

**Ристо Малчески
Вера Малческа**

**МАТЕМАТИКА 2
ВЕКТОРСКА И ЛИНЕАРНА
АЛГЕБРА
(второ непроменето издание)**

Скопје, 2020

Рецензенти:

Проф. д-р Сава Гроздев, БАН, Софија

Проф. д-р Алекса Малчески, Машински факултет, Скопје

Компјутерска обработка: Ристо Малчески

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

512.64

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математика 2 : векторска и линеарна алгебра / Ристо Малчески,
Вера Малческа. - Скопје : Армаганка, 2020. - 348 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 343-344. - Регистар

ISBN 978-608-4904-65-6

1. Малческа, Вера [автор]

а) Линеарна алгебра - Вектори

COBISS.MK-ID 112059146

Ниту еден дел на оваа книга не смее да се умножува, фотокопира, ниту на
било кој друг начин да се репродуцира без писмено одобрување на авторите.

СОДРЖИНА

Предговор

vii

VII ГЛАВА

МАТРИЦИ И ДЕТЕРМИНАНТИ

1.	Поим за матрица. Собирање на матрици и множење на матрица со број	1
2.	Множење на матрици	5
3.	Пермутации	11
4.	Поим за детерминанта. Основни својства	19
5.	Теорема на Лаплас	28
6.	Методи за пресметување на детерминанти	32
7.	Несингуларни матрици	43
8.	Крамерово правило	47
9.	Блок – матрици 1	51
10.	Квазидијагонални матрици Задачи	57 58

VIII ГЛАВА

ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

1.	Декартов правоаголен координатен систем во простор	77
2.	Скаларни и векторски величини. Проекција на вектор на оска	79
3.	Проекции на вектор на координатните оски	82
4.	Косинусни правци	84
5.	Собирање на вектори	85
6.	Одземање на вектори	86
7.	Множење на вектор со скалар	87
8.	Линеарна зависност и линеарна независност на вектори	89
9.	Теореме за проекции	91
10.	Разложување на вектори на компоненти	94
11.	Решени примери	96
12.	Скаларен производ	103
13.	Координатна форма на скаларен производ	106
14.	Векторски производ	108

15.	Координатна форма на векторски производ	114
16.	Мешан производ на вектори	116
17.	Координатна форма на мешан производ	119
18.	Двоен векторски производ	121
19.	Трансформација на Декартови правоаголни координати	124
	Задачи	125

IX ГЛАВА

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА ВО ПРОСТОР

1.	Равенка на површина	133
2.	Равенка на линија	133
3.	Цилиндрични и конусни површини	135
4.	Параметарски равенки на линии и површини во простор	137
5.	Класификација на површините	138
6.	Рамнината како површина од прв ред	139
7.	Непотполни равенки на рамнина. Сегментен облик на равенка на рамнина	142
8.	Нормален вид равенка на рамнина. Растојание од точка до рамнина	144
9.	Агол меѓу две рамнини	146
10.	Равенка на права во просторот	146
11.	Замен однос на две прави	150
12.	Замен однос на права и рамнина	156
13.	Решени примери	157
14.	Поим за површина од втор ред	162
15.	Класификација на централни површини од втор ред	167
16.	Класификација на нецентрални површини од втор ред	169
17.	Елипсоид	171
18.	Хиперболоиди	173
19.	Параболоиди	175
20.	Конус и цилиндар од втор ред	176
	Задачи	178

X ГЛАВА

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

1.	Поим за векторски простор	185
2.	Потпростори	188
3.	Линеарна зависност	196
4.	База и димензија на векторски простор	200
5.	Координати на вектор	205
6.	Максимално линеарно независна подфамилија	207
7.	Ранг на матрица	209
8.	Елементарни трансформации на матрица	212
9.	Услов за линеарна зависност	215

10. Врска меѓу две бази	216
11. Трансформација на координати	217
12. Метод на исклучување на непознати за решавање систем линеарни равенки	218
13. Теорема на Кронекер-Капели	223
14. Својства на решенијата на систем линеарни равенки	227
15. Линеарни пресликувања на векторски простори. Дефиниција и основни својства	231
16. Јадро и ранг на линеарно пресликување	234
17. Изоморфизам на векторски простори	236
18. Линеарни трансформации. Автоморфизми	239
19. Инваријантни подпростори	245
20. Матрица на линеарна трансформација	250
21. Промена на матрица на линеарна трансформација при промена на базата. Слични матрици	254
22. Блок – матрици 2	256
23. Карактеристичен полином	258
24. Сопствени вектори на линеарна трансформација	262
25. Полиномни матрици. Еквивалентност	269
26. Најголем заеднички делител на минорите на полиномна матрица	272
27. Елементарни делители на полиномна матрица	275
28. Унимодуларни и елементарни матрици	280
29. Матрични полиноми	283
30. Критериуми за слични матрици	285
31. Поим за нормална форма	286
32. Минимален полином	289
33. Нормална форма на Жордан	297
34. Реална нормална форма на Жордан	301
35. Линеарни трансформации на променливи	305
36. Квадратни форми	307
37. Еквивалентност на квадратни форма. Каноничен вид на квадратна форма	309
38. Нормален вид на квадратна форма	315
39. Позитивно и негативно определена реална квадратна форма	319
40. Евклидски простор	323
41. Права и отсечка во просторот $\mathbf{R}^m$	328
Задачи	329
 Литература	 343
Индекс на поими	345

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдeњата во науките, каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Оваа книга содржи делови од предметите дискретна математика 1, калкулус 1 и калкулус 2, кои студентите на факултетите за информатика најчесто ги слушаат во прва и втора година. Материјалот кој е застапен во книгава, скоро без исклучок, се изучува на сите факултети за информатика во поширокото опкружување и истиот е поделен на четири глави и тоа:

- Матрици и детерминанти,
- Векторска алгебра,
- Аналитичка геометрија во простор и
- Линеарна алгебра.

Во првата глава се разработени основите на теоријата на матрици и детерминанти, при што посебно внимание е посветено на теоремата на Лаплас и методите за пресметување на детерминанти, кои се илустрирани преку бројни примери. Исто така, разгледани се несингуларните матрици, нивните својства и Крамеровото правило за решавање систем линеарни равенки чија матрица е несингуларна. Крајот од оваа глава е посветен на блок-матриците и квазидијагоналните матрици, кои имаат посебно значење во линеарната алгебра.

Втората глава е посветена на векторската алгебра, при што покрај претставувањето на векторите и стандардните операции со векторите во тридимензионалниот простор, воведени се и поимите линеарно зависни и линеарно независни вектори, како и операциите скаларен, векторски и мешан производ на вектори. Притоа, посебно внимание е посветено на координатните форми на споменатите операции, кои се неопходни за усвојување на содржините од аналитичката геометрија во простор.

Во третата глава е разработена аналитичката геометрија во простор, односно се разработени линиите и површините во просторот $\mathbf{R}^3$. Стандардно, во оваа разработка значително место заземаат правата и рамнината во просторот $\mathbf{R}^3$, различните видови равенки на права и рамнина како и замените односи на две прави, права и рамнина и две рамнини. Овие содржини се разработени со примена на векторската алгебра, т.е. со примена на скаларниот, векторскиот и мешаниот

производ на вектори, за кои сметаме дека се најсоодветни за правилно усвојување на разработуваниот материјал. Понатаму, во оваа глава е дадена класификацијата на површините, при што посебно внимание е посветено на класификацијата на централните и нецентралните површини од втор ред. Јасно, во овој дел одделно се разгледани елипсоидите, хиперболоидите, параболоидите, конусот и цилиндарот од втор ред, кои најчесто се среќаваат во практиката.

Во четвртата глава, која носи наслов Линеарна алгебра, и која не само по обем, туку и по содржина е доминантна, се разработени конечнодимензионалните векторски простори и поимите поврзани со истите, како што се: потпростор, линеарна зависност, база и димензија. Притоа, посебно внимание е посветено на координатното претставување на векторите, врската меѓу две бази и трансформацијата на координатите, за чии потреби се усвојуваат дополнителни содржи од теоријата на матрици. Во рамките на овие разгледувања е и Гаусовиот метод за решавање систем линеарни равенки, теоремата на Кронекер-Капели, како и својствата на решенијата на системите линеарни равенки. Вториот дел од оваа глава е посветен на линеарните пресликување, изоморфизмите и автоморфизмите, инваријантните потпростори, сопствените вектори и сопствените вредности на линеарна трансформација. Јасно, во овој дел се разработува и матрица на линеарна трансформација, постапка која неминовно доведува до поимите слични матрици, блок матрици, карактеристичен и минимален полином. Понатаму, се разработуваат нормалната форма на Жордан, а посебно квадратните форми, видовите квадратни форми, нивната еквивалентност и критериумите за позитивно определена реална квадратна форма. На крајот од оваа глава, накратко се разгледани Евклидските простори и некои основни поими поврзани со овие простори.

Изложувањата на бројните лемии, теореми и последици се пропратени со бројни забелешки, коментари, цртежи и поголем број решени примери. Имено, усвојувањето на која било математичка дисциплина не е можно без решавање на голем број задачи, па затоа во сите делови на книгата теориските разгледувања се пропратени со 151 решен пример, како и 346 задачи за самостојна работа, голем дел од кои содржат и повеќе подзадачи, што значи вистинскиот број на решени примери и задачи за самостојна работа е значително поголем.

На крајот од книгата е дадена користената литература, со што се надеваме ќе се олесни нејзиното користење, но и на читателот ќе му овозможи да консултира дополнителна сродна литература, која пред сè е пишувана со ист или сличен методски пристап. Исто така е даден и индекс на поими, чија намена е да го олесни користењето на самата книга.

Се надеваме дека книгава ќе им биде од корист како на студентите, за кои пред сè истата е наменета, така и на поширок круг читатели, кои секојдневно се среќаваат со материјата која е предмет на разработка на оваа книга.

И покрај вложениот напор, свесни сме за можните подобрувања во изложувањето на разработуваниот материјал и за пропустите кои ги содржи оваа книга. Затоа сме однапред благодарни на секоја добронамерна сугестија и критика, која ќе овозможи подобрување на книгава.

Ноември, 2014

Авторите

VII ГЛАВА

МАТРИЦИ И ДЕТЕРМИНАНТИ

1. ПОИМ ЗА МАТРИЦА. СОБИРАЊЕ НА МАТРИЦИ, МНОЖЕЊЕ НА МАТРИЦА СО БРОЈ

1.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{K}$ е произволно поле. Таблицата

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

каде $a_{ij} \in \mathbf{K}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$ ја нарекуваме *матрица од ред $n \times m$ над полето $\mathbf{K}$* . Броевите a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$ ги нарекуваме *елементи на матрицата (1)*. Редицата

$$a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{im}$$

ја нарекуваме *i -та редица на матрицата (1)*, а колоната

$$a_{1j}$$

$$a_{2j}$$

$$\dots$$

$$a_{nj}$$

ја нарекуваме *j -та колона на матрицата (1)*.

За означување на матрицата (1) ќе ја користиме и ознаката $[a_{ij}]_{n \times m}$. Множеството од сите $n \times m$ матрици над полето $\mathbf{K}$ го означуваме со $\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$. Ако $n = m$, тогаш ќе велиме дека матрицата (1) е *квадратна* и притоа за означување на матрицата и множеството квадратни матрици ќе ги користиме ознаките $[a_{ij}]_{n \times n}$ и $\mathbf{M}_{n \times n}(\mathbf{K})$, соодветно. Во натамошните разгледувања, ако не е поинаку кажано, под поле $\mathbf{K}$ ќе го подразбираме полето реални броеви $\mathbf{R}$ или полето на комплексни броеви $\mathbf{C}$.

1.2. Пример. Матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ е од ред 2×4 . Притоа $\frac{3}{3}$ е неј-

зина трета колона. ♦

1.3. Дефиниција. За матриците $[a_{ij}]_{n \times m}$ и $[b_{ij}]_{k \times l}$ ќе велиме дека се *еднакви* ако се од ист ред, т.е.

$$n = k, \ m = l \text{ и } a_{ij} = b_{ij}, \text{ за } i = 1, 2, \dots, n, \ j = 1, 2, \dots, m.$$

1.4. Пример. а) Матриците

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

не се еднакви, бидејќи $a_{22} = 2 \neq 1 = b_{22}$.

б) Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} x & y & x+y \\ a & c & a-c \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} a-c & 2c & 1 \\ -x-y & a-x & x \end{bmatrix}.$$

Ќе ги определиме x, y, a и c така што матриците A и C да бидат еднакви.

Матриците A и B се со ред 2×3 , па според дефиниција 1.3 тие се еднакви ако и само ако $a_{ij} = b_{ij}$, за $i = 1, 2$ и $j = 1, 2, 3$, т.е. ако и само ако

$$\begin{aligned} x &= a - c, & y &= 2c, & x + y &= 1, \\ a &= -x - y, & c &= a - x, & a - c &= x. \end{aligned}$$

Од овие шест равенки првата, петтата и шестата се една иста равенка. Од третата и четвртата равенка добиваме $a = -1$, а потоа, од $x = -1 - c$, $y = 2c$ и $x + y = 1$ добиваме $c = 2$, $y = 4$, $x = -3$. Според тоа,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

1.5. Дефиниција. Нека $n, m \in \mathbf{N}$ и $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$.

Матрицата $C = [c_{ij}]_{n \times m}$, каде

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ за } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

ја нарекуваме *збир* на матриците A и B .

Притоа пишуваме $C = A + B$.

1.6. Пример. Ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, тогаш

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

1.7. Дефиниција. Матрицата $O \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$, таква што $a_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ ја нарекуваме *нулта матрица*.

1.8. Дефиниција. Ако $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$, тогаш матрицата $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ каде $b_{ij} = -a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ ја нарекуваме *спротивна* на матрицата A . Притоа пишуваме $B = -A$.

1.9. Теорема. Множеството $\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ во однос на операцијата собирање на матрици е комутативна група.

Доказ. Јасно, операцијата собирање на матрици е добро дефинирана, т.е. $(\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K}), +)$ е групоид.

За секоја матрица $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ важи

$$A + O = [a_{ij}]_{n \times m} + [0]_{n \times m} = [a_{ij} + 0]_{n \times m} = [a_{ij}]_{n \times m} = A, \quad (3)$$

т.е. нултата матрица е неутрален елемент на групоидот $(\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K}), +)$.

Понатаму, за секоја матрица $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ важи

$$A + (-A) = [a_{ij}]_{n \times m} + [-a_{ij}]_{n \times m} = [a_{ij} - a_{ij}]_{n \times m} = [0]_{n \times m} = O, \quad (4)$$

што значи дека секој елемент на групоидот $(\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K}), +)$ има спротивен.

Нека $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$. Имаме

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}]_{n \times m} + [b_{ij}]_{n \times m} = [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times m} \\ &= [b_{ij} + a_{ij}]_{n \times m} = [b_{ij}]_{n \times m} + [a_{ij}]_{n \times m} = B + A, \end{aligned}$$

т.е.

$$A + B = B + A, \quad (5)$$

што значи дека групоидот $(\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K}), +)$ е комутативен.

Ако $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, $C = [c_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$, тогаш

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ([a_{ij}]_{n \times m} + [b_{ij}]_{n \times m}) + [c_{ij}]_{n \times m} = [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times m} + [c_{ij}]_{n \times m} \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{n \times m} = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{n \times m} = [a_{ij}]_{n \times m} + [b_{ij} + c_{ij}]_{n \times m} \\ &= [a_{ij}]_{n \times m} + ([b_{ij}]_{n \times m} + [c_{ij}]_{n \times m}) = A + (B + C), \end{aligned}$$

т.е.

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (6)$$

што значи дека групоидот $(\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K}), +)$ е асоцијативен.

Конечно, групоидот $(\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K}), +)$ е комутативен, асоцијативен, има неутрален елемент и секој негов елемент има спротивен елемент, што значи дека $(\mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K}), +)$ е комутативна група. ♦

1.10. Дефиниција. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ и $\alpha \in \mathbf{K}$. Матрицата $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ таква што $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, за $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ ја нарекуваме *производ на матрицата A со бројот α* . Притоа пишуваме $B = \alpha A$.

1.11. Пример. а) За $\alpha = 3$ и $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ добиваме

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

б) За матриците

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

имаме

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 & 0+(-1) \\ 2+1 & 3+(-2) & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$3A-2B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 4 & 13 & 1 \end{bmatrix}.$$

в) Збирот на матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ не е дефиниран,

бидејќи матриците A и C не се со ист ред. ♦

1.12. Теорема. а) Ако $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, тогаш

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A), \quad (7)$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A. \quad (8)$$

б) Ако $A = [a_{ij}]_{n \times m}, B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ и $\alpha \in \mathbf{K}$, тогаш

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B. \quad (9)$$

в) За секоја матрица $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ важи

$$1A = A. \quad (10)$$

Доказ. а) Нека $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Имаме

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)A &= (\alpha\beta)[a_{ij}]_{n \times m} = [(\alpha\beta)a_{ij}]_{n \times m} = [\alpha(\beta a_{ij})]_{n \times m} \\ &= \alpha[\beta a_{ij}]_{n \times m} = \alpha(\beta[a_{ij}]_{n \times m}) = \alpha(\beta A). \end{aligned}$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)A &= (\alpha + \beta)[a_{ij}]_{n \times m} = [(\alpha + \beta)a_{ij}]_{n \times m} = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}]_{n \times m} \\ &= [\alpha a_{ij}]_{n \times m} + [\beta a_{ij}]_{n \times m} = \alpha[a_{ij}]_{n \times m} + \beta[a_{ij}]_{n \times m} = \alpha A + \beta A. \end{aligned}$$

б) Нека $A = [a_{ij}]_{n \times m}, B = [b_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$ и $\alpha \in \mathbf{K}$. Имаме:

$$\begin{aligned} \alpha(A+B) &= \alpha([a_{ij}]_{n \times m} + [b_{ij}]_{n \times m}) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}]_{n \times m} = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})]_{n \times m} \\ &= [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]_{n \times m} = [\alpha a_{ij}]_{n \times m} + [\alpha b_{ij}]_{n \times m} \\ &= \alpha[a_{ij}]_{n \times m} + \alpha[b_{ij}]_{n \times m} = \alpha A + \alpha B. \end{aligned}$$

в) Нека $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbf{K})$. Имаме:

$$1A = 1[a_{ij}]_{n \times m} = [1a_{ij}]_{n \times m} = [a_{ij}]_{n \times m} = A. \quad \blacklozenge$$

2. МНОЖЕЊЕ НА МАТРИЦИ

2.1. Дефиниција. Нека $A=[a_{ij}]_{n \times m}$, $B=[b_{ij}]_{m \times p}$. Производ на матриците A и B ја нарекуваме матрицата $C=[c_{ij}]_{n \times p}$, каде

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}, \quad (1)$$

за $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,p$. Притоа пишуваме $C=AB$.

2.2. Коментар. Од дефиниција 2.1 следува дека производот AB е определен ако и само ако бројот на колоните на матрицата A е еднаков на бројот на редите на матрицата B . Притоа, елементот c_{ij} на производот AB , кој стои во i -тата редица и j -тата колона е еднаков на збирот од производите на соодветните елементи од i -тата редица на матрицата A и j -тата колона на матрицата B .

Да забележиме дека ако производот AB постои, тогаш не мора да постои производот BA . На пример, ако A е матрица со ред 3×4 и B е матрица со ред 4×5 , тогаш производот AB постои и тоа е матрица со ред 3×5 , но производот BA не постои бидејќи B има 5 колони, а A има 3 редици. Јасно, ако A и B се матрици со ред $n \times n$, тогаш производите AB и BA постојат, но притоа во општ случај $AB \neq BA$, што може да се види од следниов пример.

2.3. Пример. а) За матриците $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ имаме:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и притоа $AB \neq BA$.

б) За матриците $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ имаме

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix},$$

но BA не постои.

в) За матриците $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ имаме

$$AB=[8] \text{ и } BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

г) За матриците $A=[a_{ij}]_{n \times n}$, $B=[b_{ij}]_{n \times n}$ ќе велиме дека *комутираат* ако $AB=BA$. Ќе докажеме, дека матриците кои комутираат со матрицата $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, комутираат и меѓу себе.

Нека $X=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ е произволна матрица која комутира со матрицата A , т.е. $AX=XA$. Имаме

$$\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix} = AX = XA = \begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix},$$

што значи $b=c=x$ и $a=d=y$. Значи, матриците кои комутираат со матрицата A се од видот $X=\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$. Нека матриците X и $Y=\begin{bmatrix} m & n \\ n & m \end{bmatrix}$ комутираат со матрицата A . Тогаш

$$\begin{aligned} XY &= \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ n & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xm+yn & xn+ym \\ ym+xn & yn+xm \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} mx+ny & my+nx \\ nx+my & ny+mx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ n & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = YX, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

2.4. Теорема. Нека A, B и C се такви матрици, што производите AB и BC постојат. Тогаш постојат и производите $A(BC)$ и $(AB)C$ и притоа важи

$$A(BC) = (AB)C \quad (2)$$

Доказ. Нека $A=[a_{ij}]_{m \times n}$, $B=[b_{ij}]_{n \times p}$ и $C=[c_{ij}]_{p \times q}$. Тогаш постои производот $AB=[d_{ij}]_{m \times p}$, па затоа постои и производот $(AB)C$ и тоа е матрица со ред $m \times q$. Но, $BC=[l_{ij}]_{n \times q}$ и затоа постои и производот $A(BC)$ и тоа е матрица со ред $m \times q$. Значи, матриците на двете страни на равенството (2) постојат и тие се со ист ред. Нека $A(BC)=[g_{ij}]_{m \times q}$ и $(AB)C=[f_{ij}]_{m \times q}$. Имаме

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} l_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{l=1}^p b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik} b_{kl} c_{lj}, \quad i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,q \quad (3)$$

и

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^p d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik} b_{kl} c_{lj}, \quad i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,q. \quad (4)$$

Но, десните страни на (3) и (4) се еднакви, па затоа

$$f_{ij} = g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q, \quad (5)$$

што значи дека важи (2). ♦

2.5. Коментар. Производот на неколку матрици го определуваме индуктивно. Имено, ако $k > 2$ и $A_1, A_2, \dots, A_k$ е таква низа матрици што производите $A_{i+1}A_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ постојат, тогаш постои производот A_2A_1 . Понатаму, ако $i < k$ и производот $A_iA_{i-1}\dots A_2A_1 = B$ е веќе определен, тогаш ставаме $A_{i+1}A_iA_{i-1}\dots A_2A_1 = A_{i+1}B$. Лесно се гледа дека

$$(A_k A_{k-1} \dots A_{i+1})(A_i \dots A_2 A_1) = A_k A_{k-1} \dots A_{i+1} A_i \dots A_2 A_1.$$

2.6. Дефиниција. Матрицата $E_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$, каде δ_{ij} е симболот на Кронекер

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i = j \\ 0, & \text{ако } i \neq j. \end{cases}$$

ја нарекуваме *единечна матрица*.

2.7. Дефиниција. Нека A е матрица од n -ти ред и $m \in \mathbf{N}_0$. Матрицата

$$A^0 = E_n, \quad A^m = \underbrace{AA \dots A}_{m \text{ пати}}, \quad \text{за } m > 0$$

ја нарекуваме *степен на матрицата A* со степенев показател m .

2.8. Забелешка. Од теорема 2.4 следува дека

$$A^m A^l = A^l A^m = A^{l+m}, \quad \text{за секои } m, l \in \mathbf{N}_0. \quad (6)$$

2.9. Пример. За матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

пресметајте A^k , $k \in \mathbf{N}$.

Решение. За дадената матрица A ќе ги најдеме првите неколку степени, се со цел да согледаме некоја законитост при добивањето на членовите на нејзините степени. Имаме

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A^3 &= AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A^4 &= AA^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A^5 &= AA^4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Јасно е како се добиваат сите членови освен, можеби, членот x_{13} . Но, ако забележиме дека $1 = \binom{2}{2}$, $3 = \binom{3}{2}$, $6 = \binom{4}{2}$, $10 = \binom{5}{2}$, тогаш логично е да претпоставиме дека

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \binom{k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \geq 2. \quad (7)$$

При претпоставка дека (7) е точно, ако искористиме дека $\binom{k}{2} + k = \binom{k+1}{2}$ имаме

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \binom{k}{2} + k \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \binom{k+1}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Конечно, бидејќи равенството (7) е точно за $k = 2$, од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $k \in \mathbf{N}$. ♦

2.10. Теорема. Нека A е произволна $n \times m$ матрица. Тогаш

$$AE_m = E_n A = A.$$

Доказ. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ и $AE_m = [b_{ij}]_{n \times m}$. Тогаш

$$b_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \dots + a_{ij-1} \cdot 0 + a_{ij} \cdot 1 + a_{ij+1} \cdot 0 + \dots + a_{im} \cdot 0 = a_{ij},$$

т.е. $AE_m = A$. Равенството $E_n A = A$ се докажува аналогно. ♦

2.11. Теорема. а) Нека B и C се $n \times p$ матрици и A е $m \times n$ матрица. Тогаш

$$A(B+C) = AB + AC. \quad (8)$$

б) Ако A и B се $m \times n$ и C е $n \times p$ матрица, тогаш

$$(A+B)C = AC + BC. \quad (9)$$

Доказ. а) Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ и $C = [c_{ij}]_{n \times p}$. Тогаш $B+C = [d_{ij}]_{n \times p}$ и затоа $A(B+C) = [f_{ij}]_{m \times p}$. Од друга страна $AB = [g_{ij}]_{m \times p}$ и $AC = [h_{ij}]_{m \times p}$, па затоа $AB + AC = [l_{ij}]_{m \times p}$. Според тоа, двете страни на (9) се матрици од ист ред. Останува да докажеме дека

$$f_{ij} = l_{ij}, \text{ за } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (10)$$

Но,

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = g_{ij} + h_{ij} = l_{ij},$$

т.е. важи равенството (8).

б) Постапете аналогно како во доказот под а). ♦

2.12. Дефиниција. За матрицата $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ ќе велиме дека е *дијагонална* ако $a_{ij}=0$, за $i \neq j$. Притоа, ја користиме и ознаката

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Ако за дијагоналната матрица $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ важи

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = \alpha$$

тогаш ќе велиме дека A е *скаларна* матрица од n -ти ред.

2.13. Лема. а) Ако $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ и A е скаларна матрица од n -ти ред, тогаш $BA = \alpha B$, за некој $\alpha \in \mathbf{K}$.

б) Ако $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ и C е скаларна матрица од m -ти ред, тогаш $CB = \alpha B$, за некој $\alpha \in \mathbf{K}$.

Доказ. а) Јасно, ако A е скаларна матрица од n -ти ред, тогаш $A = \alpha E_n$, за некој $\alpha \in \mathbf{K}$. Според тоа, $BA = B(\alpha E_n) = \alpha(BE_n) = \alpha B$.

б) Постапете аналогно како во доказот под а). ♦

2.14. Дефиниција. За матрицата $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ ќе велиме дека е *горнотриаголна* ако $a_{ij}=0$, за $i > j$.

За матрицата $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ ќе велиме дека е *долготриаголна* ако $a_{ij}=0$, за $i < j$.

2.15. Пример. Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Докажете дека

- а) матрицата A^2 е дијагонална,
- б) матрицата B^2 е горно триаголна,
- в) секоја матрица C , комутативна со A , е дијагонална.

Решение. а) Имаме $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, т.е. A^2 е дијагонална матрица.

б) Имаме $B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, т.е. B^2 е горно триаголна матрица.

в) Нека матрицата $C=[c_{ij}]_{3 \times 3}$ комутира со матрицата A . Тогаш

$$\begin{bmatrix} -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ 3c_{21} & 3c_{22} & 3c_{23} \\ 2c_{31} & 2c_{32} & 2c_{33} \end{bmatrix} = AC = CA = \begin{bmatrix} -c_{11} & 3c_{12} & 2c_{13} \\ -c_{21} & 3c_{22} & 2c_{23} \\ -c_{31} & 3c_{32} & 2c_{33} \end{bmatrix}$$

ги добиваме равенствата

$$\begin{aligned} -c_{11} &= -c_{11}, \quad -c_{12} = 3c_{12}, \quad -c_{13} = 2c_{13}, \quad 3c_{21} = -c_{21}, \\ 3c_{22} &= 3c_{22}, \quad 3c_{23} = 2c_{23}, \quad -c_{31} = 2c_{31}, \quad 2c_{32} = 3c_{32}, \quad 2c_{33} = 2c_{33}, \end{aligned}$$

од кои следува дека членовите c_{11}, c_{22}, c_{33} се произволни реални броеви, а останатите членови мора да се еднакви на нула. Според тоа, матрицата C е дијагонална. ♦

2.16. Дефиниција. Нека е дадена матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times m}$. За матрицата $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ ќе велиме дека е *транспонирана* на матрицата A . Притоа, ја користиме ознаката $B = A^T$.

2.17. Забелешка. За матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ нејзината транспонирана матрица ја наоѓаме ако редиците на матрицата A ги поставиме (по ред) во колони.

2.18. Теорема. Ако за матриците A и B постои производот AB , тогаш

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (11)$$

Доказ. Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times p}$. Тогаш

$$B^T = [b_{ij}^*]_{p \times n} \text{ и } A^T = [a_{ij}^*]_{n \times m}.$$

Значи, $B^T A^T = [d_{ij}]_{p \times m}$. Од друга страна $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$, па затоа

$$(AB)^T = [c_{ij}^*]_{p \times m}.$$

Значи, од двете страни во (11) имаме матрици од ист ред. Останува да докажеме дека

$$d_{ij} = c_{ij}^*, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Имаме,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}^* a_{kj}^* = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = c_{ji} = c_{ij}^*. \quad \blacklozenge$$

2.19. Пример. Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Пресметајте: A^T , AA^T , $A^T A$ и $B^T A^T$.

Решение. Имаме:

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, AA^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Сега од

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 5 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

и од теорема 2.18 следува

$$B^T A^T = (AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -4 \\ 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

2.20. Забелешка. За секоја матрица A производите AA^T и $A^T A$ се дефинирани. Меѓутоа, како што може да се види од пример 2.19 во општ случај $AA^T \neq A^T A$.

3. ПЕРМУТАЦИИ

3.1. Во претходните разгледувања го воведовме поимот пермутација без повторување од n елементи. Да се потсетиме: ако е дадено множеството $\{1, 2, \dots, n\}$, тогаш секоја биекција

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

ја нарекуваме пермутација на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$. Притоа, ја користиме ознаката

$$\sigma = (\overset{1}{\sigma(1)} \ \overset{2}{\sigma(2)} \ \dots \ \overset{n}{\sigma(n)}). \quad (1)$$

Како и претходно, во натамошните разгледувања множеството пермутации на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ ќе го означуваме со P_n .

Понатаму, бројот на пермутациите без повторување (во натамошниот текст само *пермутации*) е еднаков на $n!$.

3.2. Пример. а) Ако пермутацијата $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ е дадена со

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

тоа значи дека $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 4$ и $\sigma(4) = 1$.

б) Нека $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ и $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ се две пермутации на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогаш, бидејќи $(P_n, \circ)$ е група, производите $\sigma \circ \varphi$ и $\varphi \circ \sigma$ се определени и притоа имаме

$$\sigma \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

P_n што значи дека во општ случај важи $\sigma \circ \varphi \neq \varphi \circ \sigma$. ♦

3.3. Теорема. Ако $P_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n!}\}$ и φ е произволна пермутација од P_n , тогаш

$$P_n = \{\sigma_1 \varphi, \sigma_2 \varphi, \dots, \sigma_{n!} \varphi\} = \{\varphi \sigma_1, \varphi \sigma_2, \dots, \varphi \sigma_{n!}\}.$$

Доказ. Нека $\varphi \circ \sigma_i = \varphi \circ \sigma_k$. Бидејќи $(P_n, \circ)$ е група, добиваме дека постои $\varphi^{-1} \in P_n$ таков што $\varphi^{-1} \circ \varphi = e$, каде e е идентичната пермутација на $\{1, 2, \dots, n\}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= e \circ \sigma_i = (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \sigma_i = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \sigma_i) \\ &= \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \sigma_k) = (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \sigma_k = e \circ \sigma_k = \sigma_k, \end{aligned}$$

па затоа $i = k$. Значи, сите пермутации во множеството $\{\varphi \sigma_1, \varphi \sigma_2, \dots, \varphi \sigma_{n!}\}$ се различни и како истото има $n!$ елементи добиваме дека

$$P_n = \{\varphi \sigma_1, \varphi \sigma_2, \dots, \varphi \sigma_{n!}\}.$$

Аналогно се докажува дека $P_n = \{\sigma_1 \varphi, \sigma_2 \varphi, \dots, \sigma_{n!} \varphi\}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3.4. Дефиниција. Пермутацијата $\sigma \in P_n$ ја нарекуваме k -цикл ако постои $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ таков што

$$\sigma^k(i) = i,$$

$$\sigma^t(i) \neq i, \text{ за } t = 1, 2, \dots, k-1$$

и

$$\sigma(j) = j, \text{ за } j \notin \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{k-1}(i)\}.$$

Притоа ја прифаќаме ознаката $\sigma = (i, \sigma(i), \dots, \sigma^{k-1}(i))$. 2-циклот на пермутацијата σ го нарекуваме *транспозиција*.

3.5. Коментар. Од дефиниција 3.4 следува дека пермутацијата $\sigma \in P_n$ е k -цикл ако постои множество $K = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ такво што

$$\sigma(i_t) = i_{t+1}, \text{ за } t = 1, 2, \dots, k-1, \quad \sigma(i_k) = i_1 \text{ и } \sigma(j) = j, \text{ за } j \notin K.$$

Јасно, идентичната пермутација e е 1-цикл. Понатаму, ако $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, тогаш

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1) = \dots = (i_k, i_1, \dots, i_{k-1}).$$

Понатаму, од дефиниција 3.4 следува дека ако σ е транспозиција, тогаш

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = \sigma^2(i) = i \text{ и } \sigma(p) = p, \text{ за } p \neq i, j$$

и притоа $\sigma = (i, j)$.

3.6. Пример. За пермутацијата

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 7 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

имаме $\sigma = (2 \ 4 \ 7 \ 3 \ 5)$. ♦

3.7. Дефиниција. Нека $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и нека $\sigma \in S_n$. Множеството

$$\sigma[i] = \{\sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^k(i)\},$$

каде k е најмалиот позитивен број таков што $\sigma^k(i) = i$, го нарекуваме *орбита на i во однос на σ* . Бројот k го нарекуваме *должина на орбитата $\sigma[i]$* .

3.8. Забелешка. Ако $t \in \mathbf{N}$, тогаш $\sigma^t(i) \in \sigma[i]$. Навистина, за секој $t \in \mathbf{N}$ имаме $t = kq + r$, каде $0 \leq r < k$. Тогаш

$$\sigma^t(i) = \sigma^{kq+r}(i) = \sigma^r(\sigma^{kq}(i)) = \sigma^r(i).$$

Освен тоа, $\sigma[i]$ има точно k различни броеви. Имено, ако $p, q \in \{1, 2, \dots, k\}$, $p < q$, тогаш од $\sigma^p(i) = \sigma^q(i)$ следува $\sigma^{q-p}(i) = i$ и бидејќи $0 < q - p < k$, добиваме противречност со минималноста на k .

3.9. Теорема. а) Орбитите на пермутацијата $\sigma \in P_n$ се по парови заемно дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$.

б) Секоја пермутација $\sigma \in P_n$ на единствен начин може да се претстави како композиција на дисјунктни цикли.

в) Секоја пермутација е производ на транспозиции.

Доказ. а) Секој елемент на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ припаѓа барем на една орбита, па затоа доволно е да докажеме, дека ако две орбити имаат непразен пресек, тогаш тие се еднакви. Нека $p \in \sigma[i] \cap \sigma[j]$. Тогаш постојат s и t такви што

$$\sigma^s(i) = p = \sigma^t(j).$$

Ќе докажеме дека $i \in \sigma[j]$. Нека k е должината на $\sigma[i]$. Ако $s = k$, тогаш $i = \sigma^t(j)$, па затоа $i \in \sigma[j]$. Ако $s < k$, тогаш

$$i = \sigma^k(i) = \sigma^{k-s}(\sigma^s(i)) = \sigma^{k-s}(\sigma^t(j)) = \sigma^{k-s+t}(i) \in \sigma[j].$$

Сега од забелешка 3.8 следува дека $\sigma[i] \subseteq \sigma[j]$.

Аналогно се докажува дека $\sigma[j] \subseteq \sigma[i]$, што значи дека $\sigma[i] = \sigma[j]$

б) Нека $\sigma \in P_n$, $i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$, k_1 е должината на орбитата на i_1 во однос на σ и ψ_1 е циклот $(\sigma(i_1), \dots, \sigma^{k_1}(i_1))$. Ако $\psi_1 = \sigma$, тогаш тврдењето е докажано. Нека постои $i_2 \notin \sigma[i_1]$ и $\psi_2 = (\sigma(i_2), \dots, \sigma^{k_2}(i_2))$, каде k_2 е должината на орбитата $\sigma[i_2]$. Од тврдењето под а) следува дека циклите ψ_1 и ψ_2 се дисјунктни. Ако $\sigma = \psi_2 \psi_1$, тогаш тврдењето е докажано. Во спротивен случај наоѓаме $i_3 \notin \sigma[i_1] \cup \sigma[i_2]$ и бидејќи множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ е конечно, добиваме дека постапката ќе завржи после конечен број од m чекори. Според тоа,

$$\sigma = \psi_m \dots \psi_2 \psi_1. \quad (2)$$

Единственоста на декомпозицијата (2) следува од тврдењето под а) и дефинициите 3.4 и 3.7.

в) Од тврдењето под б) следува дека доволно е да докажеме дека секој цикл $\psi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ е производ на транспозиции. Лесно се проверува дека

$$\psi = (i_1, i_2, \dots, i_k) = \psi = (i_1, i_k)(i_1, i_{k-1}) \dots (i_3, i_1)(i_2, i_1).$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3.10. Дефиниција. Нека $\sigma = \sigma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_1 \in P_n$ е декомпозицијата на σ на дисјунктни цикли и σ_i е k_i -цикл, $i = 1, 2, \dots, m$. Бројот

$$C(\sigma) = \sum_{i=1}^m (k_i - 1)$$

го нарекуваме *Кошиев број за пермутацијата σ* . За пермутацијата σ ќе велиме дека е *парна* ако $C(\sigma)$ е парен број, а *непарна* ако $C(\sigma)$ непарен број. Бројот

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{C(\sigma)} \quad (3)$$

го нарекуваме *знак на пермутацијата σ* .

3.11. Теорема. Ако $\sigma = \tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1$, каде τ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ се транспозиции во S_n , тогаш

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^k. \quad (4)$$

Доказ. Ќе докажеме, дека ако пермутацијата σ ја помножиме со транспозиција σ , тогаш $\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$. Прво, нека σ е цикл φ и да претпоставиме дека $\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s)$ и $\tau = (i_1, j_1)$. Тогаш

$$\begin{aligned} \tau\varphi(i_t) &= \tau(i_{t+1}) = i_{t+1}, \text{ за } t = 1, 2, \dots, r-1, \\ \tau\varphi(i_r) &= \tau(j_1) = i_1, \end{aligned}$$

$$\tau\varphi(j_t) = \tau(j_{t+1}) = j_{t+1}, \text{ за } t = 1, 2, \dots, s-1, \\ \tau\varphi(j_s) = \tau(i_1) = j_1.$$

Затоа

$$\tau\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_r)(j_1, j_2, \dots, j_s)$$

и

$$C(\tau\varphi) = r + s - 2 = C(\varphi) - 1,$$

па од (3) следува $\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$. Сега нека претпоставиме, дека само еден од елементите на транспозицијата припаѓа на циклот, т.е. дека $\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ и $\tau = (i_1, j_1)$. Тогаш

$$\tau\varphi = (i_1, i_2, \dots, i_r, j_1)$$

и

$$C(\tau\varphi) = r = C(\varphi) + 1,$$

па од (3) следува $\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$. Ако φ и τ се дисјунктни, тогаш од дефиниција 3.10 следува

$$C(\tau\varphi) = C(\tau) + C(\varphi) = C(\varphi) + 1.$$

Да претпоставиме дека σ е производ на дисјунктни цикли, $\sigma = \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_m$. Ако $\tau = (i_1, j_1)$ и i_1, j_1 припаѓаат во ист цикл φ_t , тогаш тврдењето следува од претходните разгледувања. Ако $\tau = (i_1, j_1)$, $\varphi_1 = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ и $\varphi_2 = (j_1, j_2, \dots, j_s)$, тогаш

$$\tau\varphi_1\varphi_2 = (i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s),$$

па затоа

$$C(\tau\sigma) = C(\tau\varphi_1\varphi_2) + C(\varphi_3\dots\varphi_m) = C(\varphi_1\varphi_2) + 1 + C(\varphi_3\dots\varphi_m) = C(\sigma) + 1$$

и од (3) следува $\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$.

Нека $\sigma = \tau_k\tau_{k-1}\dots\tau_1$, каде $\tau_i, i = 1, 2, \dots, k$ се транспозиции во P_n . Ако $k = 1$, тогаш σ е транспозиција, па затоа $C(\sigma) = 1 = k$, што значи дека

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{C(\sigma)} = (-1)^k,$$

т.е. важи формулата (4). Нека претпоставиме, дека формулата (4) важи за $k-1$ транспозиција, т.е. ако $\sigma_1 = \tau_{k-1}\dots\tau_1$, тогаш $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^{k-1}$. Тогаш, за $\sigma = \tau_k\tau_{k-1}\dots\tau_1$ имаме $\sigma = \tau_k\sigma_1$, па затоа $C(\sigma) = C(\tau_k\sigma_1) = C(\sigma_1) \pm 1$, што значи дека

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{C(\sigma)} = (-1)^{C(\sigma_1) \pm 1} = (-1)^{k-1 \pm 1} = (-1)^k$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека формулата (4) важи за секој природен број k . ♦

3.12. Последица. Нека $n \geq 2$. Бројот на парните пермутации во цикличната група P_n е еднаков на $\frac{n!}{2}$.

Доказ. Нека $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ се сите различни парни пермутации во S_n . Тогаш од доказот на теорема 3.12 следува пермутациите

$$(12)\sigma_1, (12)\sigma_2, \dots, (12)\sigma_k$$

се непарни и истите се различни. Според тоа, бројот на парните пермутации е помал или еднаков на бројот на непарните пермутации. Аналогно се докажува дека бројот на непарните пермутации m е помал или еднаков на бројот на непарните пермутации, па затоа $m = k$. Конечно, бројот на парните пермутации во циклическата група P_n е еднаков на $\frac{n!}{2}$. ♦

3.13. Последица. Ако $\sigma, \varphi \in P_n$, тогаш

$$\varepsilon(\sigma\varphi) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\varphi) \text{ и } \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma).$$

Доказ. Ако σ е производ на p транспозиции и φ е производ од k транспозиции, тогаш $\sigma\varphi$ е производ на $p+k$ транспозиции и затоа

$$\varepsilon(\sigma\varphi) = (-1)^{p+k} = (-1)^p (-1)^k = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\varphi).$$

Идентичната пермутација има $k = 0$ транспозиции, па затоа

$$1 = (-1)^0 = \varepsilon(e) = \varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}),$$

што значи $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$. ♦

3.14. Теорема. Нека $\sigma \in P_n$ и $\sigma(i) = i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Дефинираме

$$\varphi \in S_{n-k} \text{ со } \varphi(t) = \sigma(t+k) - k, \quad t = 1, 2, \dots, n-k.$$

Тогаш $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\varphi)$.

