта висина x, треба да се пресечат цилиндарот и конусот за да новодобиениот цилиндар со висина x и пресечениот конус со висина x имаат еднакви волумени?



Решение. Со y го означуваме радиусот на помалата основа на пресечениот конус со висина x. Од сличноста на триаголниците AOO' и ACC', добиваме

$$\frac{y}{R}=\frac{H-x}{H} \qquad (1)$$

За волуменот на пресечениот конус важи

$$V_k=\frac{R^2\pi H}{3}-\frac{y^2\pi(H-x)}{3}=\frac{\pi(R^2H-y^2H+y^2x)}{3}. \qquad (2)$$

Ако од (1) го изразиме y и го замениме во (2) добиваме

$$V_k=\frac{R^2\pi x}{3H^2}(x^2-3Hx+3H^2). \qquad (3)$$

Со изедначување на овој волумен и волуменот на цилиндерот со висина x ја добиваме равенката:

$$r^2\pi x=\frac{R^2\pi x}{3H^2}(x^2-3Hx+3H^2).$$

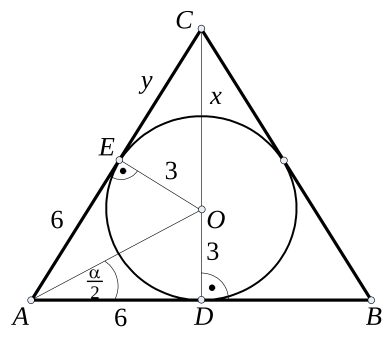
Ако ја поделиме равенкиата со x ($x\neq 0$) и ги замениме дадените вредности за r, H и H, добиваме

$$x^2+45x+350=0.$$

Решенијата на последната равенка се 10 и 35, од кои второто не го земаме предвид бидејќи ја надминува висината на дадените цилиндар и конус.

Значи, цилиндарот и конусот треба да се пресечат на висина $x=10$.

15. Околу прав кружен цилиндар со радиус на основата 3 $a+b\neq c$ и плоштина $78\pi\ cm^2$ е опишана права триаголна призма (основите на цилиндарот се впишани кругови во основите на призмата, а обвивката на цилиндарот ги допира трите бочни страни на призмата). Основите на призмата се рамнокраки триаголници со основа 12 cm. Пресметај го волуменот на призмата.



Решение. Основата на цилиндарот е круг со центар во точката O, а основата на призмата е рамнокрак триаголник ABC со основа $\overline{AB}=12cm$. Нека D е подножјето на висината спушена од темето C, а E е допирната точка на кружницата со страната AC. Имаме

$$\overline{AD}=6, \overline{AE}=\overline{AD}=6$$

(тангентни отсечки на кружницата повлечени од A) и

$$\overline{OE}=\overline{OD}=r=3.$$

Да означиме $x = \overline{OC}$ и $y = \overline{EC}$. Тогаш $\triangle OEC \sim \triangle ADC$ (правоаголни со еднаков агол кај темето C), па

$$(6+y):x = 6:3.$$

Оттука $x = \frac{6+y}{2}$. Натаму, $\triangle OEC$ е правоаголен со хипотенуза x, па $x^2 = y^2 + 3^2$. Решавајќи го системот

$$\begin{cases} x = \frac{6+y}{2} \\ x^2 = y^2 + 3^2 \end{cases}$$

добиваме $x = 5$, $y = 4$. Според тоа $\overline{CD} = 8$, па плоштината на основата на призмата е $B = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = 48cm^2$.

Нека висината на цилиндарот е H. Тогаш плоштината на цилиндарот е

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H = 18\pi + 6\pi H \text{ т.е. } H = \frac{P-18\pi}{6\pi} = 10cm.$$

Според тоа $V = B \cdot H = 480cm^3$.

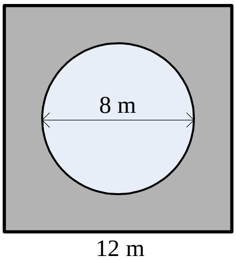
16. На едно земјиште во облик на квадрат со страна $12m$ се копа цилиндрична јама со пречник (дијаметар на основата) од $8m$. Ископаната земја рамномерно се распоредува по преостанатиот дел од земјиштето и се натиснува толку колку што била натисната кога била во јамата. Колку длабоко треба да се копа, за да јамата биде длабока $3m$?