Доказ. Нека

$$\sigma = (1)(2)\dots(k)\tau_m\tau_{m-1}\dots\tau_1$$

каде $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ се транспозиции над броевите $k+1, k+2, \dots, n$. За секоја транспозиција $\tau_s = (i_s, j_s)$ имаме

$$\tau'_s = (i_s - k, j_s - k) \in S_{n-k},$$

па така за $i = k+1, k+2, \dots, n$ важи

$$\begin{aligned} \tau'_1(i-k) &= \tau_1(i) - k \\ \tau'_2\tau'_1(i-k) &= \tau'_2(\tau_1(i) - k) = \tau_2\tau_1(i) - k, \\ \tau'_m\tau'_1(i-k) &= \tau_2\dots\tau_1(i) - k = \sigma(i) - k, \end{aligned}$$

и затоа $\tau'_m\tau'_1 = \varphi$. Сега, од теорема 3.11 следува $\varepsilon(\varphi) = (-1)^m = \varepsilon(\sigma)$. ♦

3.15. Теорема. Нека за броевите $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ и $\beta_i, i = 1, 2, \dots, n-k$ важи

$$1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n, \quad 1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-k} \leq n \text{ и}$$

$$\{\alpha_i, i=1,2,\dots,k\} \cup \{\beta_i, i=1,2,\dots,n-k\} = \{1,2,\dots,n\}.$$

Ако $\sigma \in P_n$ е определена со

$$\sigma(i) = \begin{cases} \alpha_i, & i=1,2,\dots,k, \\ \beta_{i-k}, & i=k+1,\dots,n, \end{cases}$$

тогаш

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{s(\alpha)+k(k+1)/2},$$

каде $s(\alpha) = \sum_{t=1}^k \alpha_t$.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n . Ако $n=1$, тогаш тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $n > 1$ и дека тврдењето важи за секоја пермутација од опишаниот вид во P_{n-1} . Можни се два случаја: или $\beta_{n-k} = n$ или $\alpha_k = n$. Ако $\beta_{n-k} = n$, тогаш

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \beta_1 & \dots & \beta_{n-k-1} & n \end{pmatrix},$$

и дефинираме $\tau \in P_{n-1}$ таква што

$$\tau(i) = \sigma(i), \text{ за } i=1,2,\dots,n-1.$$

Јасно, τ и σ имаат еднакви Кошијеви броеви и затоа $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$ и од индуктивната претпоставка следува дека

$$\varepsilon(\tau) = (-1)^{s(\alpha)+k(k+1)/2}.$$

Сега, нека претпоставиме дека $\alpha_k = n$. Тогаш

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & n & \beta_1 & \dots & \beta_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Нека

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-k} & n \end{pmatrix}.$$

Тогаш од индуктивната претпоставка следува

$$\varepsilon(\theta) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{k-1}+k(k-1)/2}.$$

Освен тоа

$$\begin{aligned} \theta^{-1}\sigma &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-k} & n \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & n & \beta_1 & \dots & \beta_{n-k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & n & k & k+1 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \\ &= (n, n-1, n-2, \dots, k+1, k). \end{aligned}$$

Но, $\alpha_k = n$, па затоа

$$\varepsilon(\theta^{-1}\sigma) = (-1)^{n-k} = (-1)^{\alpha_k-k} = (-1)^{\alpha_k+k}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma) &= \varepsilon(\theta\theta^{-1}\sigma) = \varepsilon(\theta)\varepsilon(\theta^{-1}\sigma) \\
&= (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{k-1}+(k-1)k/2} (-1)^{\alpha_k+k} \\
&= (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{k-1}+\alpha_k+k+(k-1)k/2} \\
&= (-1)^{s(\alpha)+k(k+1)/2},
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

3.16. Последица. Нека

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix} \in P_n.$$

Ако $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ се броевите $i_1, i_2, \dots, i_k$ подредени во растечки редослед и $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ се броевите $i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_n$ подредени во растечки редослед, тогаш

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+k(k+1)/2} \varepsilon(\tau^{-1})\varepsilon(\varphi^{-1}),$$

каде

$$\varphi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

и

$$\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & i_{k+1} & \dots & i_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Доказ. Од условот на теоремата имаме

$$\tau\varphi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \omega,$$

т.е. $\sigma = \varphi^{-1}\tau^{-1}\omega$. За пермутацијата ω се исполнети условите од теорема 3.16, па затоа

$$\varepsilon(\omega) = (-1)^{s(\alpha)+k(k+1)/2},$$

каде

$$s(\alpha) = \sum_{t=1}^k \alpha_t = \sum_{t=1}^k i_t.$$

Конечно, од последното равенство и од последица 3.13 следува

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\varphi^{-1})\varepsilon(\tau^{-1})\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\varphi^{-1})\varepsilon(\tau^{-1})(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+k(k+1)/2}. \quad \blacklozenge$$

3.17. Теорема. Нека $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ и $\sigma \in S_k$. Дефинираме $\varphi \in P_n$:

$$\begin{aligned}
\varphi(j_t) &= j_{\sigma(t)}, \quad t=1, 2, \dots, k \\
\varphi(i) &= i, \quad i \notin \{j_1, j_2, \dots, j_k\}.
\end{aligned}$$

Тогаш $\varepsilon(\varphi) = \varepsilon(\sigma)$.

Доказ. Нека $\sigma = \sigma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_1$ е докомпозицијата на σ на транспозиции. Дефинираме транспозиции $\varphi_s \in S_n$, $s=1, 2, \dots, m$:

$$\varphi_s(j_t) = j_{\sigma_s(t)}, t = 1, 2, \dots, k,$$

$$\varphi_s(i) = i, \quad i \notin \{j_1, j_2, \dots, j_k\}.$$

Тогаш

$$\varphi_m \dots \varphi_1(j_t) = j_{\sigma_m \dots \sigma_1(t)} = j_{\sigma(t)}, \quad t = 1, 2, \dots, k,$$

$$\varphi_m \dots \varphi_1(i) = i, \quad i \notin \{j_1, j_2, \dots, j_k\}.$$

Така $\varphi_m \dots \varphi_1 = \varphi$ и затоа $\varepsilon(\varphi) = (-1)^m = \varepsilon(\sigma)$. ♦

4. ПОИМ ЗА ДЕТЕРМИНАНТА. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

4.1. Дефиниција. Нека е дадена матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Бројот

$$\sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \quad (1)$$

го нарекуваме *детерминанта на матрицата* $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Производот

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \quad (2)$$

го нарекуваме *член на детерминантата* на матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$.

За означување на детерминантата на матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ќе ги користиме следниве ознаки $|A|$, $\det A$, $\det[a_{ij}]$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За $n=1$ имаме $\det[a_{11}] = a_{11}$. За $n=2$ имаме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

и за $n=3$ добиваме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

4.2. Коментар. Ознаката (1) всушност значи сумирање по сите пермутации во S_n , што значи дека во (1) имаме сумирање на $n!$ членови на детерминантата. Притоа, бидејќи бројот на непарните пермутации е еднаков на бројот на парните пермутации, во (1) имаме $\frac{n!}{2}$ производи земени со знак плус и исто толку со знак минус.

4.3. Пример. Нека $\det[a_{ij}]$ е детерминанта од шести ред. Определете го знакот на производите

а) $a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}a_{66}$,

б) $a_{16}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}a_{63}$.

Решение. а) За пермутацијата $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ имаме $\sigma = (1, 2, 4, 5, 3)$, па затоа $C(\sigma) = 5 - 1 = 4$, што значи $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$, т.е. производот

$$a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}a_{66}$$

е со позитивен знак.

б) За пермутацијата $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ имаме $\sigma = (1, 6, 3, 4, 2, 5)$. Според тоа, $C(\sigma) = 6 - 1 = 5$, па затоа $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$, т.е. производот

$$a_{12}a_{24}a_{31}a_{45}a_{53}a_{66}$$

е со знак минус. ♦

4.4. Пример. Имаме

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4!.$$

Навистина, меѓу сите $4!$ собирци кои влегуваат во збирот (9) за дадената детерминанта, само еден собирук е различен од нула: $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$. Притоа, за пермутацијата $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ имаме $\sigma = (1, 2, 3, 4)$, т.е. $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$, па затоа овој производ се зема со знак минус. ♦

4.5. Пример. Пресметајте ги детерминантите:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3n-2} & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Решение. Детерминантите чии сите елементи над или под главната (или споредната) дијагонала се еднакви на нула ги нарекуваме *триаголни детерминанти* или *детерминанти со триаголна форма*. Значи, A и B се триаголни детерминанти. За овие детерминанти во сите производи (2) освен во

$$a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn},$$

односно

$$a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\dots a_{n1},$$

како множител се јавува барем една нула. Според тоа:

$$A = \varepsilon(\sigma)a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \text{ и } B = \varepsilon(\varphi)a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\dots a_{n1}$$

каде што

$$\sigma = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ и } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Понатаму, од

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(e) = (-1)^0 = 1 \text{ и } \varepsilon(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

следеува

$$A = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \text{ и } B = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\dots a_{n1} \cdot \blacklozenge$$

4.6. Теорема. Ако $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, тогаш $\det A = \det A^T$.

Доказ. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Имаме

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)},$$

и од дефиницијата на транспонираната матрица добиваме дека

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}. \quad (3)$$

Понатаму, ако $k = \sigma(i)$, тогаш $i = \sigma^{-1}(k)$ и од равенството (3) следеува дека

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k\sigma^{-1}(k)}.$$

Нека $\varphi = \sigma^{-1}$. Бидејќи сумирањето кога σ се менува во P_n е еквивалентно на сумирањето кога σ^{-1} се менува во P_n и од последица 3.13 имаме

$$\varepsilon(\varphi) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma),$$

па затоа од последното равенство следеува

$$\det A^T = \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{k=1}^n a_{k\varphi(k)} = \det A \cdot \blacklozenge.$$

4.7. Забелешка. Од теорема 4.6 непосредно следеува дека сите тврдења кои важат за редиците на произволна матрица $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, важат и за колоните на матрицата A , и обратно.

4.8. Теорема. Ако матрицата B се добива од матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ со пермутација φ на нејзините колони, тогаш $\det B = \varepsilon(\varphi) \cdot \det A$.

Доказ. Од теорема 3.3 б) следува дека сумирање по σ кога σ се менува во P_n е еквивалентно на сумирањето по $\varphi\sigma$ кога σ се менува во P_n . Според последица 3.13 имаме $\varepsilon(\varphi\sigma) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\sigma)$. Јасно, ако σ е пермутацијата со која е определен членот (2) на $\det A$, тогаш $\sigma_1 = \varphi\sigma$ е пермутацијата со која е определен соодветниот член на $\det B$. Конечно, од претходно кажаното следува

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma_1 \in S_n} \varepsilon(\sigma_1) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_1(i)} = \sum_{\varphi\sigma \in S_n} \varepsilon(\varphi\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i(\varphi\sigma)(i)} \\ &= \varepsilon(\varphi) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \varepsilon(\varphi) \cdot \det A,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

4.9. Последица. а) Ако матрицата B се добива од матрицата A со транспозиција на две нејзини колони, тогаш $\det B = -\det A$.

б) Ако матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ има две еднакви редици, тогаш $\det A = 0$.

Доказ. а) Непосредно следува од теорема 4.8 и фактот дека за секоја транспозиција τ важи $\varepsilon(\tau) = -1$.

б) Со B да ја означиме матрицата која се добива ако во матрицата A ги заменат местата еднаквите редици. Јасно, $B = A$ и од тврдењето под а) следува

$$\det A = \det B = -\det A,$$

па затоа $\det A = 0$. ♦

4.10. Теорема. Нека матрицата $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ се добива од матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ со множење на j -тата редица со бројот k . Тогаш $\det B = k \det A$.

Доказ. Од условот на теоремата следува дека за секој $s = 1, 2, \dots, n$ важи

$$b_{is} = \begin{cases} ka_{is}, & i = j, \\ a_{is}, & i \neq j. \end{cases} \quad (4)$$

Сега, од дефиниција 4.1 и од равенствата (4) следува:

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j-1\sigma(j-1)} (ka_{j\sigma(j)}) a_{j+1\sigma(j+1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= k \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = k \det A,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

4.11. Последица. Ако елементите на две редици на матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ се пропорционални, тогаш $\det A = 0$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 4.10 и последица 4.9. ♦

4.12. Теорема. Ако елементите a_{kj} на k -тата редица на детерминантата Δ се збирови од два збирци: $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$, тогаш детерминантата Δ е еднаква на збир на две детерминанти Δ_1 и Δ_2 , кои се разликуваат од Δ само во k -тата редица: $b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn}$ е k -тата редица на Δ_1 , а $c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kn}$ е k -тата редица на Δ_2 .

Доказ. Имаме:

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k-1\sigma(k-1)} a_{k\sigma(k)} a_{k+1\sigma(k+1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k-1\sigma(k-1)} [b_{k\sigma(k)} + c_{k\sigma(k)}] a_{k+1\sigma(k+1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k-1\sigma(k-1)} b_{k\sigma(k)} a_{k+1\sigma(k+1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k-1\sigma(k-1)} c_{k\sigma(k)} a_{k+1\sigma(k+1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \Delta_1 + \Delta_2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

4.13. Забелешка. Во следните разгледувања ќе ја користиме следнава терминологија:

а) множење на редица на детерминанта со број k , значи секој елемент на редицата да се помножи со бројот k ,

б) да се соберат две редици на детерминантата, значи да се соберат соодветните елементи на тие две редици, т.е. елементите кои се наоѓаат во иста колона,

в) ја додаваме на i -тата редица на детерминантата нејзината k -та редица, ако i -тата редица ја замениме со збирот на i -тата и k -тата редица, и

г) составуваме линеарна комбинација на редовите на детерминантата, ако i -тата редица ја помножиме со број λ_i и ги собереме добиените редици. Притоа некои λ_i можат да бидат еднакви на нула и во линеарната комбинација не влегуваат сите редици.

4.14. Последица. Вредноста на детерминантата не се менува ако производна редица се помножи со број и се додаде на друга редица.

Доказ. Непосредно следува од теорема 4.12 и последица 4.11. ♦

4.15. Последица. Вредноста на детерминантата не се менува ако на производна редица се додаде збирот од производите на останатите редици со производни реални броеви.

Доказ. Непосредно следува од последица 4.14. ♦

4.16. Пример. Докажете, дека вредноста на детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_4 \end{vmatrix},$$

не се менува, ако кои било два елементи на главната дијагонала си ги заменат местата. Дали тврдењето важи за аналогна детерминанта од произволен ред?

Решение. Да ги замениме местата на првите два реда, а потоа на првите две колони. Тогаш

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a_2 & 1 & 1 \\ a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Слично, ако прво ги замениме местата на i -тата и j -тата редица на детерминантата, а потоа ги замениме местата на i -тата и j -тата колона, тогаш ќе добиеме детерминанта кај која елементите a_i и a_j повторно ќе бидат на главната дијагонала, но со заменети места. Притоа, останатите елементи не ги менуваат местата, а добиената детерминанта ќе биде еднаква на дадената. Продолжувајќи на истиот начин да разместуваме парови редици и соодветни колони, ќе добиеме равенство од видот

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\sigma(1)} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{\sigma(2)} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_{\sigma(3)} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_{\sigma(4)} \end{vmatrix},$$

каде $(\overset{1}{\sigma(1)} \overset{2}{\sigma(2)} \overset{3}{\sigma(3)} \overset{4}{\sigma(4)})$ е произволна пермутација на множеството $\{1, 2, 3, 4\}$.

Претходно опишаната постапка не зависи од редот на детерминантата, па затоа на аналоген начин можеме да го добиеме равенството

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\sigma(1)} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{\sigma(2)} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a_{\sigma(n)} \end{vmatrix}$$

каде $(\overset{1}{\sigma(1)} \overset{2}{\sigma(2)} \dots \overset{n}{\sigma(n)})$ е произволна пермутација на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$. Да забележиме, дека постапката не зависи и од бројот 1, т.е. истиот може да се замени со произволен број b , т.е. точно е равенството

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & \dots & b \\ b & a_2 & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\sigma(1)} & b & \dots & b \\ b & a_{\sigma(2)} & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a_{\sigma(n)} \end{vmatrix} . \blacklozenge$$

4.17. Пример. На секој n^2 -цифрен (во декаден броен систем) природен број му е придружена детерминанта од n -ти ред, која е добиена со последователно запишување по редици на цифрите на бројот. На пример, ако $n = 2$ на бројот 2341 му е придружена детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Во функција од n најдете го збирот на сите детерминанти, придружени на сите n^2 -цифрени броеви. (Броевите започнуваат со цифра различна од нулата. На пример, за $n = 2$ разгледуваниот збир има 9000 собирици.)

Решение. Со S_n да го означиме бараниот збир. Ако $n = 1$, очигледно $S_1 = 45$.

Нека $n \geq 3$. Ако во една детерминанта на збирот S_n ги заменат местата последните две редици (бидејќи $n \geq 3$, првата редица не е меѓу нив), ќе добиеме детерминанта од сумата S_n . Според тоа, ако кај сите детерминанти од збирот S_n истовремено ги замениме последните две редици, тогаш збирот S_n нема да се промени. Од друга страна ако во една од детерминантите ги замениме местата на две редици, тогаш детерминантата го менува знакот. Последното значи $S_n = -S_n$, од што следува дека за $n \geq 3$ имаме $S_n = 0$.

Нека $n = 2$. Јасно,

$$\sum_{k=0}^9 \sum_{l=0}^9 \begin{vmatrix} a & b \\ k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 450 & 450 \end{vmatrix},$$

од што следува

$$S_2 = \sum_{a=1}^9 \sum_{b=0}^9 \begin{vmatrix} a & b \\ 450 & 450 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 450 & 405 \\ 450 & 450 \end{vmatrix} = 20250 . \blacklozenge$$

4.18. Теорема. За секои матрици $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times n}$, тогаш

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доказ. Нека $AB = [c_{ik}]_{n \times n}$, каде $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$. Од дефиниција 4.1 сле-

дува

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{j\sigma(i)}. \quad (5)$$

Бидејќи

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} = \sum_f \prod_{i=1}^n d_{if(i)},$$

каде сумирањето на десната страна во последното равенство се врши по сите пре-сликувања $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, од равенството (5) следува

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \sum_f \prod_{i=1}^n a_{if(i)} b_{f(i)\sigma(i)} = \sum_f \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{if(i)} b_{f(i)\sigma(i)} \\ &= \sum_f \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{if(i)} \prod_{i=1}^n b_{f(i)\sigma(i)} = \sum_f \left(\prod_{i=1}^n a_{if(i)} \right) \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{f(i)\sigma(i)}. \end{aligned}$$

Во последното равенство изразот

$$\sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{f(i)\sigma(i)}$$

всушност е еднаков на детерминантата чија прва колона е еднаква на колоната $f(1)$ во матрицата B , втората колона е еднаква на колоната $f(2)$ на матрицата B итн. Според последица 4.9 б) овој израз е еднаков на нула ако меѓу броевите $f(1), f(2), \dots, f(n)$ има еднакви, т.е. ако $f \notin S_n$. Значи,

$$\det(AB) = \sum_{\varphi \in P_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i\varphi(i)} \right) \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\varphi(i)\sigma(i)}. \quad (6)$$

Од теорема 3.3 б) следува дека сумирање по σ кога σ се менува во P_n е еквивалентно на сумирањето по $\varphi^{-1}\sigma$ кога σ се менува во P_n . Ако ставиме $\varphi^{-1}\sigma = \tau$, тогаш добиваме $\sigma = \varphi\tau$, па од последица 3.14 имаме $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\tau)$. Сега од равенството (6) и од дефиниција 4.1 добиваме

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\varphi \in P_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i\varphi(i)} \right) \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\varphi(i)\sigma(i)} \\ &= \sum_{\varphi \in P_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i\varphi(i)} \right) \sum_{\sigma \in P_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{i(\varphi^{-1}\sigma)(i)} \\ &= \sum_{\varphi \in P_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i\varphi(i)} \right) \sum_{\tau \in P_n} \varepsilon(\varphi\tau) \prod_{i=1}^n b_{i\tau(i)} \\ &= \sum_{\varphi \in P_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{i=1}^n a_{i\varphi(i)} \sum_{\tau \in P_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n b_{i\tau(i)} \\ &= \det A \cdot \det B, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

4.19. Пример. Нека $n \geq 1$ и со d_n да го означиме најголемиот заеднички делител на елементите на матрицата $A^n - E$, каде

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Докажете, дека $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$.

Решение. Прво ќе докажеме дека за секој n матрицата A^n има вид

$$A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

каде a_n и b_n се природни броеви.

Навистина, за $n=1$ равенството (6) очигледно важи. Нека претпоставиме, дека равенството (6) важи за некој $n \in \mathbf{N}$. Тогаш

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_n + 4b_n & 2a_n + 3b_n \\ 4a_n + 6b_n & 3a_n + 4b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ 2b_{n+1} & a_{n+1} \end{bmatrix},$$

што покажува, дека равенството (6) важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број. Притоа важи

$$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n > a_n$$

и како броевите a_n се природни, добиваме $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Од друга страна, од равенството (6) и од теорема 4.18 следува

$$a_n^2 - 2b_n^2 = \det A^n = (\det A)^n = (9-8)^n = 1,$$

па значи за секој n , бројот a_n е непарен и

$$(a_n - 1)(a_n + 1) = 2b_n^2.$$

Според тоа, броевите $a_n - 1$ и $a_n + 1$ се два последователни парни броеви, па затоа еден од нив се дели со 2, но не се дели со 4.

1) Нека $a_n - 1$ не се дели со 4. Тогаш НЗД($\frac{a_n - 1}{2}, a_n + 1$) = 1 и од

$$\frac{a_n - 1}{2} \cdot (a_n + 1) = b_n^2$$

следува дека

$$\frac{a_n - 1}{2} = p_n^2, \quad a_n + 1 = q_n^2,$$

каде p_n и q_n се заемно прости природни броеви и $p_n q_n = b_n$. Според тоа, p_n е делител на $a_n - 1$ и b_n и како

$$A^n - E = \begin{bmatrix} a_n - 1 & b_n \\ 2b_n & a_n - 1 \end{bmatrix}$$

добиваме дека p_n е делител на d_n . Според тоа, $d_n \geq p_n = \sqrt{\frac{a_n - 1}{2}}$.

2) Нека $a_n + 1$ не се дели со 4. Со аналогни размислувања добиваме, дека $a_n - 1 = p_n^2$, $\frac{a_n + 1}{2} = q_n^2$, каде p_n и q_n се заемно прости природни броеви, $p_n q_n = b_n$ и освен тоа p_n е делител на d_n . Тогаш $d_n \geq p_n = \sqrt{a_n - 1} > \sqrt{\frac{a_n - 1}{2}}$.

Од досега изнесеното следува, дека $d_n \geq \sqrt{\frac{a_n - 1}{2}}$ и како $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ добиваме, дека $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$. ♦

5. ТЕОРЕМА НА ЛАПЛАС

5.1. Дефиниција. Нека е дадена матрицата $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ и нека $r \in \{1, 2, \dots, m\}$ и $s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Матрицата од видот

$$A_{i_1 i_2 \dots i_r}^{k_1 k_2 \dots k_s} = \begin{bmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_s} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} & \dots & a_{i_r k_s} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

каде $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$, $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n$ ја нарекуваме *субматрица* на матрицата A .

5.2. Забелешка. Субматрицата (1) е од ред $r \times s$. Понатаму, субматрицата (1) е формирана од елементите на матрицата A кои се наоѓаат во пресекот на редиците со редни броеви $i_1, i_2, \dots, i_r$ и колоните со редни броеви $k_1, k_2, \dots, k_s$.

Јасно, секоја редица на матрицата A е нејзина субматрица, а истото важи и за секоја колона. Притоа, ако i – тата редица на A ја означиме со

$$A_{(i)} = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}],$$

а k – тата колона со

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{bmatrix},$$

тогаш матрицата може да се запише во видот

$$A = \begin{bmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \dots \\ A_{(m)} \end{bmatrix} = [A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad \dots \quad A^{(n)}].$$

5.3. Пример. За матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

имаме

$$A_{13}^{25} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{24}^{124} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } A_{234}^{124} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

5.4. Дефиниција. Нека е дадена матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbf{K})$, $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $A_{i_1 i_2 \dots i_\nu}^{k_1 k_2 \dots k_\nu}$ е квадратна субматрица со ред ν на матрицата A . Детерминантата на матрицата $A_{i_1 i_2 \dots i_\nu}^{k_1 k_2 \dots k_\nu}$, т.е. $\det A_{i_1 i_2 \dots i_\nu}^{k_1 k_2 \dots k_\nu}$ ја нарекуваме *минор* од ν -ти ред на детерминантата на матрицата A .

5.5. Дефиниција. Нека е дадена матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbf{K})$, $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $A_{i_1 i_2 \dots i_\nu}^{k_1 k_2 \dots k_\nu}$ е квадратна субматрица со ред ν на матрицата A . Ако за индексите $r_1, r_2, \dots, r_{n-\nu}$ и $s_1, s_2, \dots, s_{n-\nu}$ важи

$$\{r_1, r_2, \dots, r_{n-\nu}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_\nu\}, \quad 1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{n-\nu} \leq n,$$

$$\{s_1, s_2, \dots, s_{n-\nu}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_\nu\}, \quad 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{n-\nu} \leq n,$$

тогаш бројот

$$(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_\nu+k_1+k_2+\dots+k_\nu} \det A_{r_1 r_2 \dots r_{n-\nu}}^{s_1 s_2 \dots s_{n-\nu}} \quad (2)$$

го нарекуваме *алгебарски комплемент (кофактор)* соодветен на минорот $\det A_{i_1 i_2 \dots i_\nu}^{k_1 k_2 \dots k_\nu}$.

5.6. Забелешка. Минорите од прв ред на детерминантата $\det A$ се нејзините елементи, а нивните алгебарски комплементи се минорите од $(n-1)$ -ви ред помножени со соодветните степени на бројот -1 . Единствен минор од n -ти ред е самата детерминанта и таа нема алгебарски комплемент.

5.7. Коментар. Бидејќи збирот на броевите на сите редици и колони е $2(1+2+\dots+n)$, т.е. тој е парен број, добиваме дека

$$p = i_1 + i_2 + \dots + i_\nu + k_1 + k_2 + \dots + k_\nu \text{ и } 2(1+2+\dots+n) - p$$

имаат иста парност. Но, $2(1+2+\dots+n) - p$ е еднаков на збирот на броевите на сите редици и колони кои влегуваат во субматрицата $A_{r_1 r_2 \dots r_{n-\nu}}^{s_1 s_2 \dots s_{n-\nu}}$, па затоа на местото

на p во (2) може да се стави збирот на броевите на сите редици и колони од $A_{r_1 r_2 \dots r_{n-\nu}}^{s_1 s_2 \dots s_{n-\nu}}$.

5.8. Пример. За детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

минорот A_{23}^{13} и неговиот алгебарски комплемент се:

$$\det A_{23}^{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и } (-1)^{2+3+1+3} \det A_{14}^{24} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} . \blacklozenge$$

5.9. Пример. За детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

минорот A_{123}^{123} и неговиот алгебарски комплемент се:

$$\det A_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ и } (-1)^{1+2+3+1+2+3} \det[4] = 4 . \blacklozenge$$

5.10. Теорема. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbf{K})$. Тогаш

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} (-1)^{j_1 + \dots + j_m + \frac{m(m+1)}{2}} \det A_{1 \dots m}^{j_1 \dots j_m} \cdot \det A_{m+1 \dots n}^{j_{m+1} \dots j_n}, \quad (3)$$

и

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n, 1 \leq j_{m+1} < j_{m+2} < \dots < j_n \leq n, \{j_1, \dots, j_m\} \cap \{j_{m+1}, \dots, j_n\} = \emptyset.$$

Доказ. Нека

$$\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \quad (4)$$

е произволен член на $\det A$, $j_1, \dots, j_m$ се броевите $\sigma(1), \dots, \sigma(m)$ подредени во растечки редослед, $j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n$ се броевите $\sigma(m+1), \sigma(m+2), \dots, \sigma(n)$ подредени во растечки редослед и

$$\varphi = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(m) & \sigma(m+1) & \dots & \sigma(n) \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m & \sigma(m+1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m & \sigma(m+1) & \dots & \sigma(n) \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m & j_{m+1} & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Според последица 3.16 членот (4) на $\det A$ може да се запише во видот

$$(-1)^{j_1+j_2+\dots+j_m+\frac{m(m+1)}{2}} \varepsilon(\varphi^{-1}) a_{1\sigma(1)} \dots a_{m\sigma(m)} \varepsilon(\tau^{-1}) a_{m+1\sigma(m+1)} \dots a_{n\sigma(n)} \quad (5)$$

Но,

$$\varepsilon(\varphi^{-1}) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)}$$

е член на

$$\det A_{1\dots m}^{j_1\dots j_m} \quad (6)$$

и

$$\varepsilon(\tau^{-1}) a_{m+1\sigma(m+1)} a_{m+2\sigma(m+1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

е член на

$$\det A_{m+1\dots n}^{j_{m+1}\dots j_n}, \quad (7)$$

па затоа изразот (5), т.е. изразот (4) е еднаков на некој член на сумата со која е претставен производот

$$(-1)^{j_1+\dots+j_m+\frac{m(m+1)}{2}} \det A_{1\dots m}^{j_1\dots j_m} \cdot \det A_{m+1\dots n}^{j_{m+1}\dots j_n}.$$

Бидејќи бројот на сите низи $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$ е еднаков на $\binom{n}{m}$, бројот на членовите на детерминатата (6) е еднаков на $m!$ и бројот на членовите на детерминатата (7) е еднаков на $(n-m)!$, заклучуваме дека сумата

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} (-1)^{j_1+\dots+j_m+\frac{m(m+1)}{2}} \det A_{1\dots m}^{j_1\dots j_m} \cdot \det A_{m+1\dots n}^{j_{m+1}\dots j_n} \quad (8)$$

има $\binom{n}{m} m! (n-m)! = n!$ членови. Понатаму, $\det A$ има $n!$ членови, секој нејзин член е член и на сумата (8) и како истата има $n!$ добиваме дека важи равенството (3). ♦

5.11. Теорема (Лаплас). Нека

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbf{K}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n,$$

$$1 \leq i_{m+1} < i_{m+2} < \dots < i_n \leq n \quad \text{и} \quad \{i_1, \dots, i_m\} \cap \{i_{m+1}, \dots, i_n\} = \emptyset.$$

Тогаш

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} (-1)^{i_1+\dots+i_m+j_1+\dots+j_m} \det A_{i_1\dots i_m}^{j_1\dots j_m} \cdot \det A_{i_{m+1}\dots i_n}^{j_{m+1}\dots j_n}, \quad (8)$$

и

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n, \quad 1 \leq j_{m+1} < \dots < j_n \leq n, \quad \{j_1, \dots, j_m\} \cap \{j_{m+1}, \dots, j_n\} = \emptyset.$$

Доказ. Во матрицата A да ја преместиме редицата i_1 на првото место, а распоредот на останатите редици нека остане непроменет. За тоа ни се потребни $i_1 - 1$ транспозиции. Потоа редицата i_2 да ја преместиме на второто место, а останатите редици да останат непроменети. За ова ни се потребни $i_2 - 2$ транспозиции. Продолжувајќи ја постапката, после

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_m - m) = i_1 + i_2 + \dots + i_m - \frac{m(m+1)}{2}$$

транспозиции ја добиваме матрицата

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & a_{i_1 3} & \dots & a_{i_1 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m 1} & a_{i_m 2} & a_{i_m 3} & \dots & a_{i_m n} \\ a_{i_{m+1} 1} & a_{i_{m+1} 2} & a_{i_{m+1} 3} & \dots & a_{i_{m+1} n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & a_{i_n 3} & \dots & a_{i_n n} \end{bmatrix}.$$

Според последица 4.9 имаме

$$\det A = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}} \det A_1. \quad (9)$$

Конечно, од равенството (9) и од теорема 5.10 добиваме

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}} \det A_1 \\ &= (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m-\frac{m(m+1)}{2}} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} (-1)^{j_1+\dots+j_m+\frac{m(m+1)}{2}} \det A_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} \cdot \det A_{i_{m+1} \dots i_n}^{j_{m+1} \dots j_n} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_m+j_1+\dots+j_m} \det A_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} \cdot \det A_{i_{m+1} \dots i_n}^{j_{m+1} \dots j_n}, \end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (8). ♦

5.12. Коментар. Теоремата на Лаплас тврди, дека $\det A$ може да се пресмета користејќи го следниов алгоритам:

- произволно избираме m редици и ги пресметуваме сите минори од m -ти ред определени со овие редици:

$$M_k, k = 1, 2, \dots, \binom{n}{m},$$

- ги наоѓаме алгебарските комплемементи $A_k, k = 1, 2, \dots, \binom{n}{m}$, соодветни на минорите

$$M_k, k = 1, 2, \dots, \binom{n}{m}, \text{ и}$$

- пресметуваме

$$\det A = \sum_{k=1}^{\binom{n}{m}} M_k A_k.$$

6. МЕТОДИ ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ДЕТЕРМИНАНТИ

6.1. Разложување детерминанта по елементи на редица или колона.

Во теоремата на Лаплас ставаме $k=1$ и истата ќе ја примениме на првата колона на детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако со A_{ij} го означиме алгебарскиот комплемент на елементот a_{ij} во Δ , тогаш од теоремата на Лаплас следува дека

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

е разложување на детерминантата по елементите од првата редица. Аналогно, ако ја примениме теоремата на Лаплас на произволна редица на Δ добиваме

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

каде A_{ik} е алгебарскиот комплемент на елементот a_{ik} . Претходно изнесеното важи и разложување по елементите на произволна колона, т.е.

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}.$$

Да забележиме дека со претходно опишаните разложувања детерминантата од n -ти ред по елементите на произволна редица (колона) се сведува на n детерминанти од $(n-1)$ -ви ред.

Пример А. Пресметајте ја детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Дадената детерминанта од четврти ред ја разложуваме по првата редица и добиваме

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

По пресметувањето на детерминантите од трет ред, добиваме

$$\Delta = 1 \cdot (-15) - 3 \cdot (-21) + 2 \cdot (12) - 1 \cdot 0 = 72. \blacklozenge$$

Пример Б. Пресметајте ја детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Во случај кога една редица (колона) има многу нули, тогаш претходно опишаната постапка на примена на теоремата на Лаплас овозможува лесно да се

пресмета детерминантата. Така, дадената детерминанта може едноставно да се пресмета, ако од третата редица ја одземеме втората и потоа добиената детерминанта ја разложиме по третата редица. Имаме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Сега, ако втората редица ја помножиме со 2 и ја одземеме од третата редица добиваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Пример В. Докажете, дека ако a, b, c и d се последователни членови на геометричка прогресија со количник различен од ± 1 , тогаш детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

е различна од нула.

Броевите a, b, c и d се последователни членови на геометричка прогресија со количник $q \neq \pm 1$, па затоа

$$b = aq, c = aq^2 \text{ и } d = aq^3.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & aq & aq^2 & aq^3 \\ a^2 & a^2q^2 & a^2q^4 & a^2q^6 \\ a^4 & a^4q^4 & a^4q^8 & a^4q^{12} \end{vmatrix} = a^7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & q^2 & q^3 \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 \\ 1 & q^4 & q^8 & q^{12} \end{vmatrix} \\ &= a^7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & q-1 & q^2-1 & q^3-1 \\ 0 & q^2-1 & q^4-1 & q^6-1 \\ 0 & q^4-1 & q^8-1 & q^{12}-1 \end{vmatrix} = a^7 \begin{vmatrix} q-1 & q^2-1 & q^3-1 \\ q^2-1 & q^4-1 & q^6-1 \\ q^4-1 & q^8-1 & q^{12}-1 \end{vmatrix} \\ &= a^7 (q-1)(q^2-1)(q^4-1) \begin{vmatrix} 1 & q+1 & q^2+q+1 \\ 1 & q^2+1 & q^4+q^2+1 \\ 1 & q^4+1 & q^8+q^4+1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^7 (q-1)(q^2-1)(q^4-1) \begin{vmatrix} 1 & q+1 & q^2+q+1 \\ 0 & q^2-q & q^4-q \\ 0 & q^4-q^2 & q^8-q^2 \end{vmatrix} \\
&= a^7 (q-1)(q^2-1)(q^4-1) \begin{vmatrix} q^2-q & q^4-q \\ q^4-q^2 & q^8-q^2 \end{vmatrix} \\
&= a^7 (q-1)(q^2-1)(q^4-1) q^3 \begin{vmatrix} q-1 & q^3-1 \\ q^2-1 & q^6-1 \end{vmatrix} \\
&= a^7 q^3 (q-1)^2 (q^2-1)^2 (q^4-1) \begin{vmatrix} 1 & q^2+q+1 \\ 1 & q^4+q^2+1 \end{vmatrix} \\
&= a^7 q^3 (q-1)^2 (q^2-1)^2 (q^4-1) (q^4-q) = a^7 q^4 (q-1)^6 (q+1)^3 (q^2+1)(q^2+q+1).
\end{aligned}$$

Но, $q \neq \pm 1$, па од последното равенство следува $\Delta \neq 0$. ♦

6.2. Сведување на детерминантата на триаголна форма. Во пример 3.14 покажавме како се пресметува вредноста на триаголна детерминанта. Заради тоа, користејќи ги својствата на детерминантите, при нејзиното пресметување корисно е детерминантата да се сведе на триаголна.

Пример. Пресметајте ги детерминантите од k -ти ред:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -k \\ 1 & 0 & 3 & \dots & k \\ 1 & 2 & 0 & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 5 \\ 2 & 2 & \dots & 5 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прво да ја пресметаме детерминантата Δ . Ако ја додадеме првата редица кон сите останати редици, добиваме детерминанта со триаголна форма, чии елементи под главната дијагонала се еднакви на нула, т.е. ја добиваме детерминантата:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -k \\ 1 & 0 & 3 & \dots & k \\ 1 & 2 & 0 & \dots & k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -k \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k \end{vmatrix}.$$

Според пример 3.14 добиваме:

$$\Delta = -1(-2)(-3)\dots(-k) = (-1)^k 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k = (-1)^k k!.$$

Детерминантата Δ_1 се сведува на триаголна, на следниов начин: на последната колона и ги додаваме сите други колони и заедничкиот множител

$$5 + 2(k-1) = 3 + 2k$$

од последната колона го изнесуваме пред знакот на детерминантата; потоа, од секоја колона ја одземаме последната помножена со 2. Значи, имаме:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 5 \\ 2 & 2 & \dots & 5 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix} = (3+2k) \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 5 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (3+2k) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} 3^{k-1} (3+2k), \end{aligned}$$

што и требаше да се пресмета. ♦

6.3. Метод на издвојување на линеарни множители. Овој метод се состои во тоа што детерминантата се разгледува како полином (од n -ти степен) од една или повеќе променливи што се содржани во детерминантата. Непосредно, или по извесни трансформации, се наоѓаат n заемно прости множители со кои се дели дадената детерминанта. Значи, полиномот што се добива од неа ќе биде производ од тие линеарни множители, помножен со некоја константа c , која дополнително се определува.

Пример. Пресметајте ја детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & \dots & 2k-1 \\ 2 & x+2 & 5 & \dots & 2k-1 \\ 2 & 3 & x+2 & \dots & 2k-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 5 & \dots & x+2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Во дадената детерминанта забележуваме дека производот на елементите на главната дијагонала го содржи највисокиот степен на x , имено $(k-1)$ -от степен, па значи детерминантата е полином од $(k-1)$ -ви степен. За

$$x = 3-2=1, x = 5-3=3, \dots, x = 2k-1-2=2k-3$$

детерминантата е еднаква на нула, бидејќи при овие вредности на x еднакви се по две редици: првата и втората, првата и третата, ..., првата и n -тата. Според тоа, Δ се дели со $x-1, x-3, \dots, x-2k+3$, па значи

$$\Delta = c(x-1)(x-3)\dots(x-2k+3). \quad (1)$$

За да ја определиме константата c , го споредуваме членот $2x^{k-1}$ што се добива со множење на елементите од главната дијагонала, со членот cx^{k-1} што се добива на десната страна на (1). Бидејќи овие членови мора да се совпаѓаат, добиваме $c = 2$, па значи

$$\Delta = 2(x-1)(x-3)\dots(x-2k+3) \cdot \blacklozenge$$

6.4. Метод на рекурентни врски. Овој метод се состои во тоа што дадената детерминанта од k -ти ред, разложувајќи ја по некоја редица или колона, се изразува со помош на една или повеќе детерминанти од ист вид. Вака добиеното равенство го нарекуваме *рекурентна врска*.

Пример А. Пресметајте ја детерминантата

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Решение. Да ја разложиме Δ_n по елементите од првата редица. Добиваме

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

каде Δ_{n-1} е детерминантата (2) од $(n-1)$ -ви ред. Втората детерминанта од $(n-1)$ -ви ред, во (3) ја разложуваме по елементите од првата колона:

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}. \quad (4)$$

Во (4) детерминантата од n -ти ред (2) е изразена преку детерминантите од $(n-1)$ -ви и $(n-2)$ -ри ред од истиот вид. Ќе ја искористиме формулата (4) за пресметување на детерминантата Δ_n . Имаме:

$$\Delta_1 = \det[2] = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Од (4) следува

$$\Delta_3 = 2\Delta_2 - \Delta_1 = 2 \cdot 3 - 2 = 4.$$

Нека претпоставиме дека $\Delta_i = i+1$, за $i = 1, 2, \dots, n-1$. Имаме

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = 2(n-1+1) - (n-2+1) = 2n - n + 1 = n+1.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува $\Delta_n = n+1$, за секој $n \in \mathbf{N}$. $\blacklozenge$

Пример Б. Пресметајте ја детерминантата

$$\Delta_{k+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$$

Решение. Детерминантата ја развиваме по последната колона, добиваме две детерминанти од k -ти ред: едната детерминанта од ист вид како и дадената, а другата триаголна, еднаква на $(-1)^k x^k$. Така ја добиваме рекурентната врска

$$\Delta_{k+1} = x\Delta_k + (-1)^{k+2} a_k (-1)^k x^k,$$

т.е.

$$\Delta_{k+1} = x\Delta_k + a_k x^k. \quad (5)$$

За да ја пресметаме детерминантата Δ_{k+1} , ќе ги разгледаме детерминантите од прв и втор ред од ист вид:

$$\Delta_1 = \det[a_0] = a_0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ -x & x \end{vmatrix} = (a_0 + a_1)x. \quad (6)$$

Ќе докажеме дека за Δ_{k+1} важи аналоген израз, т.е. дека

$$\Delta_{k+1} = (a_0 + a_1 + \dots + a_k) x^k. \quad (7)$$

За $k=1$, равенството (7) е точно. Да претпоставиме дека е точно за $k-1$, т.е. дека

$$\Delta_k = (a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}) x^{k-1}. \quad (8)$$

Заменувајќи за Δ_k од (8) во (5), добиваме дека

$$\Delta_{k+1} = x(a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}) x^{k-1} + a_k x^k = (a_0 + a_1 + \dots + a_k) x^k.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција, (7) е точно за кој било природен број k . ♦

Пример В. Детерминантата од n -ти ред од видот

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

ја нарекуваме *детерминанта на Вандермонд* и ја означуваме со $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$. За да ја пресметаме оваа детерминанта од секој ред, почнувајќи од последниот го одземаме претходниот ред помножен со a_1 . Добиваме

$$\begin{aligned}
V(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_2 a_1 & a_3^2 - a_3 a_1 & \dots & a_n^2 - a_n a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_1 & a_3^{n-1} - a_3^{n-2} a_1 & \dots & a_n^{n-1} - a_n^{n-2} a_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) V(a_2, a_3, \dots, a_n).
\end{aligned}$$

Значи,

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) V(a_2, a_3, \dots, a_n). \quad (10)$$

Конечно, користејќи ја формулата (10) со индукција лесно се докажува дека

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}),$$

т.е. детерминантата (9) е еднаква на производот од сите разлики $a_i - a_j$, каде $i > j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. ♦

Пример Г. Нека A_k е детерминанта од k -ти ред ($k > 2$) за која важи рекурентната врска

$$A_k = pA_{k-1} + qA_{k-2}, \quad (11)$$

при што константите p и q се различни од нула, и нека a и c се корените на равенката $x^2 - px - q = 0$. Докажете дека:

а) ако $a \neq c$, тогаш

$$A_k = a^{k-1}M_1 + c^{k-1}M_2 \quad (12)$$

каде што

$$M_1 = \frac{1}{a-c}(A_2 - cA_1), \quad M_2 = \frac{-1}{a-c}(A_2 - aA_1); \quad (13)$$

б) ако $a = c$, тогаш

$$A_k = a^k [(k-1)M_1 + M_2] \quad (14)$$

каде што

$$M_1 = \frac{1}{a^2} (A_2 - aA_1), \quad M_2 = \frac{A_1}{a}. \quad (15)$$

Решение. Од Виетовите правила следува $p = a + c$ и $q = -ac$, па затоа равенството (11) можеме да го запишеме во видот

$$A_k - aA_{k-1} = c(A_{k-1} - aA_{k-2}) \quad (16)$$

или во видот

$$A_k - cA_{k-1} = a(A_{k-1} - cA_{k-2}). \quad (17)$$

а) Нека $a \neq c$. Од (16) следува дека $A_k - aA_{k-1}$ можат да се разгледуваат како членови на геометричка прогресија со количник c , а од (17) следува дека слично важи и за $A_k - cA_{k-1}$. Имајќи ја предвид формулата за $(k-1)$ -от член на геометричка прогресија од (16) и (17) следува

$$A_k - aA_{k-1} = c^{k-2} (A_2 - aA_1), \quad (18)$$

$$A_k - cA_{k-1} = a^{k-2} (A_2 - cA_1). \quad (19)$$

Ако (18) и (19) го помножиме со $-c$ и a и ги одземеме добиените равенства го добиваме равенството

$$(a-c)A_k = a^{k-1}(A_2 - cA_1) + c^{k-1}(A_2 - aA_1),$$

кое е еквивалентно на равенството (12).

б) Нека $a = c$. Тогаш равенствата (16) и (17) се едно исто равенство:

$$A_k - aA_{k-1} = a(A_{k-1} - aA_{k-2}).$$

Од последното равенство следува дека $A_k - aA_{k-1}$ се членови на геометричка прогресија со количник a , па затоа

$$A_k - aA_{k-1} = a^{k-2} (A_2 - aA_1) = a^k M_1, \quad (20)$$

каде

$$M_1 = \frac{1}{a^2} (A_2 - aA_1).$$

Равенството (20) е еквивалентно на равенството

$$\frac{A_k}{a^k} - \frac{A_{k-1}}{a^{k-1}} = M_1,$$

па затоа $\frac{A_k}{a^k}$ е член на аритметичка прогресија со разлика M_1 . Од формулата за k -от член на формулата за аритметичка прогресија ја добиваме формулата:

$$\frac{A_k}{a^k} = \frac{A_1}{a} + (k-1)M_1,$$

која е еквивалентна на формулата (14). ♦

Пример Д. Пресметајте ја детерминатата:

$$\text{а) } A_k = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } A_k = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение. а) Детерминантата A_k ја разложуваме по првата колона и ја добиваме следнава рекурентна врска

$$A_k = 2A_{k-1} + 3A_{k-2}.$$

Корените на равенката $x^2 - 2x - 3 = 0$ се 3 и -1 , па од примерот Г) следува дека

$$A_k = 3^{k-1}M_1 + (-1)^{k-1}M_2. \quad (21)$$

Од

$$A_1 = 2, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

за $k=1$ и $k=2$, од (21) го добиваме системот:

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = 2, \\ 3M_1 - M_2 = 7, \end{cases}$$

од каде наоѓаме $M_1 = \frac{9}{4}$, $M_2 = -\frac{1}{4}$, па затоа

$$A_k = \frac{3^{k+1} + (-1)^k}{4}.$$

б) Детерминантата A_k ја разложуваме по првата колона и ја добиваме следнава рекурентна врска

$$A_k = -2A_{k-1} - A_{k-2}.$$

Корените на равенката $x^2 + 2x + 1 = 0$ се $a = c = -1$, па од примерот Г) следува дека

$$A_k = (-1)^k [(k-1)M_1 + M_2]. \quad (22)$$

Од

$$A_1 = -2, \quad A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

и од (22) го добиваме системот:

$$\begin{cases} (-1)^1 [(1-1)M_1 + M_2] = -2, \\ (-1)^2 [(2-1)M_1 + M_2] = 3, \end{cases}$$

од каде наоѓаме $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, па затоа

$$A_k = (-1)^k (k+1). \spadesuit$$

Пример Г. За секој природен број $n \geq 2$ со Δ_n да ја означиме детерминантата од $(n-1)$ -ви ред:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1 \end{vmatrix}.$$

Дали е ограничена низата $\{\frac{\Delta_n}{n!}\}_{n=2}^\infty$?

Решение. Лесно се гледа дека $\Delta_2 = 3$ и $\Delta_3 = 11$. Ако во детерминантата Δ_{n+1} ја извадиме претпоследната колона од последната, а потоа ја извадиме претпоследната редица од последната, добиваме:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 2n+1 \end{vmatrix}.$$

Последната детерминанта ја разложуваме по последната редица и добиваме дека

$$\Delta_{n+1} = (2n+1)\Delta_n - n^2\Delta_n.$$

Ставаме $a_n = \frac{\Delta_n}{n!}$, $n \geq 2$ и ако последното равенство го поделиме со $(n+1)!$, последователно добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2n+1}{n+1}a_n - \frac{n}{n+1}a_{n-1}, \\ a_{n+1} - a_n &= \frac{n}{n+1}(a_n - a_{n-1}), \end{aligned}$$

од каде по индукција следува, дека

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+1}(a_3 - a_2) = \frac{3}{n+1}\left(\frac{11}{3!} - \frac{3}{2!}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_2 + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

што значи, дека низата $a_n = \frac{\Delta_n}{n!}$, $n \geq 2$ не е ограничена. $\spadesuit$

7. НЕСИНГУЛАРНИ МАТРИЦИ

7.1. Дефиниција. Нека A е матрица од n -ти ред. Ако $\det A = 0$, тогаш ќе велиме дека матрицата A е *сингуларна*, а ако $\det A \neq 0$, тогаш ќе велиме дека матрицата A е *несингуларна*.

7.2. Пример. а) За матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

имаме $\det A = 3 \neq 0$, што значи дека таа е несингуларна.

б) За матрицата

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

имаме $\det B = 0$, т.е. таа е сингуларна. ♦

7.3. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $\Delta = \det A \neq 0$. Да го запишеме разложувањето на детерминантата Δ по елементите од j -тата колона:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad (1)$$

каде со A_{ij} е означен алгебарскиот комплемент на минорот од прв ред a_{ij} . Ако во (1), т.е. во Δ елементите на j -тата колона ги замениме со произволни броеви

$$b_1, b_2, \dots, b_n \quad (2)$$

ја добиваме детерминантата

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

чие разложување со помош на формулата (1) е

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^n b_i A_{ij}. \quad (3)$$

Сега да го примениме разложувањето (3) во случај кога за броевите (2) ги земеме елементите $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ на k -тата колона на детерминантата Δ , каде $k \neq j$. Тогаш $\Delta_j = 0$, бидејќи Δ_j содржи еднакви колони. Според тоа, од (3) следува

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ij} = 0, \text{ за } k \neq j. \quad (4)$$

Користејќи го симболот на Кронекер од (1) и (4) следува

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ij} = \delta_{kj} \Delta.$$

Аналогно, за редовите имаме

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij} = \delta_{ki} \Delta.$$

7.4. Лема. За секоја несингуларна матрица $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ постои матрица $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ таква што $AB = BA = E_n$.

Доказ. Да ја разгледаме матрицата

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

каде $\Delta = \det A$. Нека $AB = [c_{ij}]_{n \times n}$. Тогаш

$$c_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \frac{1}{\Delta} \delta_{ij} \Delta = \delta_{ij}$$

што значи $c_{ii} = 1$, $c_{ij} = 0$, $i \neq j$. Значи, $AB = E_n$.

Аналогно се докажува дека $BA = E_n$. ♦

7.5. Дефиниција. Матрицата B од лема 7.4 ја нарекуваме *инверзна* на матрицата A и ја означуваме $B = A^{-1}$. Притоа ќе велиме дека матрицата A е *инверзибилна*.

7.6. Пример. Докажете дека матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

е несингуларна и најдете ја нејзината инверзна матрица.

Решение. За дадената матрица A имаме $\det A = -26 \neq 0$, т.е. таа е несингуларна. За да ја определиме инверзната матрица A^{-1} прво ќе ги определиме алгебарските компленти на елементите a_{ij} , $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$. Имаме

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, & A_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5; \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5; & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9; \end{aligned}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Според тоа,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{26} \begin{bmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -7 \\ -5 & -9 & 3 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

7.7. Пример. Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решете ги матричните равенки:

$$\text{а) } AX = B, \quad \text{б) } YA = B.$$

Решение. а) Бидејќи $\det A = -1$, матрицата A е несингуларна, па од равенката $AX = B$, множејќи од лево со матрицата A^{-1} , добиваме: $X = A^{-1}B$. Понатаму, имаме:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а потоа и

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 & 16 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

б) Слично, за $YA = B$, множејќи од десно со матрицата A^{-1} , добиваме

$$Y = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -10 & 6 & 3 \\ -11 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

7.8. Лема. а) Ако A и B се несингуларни матрици, тогаш и матрицата AB е несингуларна и притоа важи $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

б) Ако A е несингуларна матрица, тогаш за секој $k \in \mathbb{N}$ матрицата A^k е несингуларна и притоа важи $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

в) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, за секоја несингуларна матрица A .

г) Множеството несингуларни матрици од n -ти ред во однос на операцијата множење на матрици е некумативна група.

Доказ. а) Матриците A и B се несингуларни, па затоа $\det A \neq 0$ и $\det B \neq 0$. Сега, од теорема 4.16 следува $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$, што според дефиниција 7.1 значи дека матрицата AB е несингуларна. Понатаму, од

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E,$$

добиваме дека матрицата $B^{-1}A^{-1}$ е инверзна на матрицата AB .

б) Непосредно следува од тврдењето под а) и принципот на математичка индукција.

в) Од теорема 7.1 следува

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1},$$

па затоа $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

г) Непосредно следува од теоремите 2.4 и 2.10, тврдењата под а) и в) и пример 2.3 а). ♦

7.9. Забелешка. За секоја несингуларна матрица нејзината инверзна матрица е еднозначно определена. Навистина, ако B и C се две инверзни матрици на несингуларната матрица A , тогаш $AC = BA = E$, па затоа

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C. \quad \blacklozenge$$

7.10. Пример. Нека $A, B \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$, $A \neq B$, $A^3 = B^3$ и $A^2B = B^2A$. Дали матрицата $A^2 + B^2$ е инверзибилна.

Решение. Нека претпоставиме дека матрицата $A^2 + B^2$ е инверзибилна. Тогаш

$$\begin{aligned} A - B &= (A^2 + B^2)^{-1}(A^2 + B^2)(A - B) \\ &= (A^2 + B^2)^{-1}(A^3 - A^2B + B^2A - B^3) \\ &= (A^2 + B^2)^{-1} \cdot O = O, \end{aligned}$$

што противречи на $A \neq B$. Конечно, од добиената противречност следува дека матрицата $A^2 + B^2$ не е инверзибилна. ♦

7.11. Пример. За матрицата $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ќе велиме дека е *целобројна* ако $c_{ij} \in \mathbf{Z}$, за $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Нека A и B се 2×2 целобројни матрици. Докажете, дека ако секоја од матриците $A, A+B, A+2B, A+3B$ и $A+4B$ има инверзна целобројна матрица, тогаш и матрицата $A+5B$ има инверзна целобројна матрица.

Решение. Прво да забележиме, дека ако A е целобројна матрица, тогаш матрицата A^{-1} постои и е целобројна ако и само ако $\det A = \pm 1$. Навистина, ако A^{-1} е целобројна, тогаш $\det A$ и $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ се цели броеви, па затоа

значи дека A^{-1} постои. Понатаму, матрицата A е целобројна, па затоа алгебарските комплементи соодветни на минорите од прв ред се цели броеви. Конечно, од доказот на лема 7.4 следува дека матрицата A^{-1} е целобројна.

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \det(A + xB)$. Јасно, $f(x)$ е полином таков што $\deg f(x) \leq 2$. Според условот, матриците $A, A+B, A+2B, A+3B$ и $A+4B$ се целобројни и секоја од нив има инверзна целобројна матрица, па од претходно изнесеното следува дека секој од броевите $f(0), f(1), f(2), f(3)$ и $f(4)$ е еднаков на ± 1 . Според тоа, пет броеви се еднакви на ± 1 , па затоа барем три од нив се еднакви или на 1 или на -1. Со други зборови, полиномот $f(x)$ или прима вредност 1 или прима вредност -1 за три различни вредности на x . Но, $\deg f(x) \leq 2$, па затоа или $f(x) = 1$ или $f(x) = -1$, за секој x .

Конечно, $f(5) = \det(A+5B) = \pm 1$, што значи дека матрицата $A+5B$ има инверзна целобројна матрица. ♦

8. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

8.1. Да разгледаме систем од n линеарни равенки со n непознати

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ја нарекуваме *детерминанта на системот* (1). Нека $\Delta \neq 0$. Да ги воведеме ознаките

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

со чија помош системот (5) го запишуваме во видот

$$AX = B. \quad (2)$$

Ако равенството (2) го помножиме од лево со матрицата A^{-1} добиваме

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$

т.е.

$$X = A^{-1}B. \quad (3)$$

Јасно, матрицата X е еднозначно определена, т.е. равенката (3) има единствено решение. Но,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

па затоа

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n A_{ki} b_k, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Во равенството (4) збирот на десната страна е разложувањето по елементите на i -тата колона на детерминантата Δ_i која се добива од детерминантата Δ ако i -тата колона ја замениме со колоната слободни членови. Затоа

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Со тоа го докажавме таканареченото *Крамерово правило*.

Лема. Ако детерминантата Δ на системот (1) е различна од нула, тогаш тој има единствено решение $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кое е дадено со (5). ♦

8.2. Пример. Решете го системот равенки

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Решение. Детерминантата на системот (6) е:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Да ги додадеме сите колони на четвртата колона и да го извлечеме пред детерминантата заедничкиот множител $a+3$. Потоа, од секоја колона ја одземеме последната колона и добиваме триаголна детерминанта, од каде лесно се наоѓа дека

$$\Delta = (a+3)(a-1)^3.$$

Понатаму, за детерминантата соодветна на непозната x_1 имаме

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Ако од секоја колона ја одземеме првата колона, добиваме триаголна детерминанта, од каде лесно се наоѓа дека $\Delta_1 = (a-1)^3$. На потполно аналоген начин наоѓаме дека $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = (a-1)^3$.

Ако $\Delta = (a+3)(a-1)^3 \neq 0$, тогаш, според (5), добиваме:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{a+3}.$$

Ако $a = 1$, тогаш системот (6) се сведува на една равенка со четири непознати, па множеството решенија на системот е

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3, \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}.$$

Ако $a = -3$, тогаш собирајќи ги првите две равенки на системот добиваме

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2,$$

т.е.

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1,$$

а собирајќи ги последните две равенки на системот добиваме:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1.$$

Од последните две равенки е јасно дека во овој случај системот (6) е противречен. ♦

8.3. Во доказот на Крамеровото правило всушност ја искористивме егзистенцијата на инверзната матрица на матрицата на системот (1), т.е. го искористивме равенството (3). Овде ќе забележиме, дека во случај кога матрицата на системот (1) е несингуларна, користејќи го равенството (3) непосредно можеме да ги најдеме решенијата на системот (1). Да разгледаме еден пример.

Пример. Со помош на матрици решете го системот:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + z = 7 \\ -x + y + z = 2. \end{cases} \quad (7)$$

Решение. Ставаме

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix},$$

и системот (7) го запишуваме во видот $AX = B$. Но, $\det A = 4$, што значи дека матрицата A е несингуларна, па затоа $X = A^{-1}B$. Ја наоѓаме инверзната матрица

а потоа $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, што значи, решението на системот е $x=2, y=1, z=3$. ♦

$$S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\},$$
$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{m-1} t^{m-1}, \quad a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (8)$$
$$y_i = P(x_i), i = 1, 2, \dots, m.$$
[illegible]
$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^{m-1} \end{bmatrix}$$
$$y_i = P(x_i), i = 1, 2, \dots, m,$$
$$P(t) = \sum_{i=1}^m y_i \frac{(t-x_1) \dots (t-x_{i-1})(t-x_{i+1}) \dots (t-x_m)}{(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_m)} . \blacklozenge$$

9. БЛОК-МАТРИЦИ 1

9.1. Дефиниција. Нека е дадена матрицата $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{K})$ и нека $m = m_1 + m_2 + \dots + m_\mu$ и $n = n_1 + n_2 + \dots + n_\nu$. Тогаш матрицата A можеме да ја запишеме во видот

$$A = [A_{pq}]_{\mu \times \nu}, \quad (1)$$

каде

$$A_{pq} = [a_{ij}]_{m_p \times n_q}, \quad m_1 + \dots + m_{p-1} < i < m_1 + \dots + m_p, \quad n_1 + \dots + n_{q-1} < j < n_1 + \dots + n_q$$

се субматрици на матрицата A . Матрицата (1) ја нарекуваме *блок-матрица*, а субматриците

$$A_{pq}, \quad p = 1, 2, \dots, \mu, \quad q = 1, 2, \dots, \nu$$

ги нарекуваме *блокови (клетки)* на матрицата (1).

Да забележиме, дека субматрицата A_{pq} има m_p редици и n_q колони.

9.2. Пример. Едно разбивање на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

на блокови е

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix},$$

каде

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad \blacklozenge$$

9.3. Теорема. а) Нека A е блок матрицата (2) и $\alpha \in \mathbf{K}$. Тогаш матрицата αA исто така е блок-матрица и притоа важи

$$\alpha A = [\alpha A_{pq}]_{\mu \times \nu}. \quad (2)$$

б) Нека $A = [A_{pq}]_{\mu \times \nu}$ и $B = [B_{pq}]_{\mu \times \nu}$ се блок матрици такви да клетките A_{pq} и B_{pq} се од ист ред, тогаш збирот $A + B$ е блок матрица и притоа важи

$$A + B = [C_{pq}]_{\mu \times \nu}, \quad \text{каде } C_{pq} = A_{pq} + B_{pq}, \quad p = 1, 2, \dots, \mu, \quad q = 1, 2, \dots, \nu.$$

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 9.1 и дефинициите за збир на матрици, множење на матрица со скалар. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

9.4. Теорема. Нека A е блок-матрицата (1) и

$$B = [B_{qu}]_{\nu \times \lambda}, \quad (3)$$

каде клетката B_{qu} има n_q редици и t_u колони. Тогаш AB е блок матрица

$$AB = [C_{pu}]_{\mu \times \lambda}$$

каде

$$C_{pu} = \sum_{q=1}^{\nu} A_{pq} B_{qu}. \quad (4)$$

Доказ. 1) Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times t}$. Ако со A_i , $i = 1, 2, \dots, m$ ја означиме i -тата редица на матрицата A , а со B_k , $k = 1, 2, \dots, t$ ја означиме k -тата колона на матрицата B , тогаш имаме

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix} [B_1 \quad \dots \quad B_t].$$

Притоа, производот AB можеме да го запишеме на следниве начини:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ \dots \\ A_m B \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$AB = A [B_1 \quad \dots \quad B_t] = [AB_1 \quad \dots \quad AB_t]. \quad (6)$$

Понатаму, матрицата A можеме да ја запишеме во видот $A = \begin{bmatrix} M_1 \\ \dots \\ M_{\mu} \end{bmatrix}$, каде соод-

ветно $M_1, \dots, M_{\mu}$ се матрици со ред

$$m_1 \times n, \dots, m_{\mu} \times n, \quad m_1 + \dots + m_{\mu} = m,$$

а матрицата B можеме да ја запишеме во видот $B = [N_1 \quad \dots \quad N_{\nu}]$, каде соодветно $N_1, \dots, N_{\nu}$ се матрици со ред

$$n \times t_1, \dots, n \times t_{\nu}, \quad t_1 + \dots + t_{\nu} = t.$$

Од формулите (5) и (6) непосредно следуваат формулите

$$AB = \begin{bmatrix} M_1 B \\ \dots \\ M_{\mu} B \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$AB = [AN_1 \quad \dots \quad AN_r]. \quad (8)$$

2) Ќе докажеме дека

$$AB = [M_1 \quad \dots \quad M_r] \begin{bmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_r \end{bmatrix} = M_1 N_1 + M_2 N_2 + \dots + M_r N_r, \quad (9)$$

каде $M_1, M_2, \dots, M_r$ се матрици со ред $m \times n_1, m \times n_2, \dots, m \times n_r$, соодветно, и $N_1, N_2, \dots, N_r$ се матрици со ред

$$n_1 \times t, n_2 \times t, \dots, n_r \times t, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_r = n.$$

Прво ќе докажеме дека формулата (9) е точна за $r = 2$, т.е. дека важи

$$[M_1 \quad M_2] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = M_1 N_1 + M_2 N_2,$$

каде M_1 и M_2 се матрици со ред $m \times n_1$ и $m \times n_2$, соодветно, а матриците N_1 и N_2 се со ред $n_1 \times t$ и $n_2 \times t$, соодветно ($n_1 + n_2 = n$). Навистина, при ознака $n_1 = s$, добиваме дека во матрицата

$$A = [M_1 \quad M_2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1s+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & a_{ms+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right]$$

i – тата редица е

$$[a_{i1} \quad \dots \quad a_{is} \quad a_{is+1} \quad \dots \quad a_{in}],$$

а во матрицата

$$B = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & \dots & b_{st} \\ \hline b_{s+11} & \dots & b_{s+1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nt} \end{array} \right],$$

k – тата колона е

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ \dots \\ b_{sk} \\ b_{s+1k} \\ \dots \\ b_{nk} \end{bmatrix}.$$

Од дефиницијата на множење на матрици следува дека во производот AB во пресекот на i – тата редица и k – тата колона се наоѓа збирот

$$(a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{is}b_{sk}) + (a_{is+1}b_{s+1k} + \dots + a_{in}b_{nk}). \quad (10)$$

Аналогно, на истото место во производите M_1N_1 и M_2N_2 се наоѓаат збиравите

$$a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{is}b_{sk}, \quad (11)$$

$$a_{is+1}b_{s+1k} + \dots + a_{in}b_{nk}. \quad (12)$$

Сега, за $r = 2$ точноста на формулата (9) следува од (10), (11) и (12).

Нека претпоставиме дека формулата (9) е точна за $r-1$. Матриците A и B да ги запишеме во видот

$$[M_1 \quad M^*] \text{ и } \begin{bmatrix} N_1 \\ N^* \end{bmatrix},$$

каде M^* и N^* се матриците

$$M^* = [M_2 \quad \dots \quad M_r] \text{ и } N^* = \begin{bmatrix} N_2 \\ \dots \\ N_r \end{bmatrix}.$$

Сега од индуктивната претпоставка и доказот за $r = 2$ следува

$$\begin{aligned} AB &= [M_1 \quad M^*] \begin{bmatrix} N_1 \\ N^* \end{bmatrix} = M_1N_1 + M^*N^* = M_1N_1 + [M_2 \quad \dots \quad M_r] \begin{bmatrix} N_2 \\ \dots \\ N_r \end{bmatrix} \\ &= M_1N_1 + M_2N_2 + \dots + M_rN_r, \end{aligned}$$

што значи дека формулата (9) важи и за r , па од принципот на математичка индукција следува точноста на формулата (9).

3) Нека сега се дадени блок матрицата $A = [A_{pq}]_{\mu \times \nu}$, каде за $p = 1, 2, \dots, \mu$, $q = 1, 2, \dots, \nu$ клетката A_{pq} е со ред

$$m_p \times n_q, \quad m = m_1 + m_2 + \dots + m_\mu \text{ и } n = n_1 + n_2 + \dots + n_\nu,$$

и блок матрицата $B = [B_{qu}]_{\nu \times \lambda}$, каде за $q = 1, 2, \dots, \nu$ и $u = 1, 2, \dots, \lambda$ клетката B_{qu} е со ред

$$n_q \times t_u, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_\nu \text{ и } t_1 + \dots + t_\lambda = t,$$

Да ја запишеме матрицата A во видот

$$A = \begin{bmatrix} M_1 \\ \dots \\ M_\mu \end{bmatrix},$$

каде

$$M_1 = [A_{11} \quad \dots \quad A_{1\nu}], \quad M_2 = [A_{21} \quad \dots \quad A_{2\nu}], \quad \dots, \quad M_\mu = [A_{\mu 1} \quad \dots \quad A_{\mu \nu}],$$

при што матриците $M_1, M_2, \dots, M_\mu$ имаат ред $m_1 \times n, m_2 \times n, \dots, m_\mu \times n$, соодветно.

Од формулата (7) добиваме

$$AB = \begin{bmatrix} M_1 \\ \dots \\ M_\mu \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} M_1 B \\ \dots \\ M_\mu B \end{bmatrix}.$$

Да ја запишеме матрицата B во видот

$$B = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_\lambda],$$

каде $N_1, N_2, \dots, N_\lambda$ се матриците

$$N_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \dots \\ B_{\nu 1} \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} B_{12} \\ \dots \\ B_{\nu 2} \end{bmatrix}, \dots, \quad N_\lambda = \begin{bmatrix} B_{1\lambda} \\ \dots \\ B_{\nu\lambda} \end{bmatrix},$$

кои се со ред $n \times t_1, n \times t_2, \dots, n \times t_\lambda$. Согласно формулата (8) имаме

$$AB = \begin{bmatrix} M_1 B \\ \dots \\ M_\mu B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 N_1 & M_1 N_2 & \dots & M_1 N_\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_\mu N_1 & M_\mu N_2 & \dots & M_\mu N_\lambda \end{bmatrix},$$

при што согласно формулата (9) имаме дека $AB = [C_{pu}]_{\mu \times \lambda}$ каде

$$C_{pu} = \sum_{q=1}^{\nu} A_{pq} B_{qu} . \blacklozenge$$

9.5. Пример. Да ги разгледаме блок-матриците

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} C & E \\ E & O \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} E & O \\ C & C \end{bmatrix},$$

каде $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Согласно со теорема 9.4 имаме

$$AB = \begin{bmatrix} C & E \\ E & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ C & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C & C \\ E & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] . \blacklozenge$$

9.6. Пример. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times k}$ и $B = [b_{ij}]_{k \times n}$ се произволни матрици. Докажи дека за матрицата

$$L = \begin{bmatrix} E - BA & B \\ 2A - ABA & AB - E \end{bmatrix}$$

важи $L^2 = E$.

Решение. Согласно со теорема 9.4 имаме

$$\begin{aligned} L^2 &= \begin{bmatrix} E - BA & B \\ 2A - ABA & AB - E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E - BA & B \\ 2A - ABA & AB - E \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (E - BA)(E - BA) + B(2A - ABA) & (E - BA)B + B(AB - E) \\ (2A - ABA)(E - BA) + (AB - E)(2A - ABA) & (2A - ABA)B + (AB - E)(AB - E) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} = E,$$

што и требаше да се докаже. ♦

9.7. Дефиниција. За матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ќе велиме дека е *инволуторна* ако $A^2 = E$.

9.8. Пример. За матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

пресметајте A^{300} .

Решение. Матрицата A ќе ја запишеме како блок-матрица

$$A = \begin{bmatrix} E & C \\ O & C \end{bmatrix},$$

каде

$$C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

За матрицата C имаме

$$C^2 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = C.$$

Ако ја искористиме теорема 9.4 наоѓаме

$$A^k = \begin{bmatrix} E & C + C^2 + \dots + C^k \\ O & C^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & kC \\ O & C \end{bmatrix},$$

па затоа

$$A^{300} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}. \quad \blacklozenge$$

9.9. Дефиниција. За матрицата $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ ќе велиме дека е *идемпотентна* ако $A^2 = A$.

10. КВАЗИДИЈАГОНАЛНИ МАТРИЦИ

10.1. Дефиниција. За блок-матрицата

$$A=[A_{pq}]_{k \times k}, \quad (1)$$

каде

$$A_{pq}=[a_{ij}]_{m_p \times n_q}, \quad m_1 + \dots + m_{p-1} < i < m_1 + \dots + m_p, \quad n_1 + \dots + n_{q-1} < j < n_1 + \dots + n_q$$

ќе велиме дека е *квазидијагонална (блок-дијагонална)* ако клетките

$$A_{pp}, \quad p=1,2,\dots,k$$

се квадратни матрици и ако важи

$$A_{pq} = O, \quad \text{за } p \neq q.$$

Притоа ја користиме ознаката

$$A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \dots \oplus A_{kk} \quad (2)$$

10.2. Забелешка. Од дефиниција 10.1 непосредно следува дека блок-матрицата (1) е квазидијагонална ако и само ако $m_p = n_p$, за $p=1,2,\dots,k$ и $A_{pq} = O$, за $p \neq q$.

10.3. Пример. За матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

имаме

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \oplus [4] \oplus [5].$$

Според тоа, ако дадена матрица е квазидијагонална, тоа не мора да значи дека записот на истата во видот (2) е единствен. ♦

10.4. Теорема. Нека се дадени квазидијагоналните матрици (2) и

$$B = B_{11} \oplus B_{22} \oplus \dots \oplus B_{kk}. \quad (3)$$

Ако клетките A_{pp} и B_{pp} , $p=1,2,\dots,k$ се од ист ред, тогаш точни се следниве тврдења:

а) $\alpha A = (\alpha A_{11}) \oplus (\alpha A_{22}) \oplus \dots \oplus (\alpha A_{kk})$, за секој $\alpha \in \mathbf{K}$,

б) $A^T = A_{11}^T \oplus A_{22}^T \oplus \dots \oplus A_{kk}^T$,

в) $A + B = (A_{11} + B_{11}) \oplus (A_{22} + B_{22}) \oplus \dots \oplus (A_{kk} + B_{kk})$,

г) $AB = (A_{11}B_{11}) \oplus (A_{22}B_{22}) \oplus \dots \oplus (A_{kk}B_{kk})$,

д) $A^m = A_{11}^m \oplus A_{22}^m \oplus \dots \oplus A_{kk}^m$, за секој $m \in \mathbf{N}$,

ѓ) ако клетките A_{pp} , $p = 1, 2, \dots, k$ се несингуларни матрици, тогаш и матрицата A е несингуларна и притоа важи

$$A^{-1} = A_{11}^{-1} \oplus A_{22}^{-1} \oplus \dots \oplus A_{kk}^{-1},$$

е) $\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22} \cdot \dots \cdot \det A_{kk}$

Доказ. Непосредно следува од теоремите 5.8, 8.3 и 8.4, лема 7.3, дефинициите на транспонираната и инверзната матрица, забелешка 7.8 и принципот на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

10.5. Пример. за матрицата A од пример 10.3 имаме

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \oplus [8] \oplus [10],$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \oplus [16] \oplus [25] \text{ и}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Понатаму, дијагоналните клетки на дадената матрица се несингуларни и притоа важи

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, [4] = [\frac{1}{4}], [5] = [\frac{1}{5}],$$

па затоа

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \oplus [\frac{1}{4}] \oplus [\frac{1}{5}]. \quad \blacklozenge$$

11. ЗАДАЧИ

- Ако $i_1 \leq k_1 < k_2 \leq i_2$ и $(i_1, i_2)(k_1, k_2) \neq (k_1, k_2)(i_1, i_2)$, тогаш или $i_1 = k_1$ или $i_2 = k_2$. Докажете!
- Докажете, дека k -ти степен од k -цикл е идентична пермутација.
- Докажете, дека секоја парна пермутација во S_n , $n > 2$ е производ на 3-цикли.
- Запишете ја пермутацијата $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 5 & 4 & 8 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ како производ на:
 - дисјунктни цикли,

б) транспозиции.

Најдете го знакот на пермутацијата σ .

5. Докажете, дека ако $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ е k -цикл во S_n и $\tau \in S_n$, тогаш

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1), \tau(i_2), \dots, \tau(i_k)).$$

6. Најдете го бројот на различните k -цикли во S_n !

7. Пресметајте ја детерминантата:

а)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

б)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

в)
$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & \sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix},$$

г)
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 7 \\ 6 & -5 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

8. Во детерминантата Δ елементите на главната дијагонала се броевите $1, 2, \dots, n$. Истите се поставени во овој редослед почнувајќи од горниот лев агол на Δ , а останатите елементи се еднакви на a , $a \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. За која вредност на a детерминантата Δ прима најголема вредност?

9. Решете ја равенката

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

10. Решете ја равенката

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

11. Пресметајте ја вредноста на детерминантата

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

12. Користејќи го методот на математичка индукција, докажете дека

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x_i - 1) + \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_j - 1).$$

13. По непозната x решете ја равенката $f_n(x) = 0$, $n \in \mathbf{N}$, каде

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & \dots & x+n-1 \\ x+n & x+n+1 & x+n+2 & \dots & x+2n-1 \\ x+2n & x+2n+1 & x+2n+2 & \dots & x+3n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x+n^2-n & x+n^2+1-n & x+n^2+2-n & \dots & x+n^2-1 \end{vmatrix}.$$

14. За матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ќе велиме дека е *кососиметрична* ако $a_{ij} = -a_{ji}$, за секои $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$. Докажете дека детерминантата на кососиметрична матрица е еднаква на нула.

15. Нека

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

и нека b_n е бројот на ненултите собирци во развојот на детерминантата A_n . Најдете ги сите вредности на n , за кои во матрицата A_n дел од единиците можат да се заменат со -1 така да новодобиената детерминанта е еднаква на b_n .

16. Докажете ги следниве равенства:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} & a_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = (a_1 + \dots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

17. Сведувајќи ги на триаголни, пресметајте ги следниве детерминанти:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix},$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix},$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

18. Користејќи го методот на линеарни множители пресметајте ги детерминантите:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix},$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix},$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix},$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

19. Пресметајте ја детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{vmatrix}.$$

20. Пресметајте ја детерминантата од n -ти ред чии елементи го задоволуваат условот $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

21. Пресметајте ја детерминантата од n -ти ред чии елементи го задоволуваат условот $a_{ij} = \max\{i, j\}$.

22. Пресметајте ја детерминантата од n -ти ред чии елементи го задоволуваат условот $a_{ij} = |i - j|$.

23. Користејќи го методот на рекурентни врски пресметајте ги следниве детерминанти:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}, & \text{б)} \quad & \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}, \\ \\ \text{в)} \quad & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}, & \text{г)} \quad & \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_n b_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

24. Нека е дадена тридијагоналната матрица $A_n = [a_{ij}]_{n \times n}$:

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ставаме $D_n = \det A_n$. Докажете, дека $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, а потоа пресметајте $\det A_n$.

25. Докажете, дека

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} \frac{1+a_1}{a_1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1+a_2}{a_2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \frac{1+a_n}{a_n} \end{vmatrix} = \frac{1 + \sum_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n a_i}, \quad \text{б)} \quad \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

26. Користејќи ја теоремата на Лаплас пресметајте ја детерминантата:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{б)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix},$$

$$в) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$г) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$д) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix},$$

$$\hat{г}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos a & \sin a \\ y_1 & y_2 & \cos b & \sin b \\ z_1 & z_2 & \cos c & \sin c \end{vmatrix}$$

27. Користејќи ја теоремата на Лаплас докажете, дека

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

28. Пресметајте ги детерминантите од n -ти ред:

$$а) \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix},$$

$$\bar{б}) \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix},$$

$$в) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix},$$

$$г) \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix},$$

$$д) \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\hat{г}) \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix},$$

$$е) \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix},$$

$$ж) \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix},$$

$$з) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix},$$

$$с) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix},$$

$$и) \begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \frac{x_3}{x_3-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$ј) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$к) \begin{vmatrix} 2/x & 1/x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2/x & 1/x^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2/x & 1/x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2/x \end{vmatrix},$$

$$л) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix},$$

$$љ) \begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+1 \end{vmatrix},$$

$$м) \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

29. Следниве системи решете ги користејќи го Крамеровото правило:

$$а) \begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4, \\ 4x + 3y - z + 2t = 6, \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12, \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5, \\ 3x - 7y + 3z - t = -1, \\ 5x - 9y + 6z + 2t = 7, \\ 4x - 6y + 3z + t = 8, \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4, \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$$

30. Најдете полином $p(x)$ од втор степен, ако се знае дека $p(1) = -1$, $p(-1) = 9$ и $p(2) = -3$.
31. Најдете полином $p(x)$ од трет степен, ако се знае дека $p(-1) = 0$, $p(1) = 4$, $p(2) = 3$, $p(3) = 16$.
32. Најдете парабола од трет степен која минува низ точките $(0,1)$, $(1,-1)$, $(2,5)$ и $(3,37)$.
33. Најдете парабола од четврт степен која минува низ точките $(5,0)$, $(13,2)$, $(-10,3)$, $(-2,1)$, $(14,1)$.
34. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $\alpha \in \mathbf{K}$. Докажете, дека $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
35. Нека Δ_n е детерминанта од n -ти ред, составена од нули и единици така што во секој ред и секоја колона има по две единици и $n-2$ нули. Докажете, дека:
- 1) за секој n вредноста на детерминантата Δ_n е еднаква на $\pm 2^m$ или 0, каде броевите m и n се или двата парни или двата непарни,
 - 2) ако $\Delta_5 = 0$, тогаш две редици на детерминантата се совпаѓаат,
 - 3) во детерминантата Δ_n две редици се совпаѓаат ако и само ако во Δ_n се совпаѓаат две колони, и
 - 4) ако $\Delta_n \neq 0$, тогаш $3m \leq n$.
36. Докажете, дека вредноста на детерминантата од шести ред чии елементи се реални броеви, по апсолутна вредност помали или еднакви на 1, е помала или еднаква на 160.
37. Докажете, дека n -от член F_n на низата на Фибоначи 1, 1, 2, 3, 5, ..., x , y , $x+y$, ... може да се запише во вид на детерминанта од $(n-1)$ -ви ред

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \cdot \dots$$

38. Нека n е природен број поголем од 2, $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ и нека е дадена матрицата $[a_{ij}]$ од $(n-1)$ -ви ред, каде $a_{ij} = \varepsilon^{ij}$. Докажете, дека

$$(\det[a_{ij}])^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{n-2}.$$

39. Докажете, дека детерминантата на матрицата од n -ти ред со елементи $a_{ij} = |i - j|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ е еднаква на

$$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

40. Докажете, дека

$$\begin{vmatrix} e_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ e_{21} & e_{22} & 0 & \dots & 0 & A_2 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \dots & 0 & A_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n-11} & e_{n-12} & e_{n-13} & \dots & e_{n-1n-1} & A_{n-1} \\ e_{n1} & e_{n2} & e_{n3} & \dots & e_{nn-1} & A_n \end{vmatrix} = A_n - \sum A_n / p_i + \sum A_n / p_i p_j - \dots (-1)^s A_n / p_1 p_2 \dots p_s$$

каде

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i \text{ е делител на } j, \\ 0, & \text{ако } i \text{ не е делител на } j, \end{cases}$$

а $p_1, p_2, \dots, p_s$ се различните прости делители на n .

41. Докажете, дека детерминантата на матрицата, која се добива со прецртување на k -тата колона во матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \dots & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \dots & \binom{n}{3} & \binom{n+1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{4} & \dots & \binom{n}{4} & \binom{n+1}{4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} \end{bmatrix}$$

е еднаква на $\binom{n+1}{k-1}$.

42. Докажете, дека за секој природен број k важи равенството

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \dots & \frac{1}{(2k+1)!} & \frac{1}{(2k+2)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{(2k)!} & \frac{1}{(2k+1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(2k-1)!} & \frac{1}{(2k)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 0.$$

43. Докажете, дека

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & n^n \end{vmatrix} = 1!2!3!\dots n! \left[\binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \binom{n}{n} \right].$$

44. Пресметајте ја детерминантата:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & 1-n \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix}$$

каде $b_n = \frac{n^n}{n!}$.

45. Докажете, дека детерминантата од n -ти ред која се состои од елементите кои се наоѓаат во горниот лев агол на Паскаловиот триаголник

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots \end{array}$$

е еднаква на 1.

46. Пресметајте ги производите на матриците:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{д) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

47. Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Докажете, дека $A^2B = BA^2$, но $AB \neq BA$.

48. Нека n е природен број. Пресметајте:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^5, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n, \quad \text{в) } \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^n,$$

$$\text{г)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \text{д)} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n, \quad \text{ђ)} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n,$$

$$\text{е)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n, \quad \text{ж)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \quad \text{з)} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^n.$$

49. За матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ пресметајте A^k , $k \in \mathbf{N}$.

50. Докажете, дека секој степен на матрицата $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ има два еднакви елементи на главната дијагонала. Докажете, дека ова својство го има секоја матрица

$[a_{rs}]$ за која важи $a_{r1} = a_{2r}$, $a_{1r} = a_{r2}$, $a_{rs} = a_{sr}$, $(r, s > 2)$ и $a_{11} = a_{22}$.

51. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Докажете, дека за секој природен број n

важи $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$.

52. Најдете ги сите квадратни матрици кои комутираат со матрицата:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{б)} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{в)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

53. Пресметајте $p(A)$, ако $p(x) = 3x^2 - 2x + 5$ и $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

54. Пресметајте $p(A)$, ако $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ и $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

55. Дадена е матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Докажете, дека $A^3 - 2A^2 + 9A = O$, но $A^2 - 2A + 9E \neq O$. Што заклучувате?

56. Докажете, дека матрицата $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ја задоволува равенката

$$X^2 - (a+d)X + (ad-bc)E = O.$$

57. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Докажете, дека за секои комплексни броеви x и y важи

$$A^2 - (x+y)A + xyE = (A - xE)(A - yE).$$

58. Најдете ги сите скаларни матрици A кои ја задоволуваат равенката

а) $A^2 - 9A + 20E = 0,$

б) $A^3 + 2A^2 - 4A + 8E = 0,$

в) $8A^3 - 27E = 0.$

59. Најдете ги сите матрици од втор ред, чиј квадрат е еднаков на нултата матрица.

60. Најдете ги сите матрици од втор ред, чиј квадрат е еднаков на единичната матрица.

61. Пресметајте $A^T A$ и AA^T , ако

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix},$

б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$

в) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$

г) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

62. Со помош на елементарни трансформации на редици најдете ја инверзната матрица на матрицата:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$

б) $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix},$

в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},$

г) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$

д) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix},$

ѓ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix},$

е) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix},$

ж) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$

63. Најдете ја инверзната матрица на матрицата:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\text{б)} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{д)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{ђ)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{г)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

64. Решете ги матричните равенки:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\text{б)} X \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{г)} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{д)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/a & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & -c/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c^2/a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0,$$

$$\text{ђ)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\text{е)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

65. Пресметајте

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-2},$$

$$\text{б)} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-3},$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-k}, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$\text{г)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-k}, \quad k \in \mathbf{N}$$

66. Нека A е реална несингуларна матрица со целобројни елементи. Докажете, дека елементите на матрицата A^{-1} се целобројни ако и само ако $\det A = \pm 1$.

67. Докажете, дека ако за матриците A и B важи $AB = BA$, тогаш

$$(A+B)^n + A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + AB^{n-1} + B^n.$$

68. Нека A и B се квадратни матрици од ист ред. Докажете, дека ако матриците A и B се комутираат, тогаш комутираат и матриците A^k и B^p , за секои $k, p \in \mathbb{N}$.
69. Нека A и B се квадратни матрици од ист ред и c, k, x, y се скалари за кои $cy \neq kx$. Докажете, дека матриците A и B комутираат ако и само ако комутираат матриците $cA + kB$ и $xA + yB$.
70. Докажете, дека ако A е квадратна матрица и $C = pA + sE$, каде што p и s се скалари, тогаш матриците A и C комутираат.
71. Нека A е квадратна матрица од втор ред, различна од скаларна. Докажете, дека ако матрицата C комутира со A , тогаш $C = pA + sE$, каде што p и s се скалари.
72. Нека A и B се квадратни матрици од ист ред. Докажете, дека матричното равенство

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

важи ако и само ако $AB = BA$ и дека $kA^2 + 2pAB + sB^2$ не може, во општ случај, да се напише како производ од два линеарни фактора ако не е $AB = BA$.

73. Нека A и B се квадратни матрици од ист ред, такви што: $AB = BA$ и $B^2 = O$. Докажете, дека $(A + B)^k = A^k + kA^{k-1}B$.
74. Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $B = \text{diag}(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn})$. Докажете, дека:
- а) $AB = [a_{ij}b_{jj}]_{n \times n}$, т.е. j -тата колона на A се множи со b_{jj} , за $j = 1, 2, \dots, n$.
 - б) $BA = [b_{ii}a_{ij}]_{n \times n}$, т.е. i -тата редица на A се множи со b_{ii} , за $i = 1, 2, \dots, n$.
 - в) Ако $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, тогаш

$$AB = BA = \text{diag}(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \dots, a_{nn}b_{nn}).$$
 - г) $B^k = \text{diag}(b_{11}^k, b_{22}^k, \dots, b_{nn}^k)$, за секој $k \in \mathbb{N}$.

75. Ако $B = \text{diag}(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn})$ и $b_{ii} \neq b_{kk}$, за $i \neq k$, тогаш секоја матрица X , која комутира со B е дијагонална.
76. Матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ комутира со секоја матрица $X = [x_{ij}]_{n \times n}$, ако и само ако матрицата A е скаларна.
77. Најдете ги сите матрици дијагонални матрици $B = \text{diag}(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn})$ што се идемпотентни. Колкав е бројот на таквите матрици?
78. Најдете ги сите матрици дијагонални матрици $B = \text{diag}(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn})$ што се инволуторни. Колкав е бројот на таквите матрици?
79. Ако матриците $A_1, A_2, \dots, A_k$ ги задоволуваат условите $A_1 + A_2 + \dots + A_k = E$ и $A_i A_j = O$, за $i \neq j$, тогаш тие се идемпотентни. Докажете!

каде A и B се матрици и c е константа.

95. Докажете, дека за произволна квадратна матрица A матрицата $A + A^T$ е симетрична.
96. Докажете, дека за секоја матрица $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ матрицата $A - A^T$ е кососиметрична.
97. а) Ако матриците $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ се симетрични, тогаш матрицата $A + B$ е симетрична. Докажете!
 б) Ако матриците $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ се кососиметрични, тогаш матрицата $A + B$ е кососиметрична. Докажете!
98. Нека S е кососиметрична реална матрица.
 а) Докажете, дека матрицата $E - S$ е несингуларна.
 б) Ако $A = (E + S)(E - S)^{-1}$, докажете дека $A^{-1} = A^T$.
99. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ се симетрични матрици. Докажете, дека матрицата AB е симетрична ако и само ако матриците A и B комутираат.
100. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ е симетрична и $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ е кососиметрична матрица. Докажете, дека:
 а) матрицата AB е симетрична ако и само ако $AB = -BA$,
 б) матрицата AB е кососиметрична ако и само ако $AB = BA$.
101. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ се кососиметрични матрици. Докажете, дека:
 а) матрицата AB е симетрична ако и само ако $AB = BA$,
 б) матрицата AB е кососиметрична ако и само ако $AB = -BA$.
102. Нека A и B се квадратни матрици со ист ред. Докажете, дека ако матрицата A е симетрична (кососиметрична), тогаш и матрицата $B^T AB$ е симетрична (кососиметрична).
103. Нека S и T се два квадратни матрици од ист ред и матриците $E + S$, $E + ST$, $E - S$, $E + TS$ се несингуларни. Докажете го равенството

$$(E + S)^{-1}(S + T)(E + ST)^{-1}(E + S) = (E - S)(E + TS)^{-1}(S + T)(E - S)^{-1}.$$

104. Со помош на матрици решете го системот линеарни равенки:

а)
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x - 4y - 3z = -2 \\ x - 5y - 3z = -3 \\ -x + 6y + 4z = 4 \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y + 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

105. Решете го системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y = a, \\ y + z = b. \end{cases}$$

106. Најдете $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, каде $y(t)$ го определуваме од системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x + ty + t^2 z = t^4, \\ t^2 x + y + tz = t^3, \\ tx + t^2 y + z = 0. \end{cases}$$

107. Нека $B_n = \beta E_n$ и A_n е квадратна симетрична матрица од n -ти ред, на чија главна дијагонала се наоѓа бројот α , елементите на двете мали дијагонали кои се непосредно над и под главната дијагонала се еднакви на 1 и сите останати елементи се еднакви на 0. Изразете ја детерминантата од $2n$ -ти ред

$$\begin{vmatrix} B_n & A_n \\ A_n & B_n \end{vmatrix}$$

со помош на детерминантите на матриците A_n и B_n .

108. Користејќи квадратни матрици од ист ред, конструирајте пример со кој ќе докажете, дека во општ случај важи

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C.$$

109. Најдете го производот на блок матриците:

$$\text{a) } A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \text{ и } B = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right],$$

$$\text{б) } A = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{array} \right] \text{ и } B = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{array} \right].$$

110. Користејќи го укажаното разбивање на блокови на матрицата:

$$\text{a) } A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & x & -1 & 0 \\ c & y & 0 & -1 \end{array} \right], \quad \text{б) } A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right],$$

пресметајте ја матрицата A^2 .