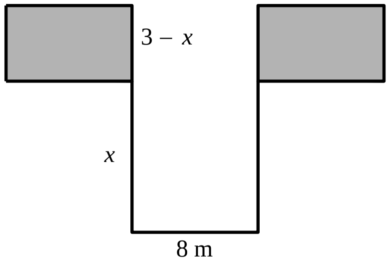
Решение. Површината на земјиштето по кое се распоредува ископаната земја од јамата е

$$(12^2 - 4^2\pi)\,\mathrm{m}^2 = (144 - 16\pi)\,\mathrm{m}^2.$$

Нека x е длабочината на копањето, тогаш дебелината на слојот натисната земја треба да биде $(3-x)\,\mathrm{m}$. Бидејќи ископаната земја се натиснува толку колку што била натисната кога била во јамата, тоа значи дека волуменот на ископаната земја е еднаков на волуменот на рамномерно нанесената и натисната земја на преостанатиот дел од земјиштето, односно

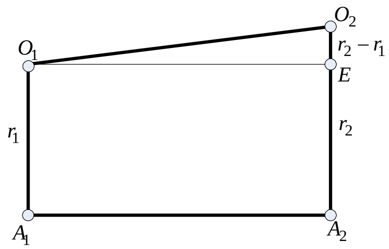
$$4^2\pi \cdot x = (144 - 16\pi) \cdot (3 - x).$$





Со решавање на последната равенка по x се добива дека $x = (3 - \frac{\pi}{3})\,\mathrm{m}$. Бидејќи $\pi \approx 3{,}14$, следи дека треба да се копа $x \approx 1{,}95\,\mathrm{m}$ во длабочина.

17. Три топки се допираат меѓу себе попарно, од надворешна страна и се допираат до иста рамнина σ во точките A_1, A_2, A_3 при што $\overline{A_1A_2}=4$, $\overline{A_2A_3}=6$ и $\overline{A_1A_3}=8$. Пресметај ги радиусите r_1, r_2 и r_3 на топките (топката со радиус r_i ја допира σ во A_i).



Решение. Нека O_1, O_2 и O_3 се центри на топките со радиуси r_1, r_2 и r_3 соодветно. Четириаголникот $O_1O_2A_2A_1$ е правоаголен трапез со висина $\overline{A_1A_2}=4$, основи

$$\overline{O_1A_1}=r_1,\ \overline{O_2A_2}=r_2$$

и крак

$$\overline{O_1O_2}=r_1+r_2.$$

Нека E е подножје на висината спуштена од точката O_1 на основата O_2A_2. Тогаш $\overline{EO_2}=r_2-r_1$, $\overline{O_1E}=4$, па според теоремата на Питагора за правоаголниот триаголник O_1EO_2 имаме

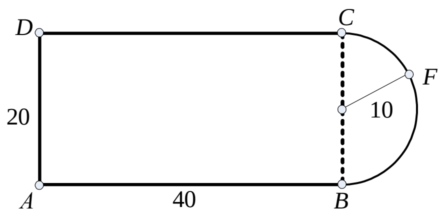
$$(r_1+r_2)^2=4^2+(r_1-r_2)^2,$$

односно $r_1r_2=4$. Потполно аналогно се пресметува дека $r_1r_3=9$ и $r_2r_3=16$. Ако ги помножиме равенките на системот

$$\begin{cases} r_1r_2=4 \\ r_2r_3=16, \\ r_1r_3=9 \end{cases}$$

добиваме $(r_1r_2r_3)^2=24^2$, т.е. $r_1r_2r_3=24$. Сега лесно се добива $r_1=\frac{3}{2}$, $r_2=\frac{8}{3}$ и $r_3=6$.

18. Еден базен, длабок 2 m, има облик како на цртежот. Притоа правоаголникот $ABCD$ е со димензии 40×20 m, а радиусот на полукругот CFB е 10 m. Ако дебелината на ѕидовите и дното на базенот е 30 cm, да се пресмета колку m^3 бетон се потребни за негова изградба.



Решение. Да го означиме со V_1 волуменот на телото, формирано од надворешните страни на ѕидовите на базенот, а со V_2 -волуменот на “телото” формирано од внатрешните страни. Имаме

$$V_1=40,3\cdot 30,6\cdot 2,3+\frac{10,3^2\pi\cdot 2,3}{2}=1909,414+122,0035\pi$$

$$V_2=40\cdot 20\cdot 2+\frac{10^2\pi\cdot 2}{2}=1600+100\pi$$

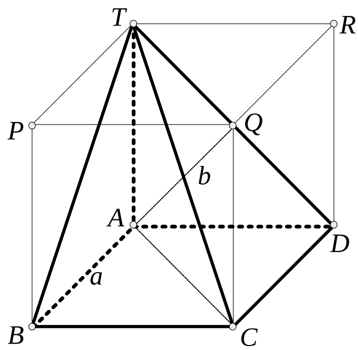
Волуменот на ѕидовите на базенот, а со тоа и бараните m^3 бетон коишто се потребни за изградба на базенот, изнесува

$$V = V_1 - V_2 = 309,414 + 22,0035\pi \approx 378,54 \text{ m}^3.$$

19. Нека $ABCDT$ е пирамида чија основа $ABCD$ е квадрат и работ TA е нормален на основата.