111. Нека матриците $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ се несингларни и нека $C = [c_{ij}]_{n \times m}$ е произволна матрица. Докажете, дека

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

112. Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{r \times r}$, $B = [b_{ij}]_{s \times s}$, $C = [c_{ij}]_{r \times s}$ и $D = [d_{ij}]_{s \times r}$.

Ако соодветната инверзна матрица постои, тогаш матриците

$$S = B - DA^{-1}C \text{ и } T = A - CB^{-1}D$$

ги нарекуваме *Шурови комплементи* на матриците A и B , соодветно.

а) Докажете, дека ако A и S се несингуларни, тогаш

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}CS^{-1}DA^{-1} & -A^{-1}CS^{-1} \\ -S^{-1}DA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

б) Докажете, дека ако B и T се несингуларни, тогаш

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} & -T^{-1}CB^{-1} \\ -B^{-1}DT^{-1} & B^{-1} + B^{-1}DT^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}.$$

113. Нека се дадени матриците

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times n}, C = [c_{ij}]_{n \times n} \text{ и } D = [d_{ij}]_{n \times n}.$$

Ако матриците AB^T и CD^T се симетрични и ако $AD^T - BC^T = E$, Тогаш $A^T D - C^T B = E$. Докажете!

114. Нека $A = [a_{ij}]_{r \times r}$, $B = [b_{ij}]_{s \times s}$ и $C = [c_{ij}]_{r \times s}$. Докажете, дека

$$\det \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

115. Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{r \times r}$, $B = [b_{ij}]_{r \times s}$, $C = [c_{ij}]_{s \times r}$ и $D = [d_{ij}]_{s \times s}$.

Докажете, дека

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B), & \text{кога } A^{-1} \text{ постои,} \\ \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C), & \text{кога } D^{-1} \text{ постои,} \end{cases}$$

(матриците $D - CA^{-1}B$ и $A - BD^{-1}C$ се Шуровите комплементи на матриците A и D).

116. Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $C = [c_{ij}]_{n \times k}$ и $D = [d_{ij}]_{n \times k}$. Докажете, дека

$$\det(A + CD^T) = \det A \cdot \det(E_k + D^T A^{-1}C).$$

117. Нека се дадени матриците $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ и $C = [c_{ij}]_{n \times m}$. Докажете, дека

$$\lambda^m \det(\lambda E_n - CB) = \lambda^n \det(\lambda E_m - BC), \text{ за секој } \lambda \in \mathbf{K}.$$

118. Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times 1}$ и $C = [c_{ij}]_{1 \times n}$. Докажете, дека

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & -1 \end{bmatrix} = -\det(A + BC).$$

119. Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times 1}$ и $C = [c_{ij}]_{1 \times n}$. Докажете, дека

а) ако постои матрица $X = [x_{ij}]_{n \times 1}$ таква што $AX = B$, тогаш

$$\det(A + BC) = (1 + CX) \det A,$$

б) ако постои матрица $Y = [y_{ij}]_{1 \times n}$ таква што $YA = C$, тогаш

$$\det(A + BC) = (1 + YB) \det A.$$

VIII ГЛАВА ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

1. ДЕКАРТОВ ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ ВО ПРОСТОР

1.1. Дефиниција. *Декартов правоаголен координатен систем* во просторот ги нарекуваме единичната мера за мерење должина и трите заемно нормални оски кои се сечат во една точка и кои се означени во даден (произволен) редослед, т.е. се знае која е прва, која е втора и која е трета оска.

Точката во која се сечат оските ја нарекуваме *координатен почеток*, а самите оски ги нарекуваме *координатни оски*.

1.2. Во натамошните разгледувања координатниот почеток ќе го означуваме со буквата O , а првата, втората и третата оска ќе ги означуваме со Ox , Oy и Oz , соодветно. Понатаму, под координатен систем ќе подразбираме Декартов правоаголен координатен систем, ако не е поинаку кажано.

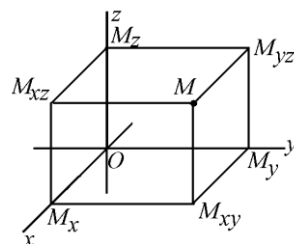
Нека M е произволна точка во просторот и да ја проектираме точката M на координатните оски, т.е. да повлечеме од точката M нормали на оските Ox , Oy и Oz . Подножните точки на овие нормали да ги означиме со M_x , M_y и M_z и со x , y и z да ги означиме координатите на точките M_x , M_y и M_z на оските Ox , Oy и Oz , соодветно, т.е.

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z.$$

1.3. Дефиниција 2. Бројот x го нарекуваме *прва координата*, y - *втора координата* и z - *трета координата* на точката M . Притоа ќе пишуваме $M(x, y, z)$.

1.4. Ако е даден координатен систем, тогаш на секоја точка во просторот, во тој систем, и соодветствува точно определена тројка координати (x, y, z) , (зошто?). Обратно, на секоја тројка реални броеви (x, y, z) , во просторот постои точно една точка чии координати се броевите x , y и z . За да ја конструираме точката по нејзините координати x , y и z , прво на оската Ox ја наоѓаме точката M_x со координата x , на оската Oy ја наоѓаме точката M_y со координата y и на оската Oz ја наоѓаме точката M_z со координата z . Потоа, низ M_x конструираме рамнина нормална на оската Ox , низ M_y - рамнина нормална на оската Oy и низ M_z - рамнина нормална на оската Oz . Во пресекот на вака конструираниите рамнини е точката M чии координати се реалните броеви x , y и z .

Проекцијата на точката M на оската Ox може да се добие и на следниов начин. Повлекуваме нормала од точката M на рамнината Oxy и подножната точка на нормалата ја означуваме со M_{xy} . Потоа од точката M_{xy} повлекуваме нормала на оската Ox и подножната точка ја означуваме со M_x . Очигледно, ако повлечеме нормала од точката M_{xy} на оската Oy , тогаш ја добиваме точката M_y , црт. 1.



Црт. 1

Аналогно, ако од точката M повлечеме нормали кон рамнините Oxz и Oyz , тогаш M_{xz} и M_{yz} се подножните точки на овие нормали. Јасно, продолжувајќи ја претходно опишаната постапка ги добиваме точките M_x, M_z и M_y, M_z , соодветно.

Точките $M, M_x, M_y, M_z, M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}$ и O се темиња на правоаголен паралелопипед, чии должини на рабови се координатите на точката M , земени со соодветни знаци. Да забележиме, дека од тоа што M има координати x, y, z , т.е. од $M(x, y, z)$ следува

$$M_x(x, 0, 0), M_y(0, y, 0), M_z(0, 0, z), M_{xy}(x, y, 0), M_{xz}(x, 0, z), M_{yz}(0, y, z).$$

1.5. Забелешка. Точките на рамнината Oxz се карактеризираат со равенката $y = 0$, точките на рамнината Oxy се карактеризираат со равенката $z = 0$, па затоа точките на оската Ox се карактеризираат со равенките $y = 0, z = 0$.

Аналогно, точките на оската Oy се карактеризираат со равенките

$$x = 0, z = 0$$

и точките на оската Oz се карактеризираат со равенките

$$x = 0, y = 0.$$

1.6. Забелешка. Рамнините Oxy, Oxz, Oyz го делат просторот на осум делови, кои ги нарекуваме координатни октанти и кои ги нумерираме според следново правило. Нека $M(x, y, z)$, тогаш

- ако $x > 0, y > 0, z > 0$, тогаш M лежи во првиот октант,
- ако $x < 0, y > 0, z > 0$, тогаш M лежи во вториот октант,
- ако $x < 0, y < 0, z > 0$, тогаш M лежи во третиот октант,
- ако $x > 0, y < 0, z > 0$, тогаш M лежи во четвртиот октант,
- ако $x > 0, y > 0, z < 0$, тогаш M лежи во петиот октант,
- ако $x < 0, y > 0, z < 0$, тогаш M лежи во шестиот октант,
- ако $x < 0, y < 0, z < 0$, тогаш M лежи во седмиот октант, и
- ако $x > 0, y < 0, z < 0$, тогаш M лежи во осмиот октант.

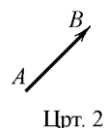
2. СКАЛАРНИ И ВЕКТОРСКИ ВЕЛИЧИНИ. ПРОЕКЦИЈА НА ВЕКТОР НА ОСКА

2.1. Дефиниција. Величината која е напълно определена со бројна вредност ја нарекуваме *скаларна величина* или *скалар*.

Скаларни величини се, на пример, температурата на дадено тело, масата на дадено тело, волуменот на дадено тело, густината на дадено тело итн.

2.2. Дефиниција 4. Величината која е напълно определена со бројна вредност, правец и насока ја нарекуваме *векторска величина* или *вектор*.

2.3. Геометриски вектор е подреден пар точки (A, B) . Првата точка (точката A) ја нарекуваме *почеток* на векторот, а втората точка (точката B) ја нарекуваме *крај* на векторот. Притоа пишуваме $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, црт. 2. Како што рековме, секој вектор се карактеризира со:



а) бројна вредност, т.е. *должина* или *интензитет на векторот* и тоа е растојанието меѓу почетната и крајната точка на векторот, при што пишуваме $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$,

б) *правец на векторот* и тоа е правата на која е паралелен векторот и

в) *насока на векторот* и тоа е ориентацијата од почетната кон крајната точка.

2.4. Дефиниција. Ако точките A и B се совпаѓаат, тогаш векторот $\overrightarrow{AB}$ ќе го нарекуваме *нулти вектор*. Притоа пишуваме $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Очигледно, нултиот вектор има должина нула, т.е. $|\vec{0}| = 0$.

2.5. Дефиниција. За ненултите вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ќе велиме дека се *колинеарни* ако правите AB и CD се паралелни (секоја права е паралелна со себе).

Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека нултиот вектор е колинеарен со секој вектор.

2.6. Пример. Точките A, B и C се колинеарни ако и само ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни. Докажете!

Решение. Нека точките A, B и C се колинеарни. Тогаш тие лежат на некоја права p , па, значи и векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ лежат на правата p , т.е. тие се колинеарни.

Обратно, нека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни. Тоа значи дека правите AB и AC се паралелни. Но, тие имаат заедничка точка (тоа е точката A), што значи тие се совпаѓаат, т.е. точките A, B и C се колинеарни. ♦

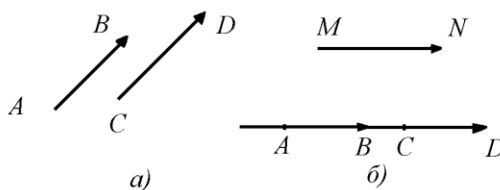
2.7. Дефиниција. За два колинеарни вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, правите AB и CD се различни, ќе велиме дека се *истонасочени* (имаат иста насока), ако отсечките AB и CD немаат заедничка точка (црт. 3 а)). Ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на иста права и ако постои вектор $\overrightarrow{MN}$ кој има иста насока со $\overrightarrow{AB}$ и со $\overrightarrow{CD}$, тогаш за векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ќе велиме дека се *истонасочени* (црт. 3 б)). За два колинеарни вектори, што немаат иста насока, ќе велиме дека се *спротивно-насочени* или дека *имаат спротивна насока*.

2.8. Дефиниција. За два вектори ќе велиме дека се *еднакви*, ако тие се колинеарни, имаат иста насока и имаат иста должина (интензитет).

Ако $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, тогаш векторот $\overrightarrow{BA}$ ќе го нарекуваме *спротивен* на $\vec{a}$ и ќе го означуваме со $-\vec{a}$.

2.9. Коментар. Нека $\vec{a}$ е произволен вектор и P е произволна точка во просторот. Од дефиницијата на еднаквост на вектори следува дека постои еден и само еден вектор $\overrightarrow{PQ}$ со почеток во P , еднаков на векторот $\vec{a}$. Со други зборови, за

секој вектор почетната точка може да се избере произволно, па затоа векторите во геометријата се разгледуваат со точност до нивната положба, т.е. различните еднакви вектори се добиваат еден од друг со паралелен пренос. Во смисла на претходно изнесеното векторите во геометријата ги нарекуваме слободни.



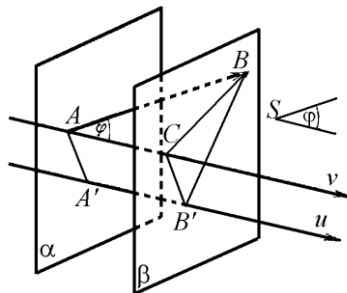
Црт. 3

2.10. Дефиниција. Нека е даден векторот $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и оската l . Ако A' и B' се проекциите на точките A и B врз оската l , соодветно, тогаш векторот $\vec{a}' = \overrightarrow{A'B'}$ го нарекуваме *компонента* на векторот $\vec{a}$ врз оската l . Скаларот $a_l = \pm \overline{A'B'}$, земен со знак плус ако насоката на компонентата $\vec{a}'$ на векторот $\vec{a}$ врз оската l се совпаѓа со насоката на оската l , а со знак минус во спротивен случај, го нарекуваме *проекција* на векторот $\vec{a}$ врз оската l . Притоа, ако $\vec{a} = \vec{o}$, тогаш ставаме $a_l = 0$.

2.11. Забелешка 3. Ако $\vec{e}$ е единичниот вектор на оската u , црт. 4, тогаш

$$\vec{a}' = a_u \vec{e}. \quad (1)$$

2.12. Теорема. Нека се дадени векторот



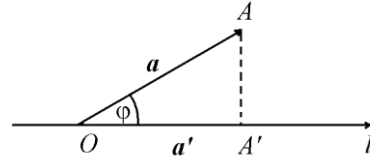
Црт. 4

$\vec{a}$ и оската l . Тогаш

$$a_l = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad (2)$$

каде $\varphi = \angle(\vec{a}, l)$.

Доказ. Векторот $\vec{a}$ е слободен вектор, па затоа можеме да земеме дека неговиот почеток е во точка O на правата l . Имаме:

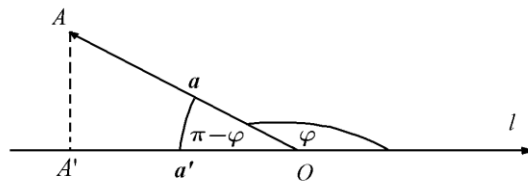


Црт. 5

а) Ако аголот меѓу $\vec{a}$ и l е остар, т.е. ако $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, тогаш насоките на векторот $\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}$ и оската l се совпаѓаат (црт. 5). Затоа

$$\begin{aligned} a_l &= pr_l \vec{a} = + |\overrightarrow{OA'}| \\ &= |\overrightarrow{OA}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cos \varphi. \end{aligned}$$

б) Ако аголот меѓу $\vec{a}$ и l е тап, т.е. ако $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, тогаш насоката на компонентата $\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}$ на векторот $\vec{a}$ е спротивна од насоката на оската l (црт. 6). Затоа



Црт. 6

$$a_l = pr_l \vec{a} = - |\overrightarrow{OA'}| = - |\overrightarrow{OA}| \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}| \cos \varphi. \quad \blacklozenge$$

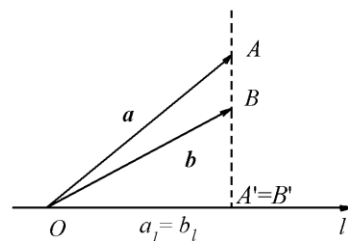
2.13. Последица. Проекцијата на вектор врз оска е:

- а) позитивна, ако векторот и оската зафаќаат остар агол,
- б) негативна, ако векторот и оската зафаќаат тап агол, и
- в) еднаква на нула, ако векторот и оската се заемно нормални. $\blacklozenge$

2.14. Последица. Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и l е дадена оска, тогаш

$$pr_l \overrightarrow{AB} = pr_l \overrightarrow{CD}. \quad \blacklozenge$$

2.15. Забелешка. Обратното тврдење на последица 2.14 не е точно. Имено, ако проекциите на два вектора врз оската l се еднакви, тогаш векторите не мора да се еднакви (црт. 7).



Црт. 7

3. ПРОЕКЦИИ НА ВЕКТОР НА КООРДИНАТНИТЕ ОСКИ

3.1. Нека во просторот е зададен координатен систем. Да разгледаме произволен вектор $\vec{a}$ и со x да ја означиме проекцијата на векторот $\vec{a}$ на оската Ox , со y -проекцијата на векторот $\vec{a}$ на оската Oy и со z -проекцијата на векторот $\vec{a}$ на оската Oz .

Според последица 2.14 секој вектор, еднаков на $\vec{a}$, има исти проекции на координатните оски.

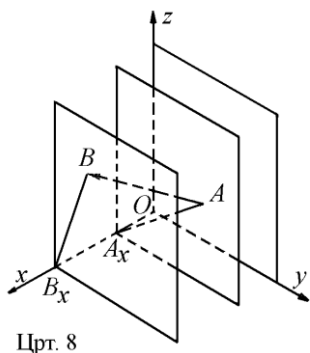
Обратно, ако некој вектор $\vec{b}$ има исти проекции на координатните оски, како и векторот $\vec{a}$, тогаш $\vec{a} = \vec{b}$. Навистина, да ги поставиме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ во координатниот почеток и краевите при таквото поставување да ги означиме со A и B , соодветно. Бидејќи векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста проекција x на оската Ox , јасно е дека точките A и B мора да лежат на иста рамнина, која на оската Ox отсекува отсечка со големина x (сметајќи од координатниот почеток). Аналогно, точките A и B лежат на иста рамнина нормална на оската Oy и лежат на иста рамнина нормална на оската Oz . Но, наведените рамнини се сечат во единствена точка, па затоа точките A и B мора да се совпаѓаат. Значи

$$\vec{b} = \vec{OB} = \vec{OA} = \vec{a}.$$

Од претходно изнесеното следува точноста на следнава теорема.

Теорема. Векторот $\vec{a}$ е определен ако и само ако се определени неговите проекции на координатните оски. ♦

3.2. Дефиниција. Проекциите x, y, z на векторот $\vec{a}$ на координатните оски Ox, Oy, Oz ги нарекуваме *координати на векторот $\vec{a}$* . Притоа пишуваме $\vec{a} = \{x, y, z\}$.



Црт. 8

3.3. Теорема. За секои точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ координатите на векторот $\vec{AB}$ се определени со формулите

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \quad (1)$$

Доказ. Од точките A и B да повлечеме нормали на оската Ox и со A_x и B_x да ги означиме нивните подножни точки, соодветно. Точките A_x и B_x лежат на оската Ox и нивните координати на оваа оска се x_1 и x_2 , соодветно. Според тоа, $A_x B_x = x_2 - x_1$ и како $A_x B_x = x$ добиваме дека

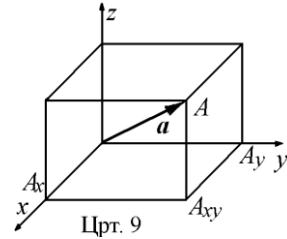
$x = x_2 - x_1$. Аналогно се докажува дека $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$. ♦

3.4. Дефиниција. Нека $Oxyz$ е даден координатен систем и нека $M(x, y, z)$ е произволна точка во просторот. Векторот $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ го нарекуваме *радиус-вектор на точката M*.

Координатите на векторот $\overrightarrow{OM}$ ќе ги пресметаме според формулите (1). Имено, во овие формули ставаме

$$x_2 = x, y_2 = y, z_2 = z \text{ и } x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0$$

и добиваме дека $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$.



Црт. 9

3.5. Нека е даден произволен вектор $\vec{a} = \{x, y, z\}$, чија почетна точка е во координатниот почеток (црт. 9). Низ крајната точка A на векторот $\vec{a}$ повлекуваме рамнини нормални на координатните оски и со A_x, A_y, A_z да ги означиме пресечните точки на овие рамнини со оските Ox, Oy, Oz , соодветно. Конструираниите рамнини, заедно со координатните рамнини формираат правоаголен паралелопипед со дијагонала OA. Според тоа,

$$\overline{OA}^2 = \overline{OA_x}^2 + \overline{OA_y}^2 + \overline{OA_z}^2.$$

Но, $\overline{OA} = |\vec{a}|$, $\overline{OA_x} = x$, $\overline{OA_y} = y$, $\overline{OA_z} = z$, па затоа $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

Јасно, со формулата (2) е изразен интензитетот на векторот $\vec{a}$ со помош на неговите координати x, y, z .

3.6. Растојание меѓу две точки. Нека се дадени две произволни точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Сакаме да го определиме растојанието d меѓу точките A и B. Според теорема 3.3 имаме

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

па од (2) следува

$$d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3)$$

3.7. Пример. а) Должината на векторот $\vec{a} = \{1, 2, -2\}$ е

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3.$$

б) Должината на отсечката AB, $A(10, -20, 0)$ и $B(-30, -50, 40)$ е

$$d = \overline{AB} = \sqrt{(-30-10)^2 + (-50+20)^2 + (40-0)^2} = 10\sqrt{41} . \blacklozenge$$

4. КОСИНУСНИ ПРАВЦИ

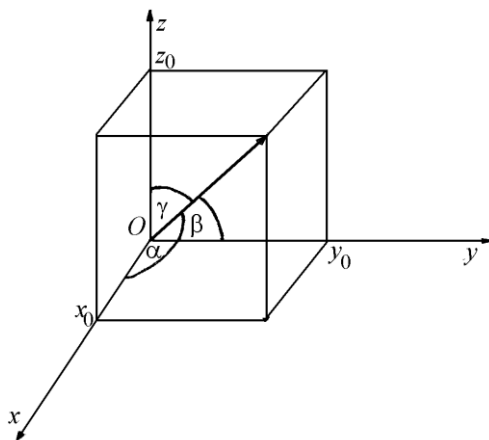
4.1. Дефиниција. Со α, β, γ да ги означиме аглите кои ги формира векторот $\vec{a}$ со координатните оски Ox, Oy и Oz , соодветно. За $\cos \alpha, \cos \beta$ и $\cos \gamma$ ќе велиме дека се *косинусни правци на векторот $\vec{a}$* .

4.2. Ако $\vec{a} = \{x_0, y_0, z_0\}$, тогаш за косинусните правци добиваме (црт. 10):

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{y_0}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z_0}{|\vec{a}|}.$$

Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема. За секој вектор $\vec{a}$ неговиот модул $|\vec{a}|$, косинусните правци $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ и координатите x, y, z се поврзани со релациите:



Црт. 10

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma, \quad (1)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \blacklozenge \quad (2)$$

4.3. Забелешка. Формулите (1) и (2) ни овозможуваат да ги пресметаме косинусните правци на векторот $\vec{a}$, ако ги знаеме неговите координати x, y, z . Притоа имаме

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (3)$$

понатаму, ако ги quadriраме равенствата (3) и ги собереме, добиваме

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

т.е.

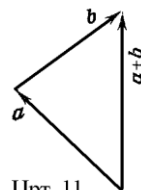
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

Според тоа, со помош на (4) можеме да го пресметаме секој од аглите α, β, γ , ако ги знаеме останатите два и ако знаеме дали бараниот агол е остар или тап.

5. СОБИРАЊЕ НА ВЕКТОРИ

5.1. Во натамошните разгледувања со V ќе го означуваме множеството слободни вектори.

Дефиниција. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и векторот $\vec{b}$ има почетна точка во крајната точка на векторот $\vec{a}$. Векторот $\vec{c}$ чија почетна точка се совпаѓа со почетната точка на векторот $\vec{a}$, а крајната точка му се совпаѓа со крајната точка на векторот $\vec{b}$ го нарекуваме **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (црт. 11).



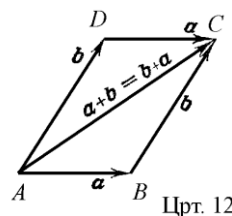
Црт. 11

Притоа пишуваме $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

5.2. Забелешка. Правилото за собирање вектори од претходната дефиниција го нарекуваме *правило на триаголник*.

При наоѓањето на збирот $\vec{a} + \vec{b}$ може да се случи крајната точка на $\vec{b}$ да се совпадне со почетната точка на $\vec{a}$. Јасно, во овој случај важи $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

5.3. Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека векторот $\vec{b}$ е надоврзан на векторот $\vec{a}$ (црт. 12). Според дефиниција 5.1 векторот $\vec{c}$ кој ги поврзува почетокот на $\vec{a}$ и крајот на $\vec{b}$ е збир на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. На црт. 12 е конструиран паралелограм $ABCD$. Притоа имаме $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Според тоа, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \vec{c}$, т.е. важи $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Црт. 12

Понатаму, од својствата на триаголникот непосредно следува

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \text{ и } \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Очигледно, ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат исти правци, тогаш се можни следниве случаи:

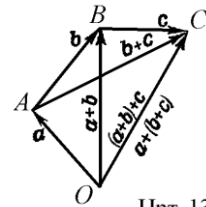
а) ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста насока, тогаш нивниот збир $\vec{a} + \vec{b}$ има интензитет $|\vec{a}| + |\vec{b}|$, а правецот и насоката се исти како и кај векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат различни насоки, тогаш нивниот збир $\vec{a} + \vec{b}$ има интензитет $\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$, ист правец како $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и насоката на векторот кој има поголем интензитет.

Нека $\vec{a} \in V$ и $\vec{b}$ е спротивниот вектор на $\vec{a}$, т.е. $\vec{b} = -\vec{a}$. Според забелешка 5.2 имаме, дека за секој вектор $\vec{a} \in V$ важи

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Понатаму, нека се дадени векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$. Ако ги собереме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ го добиваме векторот $\vec{a} + \vec{b}$. Сега, ако на векторот $\vec{a} + \vec{b}$ го додадеме векторот $\vec{c}$ го добиваме векторот $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Паралелно со овој збир можеме да го најдеме векторот $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, т.е. на векторот $\vec{a}$ му го додаваме збирот $\vec{b} + \vec{c}$. Ќе докажеме дека $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.



Црт. 13

За да го докажеме последното равенство, ќе ги поставиме векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ така, што векторот $\vec{b}$ е поставен во крајната точка на $\vec{a}$, а векторот $\vec{c}$ во крајната точка на $\vec{b}$. Притоа, со O да ја означиме почетната точка на $\vec{a}$, со A крајната точка на $\vec{a}$, со B крајната точка на $\vec{b}$ и со C крајната точка на $\vec{c}$ (црт. 13). Тогаш,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

т.е. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

5.4. Коментар. Од дефиницијата 5.1 и разгледувањата во 5.3 следува дека за операцијата собирање на вектори важат следниве својства:

S i) ако $\vec{a}, \vec{b} \in V$, тогаш $\vec{a} + \vec{b} \in V$,

S ii) за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

S iii) постои $\vec{0} \in V$ таков што за секој $\vec{a} \in V$ важи $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$,

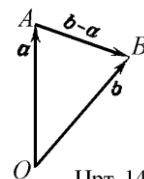
S iv) за секој $\vec{a} \in V$ постои $-\vec{a} \in V$ таков што $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$, и

S v) за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

6. ОДЗЕМАЊЕ НА ВЕКТОРИ

6.1. Дефиниција. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V$. За векторот $\vec{c}$ ќе велиме дека е *разлика* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, во ознака $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, ако важи $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

6.2. Да ги поставиме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ во заедничка почетна точка O и нивните крајни точки да ги означиме со A и B , соодветно (црт. 14). Сакаме да ја определиме разликата $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. Нека тоа е некој вектор со почеток во точката A . Тогаш крајната точка на овој вектор мора да се совпадне со точката B , бидејќи збирот $\vec{c}$ со $\vec{a}$ треба да го даде векторот $\vec{b}$. Според тоа, $\vec{b} - \vec{a} = \vec{AB}$, што значи точна е следава лема.



Црт. 14

6.3. Лема. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат заедничка точка. Разликата $\vec{b} - \vec{a}$ е вектор со почетна точка во крајната точка на $\vec{a}$ и крајна точка во крајната точка на $\vec{b}$. ♦

6.4. Лема. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Тогаш

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \quad (1)$$

Доказ. Имаме

$$(\vec{a} + (-\vec{b})) + \vec{b} = \vec{a} + ((-\vec{b}) + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{o} = \vec{a}.$$

Според тоа, збирот на векторите $\vec{a} + (-\vec{b})$ и $\vec{b}$ го дава векторот $\vec{a}$, па од дефиниција 6.1 следува равенството (1). ♦

6.5. Забелешка. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Од лема 6.3 следува дека разликата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е определена со $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Последното може непосредно да се докаже. Навистина, ако $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, тогаш од дефиниција 6.1 следува $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$, т.е. $\vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} (\vec{b} + \vec{c}) + (-\vec{b}) &= (\vec{b} + \vec{d}) + (-\vec{b}), \quad \vec{c} + (\vec{b} + (-\vec{b})) = \vec{d} + (\vec{b} + (-\vec{b})), \\ \vec{c} + \vec{o} &= \vec{d} + \vec{o}, \quad \vec{c} = \vec{d}. \end{aligned}$$

7. МНОЖЕЊЕ НА ВЕКТОР СО СКАЛАР

7.1. Дефиниција. Нека $\vec{a} \in V$ и $\lambda \in \mathbf{R}$. Векторот $\vec{b}$ кој има ист правец како векторот $\vec{a}$, интензитет $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и иста насока како векторот $\vec{a}$ ако $\lambda > 0$, а спротивна насока од векторот $\vec{a}$ ако $\lambda < 0$, го нарекуваме *производ на векторот $\vec{a}$ со скаларот λ* . Притоа пишуваме $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

7.2. Дефиниција. Нека $\vec{a} \neq \vec{o}$. Векторот $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ го нарекуваме *орт* соодветен на векторот $\vec{a}$.

7.3. Забелешка. Нека $\vec{a} \neq \vec{o}$. За ортот $\vec{a}_0$ соодветен на $\vec{a}$ важи

$$|\vec{a}_0| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1,$$

т.е. тој има должина 1. Затоа ќе велиме дека ортот $\vec{a}_0$ е единичен вектор колинеарен на векторот $\vec{a}$. Понатаму, за $\vec{a}$ и $\vec{a}_0$ важи

$$|\vec{a}| \vec{a}_0 = |\vec{a}| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \vec{a}.$$

Во дефиниција 2.5 го воведовме поимот колинеарни вектори. Во врска со овој поим ќе ја докажеме следнава теорема.

7.4. Теорема. Векторите $\vec{a}, \vec{b} \in V$ се колинеарни ако и само ако

$$\vec{b} = k\vec{a} \quad (1)$$

за некој $k \in \mathbf{R}$.

Доказ. Ако еден од векторите $\vec{a}$ или $\vec{b}$ е нултиот вектор, на пример $\vec{b} = \vec{0}$, тогаш $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$. Навистина, $|0 \cdot \vec{a}| = 0 \cdot |\vec{a}| = 0$, па затоа $0 \cdot \vec{a} = \vec{0} = \vec{b}$.

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$) се колинеарни и нека $\vec{e}$ и $\vec{e}'$ се нивните ортови, соодветно (црт. 15). Тогаш

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}, \quad \vec{b} = |\vec{b}| \vec{e}'. \quad (2)$$

Очигледно

$$\vec{e} = \pm \vec{e}', \quad (3)$$

каде знакот плус соодветствува на случајот кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста насока, а знакот минус кога $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат спротивни насоки. Од формулите (2) и (3) следува

$$\vec{b} = |\vec{b}| \vec{e}' = \pm |\vec{b}| \vec{e} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} (|\vec{a}| \vec{e}) = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a},$$

и ако земеме $k = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ добиваме дека важи (1).

Обратно, ако е исполнето равенството (1), тогаш колинеарноста на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ непосредно следува од дефиниција 15. ♦

7.5. Коментар. Од дефиницијата на множење на вектор со скалар непосредно следува дека

M i) за секои $\vec{a} \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$ важи $\lambda \vec{a} \in V$,

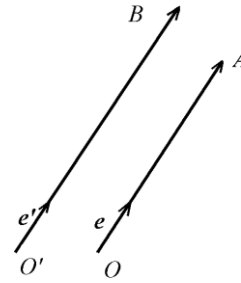
M ii) $1\vec{a} = \vec{a}$, за секој $\vec{a} \in V$,

M iii) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$, за секои $\vec{a} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

M iv) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, за секои $\vec{a} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

M v) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

7.6. Коментар. На крајот од овој дел да забележиме дека во множеството слободни вектори V дефиниравме операции собирање на вектори и производ на



Црт. 15

вектор со скалар, за кои важат својствата $S i) - S v)$ и $M i) - M v)$. За ваквото множество со наведените операции, во кои важат наведените својства ќе велиме дека е *реален векторски простор*.

8. ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ И ЛИНЕАРНА НЕЗАВИСНОСТ НА ВЕКТОРИ

8.1. Дефиниција. Нека $\vec{a}_i \in V, \lambda_i \in \mathbf{R}$, за $i=1,2,\dots,n$. Векторот

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i$$

го нарекуваме *линеарна комбинација* на векторите $\vec{a}_i, i=1,2,\dots,n$ со скаларите $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$.

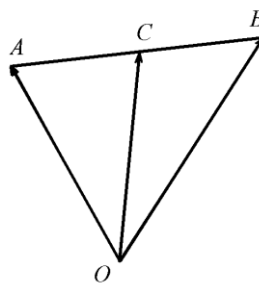
8.2. Делење на отсечка во даден однос. Нека се дадени точките A и B . Ако точката C ја дели отсечката AB така што $\overline{AC}:\overline{CB}=\lambda$ (црт. 16), тогаш векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ се колинеарни и притоа важи

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}. \quad (1)$$

Релацијата (1) можеме да ја запишеме и во друг вид ако го искористиме поимот радиус-вектор. Имено, ако положбата на секоја од точките A, B, C е определена во однос на фиксна точка O (*пол*) со радиус векторите $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, при што точката O е избрана така што да не лежи на правата AB , тогаш за векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ важи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Ако замениме во (1), последователно добиваме

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} &= \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\ \overrightarrow{OC} + \lambda \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} \\ (1 + \lambda) \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}. \end{aligned} \quad (2)$$

Според тоа, радиус векторот $\overrightarrow{OC}$ на точката C која ја дели отсечката AB во даден однос линеарно зависи од радиус векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ на крајните точки.



Црт. 16

8.3. Дефиниција. За векторите $\vec{a}_i, i=1,2,\dots,n$ ќе велиме дека се *линеарно зависни* ако постојат скалари $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$, меѓу кои барем еден е различен од нула, такви што

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}.$$

8.4. Пример. а) Ако барем еден од векторите $\vec{a}_i, i=1,2,\dots,n$ е нултиот вектор, тогаш векторите $\vec{a}_i, i=1,2,\dots,n$ се линеарно зависни. Навистина, ако на пример $\vec{a}_1 = \vec{0}$, тогаш од

$$1 \cdot \vec{a}_1 + \sum_{i=2}^n 0 \cdot \vec{a}_i = \vec{0}$$

следува дека векторите $\vec{0}, \vec{a}_i, i=2,\dots,n$ се линеарно зависни.

б) Нека векторот $\vec{a}$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{a}_i, i=1,2,3,\dots,n$. Тогаш $\vec{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i$, за некои скалари $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$, па затоа

$$(-1)\vec{a} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

што значи дека векторите $\vec{a}, \vec{a}_i, i=1,2,\dots,n$ се линеарно зависни.

в) Претходно видовме, дека ако точката C ја дели отсечката AB така што $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$ и O е произволна точка од рамнината која не лежи на правата AB , тогаш важи (2), т.е. важи $(1+\lambda)\vec{OC} - \vec{OA} - \lambda\vec{OB} = \vec{0}$, што значи дека векторите $\vec{OC}, \vec{OA}, \vec{OB}$ се линеарно зависни. ♦

8.5. Дефиниција. За векторите $\vec{a}_i, i=1,2,\dots,n$ ќе велиме дека се *линеарно независни*, ако од $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$ следува $\lambda_i = 0, i=1,2,\dots,n$.

8.6. Теорема. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни ако и само ако се колинеарни.

Доказ. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни. Тогаш постојат реални броеви x и y , од кои барем еден е различен од нула, така што

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}.$$

Нека $y \neq 0$. Тогаш $\vec{b} = -\frac{x}{y}\vec{a}$, т.е. векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни.

Обратно, ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш постои k така што $\vec{a} = k\vec{b}$, т.е. $1 \cdot \vec{a} - k\vec{b} = \vec{0}$, што значи дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни. ♦

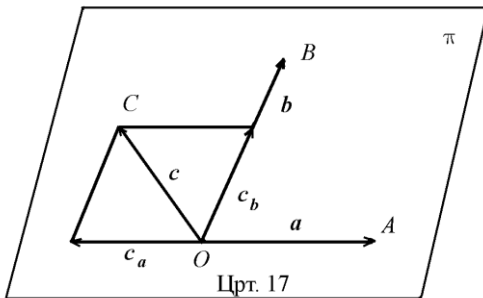
8.7. Забелешка. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, тогаш од теорема 8.6 следува дека тие не се линеарно зависни. Според тоа, за неколинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равенството $x\vec{a} = y\vec{b}$ е исполнето ако и само ако $x = y = 0$.

8.8. Дефиниција. За векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ ќе велиме дека се *компланарни*, ако тие се паралелни на една иста рамнина.

8.9. Теорема. Три ненулти вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни ако и само ако еден од нив е линеарна комбинација на другите два.

Доказ. Нека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни, паралелни на рамнината Π и имаат заедничка почетна точка O (црт. 17). Да претпоставиме дека овие вектори не се по парови колинеарни, на пример, векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Го разложуваме векторот $\vec{c}$ како збир на векторите $\vec{c}_a$ и $\vec{c}_b$, кои се колинеарни со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, соодветно. Значи

$$\vec{c} = \vec{c}_a + \vec{c}_b = k\vec{a} + m\vec{b}, \quad k, m \in \mathbf{R}.$$



Ако два од векторите се колинеарни, на пример $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогаш

$$\vec{a} = k\vec{b} = k\vec{b} + 0\vec{c},$$

т.е. $\vec{a}$ е линеарна комбинација на $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обратно, ако за векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ важи, на пример

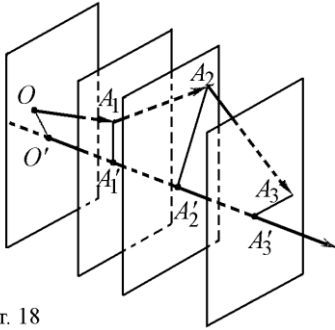
$$\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b},$$

тогаш од дефинициите на операциите со вектори следува дека векторот $\vec{c}$ лежи во рамнината на која се паралелни векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни. ♦

9. ТЕОРЕМИ ЗА ПРОЕКЦИИ

9.1. Теорема. Проекцијата на збирот на векторите $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ на оската u е еднаква на збирот на проекциите на овие вектори врз оската u , т.е.

$$pr_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = pr_u \vec{a}_1 + pr_u \vec{a}_2 + \dots + pr_u \vec{a}_n.$$



Црт. 18

Доказ. Да формираме искршена линија со векторите $\vec{a}_i$, $i=1,2,\dots,n$, т.е. на крајот на векторот $\vec{a}_1$ да го поставиме векторот $\vec{a}_2$, потоа на крајот на векторот $\vec{a}_2$ да го поставиме векторот $\vec{a}_3$ итн., да го надорвземе векторот $\vec{a}_n$ на крајот на векторот $\vec{a}_{n-1}$ (црт. 18). Почетокок на векторот $\vec{a}_1$ да го означиме со буквата O , а неговиот крај со буквата A_1 , крајот на векторот $\vec{a}_2$ со буквата A_2 итн. Тогаш

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{OA}_n. \quad (1)$$

Да ги проектираме точките $O, A_1, \dots, A_n$ на оската u и нивните проекции да ги означиме со $O', A_1', A_2', \dots, A_n'$, соодветно. Добиваме

$$O'A_1' = pr_u \vec{a}_1, A_1'A_2' = pr_u \vec{a}_2, \dots, A_{n-1}'A_n' = pr_u \vec{a}_n. \quad (2)$$

Од друга страна, од (1) следува

$$pr_u (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = O'A_n' \quad (3)$$

Понатаму, за секој распоред на точките $O', A_1', A_2', \dots, A_n'$ на оската u важи

$$O'A_n' = O'A_1' + A_1'A_2' + \dots + A_{n-1}'A_n' \quad (4)$$

Конечно, од равенствата (2), (3) и (4) следува

$$pr_u (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) = pr_u \vec{a}_1 + pr_u \vec{a}_2 + \dots + pr_u \vec{a}_n. \quad \blacklozenge$$

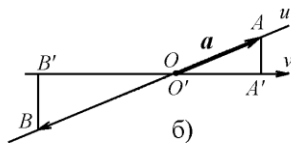
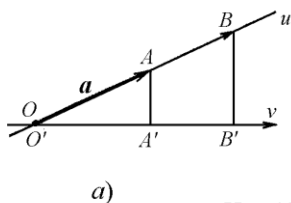
9.2. Теорема. За секои $\vec{a} \in V$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ и произволна оска v важи

$$pr_v \lambda \vec{a} = \lambda pr_v \vec{a}.$$

Доказ. Векторот $\vec{a}$ го поставуваме во произволна точка O на оската u и неговиот крај да го означиме со буквата A . Векторот $\lambda \vec{a}$ ќе го поставиме во точката O и неговиот крај ќе го означиме со буквата B . Според тоа, $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\lambda \vec{a} = \vec{OB}$.

Да ја разгледаме правата O, A, B и истата да ја разгледуваме како оска, т.е. да определиме позитивна насока на u . Ги проектираме точките O, A, B на оската и со O', A', B' да ги означиме нивните проекции, соодветно (црт. 19). Притоа важи

$$\frac{\overline{O'B'}}{\overline{O'A'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}. \quad (5)$$



Црт. 19

ките OB и OA се ориентирани во различни насоки (кога $\lambda < 0$), тогаш и отсечките $O'B'$ и $O'A'$ се ориентирани во различни насоки. Според тоа, количниците $\frac{O'B'}{O'A'}$ и $\frac{OB}{OA}$ имаат исти знаци, па затоа од равенството (5) следува

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{OB}{OA}.$$

Но, $\vec{\lambda a} = \vec{OB}$ и $\vec{a} = \vec{OA}$, па затоа $\frac{OB}{OA} = \lambda$, од што следува $\frac{O'B'}{O'A'} = \lambda$, т.е. $O'B' = \lambda \cdot O'A'$. Конечно, $pr_v \vec{\lambda a} = \lambda pr_v \vec{a}$. ♦

9.3. Забелешка. Од посебно значење е да најдеме формули за собирање вектори зададени со нивните координати и формули за множење на вектор со скалар.

Нека $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Од теорема 9.1 следува

$$pr_{Ox} \vec{c} = pr_{Ox} \vec{a} + pr_{Ox} \vec{b} = x_1 + x_2,$$

$$pr_{Oy} \vec{c} = pr_{Oy} \vec{a} + pr_{Oy} \vec{b} = y_1 + y_2,$$

$$pr_{Oz} \vec{c} = pr_{Oz} \vec{a} + pr_{Oz} \vec{b} = z_1 + z_2,$$

па затоа

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\},$$

т.е.

$$\{x_1, y_1, z_1\} + \{x_2, y_2, z_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}. \quad (6)$$

Нека $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\vec{d} = \alpha \vec{a}$. Од теорема 9.2 следува

$$pr_{Ox} \vec{d} = \alpha pr_{Ox} \vec{a} = \alpha x_1,$$

$$pr_{Oy} \vec{d} = \alpha pr_{Oy} \vec{a} = \alpha y_1,$$

$$pr_{Oz} \vec{d} = \alpha pr_{Oz} \vec{a} = \alpha z_1,$$

па затоа

$$\alpha \vec{a} = \vec{d} = \{\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\},$$

т.е.

$$\alpha \{x_1, y_1, z_1\} = \{\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\}. \quad (7)$$

Ако отсечките OB и OA (кои лежат на оската u) се ориентирани во иста насока, тогаш и отсечките $O'B'$ и $O'A'$ (на оската v) се ориентирани во иста насока. Ако отсеч-

9.4. Забелешка. Претходно го разгледавме делењето на отсечка во даден однос. Притоа докажавме дека ако се дадени точките A и B и полот O , тогаш точката C која ја дели отсечката AB во однос λ има радиус-вектор

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}.$$

Нека O е координатниот почеток и $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогаш $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, па затоа

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda} = \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right\},$$

т.е. $C\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right)$.

9.5. Пример. а) За векторите

$$\vec{a} = \{2, -2, 4\} \text{ и } \vec{b} = \{1, 2, 3\}$$

имаме

$$\vec{a} + \vec{b} = \{2 + 1, -2 + 2, 4 + 3\} = \{3, 0, 7\},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{2 - 1, -2 - 2, 4 - 3\} = \{1, -4, 1\},$$

$$2\vec{a} = \{2 \cdot 2, 2 \cdot (-2), 2 \cdot 4\} = \{4, -4, 8\}.$$

Според тоа,

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

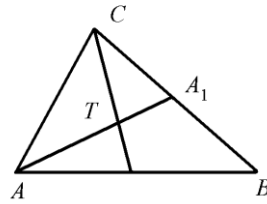
$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{58} < \sqrt{14} + 2\sqrt{6} = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} < 2\sqrt{6} - \sqrt{14} = ||\vec{a}| - |\vec{b}||.$$

б) Ќе ги определиме координатите на тежиштето T на триаголникот ABC : $A(2, 0, 3)$; $B(5, -1, 3)$; $C(1, 2, 0)$.

Точката A_1 ја дели отсечката BC во однос $\alpha = 1:1$ (црт. 20), па затоа $A_1\left(\frac{5+1}{1+1}, \frac{-1+2}{1+1}, \frac{3+0}{1+1}\right)$, т.е. $A_1\left(3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Понатаму, тежиштето T ја дели отсечката AA_1

во однос $\beta = 2:1$, па затоа $T\left(\frac{2+2 \cdot 3}{1+2}, \frac{0+2 \cdot \frac{1}{2}}{1+2}, \frac{3+2 \cdot \frac{3}{2}}{1+2}\right)$, т.е. $T\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{6}{3}\right)$. ♦



Црт. 20

10. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ВЕКТОРИ НА КОМПОНЕНТИ

10.1. Дефиниција. Нека во просторот е даден координатен систем и векторите $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ кои ги определуваме на следниов начин:

- 1) векторот $\vec{i}$ лежи на оската Ox , векторот $\vec{j}$ - на оската Oy и векторот $\vec{k}$ - на оската Oz ;

- 2) секој од векторите $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ има насока во позитивната насока на својата оската; и
- 3) векторите $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ се единични, т.е. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

За вака определена тројка вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ќе велиме дека е *координатна база*.

10.2. Да разгледаме произволен вектор $\vec{a}$, кој е поставен во координатниот почеток и со A да ја означиме неговата крајна точка. Низ точката A повлекуваме права, паралелна на оската Oz и со B да го означиме пресекот на оваа права со рамнината Oxy . Низ точката B повлекуваме прави паралелни на оските Ox и Oy и нивните пресечни точки со оските Oy и Ox да ги означиме со A_y и A_x , соодветно. На крајот, низ точката A да повлечеме права паралелна со OB и нејзиниот пресек со оската Oz да го означиме со A_z (црт. 21).

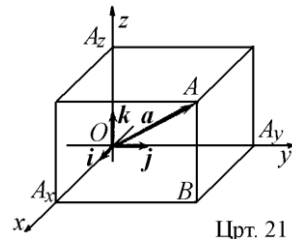
Од дефиницијата на собирање вектори имаме

$$\vec{a} = \vec{OB} + \vec{OA_z},$$

$$\vec{OB} = \vec{OA_x} + \vec{OA_y},$$

па затоа

$$\vec{a} = \vec{OA_x} + \vec{OA_y} + \vec{OA_z}. \quad (1)$$



Црт. 21

Понатаму, векторите $\vec{OA_x}$ и $\vec{i}$ се колинеарни, па затоа $\vec{OA_x} = x\vec{i}$ за некој $x \in \mathbf{R}$. Слично, $\vec{OA_y} = y\vec{j}$ и $\vec{OA_z} = z\vec{k}$, за некои $y, z \in \mathbf{R}$. Ако замениме во равенството (1) добиваме

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2)$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема. Секој вектор во просторот може да се изрази со помош на линеарните операции со векторите $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. ♦

10.4. Дефиниција. Претставувањето (2) на векторот $\vec{a}$ го нарекуваме *разложување* на векторот $\vec{a}$ по базата $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Броевите x, y, z ги нарекуваме *коэффициенти на разложувањето*, а векторите $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ ги нарекуваме *компоненти на векторот $\vec{a}$* по базата $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

10.5. Бидејќи $\vec{OA_x} = x\vec{i}$ и векторот $\vec{i}$ е единичен вектор со иста насока како и оската Ox добиваме дека $x = OA_x$. Но, OA_x е проекцијата на векторот $\vec{a} = \vec{OA}$ на оската Ox , па затоа $x = pr_{Ox} \vec{a}$. Слично, $y = pr_{Oy} \vec{a}$ и $z = pr_{Oz} \vec{a}$. Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема. Секој вектор $\vec{a}$ може да се разложи по базата $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. може да се претстави во видот (2), при што коефициентите на тоа разложување се проекциите x, y, z на векторот $\vec{a}$ на координатните оски, т.е. тие се единствени. ♦

10.6. На крајот од овој дел да забележиме дека разложувањето на произволен вектор не мора да е само по базата $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Имено, за секои три некомпланарни вектори $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ точна е следнава теорема.

Теорема. Нека $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ се некомпланарни вектори. Тогаш, секој вектор $\vec{a}$ на единствен начин може да се изрази како линеарна комбинација на векторите $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$:

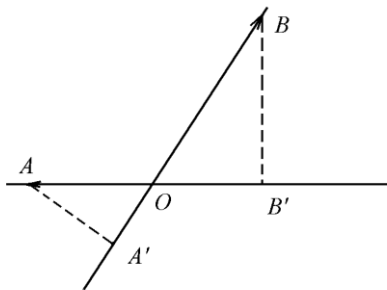
$$\vec{a} = \alpha \vec{m} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{p}. \quad (3)$$

Доказ. Доказот е аналоген како во случајот со координатните вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

11. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

11.1. Пример. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два ненулти вектори. Докажете дека

$$|\vec{a}| \cdot pr_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot pr_b \vec{a} \quad (1)$$

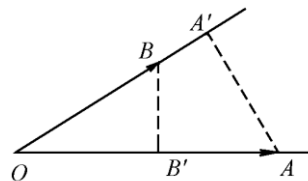


Црт. 23

па имаме

$$|\vec{a}| \cdot pr_a \vec{b} = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot pr_b \vec{a}.$$

Да претпоставиме дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни и не се заемно нормални. Да ги нанесеме од иста точка O , т.е. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ (црт. 22 и 23). Триаголниците $OA'A$ и $OB'B$ се правоаголници со еднакви остри агли кај темето O , па значи тие се слични. Од тоа следува дека



Црт. 22

Решение. Ако $\vec{a} \perp \vec{b}$, тогаш

$$pr_a \vec{b} = pr_b \vec{a} = 0,$$

па значи, важи равенството (1). Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни со иста насока, тогаш

$$pr_b \vec{a} = |\vec{a}|, pr_a \vec{b} = |\vec{b}|,$$

а ако се колинеарни со спротивни насоки, тогаш

$$pr_b \vec{a} = -|\vec{a}|, pr_a \vec{b} = -|\vec{b}|,$$

$$\overline{OA'} : \overline{OB'} = \overline{OA} : \overline{OB}, \text{ т.е. } \overline{OA} \cdot \overline{OB'} = \overline{OA'} \cdot \overline{OB},$$

односно

$$|\vec{a}| \cdot |pr_b \vec{a}| = |\vec{b}| \cdot |pr_a \vec{b}|.$$

Но, броевите $pr_b \vec{a}$ и $pr_a \vec{b}$ се со ист знак (во случај како на црт. 22 и двата позитивни, а како на црт. 23 и двата негативни), па затоа важи (1). ♦

11.2. Пример. Три ненулти вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат триаголник ако и само ако $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Докажете!

Решение. Да претпоставиме дека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат триаголник, т.е. постои триаголник ABC така што $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{CA}, \vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Тогаш

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Обратно, да претпоставиме дека $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Нека A е произволна точка и нека B е точката, така што $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, а C онаа точка, така што $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ (направи цртеж). Тогаш за векторот $\overrightarrow{CA}$ ќе имаме:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{c}).$$

Од $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ следува $\vec{b} = -(\vec{a} + \vec{c})$, па значи $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, т.е. векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат триаголник ABC . ♦

11.3. Пример. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Најдете вектор $\vec{x}$ кој лежи на симетралата на аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Нека $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се два неколинеарни вектори. Ако $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{ON}$ и ако $OMPN$ е паралелограм, тогаш $\vec{m} + \vec{n} = \overrightarrow{OP}$. Значи, $\vec{m} + \vec{n}$ лежи на дијагоналата на паралелограмот $OMPN$, а таа го дели на половина аголот кај темето O ако и само ако тој е ромб.

Значи, збирот $\vec{m} + \vec{n}$ на векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ лежи на симетралата на аголот меѓу векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ако и само ако $|\vec{m}| = |\vec{n}|$. Според тоа, треба да најдеме два вектора, со иста должина, колинеарни со $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и да го земеме нивниот збир. Векторите $|\vec{b}|\vec{a}$ и $|\vec{a}|\vec{b}$ имаат иста должина $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, па затоа $\vec{x} = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$. ♦

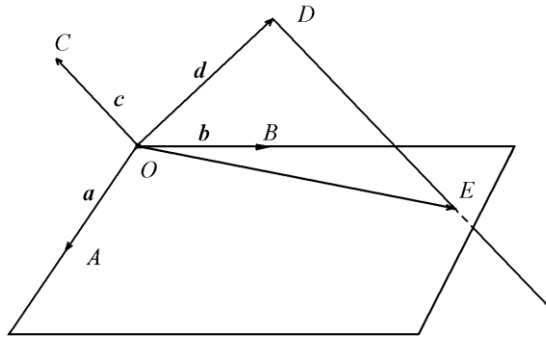
11.4. Пример. Точките M и N ја делат отсечката AB на три еднакви делови. Изразете ги векторите $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ со помош на векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, каде O е произволна точка која не лежи на отсечката AB .

Решение. Ако точката X ја дели отсечката AB во однос $\lambda = m : n$, тогаш од 8.2 следува дека $\overrightarrow{OX} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$.

Точката M ја дели отсечката AB во однос $1:2$, а точката N ја дели AB во однос $2:1$. Од претходно изнесеното имаме:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} \text{ и } \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}. \blacklozenge$$

11.5. Пример. Докажете дека кои било четири вектори се линеарно зависни.



Црт. 24

Решение. Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ се кои било четири вектори. Ако некои три од нив се компланарни, на пример $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, тогаш $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ за некои реални броеви x и y , па затоа $x\vec{a} + y\vec{b} + (-1)\vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{0}$, т.е. векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ се линеарно зависни.

Затоа, да претпоставиме дека кои било три од векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ не се компланарни. Да ги нанесеме во иста точка O , така што

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}, \vec{d} = \overrightarrow{OD}$$

(црт. 24). Низ точката D да повлечеме права паралелна со правата OC која што ја прободува рамнината AOB во точката E . Тогаш векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}$ се компланарни, па затоа $\overrightarrow{OE} = x\vec{a} + y\vec{b}$, за некои $x, y \in \mathbf{R}$. Векторот $\overrightarrow{ED}$ е колинеарен со векторот $\vec{c}$, па $\overrightarrow{ED} = z\vec{c}$ за некој $z \in \mathbf{R}$. Сега, имаме

$$\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

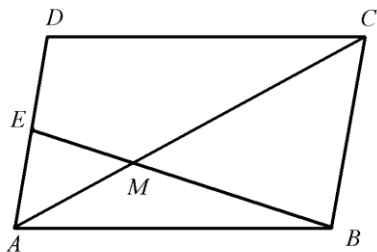
т.е.

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + (-1)\vec{d} = \vec{0},$$

што значи векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ се линеарно зависни. $\blacklozenge$

11.6. Пример. Нека E е средината на страната AB на паралелограмот $ABCD$ и нека $M = AC \cap BE$. Најдете ги односите $\overline{AM} : \overline{MC}$ и $\overline{BM} : \overline{ME}$.

Решение. Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (црт. 25). Векторите $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MC}$ се колинеарни, па затоа постои $x \in \mathbf{R}$ така што $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$. Бидејќи $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, добиваме $\overrightarrow{AM} = x(\vec{a} + \vec{b})$. Слично, за некој $y \in \mathbf{R}$ ќе биде $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BE} = y(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$. Бидејќи $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$, добиваме



Црт. 25

$$\vec{a} + y(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = x(\vec{a} + \vec{b})$$

т.е.

$$(x - \frac{1}{2}y)\vec{b} + (x + y - 1)\vec{a} = \vec{0}. \quad (1)$$

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, па од (1) следува $x - \frac{1}{2}y = 0$ и $x + y - 1 = 0$, од каде што добиваме $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Значи,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}), \text{ т.е. } 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC},$$

од каде што следува $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MC} = 1 : 2$. Слично, од $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$ добиваме

$$\overrightarrow{BM} : \overrightarrow{ME} = 2 : 1. \quad \blacklozenge$$

11.7. Пример. Нека точките M и N се од страните AC и BC на триаголникот ABC , така што правата MN е паралелна со правата AB . Докажете дека точките M и N ги делат страните AC и BC во еден ист однос.

Решение. Правите MN и AB се меѓусебно паралелни, па затоа векторите $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB}$ се колинеарни, т.е. постои $\lambda \in \mathbf{R}$, така што $\overrightarrow{MN} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Нека точката M ја дели страната AC во однос $m:n$, а точката N ја дели страната BC во однос $p:q$. Тогаш имаме:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{CB}.$$

Значи,

$$\lambda\overrightarrow{AB} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{CB}$$

$$\lambda(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{CB}$$

$$(\lambda - \frac{n}{m+n})\overrightarrow{AC} + (\lambda - \frac{p}{p+q})\overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Но, векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ не се колинеарни, па затоа $\lambda = \frac{n}{m+n}$, $\lambda = \frac{p}{p+q}$. Од

$\frac{n}{m+n} = \frac{p}{p+q}$ следува $m:n = p:q$, т.е. точките M и N ги делат страните AC и BC во еден ист однос. $\blacklozenge$

11.8. Пример. Трите отсечки што ги сврзуваат средините на спротивните рабови на еден тетраедар се сечат во една точка. Докажете!

Решение. Нека $ABCD$ е даден тетраедар и нека радиус-векторите на A, B, C, D се $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$, соодветно. Ако $M(\vec{r}_M)$ и $N(\vec{r}_N)$ се средините на спротивните рабови AB и CD , тогаш

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad \vec{r}_N = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_4).$$

Ако, пак, $P(\vec{r}_P)$, $Q(\vec{r}_Q)$, $S(\vec{r}_S)$ и $T(\vec{r}_T)$ се средините на рабовите AC , BD , AD и BC соодветно, тогаш

$$\vec{r}_P = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_3), \quad \vec{r}_Q = \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_4), \quad \vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_4), \quad \vec{r}_T = \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3).$$

Следствено, имаме:

$$\vec{r}_M + \vec{r}_N = \vec{r}_P + \vec{r}_Q = \vec{r}_S + \vec{r}_T = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4)$$

што значи MN , PQ и ST минуваат низ една точка, којашто е средина на сите три отсечки (зошто?). ♦

11.9. Пример. Нека n е непарен број. Докажете дека секој n -аголник е еднозначно определен со средините на своите страни.

Решение. Нека се дадени точките

$$S_1(\vec{r}_1), S_2(\vec{r}_2), \dots, S_n(\vec{r}_n)$$

и нека $A_1A_2\dots A_n$ е n -аголник, така што S_1 е средина на страната A_1A_2 , S_2 е средина на страната A_2A_3 итн. S_n е средина на страната A_nA_1 . Ако $A_1(\vec{r}_1)$, $A_2(\vec{r}_2)$, $\dots, A_n(\vec{r}_n)$, тогаш

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 2\vec{r}_1,$$

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 2\vec{r}_2,$$

.....

$$\vec{r}_{n-1} + \vec{r}_n = 2\vec{r}_{n-1},$$

$$\vec{r}_n + \vec{r}_1 = 2\vec{r}_n.$$

Секоја втора равенка да ја помножиме со -1 , а потоа да ги собереме сите равенки. Добиваме

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{r}_3 - \dots - \vec{r}_{n-1} + \vec{r}_n.$$

Значи, темето $A_1(\vec{r}_1)$ е еднозначно определено, па затоа постои единствен таков n -аголник. ♦

11.10. Пример. Изразете го векторот $\vec{d} = \{2, 4, 2\}$ како линеарна комбинација на векторите $\vec{a} = \{1, 2, 5\}$, $\vec{b} = \{-1, 6, 3\}$, $\vec{c} = \{0, 0, 2\}$.

Решение. Треба да определиме реални броеви x, y, z така што

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Имаме:

$$\{2, 4, 2\} = x\{1, 2, 5\} + y\{-1, 6, 3\} + z\{0, 0, 2\} = \{x - y, 2x + 6y, 5x + 3y + 2z\}$$

т.е.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \\ 5x + 3y + 2z = 2. \end{cases}$$

Со решавање на овој систем равенки, добиваме $x = 2, y = 0, z = -4$. Значи

$$\vec{d} = 2\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + (-4)\vec{c}. \blacklozenge$$

11.11. Пример. а) Докажи дека векторите

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$$

се компланарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

б) Дали векторите $\vec{a} = \{-3, 0, 2\}$, $\vec{b} = \{2, 1, -4\}$, $\vec{c} = \{11, -2, -2\}$ се компланарни.

Решение. а) Да претпоставиме дека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни. Тоа значи дека постојат реални броеви x, y, z од кои барем еден е различен од нула, така што важи

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0},$$

т.е. системот равенки

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

има нетривијално решение. Значи, важи условот (1).

Доказот на обратното тврдење го оставаме на читателот за вежба.

б) Имаме

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 11 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 8 - 22 + 24 = 0$$

што значи дека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни. ♦

11.12. Пример. а) Докажете дека точките

$$A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3) \text{ и } D(d_1, d_2, d_3)$$

се компланарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

б) Дали точките $A(2, 3, 1), B(3, 1, 4), C(2, 1, 5), D(0, 0, 9)$ се компланарни?

Решение. а) Точките A, B, C, D се компланарни ако и само ако векторите $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ се компланарни, па, според пример 11.11 ако и само ако важи условот (1).

б) Имаме

$$\begin{vmatrix} 3-2 & 1-3 & 4-1 \\ 2-2 & 1-3 & 5-1 \\ 0-2 & 0-3 & 9-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -16 + 16 - 12 + 12 = 0,$$

што значи точките A, B, C, D се компланарни. ♦

11.13. Пример. Каква е заемната положба на правите AB и CD , каде $A(6, 0, 1), B(-1, 3, 2), C(5, 1, -3), D(6, 1, 3)$.

Решение. На правата AB лежи векторот $\vec{AB} = \{-7, 3, 1\}$, а на правата CD векторот $\vec{CD} = \{1, 0, 6\}$. Векторите $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ не се колинеарни, па значи, правите AB и CD не се паралелни.

Следствено, правите AB и CD се или разминувачки или се сечат. За да го провериме тоа, доволно е да провериме дали векторите $\vec{AB}, \vec{AC}$ и $\vec{CD}$ се компланарни. Имаме $\vec{AC} = \{-1, 1, -4\}$, па

$$\begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -18 + 1 + 42 + 12 = 37 \neq 0.$$

Според пример 11.11, следува дека векторите $\vec{AB}, \vec{AC}$ и $\vec{CD}$ не се компланарни. Значи, правите AB и CD се разминувачки. ♦

12. СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

12.1. Дефиниција. Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Реалниот број $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, каде $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, го нарекуваме *скаларен производ* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Притоа пишуваме

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}). \quad (1)$$

12.2. Коментар. За натамошните разгледувања е важно да забележиме, дека

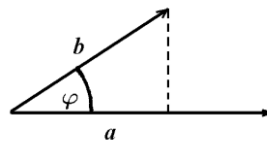
$$|\vec{b}| \cos \varphi = pr_{\vec{a}} \vec{b},$$

па затоа

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| pr_{\vec{a}} \vec{b}. \quad (2)$$

Аналогно, $|\vec{a}| \cos \varphi = pr_{\vec{b}} \vec{a}$ и добиваме

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}| pr_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (3)$$



Црт. 26

Според тоа, скаларниот производ на два вектора е еднаков на производот на должината на едниот вектор и проекцијата на другиот вектор на оската со ист правец и насока како и првиот вектор.

12.3. Теорема. За секои вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}. \quad (4)$$

Доказ. Од $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$, каде $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ следува

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos(-\varphi) = \vec{b}\vec{a}. \quad \blacklozenge$$

12.4. Теорема. За секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}. \quad (5)$$

Доказ. Од формулата (3) и од теорема 9.2 следува

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = |\vec{c}| pr_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| (pr_{\vec{c}} \vec{a} + pr_{\vec{c}} \vec{b}) = |\vec{c}| pr_{\vec{c}} \vec{a} + |\vec{c}| pr_{\vec{c}} \vec{b} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}. \quad \blacklozenge$$

12.5. Теорема. За секои вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и за секој $\alpha \in \mathbf{R}$ важи

$$(\alpha \vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b}).$$

Доказ. Од формулата (3) и од теорема 9.2 следува

$$(\alpha \vec{a})\vec{b} = |\vec{b}| pr_{\vec{b}}(\alpha \vec{a}) = |\vec{b}| \alpha pr_{\vec{b}} \vec{a} = \alpha(|\vec{b}| pr_{\vec{b}} \vec{a}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}). \quad \blacklozenge$$

12.6. Последица. За секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ важи

$$(\alpha\vec{a})(\beta\vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a}\vec{b}).$$

Доказ. Од теоремите 12.3 и 12.5 следува

$$(\alpha\vec{a})(\beta\vec{b}) = \alpha(\vec{a}(\beta\vec{b})) = \alpha((\beta\vec{b})\vec{a}) = \alpha((\beta(\vec{b}\vec{a})) = (\alpha\beta)(\vec{b}\vec{a}) = (\alpha\beta)(\vec{a}\vec{b}). \blacklozenge$$

12.7. Последица. За секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ и за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ важи

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{c}) + \beta(\vec{b}\vec{c}).$$

Доказ. Од теоремите 12.4 и 12.5 следува

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\vec{c} = (\alpha\vec{a})\vec{c} + (\beta\vec{b})\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{c}) + \beta(\vec{b}\vec{c}). \blacklozenge$$

12.8. Забелешка. Бидејќи скаларниот производ на два вектора е скалар, бесмислено е да се зборува за скаларен производ на три и повеќе вектори. Притоа, да забележиме, дека симболот $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ се подразбира како производ на скаларот $\vec{a}\vec{b}$ со векторот $\vec{c}$, т.е. тој означува вектор колинеарен со векторот $\vec{c}$.

12.9. Теорема. Векторите $\vec{a}, \vec{b} \in V$ се заемно нормални ако и само ако $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Доказ. Нека $\vec{a} \perp \vec{b}$, т.е. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Тогаш од (1) следува

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

Обратно, ако $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, тогаш $\vec{a} \perp \vec{b}$. Нека $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ и $\vec{a}\vec{b} = 0$. Тогаш од (1) следува

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{0}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0,$$

па затоа $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. $\blacklozenge$

12.10. Пример. Векторот $\vec{n}$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, за кои важи $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$, $\vec{n}\vec{p} = 7$, $\vec{n}\vec{q} = 3$. Најдете ја должината на $\vec{n}$.

Решение. Нека $\vec{n} = x\vec{p} + y\vec{q}$, $x, y \in \mathbf{R}$. Од $\vec{n}\vec{p} = 7$ наоѓаме

$$7 = \vec{n}\vec{p} = (x\vec{p} + y\vec{q})\vec{p} = x\vec{p}\vec{p} + y\vec{p}\vec{q} = x|\vec{p}|^2 + y|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \frac{\pi}{3} = 2^2x + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}y,$$

т.е. $7 = 4x + 3y$. Од $\vec{n}\vec{q} = 3$ наоѓаме

$$3 = \vec{n}\vec{q} = (x\vec{p} + y\vec{q})\vec{q} = x\vec{p}\vec{q} + y\vec{q}\vec{q} = x|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \frac{\pi}{3} + y|\vec{q}|^2 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}x + 3^2y,$$

т.е. $3 = 3x + 9y$. Решавајќи го системот

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 3x + 9y = 3 \end{cases}$$

наоѓаме $x = 2, y = -\frac{1}{3}$. Според тоа, $\vec{n} = 2\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}$.

Понатаму,

$$\begin{aligned} |\vec{n}|^2 &= \vec{n}\vec{n} = (2\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q})(2\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}) = 4\vec{p}\vec{p} - \frac{4}{3}\vec{p}\vec{q} + \frac{1}{9}\vec{q}\vec{q} \\ &= 4|\vec{p}|^2 - \frac{4}{3}|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9}|\vec{q}|^2 = 4 \cdot 2^2 - \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot 3^2 = 13, \end{aligned}$$

па затоа $|\vec{n}| = \sqrt{13}$. ♦

12.11. Пример. Најдете го аголот меѓу ненултните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ако $\vec{a} + 3\vec{b}$ е нормален на $7\vec{a} - 5\vec{b}$ и $\vec{a} - 4\vec{b}$ е нормален на $7\vec{a} - 2\vec{b}$.

Решение. Од теорема 12.9 и од условот на задачата следува

$$\begin{cases} (\vec{a} + 3\vec{b})(7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0 \\ (\vec{a} - 4\vec{b})(7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0 \end{cases}$$

па затоа

$$\begin{cases} 7\vec{a}\vec{a} + 21\vec{a}\vec{b} - 5\vec{a}\vec{b} - 15\vec{b}\vec{b} = 0 \\ 7\vec{a}\vec{a} - 28\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} + 8\vec{b}\vec{b} = 0 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} 7|\vec{a}|^2 + 16|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha - 15|\vec{b}|^2 = 0 \\ 7|\vec{a}|^2 - 30|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha + 8|\vec{b}|^2 = 0 \end{cases}$$

Од првата равенка во последниот систем добиваме

$$\cos \alpha = \frac{15|\vec{b}|^2 - 7|\vec{a}|^2}{16|\vec{a}||\vec{b}|} \quad (6)$$

и ако замениме во втората равенка последователно наоѓаме

$$7|\vec{a}|^2 - 30|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \frac{15|\vec{b}|^2 - 7|\vec{a}|^2}{16|\vec{a}||\vec{b}|} + 8|\vec{b}|^2 = 0,$$

$$56|\vec{a}|^2 - 225|\vec{b}|^2 + 105|\vec{a}|^2 + 64|\vec{b}|^2 = 0,$$

$$161|\vec{a}|^2 = 161|\vec{b}|^2,$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

конечно, ако замениме во (6) добиваме $\cos \alpha = \frac{15|\vec{b}|^2 - 7|\vec{b}|^2}{16|\vec{b}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}$ па затоа

$$\alpha = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}. \quad \blacklozenge$$

13. КООРДИНАТНА ФОРМА НА СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

13.1. Теорема. Ако $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, тогаш

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (1)$$

Доказ. Најпрво да забележиме дека за базните вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ важи

$$\begin{cases} \vec{i}\vec{i} = 1, & \vec{i}\vec{j} = 0, & \vec{i}\vec{k} = 0 \\ \vec{j}\vec{i} = 0, & \vec{j}\vec{j} = 1, & \vec{j}\vec{k} = 0 \\ \vec{k}\vec{i} = 0, & \vec{k}\vec{j} = 0, & \vec{k}\vec{k} = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Да ги разложиме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по базните вектори:

$$\begin{cases} \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}. \end{cases} \quad (3)$$

Од (3), ако ги искористиме алгебарските својства на скаларниот производ, добиваме

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\vec{k}$$

Конечно, ако ги искористиме равенствата (2) од последното равенство следува равенството (1). ♦

13.2. Последица. Потребен и доволен услов за ортогоналност на векторите $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ е

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \quad (4)$$

Доказ. Според теорема 12.9 имаме $\vec{a} \perp \vec{b}$ ако и само ако $\vec{a}\vec{b} = 0$. Сега од теорема 13.1 следува $\vec{a} \perp \vec{b}$ ако и само ако е исполнето равенството (4). ♦

13.3. Последица. За аголот φ меѓу векторите

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} \text{ и } \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$$

важи

$$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (5)$$

Доказ. Од дефиницијата на скаларен производ $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$ добиваме

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (6)$$

Но, според теорема 13.1 имаме

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

а според теорема 4.2 имаме

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Оттука и од формулата (6) ја добиваме формулата (5). ♦

13.4. Последица. Ако оската u формира со координатните оски агли α, β, γ , тогаш проекцијата на векторот $\vec{s} = \{x, y, z\}$ врз оската u е дадена со формулата

$$pr_u \vec{s} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad (7)$$

Доказ. Нека земеме дека правецот и насоката на оската u се дадени со единичниот вектор $\vec{e}$. Притоа имаме $\vec{e}\vec{s} = |\vec{e}| pr_e \vec{s}$ и како $|\vec{e}| = 1$, а $pr_e \vec{s} = pr_u \vec{s}$ добиваме $pr_u \vec{s} = \vec{e}\vec{s}$. Понатаму, бидејќи единичниот вектор има ист правец и насока како и оската u , добиваме дека тој со координатните оски ги зафаќа истите агли како и оската u , т.е. α, β, γ . Оттука заклучуваме дека

$$pr_{Ox} \vec{e} = |\vec{e}| \cos \alpha, \quad pr_{Oy} \vec{e} = |\vec{e}| \cos \beta, \quad pr_{Oz} \vec{e} = |\vec{e}| \cos \gamma,$$

но $|\vec{e}| = 1$, па затоа $\vec{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$. Конечно

$$pr_u \vec{s} = \vec{e}\vec{s} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \cdot \{x, y, z\} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

т.е. важи (7). ♦

13.5. Пример. Најдете го реалниот број x така што векторите $\vec{a} = \{x-2, 4, 1\}$ и $\vec{b} = \{-1, 3, 5\}$ се заемно нормални.

Решение. Бидејќи векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални добиваме $\vec{a}\vec{b} = 0$, т.е.

$$-1(x-2) + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 0$$

$$-x + 2 + 12 + 5 = 0$$

$$x = 19. \quad \blacklozenge$$

13.6. Пример. Најдете ја проекцијата на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{b}$ каде $\vec{a} = \{1, 2, 2\}$ и $\vec{b} = \{1, 0, 1\}$.

Решение. Имаме $pr_b \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}$ и како $\vec{a}\vec{b} = 3$ и $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ добиваме дека

$$pr_b \vec{a} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad \blacklozenge$$

13.7. Пример. Дадени се точките $A(1,1,1)$, $B(2,2,1)$ и $C(2,1,2)$. Пресметајте го аголот $\varphi = \angle BAC$.

Решение. Имаме $\overrightarrow{AB} = \{1, 1, 0\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{1, 0, 1\}$. Според последица 13.3 добиваме

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Значи, $\varphi = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. ♦

13.8. Пример. Дадени се точките $A(1, 1, 1)$ и $B(4, 5, -3)$. Најдете ја проекцијата на векторот $\overrightarrow{AB}$ на оската u , која со координатните оски зафаќа еднакви агли.

Решение. Нека $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ се косинусните правци на оската u . Од условот на задачата имаме $\alpha = \beta = \gamma$, па затоа $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$ и ако замениме во

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

добиваме $3\cos^2 \alpha = 1$, т.е. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$ и како аглите се остри добиваме

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Од друга страна $\overrightarrow{AB} = \{3, 4, -4\}$ и ако замениме во равенството (7) наоѓаме

$$pr_u \overrightarrow{AB} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (-4) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \quad \blacklozenge$$

14. ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

14.1. Дефиниција. Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$. За некопланарните вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ќе велиме дека формираат *десна тројка вектори* ако тие се распоредени како палецот, показалецот и средниот прст на десната рака, соодветно.

За некопланарните вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ќе велиме дека формираат *лева тројка вектори* ако тие се распоредени како палецот, показалецот и средниот прст на левата рака, соодветно.

14.2. Забелешка. Од три некопланарни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можеме да ги формираме следниве шест подредени тројки:

$$\begin{array}{ccc} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} & \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} & \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \\ \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} & \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} & \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \end{array}.$$

Притоа, првите три тројки образуваат иста тројка вектори, а вторите три тројки образуваат спротивна тројка вектори.

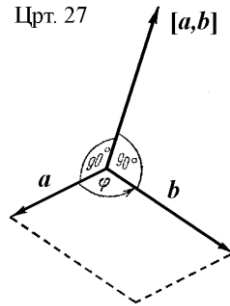
Во случај кога единичните вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ формираат десна тројка вектори, ќе велиме дека е зададен *десен координатен систем*. Понатаму, ако векторите

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат десна тројка вектори, тогаш ќе велиме дека тие се *распоредени според правилото на десната рака*.

14.3. Дефиниција. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Векторски производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ го нарекуваме векторот $\vec{c}$ определен со:

- а) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
- б) $\vec{c}$ е нормален на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и
- в) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат десна тројка вектори.

Притоа пишуваме $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, (црт. 27).



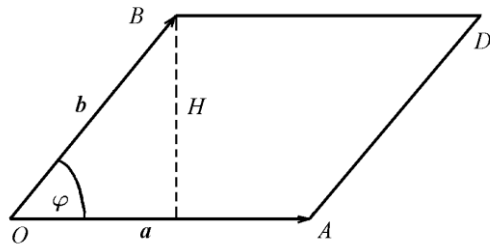
14.4. Теорема. Векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е еднаков на нула ако и само ако тие се колинеарни.

Доказ. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. Значи, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ или $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$, во зависност од тоа дали векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста или спротивна насока, соодветно. И во двата случаи важи $\sin \varphi = 0$, па затоа

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 0, \text{ т.е. } [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}.$$

Нека $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. Тогаш $|[\vec{a}, \vec{b}]| = 0$, што значи $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 0$. Ако $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, тогаш $\sin \varphi = 0$, што значи $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, т.е. векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. Ако $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, тогаш векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. ♦

14.5. Теорема. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат заедничка почетна точка O , тогаш должината на векторскиот производ $[\vec{a}, \vec{b}]$ е еднаква на плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Доказ. Нека O е заедничка точка на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека над нив е конструиран паралелограм $OADB$, (црт. 28), со плоштина S . Тогаш

$$S = |\vec{a}| \cdot H = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = |[\vec{a}, \vec{b}]|. \quad \diamond \quad (1)$$

14.6. Забелешка. Според теорема 14.6 векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ може да се изрази со формулата

$$[\vec{a}, \vec{b}] = S \vec{e} \quad (2)$$

каде S е плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а векторот $\vec{e}$ е определен со

- а) $|\vec{e}|=1$,
- б) $\vec{e}$ е нормален на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и
- в) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ формираат десна тројка вектори.

14.7. Теорема. За секои вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]. \quad (3)$$

Доказ. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} = [\vec{b}, \vec{a}]$, па затоа е точно равенството (3).

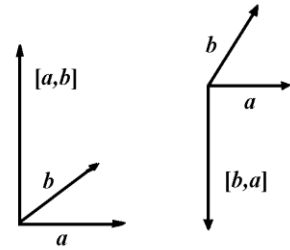
Нека претпоставиме дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Тогаш, согласно со условите а) и б) од дефиниција 14.3 векторите $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{b}, \vec{a}]$ имаат еднакви должини и се колинеарни. Понатаму, ако прво ги распоредиме векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ по правилото на десната рака, а потоа истото го направиме со векторите $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $[\vec{b}, \vec{a}]$ ќе видиме дека векторите $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{b}, \vec{a}]$ имаат спротивни насоки (црт. 29), па затоа важи (3). ♦

14.8. Теорема. За секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и за секој $\lambda \in \mathbf{R}$ важи

$$[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}], \quad (4)$$

$$[\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]. \quad (5)$$

Доказ. Прво да забележиме дека ако $\lambda = 0$ или векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш точна е формулата (4). Имено, во овој случај и двете страни на (4) се еднакви на нула.



Црт. 29

Нека претпоставиме дека $\lambda \neq 0$ и векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Од дефиниција 14.3 следува дека модулот на векторот $[\vec{a}, \vec{b}]$ е еднаков на $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, каде $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Значи, модулот на векторот $\lambda [\vec{a}, \vec{b}]$ е еднаков на $|\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$. Понатаму, модулот на векторот $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$ е еднаков на $|\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \psi$, каде $\psi = \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b})$. Но, $\psi = \varphi$ ако $\lambda > 0$ и $\psi = \pi - \varphi$ ако $\lambda < 0$, па затоа модулот на векторот $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$ е еднаков на модулот на векторот $\lambda [\vec{a}, \vec{b}]$.

Понатаму, согласно условот б) од дефиниција 14.3 и двата вектори $\lambda [\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$ се нормални на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, па затоа векторите $\lambda [\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$ се колинеарни.

Нека $\lambda > 0$. Тогаш векторите $\lambda \vec{a}$ и $\vec{a}$ имаат иста насока, па затоа, согласно правилото на десната рака, векторите $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ имаат иста насока. Но, при $\lambda > 0$ векторите $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $\lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ имаат иста насока, па затоа векторите $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$ и $\lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ имаат иста насока. Конечно, $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$, т.е. важи (4).

Нека $\lambda < 0$. Тогаш векторите $\lambda \vec{a}$ и $\vec{a}$ имаат спротивни насоки, па затоа, согласно правилото на десната рака, векторите $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ имаат спротивни насоки. Но, за $\lambda < 0$ векторот $\lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ има спротивна насока со векторот $[\vec{a}, \vec{b}]$, т.е. има иста насока со векторот $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$. Конечно, $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$, т.е. и во овој случај важи (4).

Понатаму, од (4) и од теорема 14.7 следува

$$[\vec{a}, \lambda \vec{b}] = -[\lambda \vec{b}, \vec{a}] = -\lambda[\vec{b}, \vec{a}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]. \quad \blacklozenge$$

14.9. Теорема. За секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи

$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}], \quad (6)$$

$$[\vec{b} + \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{a}]. \quad (7)$$

Доказ. Ако $\vec{a} = \vec{0}$, тогаш очигледно важи формулата (6).

Да го разгледаме парцијалниот случај, кога $\vec{a}$ е единичен и е нормален на векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Ги поставуваме векторите во заедничка почетна точка при што единичниот вектор го означуваме со $\vec{a}_0$, а другите два нормални на $\vec{a}_0$ со $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$. Нека $\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{OC}$, црт. 30. Да ги воведеме ознаките

$$\vec{OB}^* = [\vec{a}_0, \vec{OB}], \quad \vec{OC}^* = [\vec{a}_0, \vec{OC}]$$

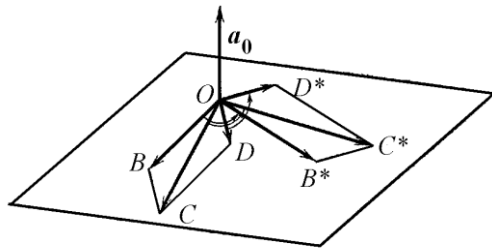
$$\vec{OD}^* = [\vec{a}_0, \vec{OD}] = [\vec{a}_0, \vec{OB} + \vec{OC}].$$

Според условите а) и б) од дефиниција 14.3 имаме

$$\text{а) } |\vec{OB}^*| = |[\vec{a}_0, \vec{OB}]| = |\vec{a}_0| \cdot |\vec{OB}| \sin \frac{\pi}{2} = |\vec{OB}| \text{ и}$$

$$\text{б) } \vec{OB}^* \perp \vec{a}_0, \quad \vec{OB}^* \perp \vec{OB}.$$

Оттука следува, дека векторот $\vec{OB}^*$ може да се добие со ротација на векторот $\vec{OB}$ околу $\vec{a}_0$ за агол $\frac{\pi}{2}$. Освен тоа, согласно со условот в) од дефиниција 14.3 векторите $\vec{a}_0$, $\vec{OB}$ и $\vec{OB}^*$ формираат десна тројка вектори, т.е. тие поч-



Црт. 30

нувајќи од векторот $\vec{a}_0$ се распоредени спротивно од движењето на стрелката на часовникот (зошто?). Аналогно, со ротација на векторите $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$ околу векторот $\vec{a}_0$ за агол $\frac{\pi}{2}$ и на истата страна се добиваат векторите $\vec{OC}^*$ и $\vec{OD}^*$. Според тоа, фигурата $OB^*C^*D^*$ се добива со ротација на паралелограмот $OBCD$, па затоа $OB^*C^*D^*$ е паралелограм. Оттука заклучуваме дека $\vec{OD}^* = \vec{OB}^* + \vec{OC}^*$, т.е. дека

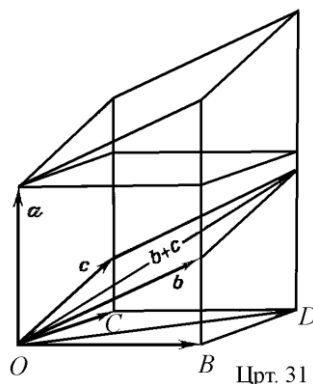
$$[\vec{a}_0, \vec{OD}] = [\vec{a}_0, \vec{OB}] + [\vec{a}_0, \vec{OC}], \quad (8)$$

што значи дека во овој случај важи равенството (6).

Нека сега $\vec{a}$ е произволен вектор, нормален на векторите $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ и со $\vec{a}_0$ да го означиме ортот соодветен на $\vec{a}$, т.е. $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$. Ако го помножиме равенството (8) со $|\vec{a}|$ добиваме

$$[\vec{a}, \vec{OD}] = [\vec{a}, \vec{OB}] + [\vec{a}, \vec{OC}]. \quad (9)$$

На крајот да го разгледаме случајот кога $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се произволни вектори. Нека претпоставиме дека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имаат заедничка почетна точка O . Низ крајните точки на векторите $\vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b} + \vec{c}$ повлекуваме прави паралелни на векторот $\vec{a}$. Потоа, низ точката O повлекуваме рамнина нормална на векторот $\vec{a}$ и пресечните точки со правите да ги означиме со B, C и D , соодветно (црт. 31).



Црт. 31

Да ги разгледаме векторските производи $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{a}, \vec{OB}]$. Овие два вектори имаат исти модули, бидејќи плоштината на паралелограмот конструиран над $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е еднаква на плоштината на правоаголникот конструиран над $\vec{a}$ и $\vec{OB}$. Понатаму, векторите $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{a}, \vec{OB}]$ се колинеарни, бидејќи се нормални на рамнината во која лежат $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{OB}$. Конечно, согласно правилото на десната рака $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{a}, \vec{OB}]$ имаат иста насока, па затоа

$$[\vec{a}, \vec{OB}] = [\vec{a}, \vec{b}].$$

Со аналогни размислувања добиваме дека

$$[\vec{a}, \vec{OC}] = [\vec{a}, \vec{c}] \text{ и } [\vec{a}, \vec{OD}] = [\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}].$$

Конечно, ако замениме во (9) наоѓаме

$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}],$$

т.е. важи формулата (6).

На крајот, имаме:

$$[\vec{b} + \vec{c}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{a}],$$

т.е. важи формулата (7). ♦

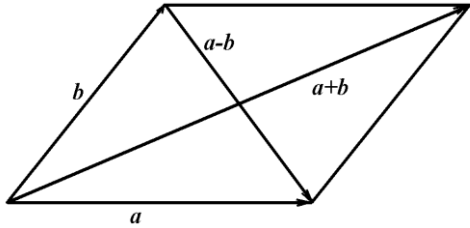
14.10. Пример. Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ над кои е конструиран паралелограм (црт. 32). Дијагоналите на паралелограмот се $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$. Имаме:

$$\begin{aligned} [\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] &= [\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{a}] - [\vec{b}, \vec{b}] \\ &= \vec{o} + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}] + \vec{o} = 2[\vec{a}, \vec{b}], \end{aligned}$$

па затоа

$$|[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]| = 2|[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

Според тоа, паралелограмот конструиран над дијагоналите $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ има двапати поголема плоштина од паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ♦



Црт. 32

14.11. Пример. Најдете ја плоштината и една од висините на паралелограмот конструиран над векторите

$$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} \text{ и } \vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b},$$

каде што

$$|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3 \text{ и } \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Имаме

$$[\vec{p}, \vec{q}] = [\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] - 3[\vec{a}, \vec{b}] + 2[\vec{b}, \vec{a}] - 6[\vec{b}, \vec{b}] = 5[\vec{b}, \vec{a}].$$

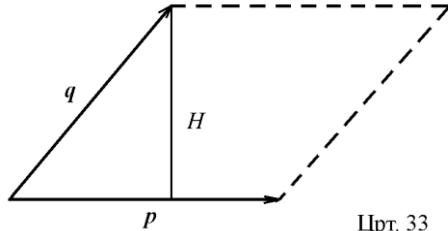
Според тоа,

$$S = |5[\vec{b}, \vec{a}]| = 5|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \sin \angle(\vec{b}, \vec{a}) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{75}{2}.$$

Од друга страна

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= \vec{p} \cdot \vec{p} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{6} + 4|\vec{b}|^2 = 5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot 3^2 \\ &= 61 + 30\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } |\vec{p}| = \sqrt{61 + 30\sqrt{3}}. \text{ Конечно, } H = \frac{S}{|\vec{p}|} = \frac{75}{2\sqrt{61 + 30\sqrt{3}}}. \text{ ♦}$$



Црт. 33

15. КООРДИНАТНА ФОРМА НА ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

15.1. Теорема. Ако $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, тогаш

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}. \quad (1)$$

Доказ. Прво ќе составиме таблица за векторско множење на базните вектори, Јасно, $[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}$. Да го разгледаме векторскиот производ $[\vec{i}, \vec{j}]$. Имаме, $|\vec{i}, \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1$, т.е. $[\vec{i}, \vec{j}]$ е единичен вектор нормален на $\vec{i}$ и $\vec{j}$, па затоа тој е колинеарен со $\vec{k}$. Понатаму, согласно правилото на десната рака добиваме $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$. Со аналогни размислувања добиваме $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$ и $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$, па затоа $[\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k}$, $[\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}$ и $[\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}$, со што ја добиваме таблицата

$$\begin{cases} [\vec{i}, \vec{i}] = \vec{0}, & [\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}, & [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}, \\ [\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k}, & [\vec{j}, \vec{j}] = \vec{0}, & [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}, \\ [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}, & [\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}, & [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}. \end{cases} \quad (2)$$

За векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \text{ и } \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \quad (3)$$

па затоа

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= x_1 x_2 [\vec{i}, \vec{i}] + x_1 y_2 [\vec{i}, \vec{j}] + x_1 z_2 [\vec{i}, \vec{k}] \\ &\quad + y_1 x_2 [\vec{j}, \vec{i}] + y_1 y_2 [\vec{j}, \vec{j}] + y_1 z_2 [\vec{j}, \vec{k}] \\ &\quad + z_1 x_2 [\vec{k}, \vec{i}] + z_1 y_2 [\vec{k}, \vec{j}] + z_1 z_2 [\vec{k}, \vec{k}] \end{aligned}$$

и ако ја искористиме таблицата (2) за множење на базните вектори добиваме

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

15.2. Забелешка. Формулата (1) може да се запише и во следниов вид

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

во што лесно можеме да се увериме ако детерминантата во (4) ја развиеме по првиот ред.