а) Докажи дека околу пирамидата може да се опише сфера.

б) Ако плоштината на опишаната сфера е 11π, а основниот раб е 1, да се определи волуменот на пирамидата.



Решение. а) Во темињата B, C и D повлекуваме нормали на основата и на нив избираме точки P, Q и R соодветно, така што $ABCDTPQR$ е квадар. Околу секој квадар може да се опише сфера со центар во пресекот на главните дијагонали на истиот. Во дадениот случај центарот е во пресекот на дијагоналите AQ и TC. Сферата опишана околу $ABCDTPQR$ е опишана и околу пирамидата $ABCDT$.

б) Да ја означиме со r должината на радиусот на опишаната сфера, со P плоштината на истата, со h должината на работ TA, со a должината на основниот раб и со b должината на работ TC.

Според првиот дел на задачата, центарот на сферата е на половина на работ TC, па, значи, $b = 2r$. Бидејќи работ TA е нормален на основата, според Питагор0вата теорема, добиваме $h^2 = b^2 - (a\sqrt{2})^2$, односно $h^2 = 4r^2 - 2a^2$. Бидејќи $P = 4r^2\pi$ и $P = 11\pi$, добиваме $4r^2 = 11$, од каде што добиваме $h^2 = 11 - 2 = 9$, односно $h = 3$. За волуменот на пирамидата $ABCDT$, конечно, добиваме $V = \frac{1}{3}a^2h = 1$.

20. Околу правилна четиристрана пирамида е опишана сфера. Должината на дијагоналата на основата на пирамидата е $24cm$, а радиусот на сферата е $13cm$. Да се определи волуменот на пирамидата.

Решение. Волумен на пирамидата е $V = \frac{BH}{3}$; каде што B е плоштина на основата, а H е висината на пирамидата. Од правоаголниот ΔABC добиваме $2a^2 = d^2$ што значи $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}cm$. Понатаму, од правоаголниот ΔCLO последователно добиваме

$$(H - r)^2 = r^2 - (\tfrac{d}{2})^2$$

$$H^2 - 2Hr + (\tfrac{d}{2})^2 = 0$$

$$H^2 - 26H + 144 = 0$$

$$H_1 = 18\,cm \text{ и } H_2 = 8\,cm.$$

Според тоа, постојат две пирамиди кои ги задоволуваат условите на задачата и нивните волумени се

$$V_1 = \frac{(12\sqrt{2})^2 \cdot 18}{3} cm^3 = 1728 cm^3 \text{ и } V_1 = \frac{(12\sqrt{2})^2 \cdot 8}{3} cm^3 = 768 cm^3.$$

21. Во полутопка, со волумен $144 cm^3$, впишана е коцка така што едната страна лежи на основата на полутопката, а преостанатите четири темиња на полутопката. Пресметај го волуменот на топката впишана во коцката.

Решение. Со R и r да ги означиме радиусите на полутопката и вписаната топка, соодветно, а со a работ на коцката. Од условот на задачата имаме $a = 2r$ и $144\pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{4R^3}{3}\pi$, па затоа $R = 6cm$. Понатаму, дијагоналата на страната на коцката е $d = a\sqrt{2}$, па од правоаголниот ΔSPM следува

$$R^2 = (\tfrac{a}{2})^2 + (\tfrac{d}{2})^2 \text{ т.е. } 36 = \tfrac{3a^2}{4}$$

од што добиваме $a = 4\sqrt{3}cm$.

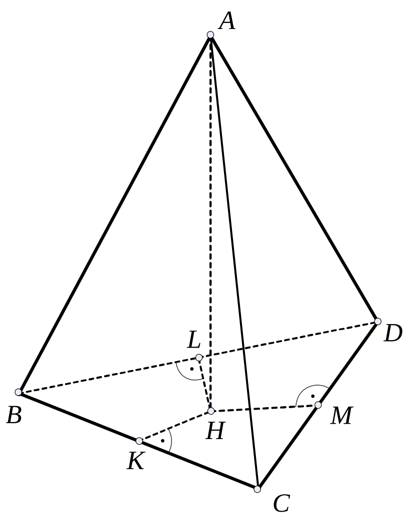
Сега $r = \frac{a}{2} = 2\sqrt{3}cm$, па затоа волуменот на топката вписана во коцката е

$$V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi = \tfrac{4}{3}(2\sqrt{3})^3 \pi cm^3 = 32\sqrt{3}\pi cm^3.$$

22. Во прав кружен конус со основа $r = 10cm$ и висина $H = 12cm$ е вписана коцка, така што еден ѕид на коцката да лежи на основата на конусот. Да се пресмета волуменот на коцката.