15.3. Пример. Пресметајте ја плоштината на $\triangle ABC$ ако: $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ и $C(0,1,1)$.

Решение. Плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на половина од плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (црт. 34). Имаме,

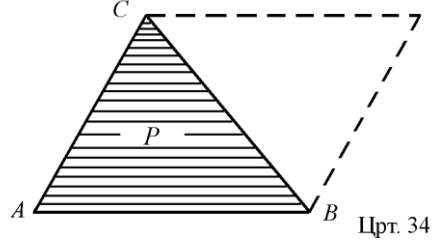
$$\overrightarrow{AB} = \{0, -1, 1\} \text{ и } \overrightarrow{AC} = \{-1, 0, 1\},$$

па затоа

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = \{-1, -1, -1\}.$$

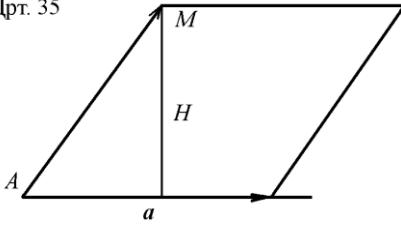
Значи,

$$P = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \blacklozenge$$



Црт. 34

Црт. 35



15.4. Пример. Најдете го растојанието од точката $M(-2, 3, 5)$ до правата која што минува низ точката $A(1, 1, 2)$ и е паралелна со векторот $\vec{a} = \{-3, 0, 4\}$.

Решение. Да го разгледаме паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AM}$. Неговата плоштина е

$P = |[\vec{a}, \overrightarrow{AM}]|$, а висината H спуштена кон страната паралелна со векторот $\vec{a}$ е

$$H = \frac{P}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{a}, \overrightarrow{AM}]|}{|\vec{a}|}$$

и таа е еднаква на бараното растојание од точката M до правата низ A паралелна со $\vec{a}$ (црт. 35). Имаме, $\overrightarrow{AM} = \{-3, 2, 3\}$ и

$$[\vec{a}, \overrightarrow{AM}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} = \{-8, -3, -6\}.$$

Значи

$$H = \frac{P}{|\vec{a}|} = \frac{|[\vec{a}, \overrightarrow{AM}]|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{(-8)^2 + (-3)^2 + (-6)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{109}}{5}. \blacklozenge$$

16. МЕШАН ПРОИЗВОД НА ВЕКТОРИ

16.1. Дефиниција. Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$. Реалниот број

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} \quad (1)$$

го нарекуваме *мешан производ* на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

16.2. Коментар. Во натамошните разгледувања под тројка вектори ќе подразбираме подредена тројка вектори и кога ќе пишуваме $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ќе сметаме дека $\vec{a}$ е прв вектор, $\vec{b}$ е втор вектор и $\vec{c}$ е трет вектор. Јасно, ако запишеме $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$, тогаш ќе сметаме дека $\vec{b}$ е прв, $\vec{c}$ е втор и $\vec{a}$ е трет вектор.

Во дефиниција 14.1 определивме десна и лева тројка вектори. Овде ќе забележиме дека тројките компланарни вектори не ги сметаме ниту десни, ниту леви.

Понатаму, како што рековме ако се дадени произволни некомпланарни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тогаш можеме да формираме шест тројки

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \quad \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \quad \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \quad \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \quad \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}.$$

Притоа, со непосредно набљудување на соодветен модел, лесно можеме да се увериме дека тројките $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ имаат една иста ориентација, или сите се леви или сите се десни, а тројките $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$; $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$; $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ имаат спротивна ориентација.

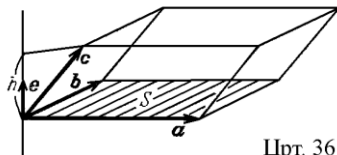
16.3. Теорема. Мешаниот производ $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}$ е еднаков на волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, земен со знак плус, ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е десна тројка вектори, а со знак минус ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е лева тројка вектори.

Доказ. Нека претпоставиме, дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Со S да ја означиме плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и со $\vec{e}$ да го означиме единичниот вектор, определен како во забелешка 14.6. Тогаш

$$[\vec{a}, \vec{b}] = S \vec{e}.$$

Одтука добиваме

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = S(\vec{e} \vec{c}) = S |\vec{e}| pr_{\vec{e}} \vec{c} = S \cdot pr_{\vec{e}} \vec{c}. \quad (1)$$



Црт. 36

Но, $pr_{\vec{e}} \vec{c} = \pm h$, каде h е висината на паралелопипедот, конструиран над векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ако земеме дека основата е паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Според тоа, за волуменот на паралелопипедот имаме $V = Sh$, па затоа

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = \pm V. \quad (2)$$

Понатаму, ако векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат десна тројка вектори, тогаш $\vec{e}$ и $\vec{c}$ се наоѓаат од иста страна на рамнината определена со $\vec{a}$ и $\vec{b}$, па затоа $pr_{\vec{e}} \vec{c} = h$, т.е. $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = V$. Но, ако $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат лева тројка вектори, тогаш $\vec{e}$ и $\vec{c}$ се наоѓаат од различни страни на рамнината определена со $\vec{a}$ и $\vec{b}$, па затоа $pr_{\vec{e}} \vec{c} = -h$, т.е. $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = -V$.

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, па затоа $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = 0 = V$, бидејќи во случајов паралелопипедот се дегенерира во паралелограм. ♦

16.4. Последица. Мешаниот производ на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е еднаков на нула ако и само ако тие се компланарни.

Доказ. Нека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни. Тогаш $pr_{\vec{e}} \vec{c} = 0$ каде $\vec{e}$ е векторот определен во забелешка 14.6. Според теорема 16.3 имаме

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = S \cdot pr_{\vec{e}} \vec{c} = S \cdot 0 = 0$$

Нека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не се компланарни. Тогаш, волуменот V на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е различен од нула. Конечно, од теорема 16.3 следува $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = \pm V \neq 0$. ♦

16.5. Последица. За секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = \vec{a} [\vec{b}, \vec{c}] \quad (3)$$

Доказ. Од својствата на скаларниот производ следува

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = [\vec{b}, \vec{c}] \vec{a}. \quad (4)$$

Понатаму, од теорема 16.3 имаме

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = \pm V, [\vec{b}, \vec{c}] \vec{a} = \pm V. \quad (5)$$

Но, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ се тројки со иста ориентација, па затоа од теорема 16.3 следува дека на десните страни во равенствата (5) имаме еден ист знак. Според тоа,

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = [\vec{b}, \vec{c}] \vec{a}, \quad (6)$$

па од (4) и (6) следува (3). ♦

16.6. Забелешка. Равенството (3) ни овозможува за мешаниот производ $[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}$ да ја користиме ознаката $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Имено, во (3) видовме дека

$$[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = \vec{a} [\vec{b}, \vec{c}],$$

па затоа при користење на ознаката $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ не може да стане забуна кои два вектора ги множиме векторски.

16.7. Последица. За секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}). \quad (7)$$

Доказ. Имаме, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V$, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \pm V$, $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \pm V$. Но, тројките $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ се со иста ориентација, па затоа важи (7). ♦

16.8. Последица. За секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи

$$(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \quad (8)$$

Доказ. Имаме, $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = \pm V$, $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = \pm V$, $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = \pm V$ и како тројките $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$; $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$; $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ се со иста ориентација добиваме

$$(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}). \quad (9)$$

Но,

$$(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = [\vec{b}, \vec{a}] \vec{c} = -[\vec{a}, \vec{b}] \vec{c} = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \quad (10)$$

Конечно, од (9) и (10) следува (8). ♦

16.9. Пример. Два паралелопипеда имаат паралелни рабови кои се однесуваат како $m_1 : n_1$, $m_2 : n_2$ и $m_3 : n_3$. Најдете го односот на нивните волумени.

Решение. Нека O_1 и O_2 се две темиња на паралелопипедите, така што рабовите O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 се паралелни на рабовите O_2A_2, O_2B_2, O_2C_2 , соодветно. Тогаш

$$\overrightarrow{O_2A_2} = \frac{m_1}{n_1} \overrightarrow{O_1A_1}, \quad \overrightarrow{O_2B_2} = \frac{m_2}{n_2} \overrightarrow{O_1B_1}, \quad \overrightarrow{O_2C_2} = \frac{m_3}{n_3} \overrightarrow{O_1C_1}.$$

Ако со V_1 и V_2 ги означиме волумените на паралелопипедите, тогаш

$$\begin{aligned} \pm V_2 &= (\overrightarrow{O_2A_2}, \overrightarrow{O_2B_2}, \overrightarrow{O_2C_2}) = \left(\frac{m_1}{n_1} \overrightarrow{O_1A_1}, \frac{m_2}{n_2} \overrightarrow{O_1B_1}, \frac{m_3}{n_3} \overrightarrow{O_1C_1} \right) \\ &= \frac{m_1 m_2 m_3}{n_1 n_2 n_3} (\overrightarrow{O_1A_1}, \overrightarrow{O_1B_1}, \overrightarrow{O_1C_1}) = \pm \frac{m_1 m_2 m_3}{n_1 n_2 n_3} V_1 \end{aligned}$$

т.е. $V_2 : V_1 = \frac{m_1 m_2 m_3}{n_1 n_2 n_3}$. ♦

16.10. Пример. Најдете го векторот $\vec{x}$ кој ги задоволува равенствата

$$\vec{a} \vec{x} = \alpha, \quad \vec{b} \vec{x} = \beta, \quad \vec{c} \vec{x} = \gamma \quad (11)$$

каде што $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се дадени некопланарни вектори, а α, β, γ се дадени реални броеви.

Решение. Ако правото равенство во (11) го помножиме со β , а второто со α добиваме $\beta \vec{a} \vec{x} = \beta \alpha$, $\alpha \vec{b} \vec{x} = \beta \alpha$, па затоа

$$(\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}) \vec{x} = 0$$

Аналогно, од првото и третото равенство имаме $\gamma \vec{a} \vec{x} = \gamma \alpha$, $\alpha \vec{c} \vec{x} = \gamma \alpha$, т.е.

$$(\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}) \vec{x} = 0.$$

Значи, векторот $\vec{x}$ е нормален на векторите $\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}$ и $\gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}$, па затоа тој е колинеарен со нивниот векторски производ

$$[\beta \vec{a} - \alpha \vec{b}, \gamma \vec{a} - \alpha \vec{c}] = \alpha(\gamma[\vec{a}, \vec{b}] + \alpha[\vec{b}, \vec{c}] + \beta[\vec{c}, \vec{a}]).$$

Според тоа,

$$\vec{x} = t\alpha(\gamma[\vec{a}, \vec{b}] + \alpha[\vec{b}, \vec{c}] + \beta[\vec{c}, \vec{a}]), \text{ за некој } t \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

Ако равенството (12) го помножиме скаларно со $\vec{c}$ (во случај кога $\gamma \neq 0$) добиваме

$$\vec{c} \vec{x} = t\alpha(\gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \alpha(\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) + \beta(\vec{c}, \vec{a}, \vec{c}))$$

и како $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{c}) = 0$ наоѓаме $\gamma = t\alpha\gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Но, векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не се компланарни, т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, па затоа $t\alpha = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$. Конечно, ако замениме во (12) добиваме

$$\vec{x} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} (\gamma[\vec{a}, \vec{b}] + \alpha[\vec{b}, \vec{c}] + \beta[\vec{c}, \vec{a}]). \quad \blacklozenge \quad (13)$$

17. КООРДИНАТНА ФОРМА НА МЕШАН ПРОИЗВОД

17.1. Теорема. Ако векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се зададени со своите координати $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ и $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$, тогаш

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказ. Имаме $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}] \vec{c}$. Според теорема 22 важи

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Ако овој вектор го помножиме скаларно со векторот $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ добиваме

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

што и требаше да се докаже. ♦

17.2. Последица. Векторите

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\} \text{ и } \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

се компланарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказ. Непосредно следува од последица 16.4 и теорема 17.1. ♦

17.3. Пример. На оската Oy најдете точка која е компланарна со точките $A(-3, -2, 5)$, $B(0, 4, -3)$ и $C(1, 1, 2)$.

Решение. За да точката $M(0, y, 0)$, која лежи на оската Oy е компланарна со точките A, B, C потребно и доволно е векторите $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ да се компланарни. Имаме:

$$\overrightarrow{AM} = \{3, y+2, -5\}, \overrightarrow{AB} = \{3, 6, -8\}, \overrightarrow{AC} = \{4, 3, -3\}$$

па од последица 17.2 следува дека векторите $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ се компланарни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} 3 & y+2 & -5 \\ 3 & 6 & -8 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. ако и само ако $y = \frac{47}{23}$. Значи, бараната точка е $M(0, \frac{47}{23}, 0)$. ♦

17.4. Пример. Најдете ја висината на тетраедарот $ABCD$: $A(2, -4, 5)$, $B(-1, -3, 4)$, $C(5, 5, 1)$, $D(1, 1, -2)$ повлечена од темето D .

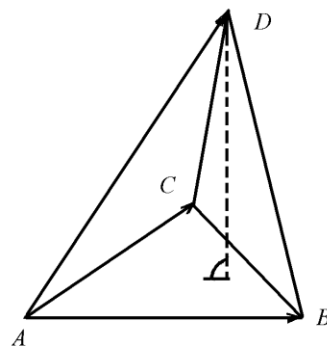
Решение. Висината на тетраедарот е еднаква на соодветната висина на паралелолипедот конструиран над векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Волуменот на паралелолипедот е

$$\pm V = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}),$$

а плоштината на соодветната основа е

$B = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}|$, (црт. 37). Значи,

$$H = \frac{V}{B} = \frac{\pm(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}{\|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\|}.$$



Црт. 37

Имаме: $\overrightarrow{AB} = \{-3, 1, -1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{3, 9, -4\}$, $\overrightarrow{AD} = \{-1, 5, -7\}$. Значи

$$\pm V = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -4 \\ -1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 189 + 4 - 15 - 9 - 60 + 21 = 214 - 84 = 130$$

и

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 27\vec{k} - 3\vec{k} + 9\vec{i} - 12\vec{j} = \{5, -15, -30\},$$

т.е. $B = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-30)^2} = 5\sqrt{46}$. Конечно,

$$H = \frac{V}{B} = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}{\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\|} = \frac{130}{5\sqrt{46}} = \frac{13\sqrt{46}}{23}. \blacklozenge$$

17.5. Пример. Дадени се векторите

$$\vec{a} = \{1, 1, 1\}, \vec{b} = \{2, -1, 1\} \text{ и } \vec{c} = \{3, 5, -2\}.$$

Најдете вектор $\vec{x}$ таков што

$$\vec{a}\vec{x} = 3, \vec{b}\vec{x} = 0, \vec{c}\vec{x} = 6. \quad (1)$$

Решение. Нека $\vec{x} = \{x, y, z\}$. Од равенствата (1) го добиваме системот

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 5y - 2z = 6. \end{cases} \quad (2)$$

Имаме: $\Delta = 17$, $\Delta_x = 3$, $\Delta_y = 27$, $\Delta_z = 21$, па затоа

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{17}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{27}{17}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{21}{17}.$$

Според тоа, $\vec{x} = \{\frac{3}{17}, \frac{27}{17}, \frac{21}{17}\}$.

Да забележиме дека бараниот вектор може да се определи користејќи ја формулата (13) од пример 29. $\blacklozenge$

18. ДВОЕН ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

18.1. Дефиниција. Нека се дадени векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Ако векторот $\vec{b}$ векторски го помножиме со векторот $\vec{c}$, а потоа векторот $\vec{a}$ векторски го помножиме со векторот $[\vec{b}, \vec{c}]$, тогаш добиениот вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ го нарекуваме *двоен векторски производ*.

18.2. Теорема. За секои $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (\vec{ac})\vec{b} - (\vec{ab})\vec{c}. \quad (1)$$

Доказ. Нека $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Имаме:

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right\} = \{y_2 z_3 - z_2 y_3, -x_2 z_3 + z_2 x_3, x_2 y_3 - y_2 x_3\}$$

па затоа

$$\begin{aligned} [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] &= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ z_2 x_3 - x_2 z_3 & x_2 y_3 - y_2 x_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ y_2 z_3 - z_2 y_3 & x_2 y_3 - y_2 x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 z_3 - z_2 y_3 & z_2 x_3 - x_2 z_3 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \{y_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 x_3 - z_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 z_3, -x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + z_1 y_2 z_3 - z_1 z_2 y_3, \\ &\quad x_1 z_2 x_3 - x_1 x_2 z_3 - y_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 y_3\} \\ &= \{(y_1 y_3 + z_1 z_3 + x_1 x_3)x_2 - (y_1 y_2 + z_1 z_2 + x_1 x_2)x_3, \\ &\quad (y_1 y_3 + z_1 z_3 + x_1 x_3)y_2 - (y_1 y_2 + z_1 z_2 + x_1 x_2)y_3, \\ &\quad (y_1 y_3 + z_1 z_3 + x_1 x_3)z_2 - (y_1 y_2 + z_1 z_2 + x_1 x_2)z_3\} \\ &= (y_1 y_3 + z_1 z_3 + x_1 x_3)\{x_2, y_2, z_2\} - (y_1 y_2 + z_1 z_2 + x_1 x_2)\{x_3, y_3, z_3\} \\ &= (\vec{ac})\vec{b} - (\vec{ab})\vec{c} \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

18.3. Забелешка. Од теорема 18.2 непосредно следува дека двојниот векторски производ $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ може да се претстави како линеарна комбинација на векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Слично, од

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = -[\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]]$$

и од теорема 18.2 следува дека $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$ може да се претстави како линеарна комбинација на векторите $\vec{b}$ и $\vec{a}$.

Според тоа, во општ случај важи

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] \neq [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}],$$

во што можеме да се увериме ако земеме кои било три некомпланарни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

18.4. Пример. Дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Најдете вектор $\vec{x}$ што го задоволува равенството

$$\vec{x} + [\vec{a}, \vec{x}] = \vec{b}. \quad (2)$$

Решение. Равенството (2) векторски, од лева страна, го множиме со $\vec{a}$ и добиваме

$$[\vec{a}, \vec{x}] + [\vec{a}, [\vec{a}, \vec{x}]] = [\vec{a}, \vec{b}]. \quad (3)$$

Но, $[\vec{a}, \vec{x}] = \vec{b} - \vec{x}$ и според теорема 18.2 имаме

$$[\vec{a}, [\vec{a}, \vec{x}]] = (\vec{a}\vec{x})\vec{a} - (\vec{a}\vec{a})\vec{x},$$

и ако замениме во (3) добиваме

$$\vec{b} - \vec{x} + (\vec{a}\vec{x})\vec{a} - (\vec{a}\vec{a})\vec{x} = [\vec{a}, \vec{b}]. \quad (4)$$

Ако равенството (2) го помножиме скаларно со $\vec{a}$ добиваме $\vec{a}\vec{x} = \vec{a}\vec{b}$ (зошто?) и ако земиме во (4) последователно наоѓаме

$$\begin{aligned} \vec{b} - \vec{x} + (\vec{a}\vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2 \vec{x} &= [\vec{a}, \vec{b}] \\ \vec{b} + (\vec{a}\vec{b})\vec{a} - [\vec{a}, \vec{b}] &= (1 + |\vec{a}|^2) \vec{x} \\ \vec{x} &= \frac{\vec{b} + (\vec{a}\vec{b})\vec{a} - [\vec{a}, \vec{b}]}{(1 + |\vec{a}|^2)}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \vec{x} = \frac{1}{(1 + |\vec{a}|^2)} (\vec{b} + (\vec{a}\vec{b})\vec{a} - [\vec{a}, \vec{b}]). \quad \blacklozenge$$

18.5. Пример. Дали постои вектор $\vec{x}$ што ги задоволува равенствата

$$\vec{x}\vec{a} = \alpha, \quad [\vec{x}, \vec{b}] = \vec{c},$$

каде што $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се дадени вектори, а α е даден реален број?

Решение. За да постои вектор $\vec{x}$ што го задоволува равенството $[\vec{x}, \vec{b}] = \vec{c}$, мора векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ да се заемно нормални. Равенството $[\vec{x}, \vec{b}] = \vec{c}$ од лево го множиме векторски со $\vec{a}$ и последователно добиваме

$$\begin{aligned} [\vec{a}, [\vec{x}, \vec{b}]] &= [\vec{a}, \vec{c}] \\ (\vec{a}\vec{b})\vec{x} - (\vec{a}\vec{x})\vec{b} &= [\vec{a}, \vec{c}] \\ (\vec{a}\vec{b})\vec{x} - \alpha\vec{b} &= [\vec{a}, \vec{c}] \\ (\vec{a}\vec{b})\vec{x} &= \alpha\vec{b} + [\vec{a}, \vec{c}]. \end{aligned}$$

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се заемно нормални, тогаш $\vec{a}\vec{b} \neq 0$, па последната равенка има единствено решение

$$\vec{x} = \frac{1}{\vec{a}\vec{b}} (\alpha\vec{b} + [\vec{a}, \vec{c}]). \quad (5)$$

Од досега изнесеното заклучуваме:

- ако векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не се заемно нормални, тогаш таков вектор $\vec{x}$ не постои,

- ако векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се заемно нормални, а векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се заемно нормални, тогаш постои единствен таков вектор $\vec{x}$ и истиот е определен со (5),
- ако векторите $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$ се заемно нормални и, притоа $\alpha\vec{b} + [\vec{a}, \vec{c}] \neq \vec{0}$, тогаш таков вектор не постои, и
- ако векторите $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$ се заемно нормални и, притоа $\alpha\vec{b} + [\vec{a}, \vec{c}] = \vec{0}$, тогаш секој вектор $\vec{x}$ ги задоволува двете равенства. ♦

19. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ДЕКАРТОВИ ПРАВОАГОЛНИ КООРДИНАТИ

19.1. Нека во просторот се дадени два Декартови правоаголни координатни системи: првиот, определен со точката O и базните вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и вториот, определен со точката O' и базните вектори $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$.

Сакаме да ги изразиме координатите x, y, z на произволна точка M во однос на првиот систем со координатите x', y', z' на точката M во однос на вториот систем.

Координатите x, y, z се совпаѓаат со координатите на векторот $\overrightarrow{OM}$ при неговото разложување по базата $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и координатите x', y', z' се совпаѓаат со координатите на векторот $\overrightarrow{O'M}$ во разложувањето по базата $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, т.е.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \quad (2)$$

Со a, b, c да ги означиме координатите на O' во однос на првата база. Имаме

$$\overrightarrow{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}. \quad (3)$$

Бидејќи секој вектор може да се разложи по базата $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, добиваме дека постојат реални броеви α_{im} , $i = 1, 2, 3$; $m = 1, 2, 3$ такви што

$$\begin{cases} \vec{i}' = \alpha_{11}\vec{i} + \alpha_{12}\vec{j} + \alpha_{13}\vec{k} \\ \vec{j}' = \alpha_{21}\vec{i} + \alpha_{22}\vec{j} + \alpha_{23}\vec{k} \\ \vec{k}' = \alpha_{31}\vec{i} + \alpha_{32}\vec{j} + \alpha_{33}\vec{k}. \end{cases} \quad (4)$$

Понатаму

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \quad (5)$$

Ако од (4) замениме во (2), а потоа во (5) замениме за $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'M}$ и ги групираме собираците пред $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ добиваме

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = & (a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z')\vec{i} + (b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z')\vec{j} \\ & + (c + \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z')\vec{k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Но, векторите $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не се компланарни, па затоа

$$\begin{cases} x = a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' \\ y = b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' \\ z = c + \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' \end{cases} \quad (7)$$

и ова се бараните формули за трансформација на координатите. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. За кои било два Декартови правоаголни координатни системи координатите x, y, z на произволна точка во просторот во однос на првиот систем се линеарни функции од координатите x', y', z' на таа точка во однос на вториот систем. ♦

19.2. Забелешка. Во практиката потребно е да ги определиме коефициентите α_{im} , $i=1,2,3$; $m=1,2,3$ во формулите (4). За таа цел доволно е секое од равенствата (4) скаларно да го помножиме со $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и да земеме предвид дека $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ се единични вектори. Притоа ги добиваме формулите

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \angle(\vec{i}, \vec{i}'), & \alpha_{12} &= \cos \angle(\vec{j}, \vec{i}'), & \alpha_{13} &= \cos \angle(\vec{k}, \vec{i}'), \\ \alpha_{21} &= \cos \angle(\vec{i}, \vec{j}'), & \alpha_{22} &= \cos \angle(\vec{j}, \vec{j}'), & \alpha_{23} &= \cos \angle(\vec{k}, \vec{j}'), \\ \alpha_{31} &= \cos \angle(\vec{i}, \vec{k}'), & \alpha_{32} &= \cos \angle(\vec{j}, \vec{k}'), & \alpha_{33} &= \cos \angle(\vec{k}, \vec{k}'). \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- Докажете дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако за секоја точка O важи равенството $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.
- Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Со помош на векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ изразете ги векторите $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{FE}$.
- Најдете го збирот на векторите $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ каде што $A_1 A_2 \dots A_n$ е правилен n -аголник со центар O .
- Упростете го изразот
а) $3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 2(3\vec{a} - \vec{b}) + 4(\vec{a} + \vec{b})$,

$$\text{б) } 2(\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) + 4\vec{b} - 2(\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}).$$

5. Решете го системот векторски равенки (по непознати вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$):

$$\text{а) } \begin{cases} 2\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2\vec{x} - \vec{y} = \vec{b} - 2\vec{a} \\ 4\vec{x} - 2\vec{y} = 2\vec{a}. \end{cases}$$

6. Дадени се векторите $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{q} - 3\vec{p}$. Најдете вектор $\vec{c}$, така што векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ да формираат триаголник.
7. Нека M, N, P се средините на страните BC, CA, AB , соодветно на $\triangle ABC$. Најдете го збирот на векторите $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.
8. Нека точките A, B, C и D се колинеарни, а M и N се средините на отсечките AB и CD . Докажете дека $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
9. Тетивите AB и CD на кружницата (O, r) се заемно нормални и се сечат во точката S . Докажете дека $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.
10. Точките M, N и P ја делат отсечката AB на четири еднакви делови. Изразете ги векторите $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OP}$ со помош на векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, каде што O е произволна точка која не лежи на правата AB .
11. Нека M и N се средините на страните AD и BC на четириаголникот $ABCD$. Изразете го векторот $\overrightarrow{MN}$ со помош на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.
12. Нека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се линеарно независни. Докажете дека векторите

$$\begin{aligned} \vec{p} &= x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c} \\ \vec{q} &= x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b} + z_2 \vec{c} \\ \vec{r} &= x_3 \vec{a} + y_3 \vec{b} + z_3 \vec{c} \end{aligned}$$

се линеарно зависни ако и само ако

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Нека векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се линеарно независни. Дали векторите $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ се линеарно зависни или независни:
- а) $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{q} = 7\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$, $\vec{r} = 10\vec{a} + 4\vec{b} - 4\vec{c}$,
- б) $\vec{p} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{r} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.
14. Докажете, дека за кои било вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и кои било реални броеви x, y, z векторите $\vec{p} = x\vec{a} - y\vec{b}$, $\vec{q} = z\vec{b} - x\vec{c}$, $\vec{r} = y\vec{c} - z\vec{a}$ се компланарни.

15. Во триаголникот ABC повлечена е симетралата $s = AM$ на аголот при темето A . Изразете го векторот $\vec{s}$ со помош на векторите $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.
16. Нека V е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Изразете го векторот $\overrightarrow{AV}$ со помош на векторите $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.
17. Нека A_λ и B_μ ги делат страните BC и CA од $\triangle ABC$ во однос λ и μ , соодветно, и нека $P = AA_\lambda \cap BB_\mu$. Изразете го векторот $\overrightarrow{AP}$ со помош на векторите $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.
18. На страната AB на паралелограмот $ABCD$ избрана е точка E , така што $\overline{AE} : \overline{ED} = k$. Ако $P = AC \cap BE$, најдете ги односите $\overline{AC} : \overline{AP}$ и $\overline{BP} : \overline{BE}$.
19. Нека E е средина на страната AB , а F средина на страната BC од паралелограмот $ABCD$ и нека $S = AF \cap DE$, $T = EF \cap BD$. Најдете ги односите $\overline{ES} : \overline{SD}$, $\overline{AS} : \overline{SF}$, $\overline{BT} : \overline{TD}$, $\overline{ET} : \overline{TF}$.
20. Нека точките E и F ги делат страните AB и BC од паралелограмот $ABCD$ во односи λ и μ , соодветно и нека $S = AF \cap DE$, $T = EF \cap BD$. Најдете ги односите $\overline{ES} : \overline{SD}$, $\overline{AS} : \overline{SF}$, $\overline{BT} : \overline{TD}$, $\overline{ET} : \overline{TF}$.
21. Нека AA_1 е тежишната линија, а BB_2 е симетралата на аголот β во $\triangle ABC$ и нека $P = AA_1 \cap BB_2$. Најдете ги односите во кои точката P ги дели отсечките AA_1 и BB_2 .
22. Нека A', B', C' ги разделуваат страните BC, CA, AB во $\triangle ABC$ во еден ист однос λ . Докажете дека тежиштата на триаголниците ABC и $A'B'C'$ се совпаѓаат.
23. Нека A', B', C' се средините на страните BC, CA, AB во $\triangle ABC$, T е неговото тежиште и нека A'', B'', C'' се средините на отсечките AT, BT, CT соодветно. Докажете дека триаголниците $A'B'C'$ и $A''B''C''$ имаат заедничко тежиште што се совпаѓа со T .
24. Дадени се точките $M(\vec{m}), N(\vec{n}), P(\vec{p})$ кои страните BC, CA, AB од $\triangle ABC$ ги делат во еден ист однос. Најдете ги радиус векторите на темињата.
25. Изразете го векторот $\vec{d}$ како линеарна комбинација на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:
 а) $\vec{a} = \{1, 3, 0\}, \vec{b} = \{5, 10, 0\}, \vec{c} = \{4, -2, 6\}, \vec{d} = \{10, 11, 6\}$,
 б) $\vec{a} = \{1, 3, 5\}, \vec{b} = \{0, 5, 4\}, \vec{c} = \{7, -8, 4\}, \vec{d} = \{-5, 19, 10\}$.
26. Нека $\vec{a} = \{6, 4, 2\}, \vec{b} = \{-9, 6, 3\}, \vec{c} = \{-3, 6, 3\}$. Најдете реални броеви x, y, z , така што векторите $x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}$ да формираат триаголник.
27. Дадени се векторите $\vec{a} = \{1, 5, 3\}, \vec{b} = \{6, -4, -2\}, \vec{c} = \{0, -5, 7\}, \vec{d} = \{-20, 27, -35\}$. Најдете реални броеви x, y, z , така што векторите $x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}$ и $\vec{d}$ да формираат четириаголник.

28. Дали векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни:
- $\vec{a} = \{1, 0, 7\}, \vec{b} = \{-1, 2, 4\}, \vec{c} = \{3, 2, 1\}$,
 - $\vec{a} = \{5, 1, -4\}, \vec{b} = \{3, -5, 2\}, \vec{c} = \{-1, -13, -2\}$.
29. Проверете дали точките A, B, C и D се компланарни:
- $A(2, 1, 0); B(1, 3, 5); C(6, 4, 3); D(0, -7, 8)$
 - $A(3, 5, -1); B(7, 5, 3); C(9, -1, 5); D(5, 3, -3)$.
30. Докажете дека правите $AB: A(5, 1, 3); B(6, 2, 7)$ и $CD: C(4, 1, 4); D(5, 0, -2)$ се сечат. Најдете ја пресечната точка M .
31. Докажете дека точките $C(5, 0, -3); D(5, 2, 1); E(-1, 0, 3)$ не се колинеарни, а потоа испитајте ја заемната положба на правата $AB: A(1, 0, -1); B(6, 2, 4)$ и рамнината CDE .
32. Правата $AB: A(7, -4, 6); B(3, -2, 4)$ ги прободува координатните рамнини Oyz, Oxz, Oxy во точките A_1, A_2, A_3 соодветно.
- Најдете ја средината на отсечката A_2A_3 .
 - Најдете го односот $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3}$.
33. Дадени се векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ при што $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3, \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$. Најдете ја должината на векторот $\vec{p}$ ако:
- $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,
 - $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
34. Дадени се векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ при што $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=|\vec{c}|=1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ и $\angle(\vec{c}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$. Најдете го аголот меѓу векторите $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b}$.
35. Колкав агол зафаќаат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако векторите $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ се заемно нормални.
36. Дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажете дека векторите $\vec{q} = (\vec{a}\vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b}$ и $\vec{p} = x\vec{a} + 3\vec{b}$ се заемно нормални за секој $x \in \mathbf{R}$ ако и само ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни.
37. Најдете ја проекцијата на векторот $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ на $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$ ако $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3$ и $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
38. Најдете ги должините на дијагоналите и аголот меѓу нив, на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ на $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ако $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ и $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

39. Најдете го аголот меѓу векторите $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, ако $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$.
40. Ако векторот $\vec{n}$ е компланарен со векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ при што $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 4$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$, $\vec{n}\vec{p} = 8$ и $\vec{n}\vec{q} = 16$, најдете:
- а) $|\vec{n} + \vec{q}|$, б) $\angle(\vec{n}, \vec{p})$.
41. Најдете вектор $\vec{c}$, колинеарен со векторот $\vec{a} + \vec{b}$ ако $\vec{a}\vec{b} = 5$, $\vec{c}\vec{b} = 18$, $|\vec{b}| = 2$.
42. Дадени се векторите $\vec{a} = \{2, 2, 2\}$ и $\vec{b} = \{0, 1, 0\}$. Најдете единичен вектор $\vec{x}$ кој е нормален на векторот $\vec{a}$, а со векторот $\vec{b}$ зафаќа агол $\frac{\pi}{3}$.
43. Во Oxy најдете вектор $\vec{x}$ со должина $\sqrt{10}$ кој е нормален на векторот $\vec{a} = \{1, -3, 2\}$.
44. На Oz оската најдете точка M еднакво оддалечена од точките $A(3, 5, -1)$ и $B(-4, 1, 7)$.
45. Докажете дека точките $A(-5, 0, 0)$; $B(0, 5, 0)$ и $C(-1, 2, -1)$ не се колинеарни, а потоа најдете ја ортогоналната проекција M' на точката $M(2, 3, 4)$ врз рамнината ABC .
46. Докажете дека точките $A(0, -3, 0)$; $B(1, -3, 1)$ и $C(0, 0, \frac{3}{2})$ не се колинеарни, а потоа најдете го растојанието од точката $M(3, 5, 4)$ до рамнината ABC .
47. Најдете го растојанието од точката $M(2, 3, 4)$ до правата $AB: A(1, 0, -1); B(4, 2, 0)$.
48. Правата p минува низ точката $A(4, 2, 0)$ и е паралелна со векторот $\vec{a} = \{1, 3, 2\}$. Најдете ја симетричната точка M' на точката $M(2, 3, 4)$ во однос на правата p .
49. Најдете ја точката M' што е симетрична на точката $M(4, 1, -3)$ во однос на правата $AB: A(5, 4, 6); B(3, -2, 2)$.
50. Ако $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a}\vec{b} = 12$, пресметајте $|\vec{a}, \vec{b}|$.
51. Ако $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a}, \vec{b}| = 16$, пресметајте $\vec{a}\vec{b}$.
52. Пресметајте $|\vec{a}, \vec{b}|$ ако $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + 5\vec{r}$, $\vec{b} = -4\vec{p} + \vec{q} - 2\vec{r}$ каде што $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ е десна тројка заемно нормални единични вектори.
53. Пресметајте ја плоштината на паралелограмот, конструиран над векторите $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{AD} = \vec{a} - 3\vec{b}$, каде што $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.
54. Нека $|\vec{a}| = 5|\vec{b}|$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$. Пресметајте ја плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $2\vec{b} - \vec{a}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

55. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. За кои вредности на x векторите $\vec{p} = x\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ се колинеарни?
56. Најдете ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се векторите $3\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{m} - \vec{n}$, каде $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.
57. Пресметајте го изразот $|\vec{a}, \vec{b}|^2 + (\vec{a}\vec{b})^2$.
58. Ако $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$ и $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$, тогаш векторите $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ се колинеарни. Докажете!
59. Од една точка се повлечени три некомпланарни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Докажете дека рамнината што минува низ крајните точки на овие вектори е нормална на векторот $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}]$.
60. Ако $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, тогаш векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни. Докажете!
61. Дадени се векторите $\vec{a} = \{1, 2, 1\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 2\}$, $\vec{c} = \{2, 1, -1\}$. Најдете го векторот $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ и проекцијата на векторот $\vec{b}$ на векторот $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.
62. Дадени се векторите $\vec{a} = \{1, 1, -1\}$, $\vec{b} = \{-2, -1, 2\}$, $\vec{c} = \{1, -1, 2\}$.
- а) Изразете го векторот $\vec{c}$ како линеарна комбинација на векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$.
- б) Пресметајте го аголот што го зафаќа векторот $\vec{c}$ со рамнината паралелна со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
63. Најдете вектор $\vec{x}$ кој е нормален на векторите $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$ и $\vec{b} = \{1, -2, 3\}$, а неговата проекција врз векторот $\vec{c} = \{1, 2, -7\}$ е $\frac{10}{3\sqrt{6}}$.
64. Пресметајте ја плоштината на триаголникот ABC ако:
- а) $A(2, 1, 0)$; $B(-3, -6, 4)$; $C(-2, 4, 1)$ б) $A(1, 0, 1)$; $B(1, 1, 0)$; $C(0, 1, 1)$.
65. Дадени се некомпланарните вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Најдете вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ за кои важи $\vec{a}_i \vec{b}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$
66. Пресметајте го волуменот на паралелопипедот чии рабови се:
- $$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \quad \text{и} \quad \vec{p} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$
- ако векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ формираат десна тројка вектори и $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \frac{1}{4}$.
67. Даден е четириаголникот
- $$ABCD: A(2, -3, 1); B(-1, 1, 1); C(-4, 5, 6) \text{ и } D(2, -3, 6).$$
- Дали овој четириаголник е рамнински?

68. Пресметајте го волуменот на тетраедарот $ABCD$:
- а) $A(2, -1, 1)$; $B(5, -1, 2)$; $C(3, 0, -3)$ и $D(6, 0, -1)$,
- б) $A(0, 0, 0)$; $B(3, 4, -1)$; $C(2, 3, 5)$ и $D(6, 0, -3)$.
69. Најдете ја висината на тетраедарот $ABCD$: $A(2, -4, 5)$; $B(-1, -3, 4)$; $C(5, 5, -1)$ и $D(1, 1, -2)$ спуштена од темето A .
70. Докажете дека $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{0}$.
71. Нека $\vec{r}$ е единичен вектор и $\vec{a}$ е произволен вектор. Докажете дека $|\vec{r}, [\vec{a}, \vec{r}]| = |\vec{a}, \vec{r}|$.
72. Докажете дека $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})\vec{b} - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})\vec{a} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d}$.
73. Упростете го изразот:
- а) $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] - [\vec{c}, [[\vec{a}, \vec{b}], \vec{d}]]$,
- б) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{c})$.
74. Докажете дека

$$[\vec{a}, \vec{b}][\vec{c}, \vec{d}] = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{d} & \vec{b}\vec{d} \end{vmatrix}$$

а потоа упростете го изразот:

$$[\vec{a}, \vec{b}][\vec{c}, \vec{d}] + \vec{c}[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{d}] .$$

IX ГЛАВА

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА ВО ПРОСТОР

1. РАВЕНКА НА ПОВРШИНА

1.1. Нека претпоставиме, дека се дадени координатен систем и некоја површина S . Да ја разгледаме равенката

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

со променливи x, y, z . Во врска со површината S и равенката (1) во дадениот координатен систем ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Равенката (1) ја нарекуваме *равенка на површината S* (во однос на дадениот координатен систем), ако равенката (1) ја задоволуваат координатите x, y и z на секоја точка, која лежи на површината S , и не ја задоволуваат координатите x, y и z на ниту една точка, која не лежи на површината S .

1.2. Забелешка. Во дадениот координатен систем површината S претставува геометриско место на точки, чии координати ја задоволуваат равенката (1).

Понатаму, ако во дадениот координатен систем разгледуваната равенка (1) е равенка на површината S , тогаш ќе велиме, дека оваа равенка ја определува површината S .

1.3. Пример. Равенката

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \quad (2)$$

определува сфера со центар во точката $C(a, b, c)$ и радиус r .

Навистина, ако $M(x, y, z)$ е произволна точка, тогаш

$$\overline{MC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Одтука е јасно, дека равенката (2) ги задоволува координатите на оние и само оние точки, кои од точката C се на растојание r . Според тоа, геометриското место на точки, чии координати ја задоволуваат равенката (2), е сфера со центар C и радиус r . ♦

2. РАВЕНКА НА ЛИНИЈА

2.1. Во просторната аналитичка геометрија секоја линија се разгледува како пресек на две површини. Според тоа, линија во просторот е зададена со две равенки од променливите x, y и z .

Имено, ако $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ се равенки на две површини, кои се сечат по некоја линија L , тогаш линијата L е геометриското место на заедничките точки за овие површини, т.е. точки чии координати ги задоволуваат и равенката $F(x, y, z) = 0$ и равенката $G(x, y, z) = 0$. Според тоа, системот

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

ја определува линијата L .

2.2. Пример. Системот равенки

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

определуваат кружница (како пресек на две сфери). ♦

2.3. Забелешка. Ако $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ и $H(x, y, z) = 0$ се равенки на три површини, тогаш секое решение на системот

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \\ H(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ги дава координатите на заедничките точки на овие површини. Според тоа, геометриската задача за наоѓање на точките на пресек на три површини е еквивалентна на алгебарската задача за решавање на систем од три равенки со три непознати.

2.4. Пример. Најдете ги пресечните точки на три површини каде првата површина е сфера со центар $(-1, -1, 0)$ и радиус 5, втората површина е сфера со центар $(1, 1, 3)$ и радиус 4, а третата површина е рамнина, паралелна на рамнината Oxy и лежи во позитивниот дел на оската Oz , на растојание од 3 единици од Oxy рамнината.

Решение. Задачата се сведува на решавање на системот

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16 \\ z = 3. \end{cases}$$

Ако во првите две равенки ставиме $z = 3$ добиваме

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 14 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14. \end{cases}$$

Одтука

$$x + y = 0, \quad x^2 + y^2 = 14,$$

па затоа $x = \pm\sqrt{7}$, $y = -x$. Конечно, ги добиваме точките

$$(\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 3) \text{ и } (-\sqrt{7}, \sqrt{7}, 3). \blacklozenge$$

3. ЦИЛИНДРИЧНИ И КОНУСНИ ПОВРШИНА

3.1. Нека протпоставиме дека во просторот е зададен координатен систем $Oxyz$.

Дефиниција. Површината S ја нарекуваме *цилиндрична површина со генератриса* паралелна на оската Oz , ако за секоја точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ која лежи на површината S , правата која минува низ M_0 и е паралелна на оската Oz лежи на површината S .

Секоја права која што лежи на површината S ќе ја нарекуваме *генератриса* на S .

3.2. Забелешка. Аналогно се дефинираат цилиндрични површини со генератриса паралелни со оските Ox и Oy .

3.3. Во врска со цилиндричните површини со генератриса паралелни на оската Oz ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Секоја равенка од видот

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

определува цилиндрична површина со генератриса паралелна на оската Oz .

Доказ. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка, која лежи на површината S , определена со равенката (1). Тогаш координатите на M_0 мора да ја задоволуваат равенката (1), т.е. важи

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{2}$$

Доволно е да докажеме, дека секоја точка M од правата, која минува низ M_0 и е паралелна со оската Oz , исто така лежи на површината S , т.е. има координати, кои ја задоволуваат равенката (1).

Секоја точка M од правата која минува низ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна со оската Oz има први две координати како и точката M_0 , а третата координата може да прима произволна вредност, т.е. $M(x_0, y_0, z_1)$, $z_1 \in \mathbf{R}$. Но, во равенката (1) третата координата не се содржи, па затоа координатите на точката M ја задоволуваат равенката (1). Значи, S е цилиндрична површина со генератриса паралелна на оската Oz . $\blacklozenge$

3.4. Дефиниција. За функцијата $F(x, y, z)$ ќе велиме дека е *хомогена функција од n -ти ред*, ако за секој $k \in \mathbf{R}$ важи

$$F(kx, ky, kz) = k^n F(x, y, z). \quad (3)$$

3.5. Дефиниција. Површината S ја нарекуваме *конусна површина со теме во координатниот почеток* O , ако за секоја точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ од S различна од O , правата која минува низ M_0 и O лежи на површината S .

3.6. Во врска со конусните површини ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема. Ако $F(x, y, z)$ е хомогена функција од n -ти ред, тогаш равенката

$$F(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

определува конусна површина.

Доказ. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка, различна од координатниот почеток O , која лежи на површината определена со равенката (4). Тогаш

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (5)$$

Доволно е да докажеме дека координатите на секоја точка $M(x, y, z)$ од правата OM_0 ја задоволуваат равенката (4).

Векторите $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM}_0$ се колинеарни (лежат на иста права) и како $\overrightarrow{OM}_0 \neq \vec{0}$, постои реален број k таков што $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM}_0$, т.е.

$$\{x, y, z\} = k\{x_0, y_0, z_0\}$$

од каде наоѓаме

$$x = kx_0, \quad y = ky_0, \quad z = kz_0.$$

Според тоа, за координатите x, y, z на точката M важи

$$F(x, y, z) = F(kx_0, ky_0, kz_0) = k^n F(x_0, y_0, z_0) = k^n \cdot 0 = 0,$$

(во последната низа равенства искористивме дека F е хомогена функција од n -ти ред и дека за $M_0(x_0, y_0, z_0)$ важи (5)). Значи, површината S , определена со (4), каде $F(x, y, z)$ е хомогена функција, е конусна површина. ♦

3.7. Пример. Функцијата

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

е хомогена функција од втор ред, па затоа со равенката

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

е определена конусна површина, која во литературата е позната како кружен конус со теме во координатниот почеток. ♦

4. ПАРАМЕТАРСКИ РАВЕНКИ НА ЛИНИИ И ПОВРШНИИ ВО ПРОСТОРОТ

4.1. Дефиниција. Ако координатите x, y, z на секоја точка на линијата L се зададени како функции

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \quad (1)$$

определени и непрекинати на некој интервал за параметарот t , тогаш ќе велиме дека L е зададена со своите *параметарски равенки*.

4.2. Забелешка. Дефиницијата 4.1 со која е определена линија L во просторот е еквивалентна со определувањето на линијата L како пресек на две површини. Навистина, нека претпоставиме, дека барем едната (на пример третата) од функциите (1) има инверзна. Во тој случај од третото равенство во (1) наоѓаме $t = \chi^{-1}(z)$ и ако замениме во првите две равенства добиваме две површини

$$x = \varphi(\chi^{-1}(z)), y = \psi(\chi^{-1}(z))$$

чиј пресек е дадената линија L .

4.4. Пример. Да ги разгледаме равенките

$$x = r \cos t, y = r \sin t, z = 0, \quad (2)$$

каде $t \in [0, 2\pi)$. Ќе докажеме дека (2) се параметарски равенки на кружница која лежи во рамнината Oxy . Навистина, ако ги квадрираме и ги собереме првите две равенки во (2) добиваме

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t, z = 0,$$

т.е. го добиваме системот

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Јасно, со (3) е дадена кружница во Oxy рамнината, со центар во координатниот почеток и радиус r . ♦

4.5. Забелешка. За параметарско задавање на површина координатите на секоја точка од површината мора да бидат зададени како функции од два параметри. Ќе докажеме дека со равенките

$$x = \varphi(p, q), y = \psi(p, q), z = \chi(p, q) \quad (4)$$

е определена некоја површина во просторот.

Навистина, да претпоставиме, дека барем еден пар од равенките (4) може да се реши по параметрите p и q . Нека, на пример, од првите две равенки во (4) параметрите p и q можат да се изразат како функции од x и y : $p = F(x, y)$ и $q = G(x, y)$. Ако замениме во третата равенка во (4) добиваме:

$$z - \chi(F(x, y), G(x, y)) = 0$$

што значи дека со (4) е определена некоја површина.

5. КЛАСИФИКАЦИЈА НА ПОВРШНИНИ

5.1. Предмет на проучување на аналитичката геометрија во простор се површините, кои во даден координатен систем се определени со алгебарски равенки. Тоа се равенки од следниов вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0 \quad (2)$$

.....

каде $A, B, C, D, E, F, \dots$ се дадени реални броеви, кои ги нарекуваме коефициенти на дадената равенка.

Во врска со претходно изнесеното ги имаме следниве дефиниции.

5.2. Дефиниција. Површината S ја нарекуваме *алгебарска*, ако во некој координатен систем таа е определена со алгебарска равенка со три променливи.

5.3. Дефиниција. За површината S ќе велиме дека е *трансцедентна*, ако таа не е алгебарска.

5.4. Дефиниција. За алгебарската површина S ќе велиме дека е од n -ти ред, ако во некој координатен систем таа е определена со алгебарска равенка од n -ти степен со три променливи.

5.5. Во врска со алгебарските површини може да се докаже следнава теорема, која всушност ја констатира коректноста на претходните дефиниции.

Теорема. Ако површината S во некој координатен систем е определена со алгебарска равенка од n -ти степен, тогаш S и во секој друг координатен систем е определена со алгебарска равенка од n -ти степен.

Доказ. Нека претпоставиме, дека површината S во некој координатен систем е определена со равенката

$$F(x, y, z) = 0, \quad (3)$$

каде $F(x, y, z)$ е алгебарска равенка од n -ти степен, т.е. збир на собирци од видот $a_{klm}x^k y^l z^m$ каде k, l, m се ненегативни цели броеви, при што најголемата вредност на збирот $k + l + m$ е еднаква на n , a_{klm} се некои константи, при што барем за една тројка k, l, m со збир n коефициентот a_{klm} е различен од нула.

Во просторот земаме нов координатен систем $O'x'y'z'$. Тогаш, согласно теорема XIII 19.1 за координатите во стариот и новиот систем точни се формулите

(7) од точка XIII 19. За да се добие равенката на површината S во новиот координатен систем $O'x'y'z'$, доволно е на левата страна на (3) наместо x, y, z да ги замениме нивните изрази дадени со (7) од XIII 19.1. Притоа добиваме собирци од видот

$$a_{klm}(a + \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z')^k (b + \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z')^l (c + \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z')^m$$

Според тоа, површината S во новиот систем $O'x'y'z'$ е претставена со алгебарска равенка со степен не поголем од n .

Ако во претходните разгледувања ги замениме улогите на координатните системи $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, тогаш добиваме, дека алгебарската равенка за системот $O'x'y'z'$ има степен не помал од n , (во спротивно при премин од $O'x'y'z'$ во $Oxyz$ би се зголемил степенот на равенката, што не е можно). Според тоа, површината S во новиот систем е определена со алгебарска равенка од n -ти степен. ♦

5.6. Дефиниција. Просторната линија ја нарекуваме *алгебарска*, ако таа е определена како пресек на алгебарски површини.

6. РАМНИНАТА КАКО ПОВРШИНА ОД ПРВ РЕД

6.1. Теорема. Во Декартов правоаголен координатен систем секоја рамнина определува равенка од прв степен.

Доказ. Нека е даден Декартов правоаголен координатен систем и рамнина Π . На рамнината Π земаме произволна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и да избереме вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ нормален на рамнината Π .

Нека $M(x, y, z)$ е произволна точка. Таа лежи на рамнината Π ако и само ако векторот $\overrightarrow{M_0M}$ е нормален на векторот $\vec{n}$. Значи, за да ја определиме равенката на рамнината Π потребно е овој услов да го изразиме со координатите x, y, z . Имаме,

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \text{ и } \vec{n} = \{A, B, C\}$$

и $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ ако и само ако $\overrightarrow{M_0M} \vec{n} = 0$, т.е. ако и само ако

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Ако се ослободиме од заградите во (1) и означиме $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ добиваме

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

што значи дека рамнината Π определува равенка од прв степен. ♦

6.2. Теорема. Во Декартов правоаголен координатен систем секоја рамнина од прв степен определува рамнина.

Доказ. Нека е даден произволен Декартов правоаголен координатен систем и да разгледаме произволна равенка од прв степен (2), т.е. равенка во која барем еден од коефициентите A, B, C е различен од нула.

Нека x_0, y_0, z_0 е произволно решение на равенката (2). Ако броевите x_0, y_0, z_0 ги замениме во равенката (2), го добиваме аритметичкото равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$$

Ако од равенката (2) го одземеме равенството (3) ја добиваме равенката

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

која е равенка на рамнина која ја содржи точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е нормална на векторот $\vec{n} = \{A, B, C\}$. ♦

6.3. Забелешка. Векторот $\vec{n} = \{A, B, C\}$ го нарекуваме вектор нормален на рамнината Π . Од претходните две теореми следува дека равенката

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

е равенка на рамнина која ја содржи точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е нормална на векторот $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

6.4. Дефиниција. Равенката од видот

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ја нарекуваме *општа равенка на рамнина*.

6.5. Пример. Составете равенка на рамнина, која минува низ точката $M_0(1, 1, 1)$ и е нормална на векторот $\vec{n} = \{2, 2, 3\}$.

Решение. Согласно со претходните разгледувања бараната равенка на рамнината е $2(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$, т.е. $2x + 2y + 3z - 7 = 0$. ♦

6.6. Векторска равенка на рамнина. Нека рамнината Π ја содржи точката M_0 со радиус вектор $\vec{r}_0$ и е нормална на векторот $\vec{n} = \{A, B, C\}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Ако $\vec{r}$ е радиус векторот на произволна точка M од рамнината Π , тогаш $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, т.е. $(\vec{r} - \vec{r}_0) \perp \vec{n}$. Значи,

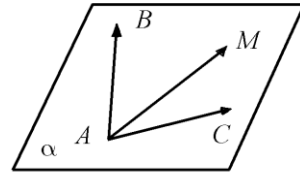
$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \quad (4)$$

е равенката на рамнината Π зададена во векторски вид.

Како што знаеме, секоја рамнина Π во просторот е зададена со три неколинеарни точки: $A(x_1, y_1, z_1)$; $C(x_2, y_2, z_2)$; $B(x_3, y_3, z_3)$, (црт. 1). Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка во рамнината Π , тогаш векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AM}$ се компланарни. Но,

$\overrightarrow{AM}\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}; \overrightarrow{AC}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}; \overrightarrow{AB}\{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$
 па од последица XIII 17.2 следува дека со

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$



Црт. 1

е дадена равенката на рамнината Π која минува низ точките A, B и C .

Да забележиме дека рамнината Π , која ги содржи точките A, B и C е нормална на векторот $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$. Значи, равенката (5) можеме да ја добиеме ако прво го најдеме векторот $\vec{n}$, а потоа најдеме равенка на рамнина која минува низ точката $A(x_1, y_1, z_1)$ и е нормална на $\vec{n}$.

6.7. Пример. Најдете ја равенката на рамнината Π , определена со точките

$$A(1,1,0), B(2,0,2) \text{ и } C(0,1,1).$$

Решение. Со замена во (5) за бараната равенка на рамнина добиваме:

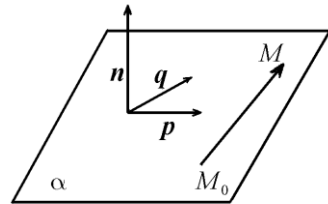
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2-1 & 0-1 & 2-0 \\ 0-1 & 1-1 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{т.е. } x+3y+z-4=0. \blacklozenge$$

6.8. Нека е дадена рамнината Π која ја содржи точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна со векторите

$$\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\} \text{ и } \vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$$

(црт. 2). Тогаш, рамнината Π е нормална на векторот $\vec{n} = [\vec{p}, \vec{q}]$, па затоа нејзината равенка е дадена со $\overrightarrow{M_0M}[\vec{p}, \vec{q}] = 0$, т.е.



Црт. 2

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}) = 0, \quad (6)$$

каде $M(x, y, z)$ е произволна точка од рамнината. Од

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$$

со замена во (6) добиваме дека рамнината која минува низ точката M_0 и е паралелна со векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ има равенка

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

6.9. Забелешка. Ако рамнината Π минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна со векторите $\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ и $\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$, тогаш за секоја точка $M(x, y, z)$ од Π векторите $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се компланарни. Според тоа, постојат α и β така што $\overrightarrow{M_0M} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}$, т.е.

$$\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\} = \alpha\{p_1, p_2, p_3\} + \beta\{q_1, q_2, q_3\}$$

односно

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha p_1 + \beta q_1 \\ y = y_0 + \alpha p_2 + \beta q_2 \\ z = z_0 + \alpha p_3 + \beta q_3, \end{cases} \quad (8)$$

и ова се *параметарски равенки* на рамнината Π .

6.10. Пример. Најдете ја равенката на рамнината Π која минува низ точката $A(1,1,1)$ и е паралелна со векторите $\vec{p} = \{1, 2, 3\}$ и $\vec{q} = \{3, 2, 1\}$. Напишете ги параметарските равенки на Π .

Решение. Со замена во (7) за равенката на рамнината Π добиваме:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

т.е.

$$x - 2y + z = 0.$$

Со замена во (8) за параметарските равенки на Π имаме:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + 3\beta \\ y = 1 + 2\alpha + 2\beta \\ z = 1 + 3\alpha + \beta \end{cases} . \blacklozenge$$

7. НЕПОТПОЛНИ РАВЕНКИ НА РАМНИНА. СЕГМЕНТЕН ВИД НА РАВЕНКА НА РАМНИНА

7.1. Во теорема 6.2 докажавме дека во Декартов правоаголен координатен систем секоја равенка од прв степен

$$Ax + By + Cz = D, \quad (1)$$

каде $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ определува рамнина. Во овој дел ќе разгледаме некои парцијални случаи на равенка од прв степен, т.е. ќе ги разгледаме случаите кога некои од коефициентите A, B, C, D се еднакви на нула.

7.2. Лема. Ако $D = 0$, тогаш равенката (1) има вид $Ax + By + Cz = 0$ и определува рамнина која минува низ координатниот почеток.

Доказ. Броевите $x = 0, y = 0, z = 0$ ја задоволуваат равенката

$$Ax + By + Cz = 0,$$

па затоа координатниот почеток припаѓа на рамнината определена со оваа равенка. ♦

7.3. Лема. Ако $C = 0$, тогаш равенката (1) има вид $Ax + By + D = 0$ и определува рамнина паралелна со оската Oz или ја содржи оската Oz .

Доказ. Нека $C = 0$. Тогаш проекцијата на нормалниот вектор $\vec{n}$ на оската Oz е еднаква на нула, т.е. $\vec{n} = \{A, B, C\} = \{A, B, 0\}$. Според тоа, $\vec{n} \perp \vec{k}$, па затоа рамнината определена со равенката $Ax + By + D = 0$ е паралелна со оската Oz или ја содржи оската Oz . ♦

7.4. Лема. Ако $B = C = 0$, тогаш равенката (1) има вид $Ax + D = 0$ и определува рамнина паралелна со координатната рамнина Oyz или се совпаѓа со неа.

Доказ. Нека $B = C = 0$. Тогаш проекциите на нормалниот вектор $\vec{n}$ на оските Oz и Oy се еднакви на нула, т.е. $\vec{n} = \{A, B, C\} = \{A, 0, 0\}$. Според тоа, $\vec{n} \perp \vec{k}$ и $\vec{n} \perp \vec{j}$, па затоа рамнината определена со $Ax + D = 0$ е паралелна со оските Oz и Oy или минува низ секоја од нив. Но, тоа, значи, дека рамнината определена со равенката $Ax + D = 0$ е паралелна со рамнината Oyz или се совпаѓа со неа. ♦

7.5. Забелешка. Аналогно на доказите на лемите 7.3 и 7.4 може да се докаже дека:

а) равенката од видот $Ax + Cz + D = 0$ определува рамнина паралелна со оската Oy или ја содржи оваа оска, а равенката од видот $By + Cz + D = 0$ определува рамнина паралелна со оската Ox или ја содржи оваа оска, и

б) равенката од видот $By + D = 0$ определува рамнина паралелна со рамнината Oxz или се совпаѓа со неа, а равенката од видот $Cz + D = 0$ определува рамнина паралелна со рамнината Oxy или се совпаѓа со неа.

7.6. Коментар. Нека е дадена равенката на рамнина

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

каде

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0.$$

Ако слободниот член го префрлиме на десната страна на равенката добиваме

$$Ax + By + Cz = -D. \quad (2)$$

Понатаму, равенката (2) ја делиме со $-D \neq 0$ и наоѓаме

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

т.е.

$$\frac{\frac{x}{-D}}{\frac{A}{-D}} + \frac{\frac{y}{-D}}{\frac{B}{-D}} + \frac{\frac{z}{-D}}{\frac{C}{-D}} = 1. \quad (3)$$

Ги воведуваме ознаките $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$ и ако замениме во (3) наоѓаме

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4)$$

Ќе ги определиме пресеците на рамнината (4) со координатните оски. За пресекот со оската Ox имаме $y = z = 0$ и ако замениме во (4) добиваме $x = a$, па затоа должината на отсечката која рамнината ја отсекува на оската Ox , сметајќи од координатниот почеток е еднаква на a . Аналогно наоѓаме, дека отсечките кои рамнината ги отсекува на координатните оски Oy и Oz , сметајќи од координатниот почеток, имаат должини b и c , соодветно.

7.7. Дефиниција. Равенката од видот (4) ја нарекуваме *сегментен вид* на равенка на рамнина.

7.8. Пример. Составете равенка на рамнина, која на координатните оски отсекува отсечки $a = -3, b = 2, c = 4$.

Решение. Со замена во (4) за равенката на бараната рамнина наоѓаме:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1,$$

т.е. $4x - 6y - 3z + 12 = 0$. ♦

8. НОРМАЛЕН ВИД РАВЕНКА НА РАМНИНА. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО РАМНИНА

8.1. Во претходните разгледувања докажавме дека рамнината Π која минува низ точката M_0 со радиус вектор $\vec{r}_0$ и е нормална на векторот $\vec{n} = \{A, B, C\}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ има равенка

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \quad (1)$$

каде $\vec{r}$ е радиус векторот на произволна точка M од рамнината Π . Ако во равенката (1) за нормалниот вектор го земеме единичниот вектор $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, тогаш ја добиваме таканаречената *нормален вид на равенката* на рамнината Π :

$$\vec{n}_0(\vec{r}-\vec{r}_0)=0. \quad (2)$$

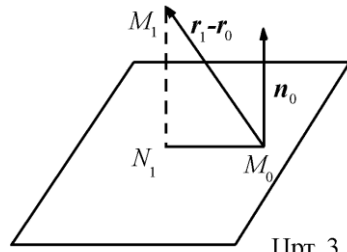
Но,

$$\vec{n}_0 = \frac{\{A, B, C\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\} \text{ и } \vec{r} = \{x, y, z\}$$

и ако замениме во (2) го добиваме општиот вид на нормалната равенка на рамнината Π , т.е. добиваме

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \quad (3)$$

каде $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.



Црт. 3

8.2. Растојание од точка до рамнина. Нека се дадени точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и рамнината Π , зададена со равенката (3), црт. 3. Да го разгледаме векторот $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$, каде $\vec{r}_1, \vec{r}_0$ се радиус-векторите на точките $M_0 \in \Pi$ и M_1 . Од триаголникот $M_0M_1N_1$, водејќи сметка дека $\overline{M_1N_1} = h$, каде h е растојанието од точката M_1 до рамнината Π , наоѓаме

$$h = |\text{пр}_{\vec{n}_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)| = \frac{|\vec{n}_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}_0|} = |\vec{n}_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4)$$

Според тоа, за да го определиме растојанието од точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до рамнината Π , зададена со нормалната равенка (3), доволно е координатите на точката M_1 да ги замениме во изразот на левата страна на (3) и да земеме апсолутна вредност од добиениот резултат.

Да забележиме дека растојанието од координатниот почеток $O(0,0,0)$ до рамнината (3) е дадено со $h_0 = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

8.3. Пример. Најдете го растојанието од точката $M(2,4,1)$ до рамнината Π :

$$4x - 5y + z - 12 = 0 \quad (5)$$

Решение. Равенката (5) ќе ја запишеме во нормален вид. Имаме $A=4$, $B=-5$, $C=1$, па затоа $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{4^2+(-5)^2+1^2} = \sqrt{42}$. Значи, нормалниот вид на (5) е

$$\frac{4x-5y+z-12}{\sqrt{42}}=0.$$

Конечно, ако ја искористиме формулата (4), за растојанието од точката M до рамнината Π наоѓаме: $h = \frac{|4 \cdot 2 - 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{42}} = \frac{23}{\sqrt{42}}$. ♦

9. АГОЛ МЕЃУ ДВЕ РАМНИНИ

9.1. Нека се дадени рамнините α и α' чии равенки се

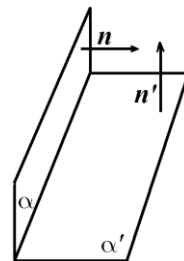
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad (1)$$

соодветно. Нормалните вектори на рамнините α и α' се $\vec{n} = \{A, B, C\}$ и $\vec{n}' = \{A', B', C'\}$ и аголот φ меѓу векторите $\vec{n}$ и $\vec{n}'$ е еднаков на аголот меѓу рамнините α и α' , црт.

4. Според тоа, за аголот меѓу рамнините α и α' добиваме

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \vec{n}'|}{|\vec{n}| |\vec{n}'|}, \quad (2)$$

каде $\vec{n} \vec{n}' = AA' + BB' + CC'$, $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ и $|\vec{n}'| = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}$.



Црт. 4

9.2. Забелешка. Од досега изнесеното следува, дека рамнините α и α' се заемно нормални ако и само ако $\cos \varphi = 0$, т.е. ако и само ако

$$AA' + BB' + CC' = 0. \quad (3)$$

9.3. Забелешка. Рамнините α и α' се паралелни ако и само ако $\cos \varphi = 1$, т.е. векторите $\vec{n}$ и $\vec{n}'$ се колинеарни, што значи ако и само ако

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}. \quad (4)$$

Јасно, ако за рамнините (1) не е исполнет условот (4), тогаш тие не се паралелни, т.е. се сечат и пресекот е права. Наоѓањето на равенките на пресечната права ќе биде предмет на разгледување во следните точки.

9.4. Пример. Најдете го аголот меѓу рамнините

$$x - z = 0, \quad y - z = 0.$$

Решение. Имаме $\vec{n} = \{1, 0, -1\}$ и $\vec{n}' = \{0, 1, -1\}$, па затоа

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \vec{n}'|}{|\vec{n}| |\vec{n}'|} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2},$$

т.е. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. ♦

10. РАВЕНКА НА ПРАВА ВО ПРОСТОРОТ

10.1. Векторска равенка на права. Нека е дадена права L која минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна со векторот $\vec{s} = \{l, m, n\}$. Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка од L , тогаш векторите $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ се колинеарни, т.е.

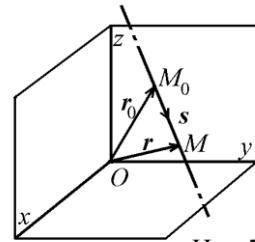
$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, $t \in \mathbf{R}$. Но, $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, каде $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ се радиус-векторите на точките M и M_0 , соодветно, црт. 5, па затоа

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}, t \in \mathbf{R}$$

т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}, t \in \mathbf{R} \quad (1)$$

и ова е таканаречената *векторска равенка на правата* L која минува низ точката M_0 и е паралелна со векторот $\vec{s}$.



Црт. 5

10.2. Параметарски равенки на права. За радиус-векторите $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ на точките M и M_0 од правата L имаме $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ и $\vec{r} = \{x, y, z\}$ и ако замениме во (1) добиваме $\{x, y, z\} = \{x_0, y_0, z_0\} + t\{l, m, n\}$, $t \in \mathbf{R}$, односно

$$\{x, y, z\} = \{x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn\}, t \in \mathbf{R}.$$

Последната равенка е еквивалентна на системот

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn, \quad t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (2)$$

и ова се таканаречените *параметарски равенки* на правата L .

10.3. Канонични равенки на права. Ако од равенките (4) го елиминираме t ги добиваме таканаречените *канонични равенки* на правата L . Притоа, последователно добиваме $\frac{x-x_0}{l} = t$, $\frac{y-y_0}{m} = t$, $\frac{z-z_0}{n} = t$, $t \in \mathbf{R}$, т.е.

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \quad (3)$$

10.4. Забелешка. Ако се земе предвид дека барем една од координатите l, m, n на векторот $\vec{s}$ е различна од нула, добиваме дека системот равенки (3) содржи две равенки. На пример, ако $n \neq 0$, тогаш

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{z-z_0}{n} \\ \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \end{cases} \quad (4)$$

и ова се равенки на две рамнини во чиј пресек се наоѓа правата L . Да забележиме дека првата равенка во (4) не ја содржи координатата y , а втората не ја содржи координатата x . Значи, првата рамнина е паралелна со оската Oy , а втората со оската Ox , т.е. тоа се равенките на рамнините со чија помош правата L се проектира на координатните рамнини Oxz и Oyz , соодветно.

10.5. Нормален вид равенка на права. Со α, β, γ да ги означиме аглите кои правата L ги зафаќа со координатните оски, т.е. аглите кои векторот $\vec{s} = \{l, m, n\}$ ги зафаќа со координатните оски. Имаме

$$l = |\vec{s}| \cos \alpha, \quad m = |\vec{s}| \cos \beta, \quad n = |\vec{s}| \cos \gamma.$$

Сега со замена за l, m, n во каноничните равенки (3) добиваме

$$\frac{x-x_0}{|\vec{s}| \cos \alpha} = \frac{y-y_0}{|\vec{s}| \cos \beta} = \frac{z-z_0}{|\vec{s}| \cos \gamma}$$

и ако помножиме со $|\vec{s}|$ го добиваме таканаречениот *нормален вид* на равенките на правата L , т.е. добиваме

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha} = \frac{y-y_0}{\cos \beta} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma}. \quad (5)$$

10.6. Пример. Напишете ги равенките на правата која минува низ точката $M(3, -4, 5)$ и е паралелна со оската Oz .

Решение. Во случајот $\vec{s} = \vec{k} = \{0, 0, 1\}$ и ако замениме во (3) за каноничните равенки на бараната права добиваме

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+4}{0} = \frac{z-5}{1}. \quad (6)$$

Од (6) следува дека $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$, што значи дека оваа права е нормална на оските Ox и Oy . Понатаму, од равенките (6) го добиваме системот

$$\begin{cases} x-3=0 \\ y+4=0 \end{cases}$$

што значи дека правата се наоѓа во пресекот на рамнините

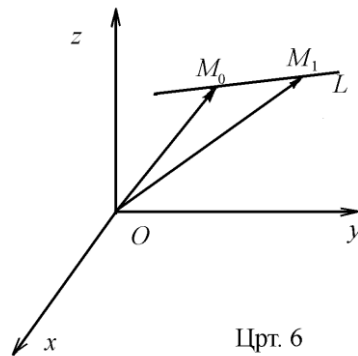
$$x-3=0 \text{ и } y+4=0. \quad \blacklozenge$$

10.7 Равенки на права низ две точки. Нека е дадена правата L и нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, M_0 и M_1 се точки од правата L (црт. 6). Тогаш, правата L е паралелна со векторот

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$$

и минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Значи, $\vec{s} = \{l, m, n\}$, каде $l = x_1 - x_0$, $m = y_1 - y_0$, $n = z_1 - z_0$ и ако замениме во (3) за равенките на правата добиваме

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \quad (7)$$



Црт. 6

10.8. Пример. Правата L минува низ точките $M_0(1,1,1)$ и $M_1(2,3,4)$. Со замена во (7) добиваме дека нејзината равенка е

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1}, \text{ т.е. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}. \blacklozenge$$

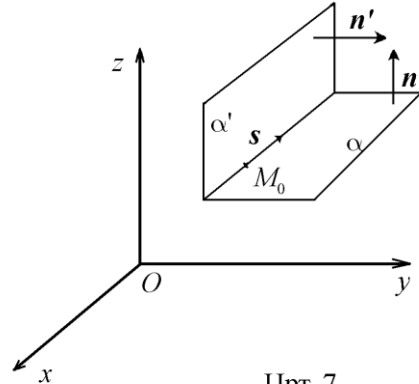
10.9. Пресек на рамнини. Како што знаеме, права во просторот може да биде зададена како пресек на две рамнини α и α' , кои не се паралелни и не се совпаѓаат (црт. 7). Нека $L = \alpha \cap \alpha'$ и нека

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

се равенките на рамнините α и α' . Векторите $\vec{n} = \{A, B, C\}$ и $\vec{n}' = \{A', B', C'\}$ се нормални на рамнините α и α' , соод-



Црт. 7

ветно, па затоа тие се нормални и на правата L . Според тоа, за векторот $\vec{s}$, кој е паралелен на правата L важи $\vec{s} \perp \vec{n}$ и $\vec{s} \perp \vec{n}'$, од што следува $\vec{s} \parallel [\vec{n}, \vec{n}']$, па затоа $\vec{s} = [\vec{n}, \vec{n}']$. Конечно, за да ја најдеме равенката на правата L доволно е да најдеме точка од L , т.е. едно решение на системот

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad (8)$$

и да замениме во (3).

10.10. Пример. Напишете ги каноничните равенки на правата L :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x - 2y + z = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решение. Имаме $\vec{n} = \{1, -2, 3\}$ и $\vec{n}' = \{3, -2, 1\}$. Според тоа,

$$\vec{s} = [\vec{n}, \vec{n}'] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \{4, 8, 4\}.$$

Ако од втората равенка во (9) ја одземеме првата равенка добиваме

$$2x - 2z + 4 = 0. \quad (10)$$

Во (10) ставаме $x = 0$ и добиваме $z = 2$. Ако замениме во првата равенка во (10) наоѓаме $0 - 2y + 6 - 4 = 0$, т.е. $y = 1$. Според тоа, правата L минува низ точката $M(0, 1, 2)$. Значи, нејзините канонични равенки се

$$\frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-2}{4}. \blacklozenge \quad (11)$$

10.11. Забелешка. Ако правата е зададена како пресек на две рамнини, тогаш за да ги определиме нејзините канонични равенки доволно е да најдеме две решенија на системот (8) и да ги искористиме равенките (7). На пример, во равенката (10) ставаме $z = 0$ и добиваме $2x + 4 = 0$, т.е. $x = -2$. Со замена во првата равенка на (9) наоѓаме $y = -3$. Значи, правата L минува низ точките $M_0(0, 1, 2)$ и $M_1(-2, -3, 0)$, па затоа нејзините канонични равенки се

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z-2}{0-2}, \text{ т.е. } \frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-2}.$$

Јасно, последната равенка се совпаѓа со равенката (11), бидејќи векторите $\vec{s} = \{4, 8, 4\}$ и $\vec{s}' = \{-2, -4, -2\}$ се колинеарни.

11. ЗАЕМЕН ОДНОС НА ДВЕ ПРАВИ

11.1. Нека се дадени правите L и L_1 чии равенки се

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad (2)$$

соодветно. Правата L минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна со векторот $\vec{s} = \{l, m, n\}$, а правата L_1 минува низ точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и е паралелна со векторот $\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$. Да ги разгледаме векторите $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$. Можни се следниве случаи:

а) векторите $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$ се компланарни, т.е. $(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}, \vec{s}_1) = 0$ и во овој случај правите L и L_1 лежат во иста рамнина, и

б) векторите $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$ не се компланарни, т.е. $(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}, \vec{s}_1) \neq 0$ и во овој случај правите L и L_1 се разминувачки, т.е. не лежат во иста рамнина.

Во натамошните разгледувања одделно ќе се осврнеме на овие два случаја.

Нека векторите $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$ се компланарни, т.е. нека важи $(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}, \vec{s}_1) = 0$. Тогаш можни се следниве два случаја:

1) векторите $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$ се колинеарни, т.е. $\vec{s}_1 = k\vec{s}$ и

2) векторите $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$ не се колинеарни.

Притоа, во вториот случај правите L и L_1 лежат во иста рамнина која, на пример, минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна со векторите $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$, па затоа од претходните разгледувања следува дека нејзината равенка е

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Што се однесува до првиот случај, правите L и L_1 лежат во иста рамнина која може да се определи од условот $(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}) = 0$, т.е. нејзината равенка е

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

1) Во овој случај, ако точката M_0 лежи на правата L_1 , т.е. ако нејзините координати ги задоволуваат равенките (2), тогаш правите L и L_1 се совпаѓаат. Но, ако M_0 не лежи на L_1 , тогаш правите L и L_1 се паралелни (црт. 8). Притоа, под растојание меѓу паралелните прави L и L_1 ќе го подразбираме растојанието од точката M_0 до правата L_1 , т.е. висината H на паралелограмот конструиран над векторите $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{s}_1$. Според тоа,

$$H = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}_1|}{|\vec{s}_1|}. \quad (4)$$

2) Во овој случај правите L и L_1 се сечат. Притоа, под агол меѓу правите L и L_1 го подразбираме аголот меѓу векторите $\vec{s}$ и $\vec{s}_1$ (црт. 9) и истиот може да се определи со помош на формулата

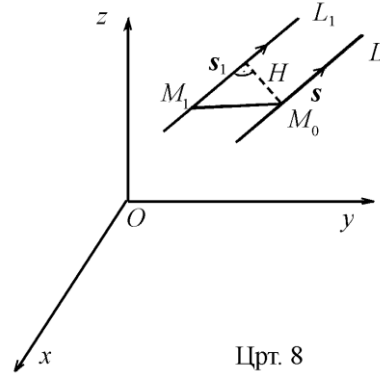
$$\cos \varphi = \frac{\vec{s} \vec{s}_1}{|\vec{s}| |\vec{s}_1|}. \quad (5)$$

Понатаму, пресечната точка A на правите L и L_1 ја определуваме на следниов начин:

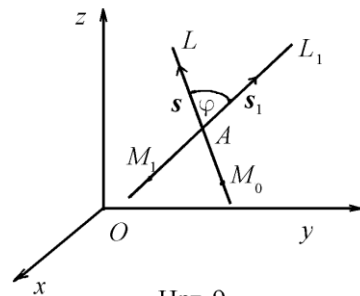
- равенките на правите ги запишуваме во параметарски вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = x_1 + \mu l_1 \\ y = y_1 + \mu m_1 \\ z = z_1 + \mu n_1 \end{cases}$$

со што добиваме систем од шест равенки со пет непознати, кој согласно претходната дискусија има единствено решение,



Црт. 8



Црт. 9

- од $x = x$ и $y = y$ добиваме

$$\begin{cases} x_0 + \lambda l = x_1 + \mu l_1 \\ y_0 + \lambda m = y_1 + \mu m_1 \end{cases}$$

и ги определуваме λ и μ ,

- со замена во равенките на правата L (или L_1) ги наоѓаме координатите на точката A .

11.2. Пример. Дадени се паралелните прави L и L_1 чии равенки се

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{4},$$

соодветно. Најдете го растојанието меѓу L и L_1 .

Решение. Од правата L имаме $M_0(1, -1, 2)$ и $\vec{s} = \{1, 3, 2\}$, а од правата L_1 имаме $M_1(-2, -1, 1)$ и $\vec{s}_1 = \{2, 6, 4\}$. Понатаму, $\overrightarrow{M_1M_0} = \{3, 0, 1\}$, па е

$$[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{s}_1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \{-6, -10, 18\}.$$

Конечно, со замена во (3) за бараното растојание добиваме:

$$H = \frac{\|\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}_1\|}{|\vec{s}_1|} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-10)^2 + 18^2}}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{460}}{\sqrt{56}} = \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{14}}. \blacklozenge$$

11.3. Пример. Дадени се равенките на правите

$$\frac{x-1-a}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2} \quad (L)$$

$$\frac{x-1}{10} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{z-1}{-4}. \quad (L')$$

а) Определете го параметарот a така да правите L и L' се сечат.

б) За една од најдените вредности на a најдете ја равенката на рамнината во која лежат L и L' .

в) Најдете ја пресечната точка на L и L' .

г) Пресметајте го волуменот на пирамидата чии темиња се координатниот почеток и пресечните точки на рамнината со координатните оски.

Решение. а) Од L имаме $A(1+a, -1, 3)$ и $\vec{s} = \{5, 1, -2\}$, а од L' имаме $B(1, -1, 1)$ и $\vec{s}' = \{10, 1+a, -4\}$, па затоа $\overrightarrow{AB} = \{-a, 0, -2\}$. Правите L и L' лежат во иста рамнина ако и само ако

$$(\overrightarrow{AB}, \vec{s}, \vec{s}') = 0,$$

т.е. ако и само ако

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & a+1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

односно $a^2 + 4a - 5 = 0$. Решенија на последната равенка се $a_1 = -5$ и $a_2 = 1$. За $a_2 = 1$ добиваме

$$\vec{s}' = \{10, 2, -4\} = 2 \cdot \{5, 1, -2\} = 2\vec{s},$$

што значи дека правите се паралелни. За $a_1 = -5$ имаме $\vec{s}' = \{10, -4, -4\}$, што значи дека правите се сечат и нивните равенки се:

$$\frac{x+4}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2} \quad (L)$$

$$\frac{x-1}{10} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{-4}. \quad (L')$$

в) Параметарските равенки на L се:

$$\begin{cases} x = 5t - 4 \\ y = t - 1 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$$

а на L' се:

$$\begin{cases} x = 10\lambda + 1 \\ y = -4\lambda - 1 \\ z = -4\lambda + 1. \end{cases}$$

Понатаму, од $x = x$ и $y = y$ имаме:

$$\begin{cases} 5t - 4 = 10\lambda + 1 \\ t - 1 = -4\lambda - 1. \end{cases}$$

Решението на последниот систем е $\lambda = -\frac{1}{6}$, $t = \frac{2}{3}$ и со замена во равенките на правата L за координатите на пресечната точка A' наоѓаме $x = -\frac{4}{6}$, $y = -\frac{2}{6}$ и $z = \frac{10}{6}$, т.е. $A'(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.

б) Од L имаме $A(-4, -1, 3)$ и $\vec{s} = \{5, 1, -2\}$, а од L' имаме $B(1, -1, 1)$ и $\vec{s}' = \{10, -4, -4\}$, па затоа равенката на рамнината која ги содржи правите L и L' е:

$$\begin{vmatrix} x+4 & y+1 & z-3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$2x + 5z - 7 = 0.$$

г) Рамнината $2x+5z-7=0$ не ја содржи променливата y , па затоа таа е паралелна со оската Oy и во овој случај немаме тетраедар.

За $a=1$ равенките на правите L и L' се:

$$\frac{x}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2} \text{ и } \frac{x-1}{10} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-4},$$

соодветно. Од L имаме точка $A(0, -1, 3)$ и вектор $\vec{s} = \{5, 1, -2\}$, а од L' имаме $B(1, -1, 1)$ и $\vec{s}' = \{10, 2, -4\}$. Според тоа, равенката на рамнината е

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $2x-12y+z-15=0$.

За пресечните точки со координатните оски имаме:

- пресечната точка M со оската Ox : $y=z=0$ па е $x=\frac{15}{2}$, т.е. $M(\frac{15}{2}, 0, 0)$,
- пресечната точка N со оската Oy : $x=z=0$ па е $y=-\frac{15}{12}$, т.е. $N(0, -\frac{15}{12}, 0)$, и
- пресечната точка P со оската Oz : $x=y=0$ па е $z=15$, т.е. $P(0, 0, 15)$.

Притоа, $\overrightarrow{OM} = \{\frac{15}{2}, 0, 0\}$, $\overrightarrow{ON} = \{0, -\frac{15}{12}, 0\}$ и $\overrightarrow{OP} = \{0, 0, 15\}$, па затоа

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP})| = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{15}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = \frac{375}{16} \cdot \blacklozenge$$

11.4. Забелешка. Во случајот кога векторите $\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}, \vec{s}_1$ не се компланарни, правите L и L_1 се разминувачки. Притоа може да се докаже дека за две разминувачки прави L и L_1 постои права L^* која ги сече правите L и L_1 и е нормална на L и L_1 . Во случајов правата L^* ја нарекуваме *заедничка нормала на правите L и L_1* . Во следниов пример ќе покажеме како се определуваат равенките на заедничката нормала на две разминувачки прави.

11.5. Пример. Дадени се правите

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-3}{-2} \quad (L)$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}. \quad (L')$$

Најдете ги равенките на заедничката нормала L^* на правите L и L' .

Решение. Нека равенките на заедничката нормала L^* се

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \quad (5)$$

Од L имаме: $A(0,3,3)$ и $\vec{s} = \{1, -3, -2\}$, од L' имаме: $B(0,0,1)$ и $\vec{s}' = \{1, 1, 1\}$. Бидејќи $L \perp L^*$ и $L' \perp L^*$ заклучуваме дека векторот $\vec{s}'' = \{l, m, n\}$ е колинеарен со векторот

$$[\vec{s}, \vec{s}'] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{-1, -3, 4\}.$$

Правите L и L^* се сечат, па затоа векторите $\overrightarrow{AM}$, $\vec{s}$, $\vec{s}''$ се компланарни, т.е. $(\overrightarrow{AM}, \vec{s}, \vec{s}'') = 0$, односно

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 - 3 & z_0 - 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

т.е.

$$9x_0 + y_0 + 3z_0 - 12 = 0. \quad (6)$$

Правите L' и L^* се сечат, па затоа векторите $\overrightarrow{BM}$, $\vec{s}'$, $\vec{s}''$ се компланарни, т.е. $(\overrightarrow{BM}, \vec{s}', \vec{s}'') = 0$, односно

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 - 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

т.е.

$$-7x_0 + 5y_0 + 2z_0 - 2 = 0. \quad (7)$$

Земаме $x_0 = 0$ и од (6) и (7) го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} y_0 + 3z_0 - 12 = 0 \\ 5y_0 + 2z_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

чие решение е: $y_0 = -\frac{18}{13}$, $z_0 = \frac{58}{13}$. Значи, $M(x_0, y_0, z_0) \equiv M(0, -\frac{18}{13}, \frac{58}{13})$ и со замена во (5) за равенките на заедничката нормала наоѓаме

$$\frac{x}{-1} = \frac{y + \frac{18}{13}}{-3} = \frac{z - \frac{58}{13}}{4}. \blacklozenge$$

12. ЗАЕМЕН ОДНОС НА ПРАВА И РАМНИНА

12.1. Нека се дадени правата L и рамнината α :

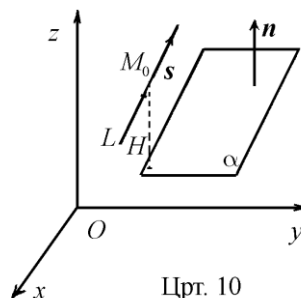
$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} . \quad (1)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \quad (2)$$

Правата минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна на векторот $\vec{s} = \{l, m, n\}$, а рамнината е нормална на векторот $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Ќе го разгледаме скаларниот производ $\vec{n}\vec{s}$. Можни се следниве случаи:

а) Ако $\vec{n}\vec{s} = 0$, тогаш правата L е паралелна со рамнината α и притоа ако точката M_0 ја задоволува равенката на рамнината добиваме дека правата лежи во рамнината. Но, ако M_0 не лежи во рамнината, тогаш правата L е паралелна со рамнината α и притоа растојанието од L до α е еднакво на растојанието од M_0 до α , т.е.

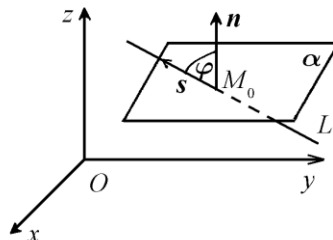
$$H = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (\text{црт. 10}).$$



Црт. 10

б) Ако $\vec{n}\vec{s} \neq 0$, тогаш правата L не е паралелна со рамнината α , па затоа L и α се сечат во една точка, (црт. 11). За да ја определиме пресечната точка го решаваме системот равенки:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (3)$$



Црт. 11

Системот (3) има четири равенки со четири непознати и има единствено решение (зошто?).

12.2. Забелешка. Ако L е паралелна со α , тогаш L лежи во рамнина α' која е паралелна со α и чија равенка ја наоѓаме од условите $\vec{n} \perp \alpha'$ и $M_0 \in \alpha'$, т.е. $\overrightarrow{M_0M}\vec{n} = 0$, каде $M(x, y, z)$ е произволна точка од α' .

Понатаму, ако L не е паралелна со α , тогаш под агол меѓу L и α ќе го подразбираме остриот агол $|\frac{\pi}{2} - \varphi|$, каде φ е аголот меѓу векторите $\vec{s}$ и $\vec{n}$, т.е. аголот за кој важи

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}\vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|} .$$

12.4. Пример. Нека се дадени правата L и рамнината α чии равенки се

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad (4)$$

$$2x + y - z + 4 = 0, \quad (5)$$

соодветно. Ќе ја определиме пресечната точка на L и α . Имаме:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1} = t \\ 2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x = t + 1, & y = t + 2, & z = t - 1 \\ 2x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

ШТО ЗНАЧИ

$$2(t+1) + (t+2) - (t-1) + 4 = 0$$

$$2t + 9 = 0$$

$$t = -\frac{9}{2}.$$

Понатаму, $x = -\frac{9}{2} + 1 = -\frac{7}{2}$, $y = -\frac{9}{2} + 2 = -\frac{5}{2}$, $z = -\frac{9}{2} - 1 = -\frac{11}{2}$, т.е. пресечната точка е $A(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{2})$.

За аголот меѓу правата L и рамнината α , од $\vec{s} = \{1, 1, 1\}$ и $\vec{n} = \{2, 1, -1\}$

наоѓаме $\cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| |\vec{s}|} = \frac{2+1-1}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, т.е. $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$, па затоа бараниот агол е

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad \blacklozenge$$

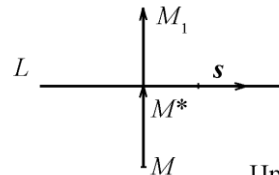
13. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

13.1. Пример. Дадени се правата L чии равенки се

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2} \quad (1)$$

и точка $M(2, 3, 4)$. Најдете ја точката M_1 симетрична на M во однос на L .