Одговор. $V = a^3$, $a = \frac{15}{2} cm$ и $V = (\frac{15}{2})^3 cm^3$.

23. Рабовите AB, AC и AD од тетраедарот $ABCD$ се дијаметри на топките T_{AB}, T_{AC} и T_{AD}. Докажи дека овие три топки го препокриваат тетраедарот.



Решение. Од темето A спуштаме нормала AH на ѕидот BCD на тетраедарот. Од точката H спуштаме нормали HL, HM и HK на страните BD, DC и CB на триаголникот BCD. Ќе докажеме дека секоја од пирамидидте $ABKL$, $ACKM$ и $ADML$ е препокриена со топките T_{AB}, T_{AC} и T_{AD} соодветно.

Да ја разгледаме пирамидата $ABKL$. Од

конструкцијата е јасно дека

$$\measuredangle AKB = \measuredangle ALB = \measuredangle AHB = 90^\circ ,$$

па според тоа точките K, H, L припаѓаат на сферата S_{AB}. Според тоа отсечките BL, BH и BK припаѓаат на топката, а исто така и AL, AH и AK. Следствено, триаголниците AKB, AHK и ALB како и четириаголникот $BLHK$ припаѓаат на топката T_{AB}. Значи, пирамидата $ABHKL$ е препокриена со топката T_{AB}.

24. Во правилна тристрана призма впишана е топка што ги допира трите ѕидови и двете основи на призмата. Да се најде односот на плоштините на топката и призмата.

Решение. Нека a е страната на рамностраниот триаголник кој е основа на призмата, и нека R е радиусот на впишаната топка. Од условот на задачата следува дека радиусот на впишаната кружница во основата на призмата е R, т.е $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Бидејќи топката ги допира двете основи, висината h на призмата е $2R$, т.е. $R = \frac{h}{2}$. Нека P_1 и P_2 се плоштините на топката и призмата соодветно. Тогаш $P_1 = 4\pi R^2$, а

$$P_2 = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 3ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = 2\frac{(2\sqrt{3}R)^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot 2\sqrt{3}R\cdot 2R = 18R^2\sqrt{3}$$

Значи,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4\pi R^2}{18R^2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder, P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007

42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E., Rouseau, C.: Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
67. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
68. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
69. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
70. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
71. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
72. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
73. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
74. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
75. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
76. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
77. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
78. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
79. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
80. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
81. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
82. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
83. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
84. Арсеновић, М., Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
85. Арсланагиќ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
86. Арсланагиќ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје

87. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол на триаголник, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
97. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
98. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
108. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
109. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
110. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
111. Велинов, Д.: Полиномни равенки, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
113. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
114. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
115. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
116. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
117. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
118. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
121. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
122. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
123. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
124. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје
125. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
126. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
127. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
128. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015

129. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
130. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
131. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
132. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
134. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
135. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
136. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
137. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
138. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Полиноми по једној промењљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
153. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
154. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
155. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
157. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
158. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
159. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
160. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
161. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
162. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
167. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
168. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
169. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
170. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
171. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
172. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
173. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
174. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
175. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
176. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
177. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје

178. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
179. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
180. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
181. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика+, Софија, 1997
182. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
183. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
184. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
185. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
188. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
191. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
192. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
193. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
195. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
196. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
197. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
202. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
203. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
204. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
210. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
211. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
212. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
213. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
214. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
215. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
216. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
217. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
218. Малчески, Р., Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
219. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995

220. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
221. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
222. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
223. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
224. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
226. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
227. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
228. Малчески, Р.: Неравенства меѓу срединиte и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
229. Малчески, Р.: Неравенства меѓу срединиte, Сигма, Скопје, 2011
230. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
231. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
233. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
234. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
235. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
236. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
237. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
238. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
239. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
240. Малчески, Р:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
241. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
242. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
248. Маркоски, Ѓ.: Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
249. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
252. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
253. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013
254. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
255. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
256. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
257. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
258. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
259. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
260. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
261. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
262. Муминагић, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
263. Муминагић, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
264. Мушкаров, О., Гроздев, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
265. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
266. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
267. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
268. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
269. Поја, Г.: Математическое открìитие, Москва 1976
270. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
271. Поповска-Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
272. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988

273. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
274. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
275. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
276. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
277. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
278. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
279. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
280. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
281. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
282. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
283. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
284. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
285. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
286. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
287. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
288. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
291. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
292. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
293. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
294. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
295. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
296. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
297. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
299. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011