Решение. Правата L минува низ точката $M_0(4, 2, 0)$ и е паралелна на векторот $\vec{s} = \{1, 3, 2\}$. Ако M_1 е симетричната точка на M во однос на правата L , тогаш M^* е средина на MM_1 и $\overrightarrow{MM^*} \perp \vec{s}$, црт. 12. Понатаму, параметарските равенки на L се



Црт. 12

$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2t, \quad t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

па затоа $M^*(t+4, 3t+2, 2t)$, за некој $t \in \mathbf{R}$. Имаме, $\overrightarrow{MM^*} = \{t+2, 3t-1, 2t-4\}$ и како $\overrightarrow{MM^*} \perp \vec{s}$ наоѓаме $\overrightarrow{MM^*} \cdot \vec{s} = 0$, т.е.

$$t+2+3(3t-1)+2(2t-4)=0$$

$$14t-9=0$$

$$t = \frac{9}{14}.$$

Значи, $x = \frac{9}{14} + 4 = \frac{65}{14}$, $y = 3 \cdot \frac{9}{14} + 2 = \frac{55}{14}$, $z = 2 \cdot \frac{9}{14} = \frac{18}{14}$, т.е. $M^*(\frac{65}{14}, \frac{55}{14}, \frac{18}{14})$. Понатаму, ако $M_1(x, y, z)$, тогаш $\overrightarrow{MM^*} = \overrightarrow{M^*M_1}$, па затоа

$$\{\frac{65}{14}-2, \frac{55}{14}-3, \frac{18}{14}-4\} = \{x-\frac{65}{14}, y-\frac{55}{14}, z-\frac{18}{14}\}$$

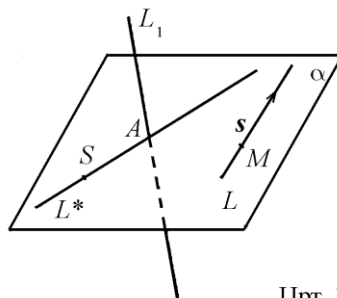
т.е. $x = \frac{51}{7}, y = \frac{34}{7}, z = -\frac{10}{7}$ и симетричната точка на M во однос на L е $M_1(\frac{51}{7}, \frac{34}{7}, -\frac{10}{7})$. ♦

13.2. Пример. Дадени се точката $S(-3, -1, 2)$ и правите L и L_1 чии равенки се

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}, \quad (3)$$

соодветно. Најди ги равенките на правата која минува низ точката S и ги сече правите L и L_1 .



Црт. 13

Решение. Повлекуваме рамнина α која ги содржи точката S и правата L . Потоа наоѓаме пресек на L_1 и α , т.е. наоѓаме $A = L_1 \cap \alpha$. Правата L^* низ точките S и A е бараната права (црт. 13).

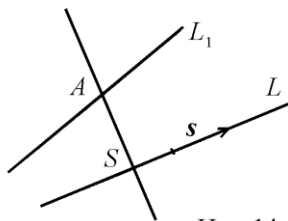
Правата L ја содржи точката $M(-5, 3, -1)$ и е паралелна со векторот $\vec{s} = \{2, -4, 3\}$. Ако $X(x, y, z)$ е произволна точка од рамнината α , тогаш векторите $\overrightarrow{SX} = \{x+3, y+1, z-2\}$, $\overrightarrow{SM} = \{-2, 4, -3\}$ и $\vec{s}$ се компланарни, па затоа

$$(\overrightarrow{SX}, \overrightarrow{SM}, \vec{s}) = 0,$$

т.е.

$$\begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Но, последното равенство важи за секоја точка X од просторот. Имено, втората и третата ред-ца во детерминантата во (4) се пропорционални,



Црт. 14

т.е. векторите $\overrightarrow{SM}$ и $\vec{s}$ се колинеарни. Последното значи дека точката S лежи на правата L (проверете!).

Според тоа, задачата има бесконечно многу решенија, кои ги добиваме ако земеме произволна точка A од L_1 и повлечеме права SA . На пример, за $A(3, -1, 2)$ ја добиваме правата

$$\frac{x-3}{-3-3} = \frac{y+1}{-1+1} = \frac{z-2}{2-2}, \text{ т.е. } \frac{x-3}{-6} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{0}. \blacklozenge$$

13.3. Пример. Најдете ја ортогоналната проекција на правата L чии равенки се

$$\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 4, \quad t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (5)$$

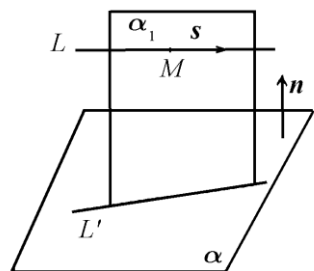
врз рамнината α :

$$2x - 2y + 3z + 5 = 0. \quad (6)$$

Решение. Равенката на правата L ја запишуваме во каноничен вид

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{1}, \quad (7)$$

што значи дека L минува низ точката $M(3, -1, 4)$ и е паралелна со векторот $\vec{s} = \{5, 1, 1\}$. Јасно, рамнината α е нормална на векторот $\vec{n} = \{2, -2, 3\}$.



Црт. 15

Ортогоналната проекција на правата L врз рамнината α е пресечната права L' на рамнината α и рамнината α_1 која минува низ L и е нормална на α , црт. 15. Јасно, α_1 ја содржи точката M и е паралелна со векторите $\vec{s}$ и $\vec{n}$, па според формулата (7) од параграф 6 нејзината равенка е

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

т.е.

$$5x - 13y - 12z + 20 = 0.$$

Конечно, проекцијата на правата L е зададена со системот равенки

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z + 5 = 0 \\ 5x - 13y - 12z + 20 = 0. \end{cases}$$

13.4. Пример. Најдете ја равенката на рамнината која минува низ точката $Q(-3, 0, 2)$ и правата L зададена со

$$\begin{cases} 3x+2y+3z-5=0 \\ x+y+z-4=0. \end{cases} \quad (8)$$

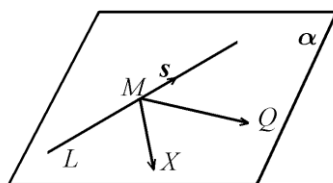
Решение. Векторот $\vec{s}$ кој е паралелен со правата L е $\vec{s}=[\vec{n}, \vec{n}']$, каде $\vec{n}=\{3,2,3\}$ и $\vec{n}'=\{1,1,1\}$ се векторите нормални на рамнините во чиј пресек е правата L . Значи,

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{-1, 0, 1\}.$$

За да определиме точка $M \in L$ доволно е во (8) да ставиме $x=0$ и да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} 2y+3z-5=0 \\ y+z-4=0. \end{cases}$$

Ако втората равенка ја помножиме со 2 и ја одземеме од првата добиваме $z+3=0$, т.е. $z=-3$. Со замена во втората равенка наоѓаме $y=7$ и точката M е $M(0,7,-3)$.



Црт. 16

Ако $X(x,y,z)$ е произволна точка од бараната рамнина α (црт. 16), тогаш векторите $\overrightarrow{MX}, \overrightarrow{MQ}$ и $\vec{s}$ се компланарни, т.е. $(\overrightarrow{MX}, \overrightarrow{MQ}, \vec{s})=0$ и равенката на рамнината α е

$$\begin{vmatrix} x & y-7 & z+3 \\ -3 & -7 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } 7x+2y+7z+7=0. \quad \blacklozenge$$

13.5. Пример. Најдете ја равенката на рамнината α која е паралелна со правата

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2 + 7t \\ z = 1 + 2t, \quad t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (9)$$

и ја содржи правата L_1

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 2 - 3t, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (10)$$

Решение. Од (10) добиваме дека правата L_1 ја содржи точката $M(3, -4, 2)$ и е паралелна со векторот $\vec{s}' = \{2, 1, -3\}$, а од (9) дека правата L ја содржи точката $N(-5, 2, 1)$ и е паралелна со векторот $\vec{s} = \{4, 7, 2\}$. Значи, бараната рамнина Π ја содржи точката M и е паралелна со векторите $\vec{s}$ и $\vec{s}'$, па од формулата (7) од параграф 6 следува дека нејзината равенка е

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } 23x - 16y + 10z - 153 = 0. \blacklozenge$$

13.6. Пример. Дадени се правата L и рамнината α чии равенки се

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{5} \quad (11)$$

$$x + y + 4z - 9 = 0 \quad (12)$$

соодветно. Најдете ја равенката на правата L_1 која е симетрична на правата L во однос на рамнината α .

Решение. Од L имаме точка $M(1, 2, -3)$ и вектор $\vec{s} = \{2, -4, 5\}$, а од α имаме вектор $\vec{n} = \{1, 1, 4\}$. Бидејќи $\vec{s}\vec{n} = 18 \neq 0$ заклучуваме дека правата и рамнината не се паралелни, црт. 18.

Низ точката M повлекуваме права L^* нормална на α , т.е. паралелна со $\vec{n}$. Нејзините равенки се

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{4} = t. \quad (13)$$

Наоѓаме пресек $M' = L^* \cap \alpha$. Од (13) имаме $x = t+1, y = t+2, z = 4t-3$ и ако замениме во (12) добиваме

$$t+1+t+2+4(4t-3)-9=0,$$

т.е. $t = 1$. Според тоа, координатите на M' се

$$x = 2, y = 3, z = 1,$$

т.е. $M'(2, 3, 1)$. Од $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M'M_1}$ ги определуваме координатите на точката M_1 , симетрична на точката M во однос на рамнината α . Имаме,

$$\{1, 1, 4\} = \{x-2, y-3, z-1\},$$

т.е. $x = 3, y = 4, z = 5$ и $M_1(3, 4, 5)$.

Наоѓаме $N = L \cap \alpha$. Од (11) имаме $x = 2t+1, y = -4t+2, z = 5t-3$ и со замена во (12) добиваме

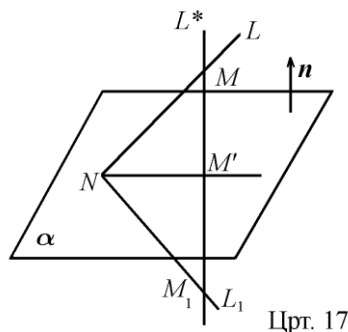
$$2t+1-4t+2+4(5t-3)-9=0, \text{ т.е. } t = 1.$$

Според тоа, координатите на N се

$$x = 2 \cdot 1 + 1 = 3, y = -4 \cdot 1 + 2 = -2, z = 5 \cdot 1 - 3 = 2, \text{ т.е. } N(3, -2, 2).$$

Конечно, бараната права L^* симетрична на L во однос на α има равенки

$$\frac{x-3}{3-3} = \frac{y+2}{4+2} = \frac{z-2}{5-2}, \text{ т.е. } \frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-2}{3}. \blacklozenge$$



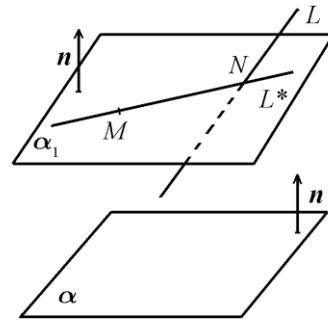
Црт. 17

13.7. Пример. Дадени се рамнината α и правата L чии равенки се

$$3x - 2y - 3z - 7 = 0 \quad (14)$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 2t \\ z = 8 + 2t. \end{cases} \quad (15)$$

Составете равенка на права L^* која минува низ точката $M(3, -2, -4)$, паралелна е со рамнината α и ја сече правата L .



Црт. 18

Решение. Бидејќи правата L^* е паралелна со рамнината α , таа лежи во рамнина α_1 паралелна на α . Но, тоа значи дека векторот нормален на α_1 е $\vec{n} = \{3, -2, -3\}$ и како $M \in \alpha_1$ добиваме дека нејзината равенка е $\vec{n} \overrightarrow{MX} = 0$, т.е.

$$\{x - 3, y + 2, z + 4\} \cdot \{3, -2, -3\} = 0,$$

односно равенката на α_1 е

$$3x - 2y - 3z - 25 = 0. \quad (16)$$

Наоѓаме $N = L \cap \alpha_1$. Имаме

$$3(2 + 3t) - 2(4 - 2t) - 3(8 + 2t) - 25 = 0$$

$$7t - 51 = 0$$

$$t = \frac{51}{7}.$$

Значи, координатите на N се:

$$x = 2 + \frac{3 \cdot 51}{7} = \frac{167}{7}, y = 4 - \frac{2 \cdot 51}{7} = -\frac{74}{7}, z = 8 + \frac{2 \cdot 51}{7} = \frac{158}{7},$$

па е $N(\frac{167}{7}, -\frac{74}{7}, \frac{158}{7})$. Конечно, правата L^* минува низ точките M и N и нејзините равенки се

$$\frac{x-3}{\frac{167}{7}-3} = \frac{y+2}{-\frac{74}{7}+2} = \frac{z+4}{\frac{158}{7}+4}, \text{ т.е. } \frac{x-3}{73} = \frac{y+2}{-30} = \frac{z+4}{93}. \blacklozenge$$

14. ПОИМ ЗА ПОВРШИНА ОД ВТОР РЕД

14.1. Дефиниција. Површина од втор ред го нарекуваме геометриското место точки, чии Декартови правоаголни координати задоволуваат равенка од видот

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

во која барем еден од коефициентите $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ е различен од нула.

Притоа, равенката (1) ја нарекуваме *општа равенка* на површината од втор ред.

14.2. Забелешка. Како што знаеме, равенката (1) и равенката, добиена после трансформација на координатите, се алгебарски еквивалентни.

14.3. Трансформација на коефициентите на равенка на површина од втор ред при паралелен пренос на Декартовиот правоаголен координатен систем. Во равенката (1) коефициентите $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ ќе ги нарекуваме *коефициенти на квадратниот дел на (1)*, коефициентите a_{14}, a_{24}, a_{34} ќе ги нарекуваме *коефициенти на линеарниот дел на (1)*, а коефициентот a_{44} ќе го нарекуваме *слободен член на равенката (1)*.

14.4. При паралелен пренос на Декартовиот правоаголен координатен систем старите и новите координати се поврзани со равенките

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad (2)$$

каде x_0, y_0, z_0 се координатите на новиот координатен почеток O' во однос на стариот координатен систем (зошто?). Ако од (2) замениме во (1) добиваме

$$\begin{aligned} & a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{13}x'z' \\ & + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

каде

$$\begin{cases} a'_{14} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} \\ a'_{24} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} \\ a'_{34} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} \\ a'_{44} = a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{23}y_0z_0 + 2a_{13}x_0z_0 \\ \quad + 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}. \end{cases} \quad (4)$$

Со тоа ја докажавме следнава лема.

Лема. При паралелен пренос на Декартовиот правоаголен координатен систем коефициентите на квадратниот дел на (1) не се менуваат, а коефициентите на линеарниот дел и слободниот член на (1) се трансформираат со формулите (4). ♦

14.4. Трансформација на коефициентите на равенка на површина од втор ред при ротација на Декартовиот правоаголен координатен систем. Како што знаеме, во овој случај старите и новите координати се поврзани со равенки од видот:

$$\begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' + m_{13}z' \\ y = m_{21}x' + m_{22}y' + m_{23}z' \\ z = m_{31}x' + m_{32}y' + m_{33}z' \end{cases} \quad (5)$$

каде $m_{ij} = m_{ji}$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$ се косинусите на аглиите меѓу старите и новите координатни оски. Ако од (5) замениме во (1) и ги групираме коефициентите пред различните степени на x', y', z' ја добиваме равенката на површината S во системот $O'x'y'z'$. Оваа равенка има вид

$$\begin{aligned} & a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z' \\ & + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Притоа, за коефициентите a'_{ij} важи следново тврдење.

Лема. При ротација на Декартовиот правоаголен координатен систем коефициентите на квадратниот дел на (6) се изразуваат само со константите m_{ij} , кои фигурираат во (5), и со коефициентите на квадратниот дел на (1); коефициентите на линеарниот дел на (6) се изразуваат само со константите m_{ij} и коефициентите на линеарниот дел на (1), а слободниот член не се менува. Притоа, ако во (1) сите коефициенти на линеарниот дел се еднакви на нула, тогаш во (6) сите коефициенти на линеарниот дел се еднакви на нула. ♦

14.5. Забелешка. Од лема 14.3 следува дека со паралелен пренос на Декартовиот правоаголен координатен систем може да се упрости групата линеарни членови на равенката (1), без да се менува групата квадратни членови, а потоа со негова ротација може да се упрости групата квадратни членови на равенката (1).

14.6. Центар на површина од втор ред. Сакаме да најдеме таков Декартов правоаголен координатен систем $O'x'y'z'$ (добиеен со паралелен пренос на системот $Oxyz$), во кој равенката (3) на дадена површина од втор ред S не ги содржи собирците $2a'_{14}x', 2a'_{24}y', 2a'_{34}z'$, т.е. коефициентите $a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}$ се еднакви на нула. Со замена во формулите (4) добиваме дека x_0, y_0, z_0 треба да се решение на системот

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Равенките (7) ги нарекуваме *равенки на центарот на површината од втор ред S* , а точката O' со координати (x_0, y_0, z_0) , каде x_0, y_0, z_0 се решенија на системот (7) ја нарекуваме *центар на S* .

Нека допуштиме, дека површината од втор ред S има центар O' , т.е. дека системот (7) има решение (x_0, y_0, z_0) . Да го пренесеме координатниот почеток

во центарот O' . Бидејќи при паралелен пренос коефициентите на квадратниот дел не се менуваат и координатниот почеток се пренесува во центарот добиваме дека равенката на површината S во координатниот систем $O'x'y'z'$ е:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{13}x'z' + a_{44} = 0.$$

Очигледно, ако точката $M(x', y', z')$ лежи на површината S , тогаш и точката $M^*(-x', -y', -z')$, симетрична на M во однос на O' исто така лежи на S . Според тоа, ако за површината S постои центар O' , тогаш таа е централно симетрична со центар на симетрија O' .

Јасно, егзистенцијата на центар на површина од втор ред е поврзана со решливоста на системот равенки на центарот (7). Притоа, ако системот равенки на центарот има единствено решение, тогаш површината од втор ред ја нарекуваме *централна*.

14.7. Лема. Во некој Декартов правоаголен координатен систем равенката на дадена површина од втор ред S не ги содржи собираците

$$2a_{12}x'y', 2a_{23}y'z', 2a_{13}x'z'.$$

Доказ. Со F да ја означиме групата квадратни членови на равенката (1), т.е.

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz \quad (8)$$

и да ги разгледаме вредностите на F во точките чии координати x, y, z се поврзани со релацијата

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

т.е. во точките на сферата σ со центар во координатниот почеток и радиус 1. Нека P е точка на сферата во која $F(x, y, z)$ достигнува максимум (егзистенцијата на точката P се докажува во анализа и таа следува од тоа што непрекинатата функција $F(x, y, z)$ дефинирана на ограничено и затворено множество σ го достигнува својот максимум). Дефинираме нова оска Oz' со координатен почеток O и да минува низ P , а оските Ox' и Oy' земаме да се нормални на оската Oz' . Очигледно, во координатниот систем $Ox'y'z'$ точката P има координати $(0, 0, 1)$.

Во новиот координатен систем $Ox'y'z'$ изразот F има вид

$$F = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{13}x'z' \quad (10)$$

а сферата σ е определена со равенката

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad (11)$$

па затоа вредностите на F во точките од σ ги добиваме со помош на (10) за сите вредности на (x', y', z') кои ја задоволуваат (11). Во случајот F ќе има максимум во точката $(0, 0, 1)$.

Ќе докажеме, дека во (10) коефициентите a'_{23} и a'_{13} се еднакви на нула. На пример, ќе докажеме, дека $a'_{13} = 0$. За таа цел ќе ги разгледаме вредностите на F во точките на кружницата K која е пресек на сферата (11) со рамнината $y' = 0$, т.е. со рамнината $Ox'z'$. Нека θ е аголот кој го формира радиус-векторот на точката M на кружницата K со оската Oz' . Координатите на точката M се

$$x' = \sin \theta, y' = 0, z' = \cos \theta. \quad (12)$$

Ако од (12) замениме во (10) го добиваме следниов израз за F во точките од K :

$$F = a'_{11} \sin^2 \theta + a'_{33} \cos^2 \theta + 2a'_{13} \sin \theta \cos \theta = \frac{a'_{11} + a'_{33}}{2} + \frac{a'_{33} - a'_{11}}{2} \cos 2\theta + a'_{13} \sin 2\theta \quad (13)$$

Според тоа, вредностите на F во точките на K можат да се претстават во вид на функцијата (13) од аголот θ . Оваа функција има за $\theta = 0$ максимална вредност, што следува од (12), бидејќи за $\theta = 0$ се добива точката $(0, 0, 1)$, во која F има максимум. Оттука следува дека изводот на функцијата (13) во точката $\theta = 0$ е еднаков на нула. Наоѓаме извод на (13) по θ , во добиениот израз

$$F' = -(a'_{33} - a'_{11}) \sin 2\theta + 2a'_{13} \cos 2\theta$$

ставаме $\theta = 0$ и добиваме $2a'_{13} = 0$, т.е. $a'_{13} = 0$. За да докажеме, дека $a'_{23} = 0$ треба да ги разгледаме вредностите на F на кружницата K^* , која е пресек на сферата (11) со рамнината $x' = 0$ и да ги повториме претходните размислувања. Според тоа, во координатниот систем $Ox'y'z'$ групата квадратни членови F на равенката на површината S има вид:

$$F = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2, \quad (14)$$

при што за изборот на оските Ox' и Oy' не поставивме никакви дополнителни услови, освен барањето оските Ox', Oy' и Oz' да се по парови заемно нормални. Со други зборови, при ротација на системот $Ox'y'z'$ околу оската Oz' за произволен агол групата квадратни членови има вид (14). Притоа координатите x' и y' се трансформираат по формулите за ротација на координати на рамнина, а координатата z' не се менува. Затоа може да се избере таков координатен систем, во кој коефициентот a'_{12} пред производот $x'y'$ ќе биде еднаков на нула. ♦

14.8. Последица. Постои таков Декартов правоаголен координатен систем $Ox'y'z'$ во кој равенката (1) на површината S прима вид:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0. \quad (15)$$

14.9. Забелешка. Сведувањето на равенката (1) на површината S во видот (15) го нарекуваме *стандардно упростување* на равенката на површината.

14.10. Забелешка. Во доказот на лема 14.7 спомнавме трансформација на координатите x' и y' по формули за ротација на координатна рамнина. Ако x'' и y'' се новите координати после ротација за агол φ , тогаш врската на старите и новите координати е дадена со формулите

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi \\ y' = x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi \end{cases} \quad (16)$$

Притоа може да се докаже дека во случај кога коефициентот a'_{12} од (14) е различен од нула, тогаш при ротација за агол φ за кој важи

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a'_{11} - a'_{22}}{2a'_{12}},$$

се анулира членот пред производот $x''y''$, факт кој директно го искористивме во доказот на претходната лема.

15. КЛАСИФИКАЦИЈА НА ЦЕНТРАЛНИ ПОВРШНИ ОД ВТОР РЕД

15.1. Нека S е централна површина од втор ред и да го реализираме стандардното упростување на равенката на S . Според последица 14.8 равенката на S го прима следниов вид

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0$$

Понатаму, ако координатниот почеток на системот го пренесеме во центарот на S , чии координати се решенија на системот

$$\begin{cases} a'_{11}x' + a'_{14} = 0 \\ a'_{22}y' + a'_{24} = 0 \\ a'_{33}z' + a'_{34} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

добиваме дека равенката на површината S е од видот

$$a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a'_{33}z''^2 + a'_{44} = 0$$

при што, согласно со разгледувањата во параграф 14 системот (1) има единствено решение, па затоа $a'_{ii} \neq 0$, за $i=1,2,3$. Според тоа, ако S е централна површина од втор ред, тогаш нејзината равенка можеме да ја сведеме на видот

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0 \quad (2)$$

при што $a_{ii} \neq 0$, за $i=1,2,3$ (крајниот координатен систем го означуваме со $Oxyz$).

Во натамошните разгледувања, во зависност од знаците на коефициентите a_{ii} , за $i=1,2,3,4$ ќе ги класифицираме централните површини од втор ред.

15.2. Дефиниција. Ако коефициентите a_{ii} , $i=1,2,3$ на равенката (2) се со ист знак, а коефициентот a_{44} е различен од нула, тогаш површината S ќе ја нарекуваме *елипсоид*.

Ако коефициентите a_{ii} , за $i=1,2,3,4$ се со ист знак, тогаш левата страна на (2) е различна од нула за секои $x, y, z \in \mathbf{R}$, т.е. равенката на површината S не ја задоволува ниту една точка. Во случајов површината S ќе ја нарекуваме *имгинарен елипсоид*.

Ако знакот на коефициентите a_{ii} , за $i=1,2,3$ е спротивен од знакот на коефициентот a_{44} , тогаш површината S ја нарекуваме *реален елипсоид*. Во натамошните разгледувања под терминот елипсоид ќе подразбираме реален елипсоид.

Обично, равенката на елипсоидот ја запишуваме во канонична форма, Јасно, броевите $-\frac{a_{44}}{a_{11}}, -\frac{a_{44}}{a_{22}}, -\frac{a_{44}}{a_{33}}$, се позитивни и истите ќе ги означиме со a^2, b^2, c^2 , соодветно. При овие ознаки равенката на елипсоидот го добива видот

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3)$$

и истата ја нарекуваме *канонична равенка* на елипсоидот. Да забележиме дека, ако елипсоидот е зададен со својата канонична равенка (3), тогаш оските Ox, Oy, Oz се оски на симетрија и истите ги нарекуваме *главни оски на елипсоидот*.

15.3. Дефиниција. Ако од четирите коефициенти $a_{ii}, i=1,2,3,4$ два се позитивни, а два се негативни, тогаш површината S ќе велиме дека е *еднополов хиперболоид*.

Обично равенката на еднополовиот хиперболоид ја запишуваме во канонична форма. Нека $a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} < 0, a_{44} < 0$. Тогаш броевите $-\frac{a_{44}}{a_{11}}, -\frac{a_{44}}{a_{22}}, \frac{a_{44}}{a_{33}}$, се позитивни и истите да ги означиме со a^2, b^2, c^2 соодветно. При овие ознаки равенката (2) на еднополовиот хиперболоид можеме да ја запишеме во следниот вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

и истата ја нарекуваме *канонична равенка* на еднополовиот хиперболоид. Да забележиме дека, ако еднополовиот хиперболоид е зададен со својата канонична равенка (4), тогаш оските Ox, Oy, Oz ги нарекуваме негови *главни оски*.

15.4. Дефиниција. Ако знакот на еден од коефициентите a_{11}, a_{22}, a_{33} е спротивен од знаците на останатите три од коефициентите $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$, тогаш за површината S ќе велиме дека е *двополов хиперболоид*.

Да ја запишеме равенката на двополовиот хиперболоид во канонична форма. Нека $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} > 0, a_{44} < 0$. Тогаш $\frac{a_{44}}{a_{11}} > 0, \frac{a_{44}}{a_{22}} > 0, -\frac{a_{44}}{a_{33}} > 0$ и овие броеви да ги означиме со a^2, b^2, c^2 соодветно. При овие ознаки равенката (2) на двополовиот хиперболоид можеме да ја запишеме во следниот вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (5)$$

и истата ја нарекуваме *канонична равенка* на двополовиот хиперболоид. Притоа, ако двополовиот хиперболоид е зададен со својата канонична равенка, тогаш оските Ox, Oy, Oz ги нарекуваме негови *главни оски*.

15.5. Дефиниција. Ако коефициентот a_{44} е еднаков на нула, тогаш површината S ќе ја нарекуваме *конус од втор ред*.

Ако коефициентите $a_{ii}, i=1,2,3$ се со ист знак, тогаш левата страна на (2) е еднаква на нула ако и само ако $x=y=z=0$, т.е. равенката на површината S ја задоволува само една точка, координатниот почеток. Во овој случај за површината S ќе велиме дека е *имагинарен конус од втор ред*. Ако коефициентите $a_{ii}, i=1,2,3$ имаат различни знаци, тогаш површината S ја нарекуваме *реален конус од втор ред*.

Нека $a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} < 0$ и да означиме $\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, -\frac{1}{a_{33}}$ со a^2, b^2, c^2 соодветно. При овие ознаки равенката (2) ја запишуваме во вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (6)$$

и истата ја нарекуваме *канонична равенка* на реален конус од втор ред.

16. КЛАСИФИКАЦИЈА НА НЕЦЕНТРАЛНИ ПОВРШНИНИ ОД ВТОР РЕД

16.1. Нека S е нецентрална површина од втор ред, т.е. површина за која системот (7) од параграф 14 нема решение или има бесконечно многу решенија, односно

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Да го реализираме стандардното упростување на равенката на површината S , при што ја добиваме равенката

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0. \quad (2)$$

Од $I_3 = 0$ и вредноста на I_3 пресметана за равенката (2) следува дека

$$a'_{11}a'_{22}a'_{33} = 0,$$

па затоа барем еден од коефициентите $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$ е еднаков на нула. Во следните разгледувања ќе се осврнеме на можните случаи за коефициентите $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$.

16.2. Нека еден од коефициентите $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$ е еднаков на нула, на пример $a'_{33} = 0$. Од координатите x', y', z' да преминеме во нови координати x, y, z , при што ги користиме формулите

$$x = x' + \frac{a'_{14}}{a'_{11}}, y = y' + \frac{a'_{24}}{a'_{22}}, z = z'. \quad (3)$$

Ако од (3) ги изразиме x', y', z' , замениме на левата страна во (2) и означиме $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{22} = a_{22}$, $a'_{34} = p$, $a'_{44} = q$, ја добиваме следнава равенка на површина-та S во новиот координатен систем $Oxyz$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2pz + q = 0. \quad (4)$$

а) Нека $p = q = 0$. Тогаш, површината S се распаѓа на пар рамнини

$$x \pm \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}y = 0,$$

кои се имагинарни ако a_{11} и a_{22} се со ист знак, а се реални ако a_{11} и a_{22} се со различни знаци.

б) Нека $p = 0$, $q \neq 0$. Равенката (4) го прима видот

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + q = 0. \quad (5)$$

Како што знаеме, теорема 3.3, равенката (5) е равенка на цилиндар со генератриса паралелна со оската Oz . Притоа, ако a_{11}, a_{22}, q се со иста знак, тогаш левата страна на (5) е различна од нула за секои x и y , т.е. цилиндарот ќе биде *имагинарен*. Ако пак меѓу коефициентите a_{11}, a_{22}, q има коефициенти со различни знаци, тогаш цилиндарот ќе биде *реален*. Да забележиме, дека во случај, кога a_{11} и a_{22} имаат исти знаци, а q има спротивен знак, тогаш $-\frac{q}{a_{11}}$ и $-\frac{q}{a_{22}}$ се позитивни.

Ако истите ги означиме со a^2 и b^2 , соодветно, тогаш равенката (5) го прима видот

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Според тоа, во разгледуваниот случај ја добиваме равенката на таканаречениот *елиптичен цилиндар*. Во случај кога a_{11} и a_{22} имаат различни знаци, добиваме *хиперболичен цилиндар*, чија равенка е

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

в) Нека $p \neq 0$. Паралелно ќе го пренесеме координатниот систем во нов координатен почеток $O'(0, 0, -\frac{q}{2p})$. Притоа ќе ги користиме старите ознаки за

координатите x, y, z . Очигледно, за да ја добиеме равенката на површината S во новиот координатен систем, доволно е во равенката (4) да го замениме z со $z - \frac{q}{2p}$, при што ја добиваме равенката

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2pz = 0, \quad (8)$$

која ги определува таканаречените *параболоиди*. Притоа, ако a_{11} и a_{22} имаат еднакви знаци, тогаш параболоидот го нарекуваме *елиптичен* и неговата равенка може да се запише во видот

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (9)$$

Ако a_{11} и a_{22} имаат различни знаци, тогаш параболоидот го нарекуваме *хиперболичен* и неговата канонична равенка го има видот

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (10)$$

16.3. Нека два од коефициентите $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$ се еднакви на нула, на пример $a'_{11} = a'_{22} = 0$. Од x', y', z' да преминеме во нови координати x, y, z :

$$x = x', y = y', z = z' + \frac{a'_{34}}{a'_{33}}. \quad (11)$$

Ако од (11) ги изразиме x', y', z' и ги замениме во (2) и означиме $a'_{33} = a_{33}$, $a'_{14} = p$, $a'_{24} = q$, $a'_{34} = r$, ја добиваме следнава равенка на површината S во новиот координатен систем $Oxyz$:

$$a_{33}z^2 + 2px + 2qy + r = 0. \quad (12)$$

а) Нека $p = q = 0$. Тогаш површината S се распаѓа на пар паралелни рамнини

$$z = \pm \sqrt{-\frac{r}{a_{33}}}. \quad (13)$$

Притоа, ако знаците на r и a_{33} се еднакви, тогаш овие рамнини се имагинарни, а ако знаците на r и a_{33} се различни, тогаш рамнините (13) се реални. При $r = 0$, добиваме една рамнина.

б) Ако еден од коефициентите p или q е различен од нула, тогаш да го ротираме координатниот систем околу оската Oz така што оската Oz да биде паралелна на рамнината $2px + 2qy + r = 0$. Лесно се добива, дека во новодобиениот координатен систем, ако за новите координати ги прифатиме ознаките x, y, z , тогаш равенката (12) прима вид:

$$a_{33}z^2 + 2q'y = 0, \quad (14)$$

која е равенка на *параболичен цилиндар* паралелен со оската Ox .

17. ЕЛИПСОИД

17.1. За испитување на формата на елипсоидот ќе ја користиме неговата канонична равенка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

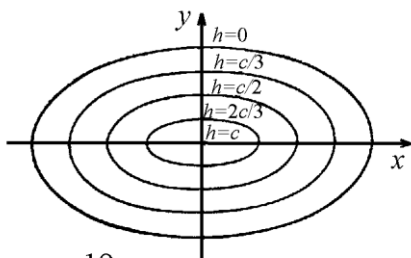
Од равенката (1) следува дека координатните рамнини се рамнини на симетрија на елипсоидот, а координатниот почеток е центар на симетрија. Броевите a, b, c ги нарекуваме полуоски на елипсоидот и тие се еднакви на должините на отсечките од координатниот почеток до пресечните точки на елипсоидот со координатните оски. Понатаму, елипсоидот е ограничена површина и истиот се наоѓа во паралелопипедот $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$.

17.2. Пресеци на елипсоидот со рамнини паралелни со координатните рамнини. Да ја разгледаме линијата L_h која е пресек на елипсоидот (1) со рамнината

$$z = h, \quad (2)$$

која е паралелна на рамнината Oxy . Равенката на проекцијата L_h^* на линијата L_h на рамнината Oxy се добива од равенката (1), ако во неа ставиме $z = h$. Според тоа, равенката на проекцијата има вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \quad (3)$$



црт. 19

Ставаме

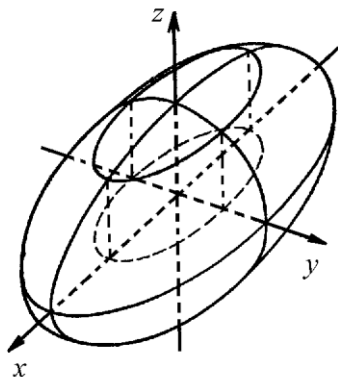
$$a^* = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad (4)$$

и ако замениме во (3) ја добиваме равенката

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (5)$$

т.е. L_h^* е елипса со полуоски a^* и b^* , кои ги пресметуваме според формулите (4). Според тоа, точна е следнава лема.

Лема. Пресеците на елипсоидот (1) со рамнините паралелни со координатните рамнини се елипси. ♦



црт. 20

Претставувањето (скицата) на елипсоидот може да се направи на следниов начин. Во рамнината Oxy да ја разгледаме фамилијата елипси (5), црт. 19, чии полуоски зависат од h , и секоја од овие елипси да поставиме на висина $+h$ и

$-h$ од рамнината Oxy . На овој начин ќе добиеме своевидна „карта“ на елипси. Ако ја искористиме оваа карта го добиваме графичкиот приказ на елипсоидот (1), црт. 20.

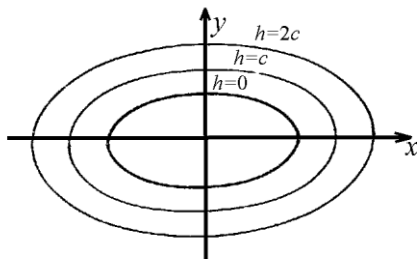
18. ХИПЕРБОЛОИДИ

18.1. Еднополов хиперболоид. Да ја разгледаме каноничната равенка на еднополовиот хиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Од равенката (1) заклучуваме дека координатните рамнини се рамнини на симетрија, а координатниот почеток е центар на симетрија на еднополовиот хиперболоид.

18.2. Да ја разгледаме пресечната линија L_h на еднополовиот хиперболоид (1) со рамнината $z = h$. Равенката на проекцијата L_h^* на линијата L_h на рамнината Oxy се добива од равенката (1), ако во неа ставиме $z = h$. Според тоа, равенката на проекцијата има вид:



црт. 21

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}. \quad (2)$$

Ставаме

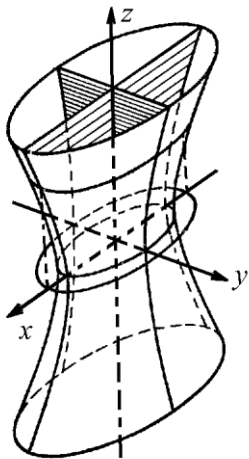
$$a^* = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \quad (3)$$

и ако замениме во (2) ја добиваме равенката

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (4)$$

т.е. L_h^* е елипса со полуоски a^* и b^* , кои ги пресметуваме според формулите (3). Според тоа, точна е следнава лема.

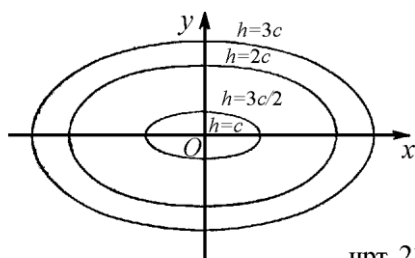
Лема. Пресеците на еднополовиот хиперболоид (1) со рамнините паралелни со координатните рамнини се елипси. ♦



црт. 22

18.3. Претставувањето (скицата) на еднополовиот хиперboloид може да се направи на следниов начин. Во рамнината Oxy да ја разгледаме фамилијата елипси (4), црт. 21, чии полуоски зависат од h , и секоја од овие елипси да поставиме на висина $+h$ и $-h$ од рамнината Oxy . На овој начин ќе добијеме својевидна „карта“ на елипси со чие поврзување ќе го добијеме графичкиот приказ на еднополовиот хиперboloид (1), црт. 22.

Да забележиме дека за $h=0$ се добива најмалата елипса на црт. 21, а со зголемувањето на h димензиите на елипсите неограничено растат. Понатаму, пресеците на еднополовиот хиперboloид со координатните рамнини Oyz и Oxz се хиперболи, кои се определени со равенките



црт. 23

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (5)$$

соодветно, црт. 22.

18.4. Двополов хиперboloид.

Да ја разгледаме каноничната равенка на двополовиот хиперboloид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (6)$$

Од равенката (6) заклучуваме дека координатните рамнини се рамнини на симетрија, а координатниот почеток е центар на симетрија на двополовиот хиперboloид.

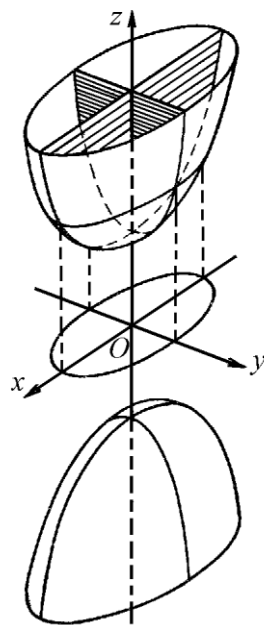
Линијата L_h на пресек на двополовиот хиперboloид (6) со рамнината $z=h$ е елипса, чија проекција на рамнината Oxy има вид

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (7)$$

каде

$$a^* = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b^* = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}. \quad (8)$$

Од формулите (8) следува дека пресек со рамнината $z=h$ е можен само за $|h| \geq c$. Со други зборови, во делот на просторот меѓу рамнините $z=-c$ и $z=+c$ не се содржат точки од двополовиот хиперboloид. На црт. 23 е дадена „картата“ на пресечните линии на двополовиот хиперboloид со рамнините $z=h$, $|h| \geq c$. Ако секоја од овие елипси ја поставиме на висина $-h$ и $+h$ го добиваме графичкиот приказ на двополовиот хиперboloид (6). Да забележиме, дека пресеците на двополовиот хиперboloид со рамнините Oyz и Oxz се хиперболи, црт. 24.



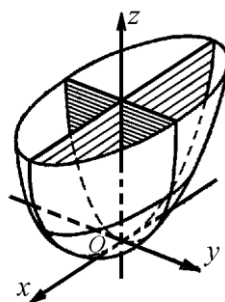
црт. 24

19. ПАРАБОЛОИДИ

19.2. Елиптичен параболоид. Да ја разгледаме каноничната равенка на елиптичниот параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (1)$$

Лесно се гледа дека рамнините Oxz и Oyz се рамнини на симетрија за параболоидот (1). Понатаму, оската Oz , која е пресек на рамнините Oxz и Oyz е оска на симетрија на елиптичниот параболоид (1). Од равенката (1) следува дека елиптичниот параболоид се наоѓа во полупросторот $z \geq 0$. Да ја разгледаме линијата L_h која е пресек на рамнината $z = h$, $h > 0$ и параболоидот (1). Тоа е елипса, чија проекција L_h^* на рамнината Oxy е определена со равенката



црт. 25

$$\frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (2)$$

каде

$$a^* = a\sqrt{h}, \quad b^* = b\sqrt{h}. \quad (3)$$

Од формулите (3) следува дека кога h се зголемува, се зголемуваат и оските на елипсата.

Да ги разгледаме пресеците на елиптичниот параболоид со рамнините $y = h$ и $x = h$, паралелни со координатните рамнини Oxz и Oyz , соодветно.

Рамнината, $x = h$, на пример, го сече елиптичниот параболоид по параболата

$$z - \frac{h^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}, \quad x = h. \quad (4)$$

Очигледно, параболата (4) се добива со паралелен пренос на параболата

$$z = \frac{y^2}{b^2}, \quad x = 0, \quad (5)$$

која е во пресек на елиптичниот параболоид (1) и рамнината $x = 0$ (црт. 25). Со други зборови, елиптичниот параболоид се формира со паралелен пренос на параболата (5), чие теме се движи долж параболата $z = \frac{x^2}{a^2}$, $y = 0$, која е пресек на (1) со рамнината $y = 0$.

19.2. Хиперболичен параболоид. Од каноничната равенка

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (6)$$

следува дека хиперболичниот параболоид има две рамнини на симетрија и тоа рамнините Oxz и Oyz и една оска на симетрија и тоа оската Oz .

Проекцијата L_h^* на линијата L_h , која е пресек на хиперболичниот параболоид (6) со рамнината $z = h$, $h > 0$ е хиперболата

$$\frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \quad (7)$$

со полуоски

$$a^* = a\sqrt{h}, \quad b^* = b\sqrt{h}, \quad (8)$$

а за $h < 0$ е хиперболата

$$\frac{x^2}{a^{*2}} - \frac{y^2}{b^{*2}} = -1, \quad (9)$$

со полуоски

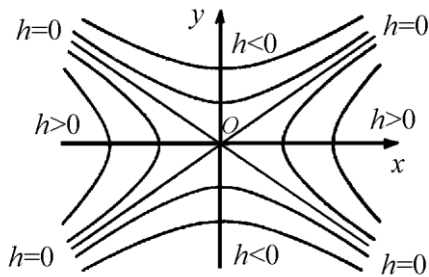
$$a^* = a\sqrt{-h}, \quad b^* = b\sqrt{-h}. \quad (10)$$

Ако ги искористиме формулите (7)-(10), лесно можеме да ја конструираме „картата“ на хиперболичниот параболоид (црт. 26). Уште да забележиме дека рамнината $z = 0$ го пресекува хиперболичниот параболоид по правите

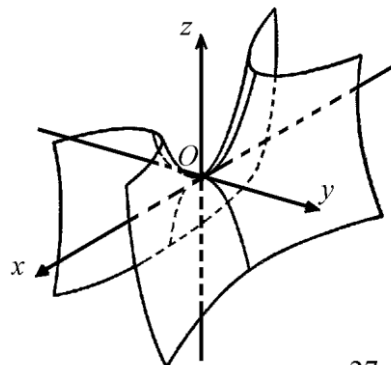
$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (11)$$

Од (8) и (10) следува, дека правите (11) се асимптоти на хиперболите (7) и (9).

Со помош на „картата“ може хиперболичниот параболоид да се претстави во просторот (црт. 27). Како и во случајот со елиптичниот параболоид може да се докаже дека хиперболичниот параболоид може да се добие со паралелен пренос на параболата, која е пресек на параболоидот со Oxz (Oyz) рамнината, кога темето на параболата се движи долж параболата која е пресек на параболоидот со рамнината Oyz (Oxz).



црт. 26



црт. 27

20. КОНУС И ЦИЛИНДАР ОД ВТОР РЕД

20.1. Конус од втор ред. Како што знаеме каноничната равенка на конус од втор ред S е

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (1)$$

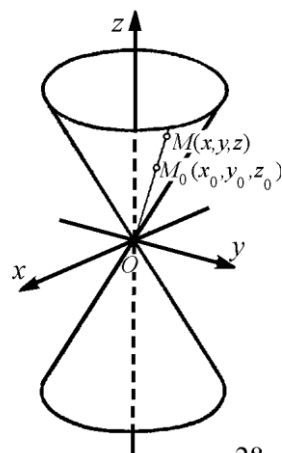
Ќе покажеме, дека конусот S е генериран од права линија која минува низ координатниот почеток O . Природно, точката O ја нарекуваме теме на конусот.

Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка од конусот S и да ја повлечеме правата $L \equiv OM_0$, црт. 28. Ќе докажеме дека координатите на секоја точка $M(x, y, z)$ од правата L ја задоволуваат равенката (1). Точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежи на конусот (1), па затоа

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0. \quad (2)$$

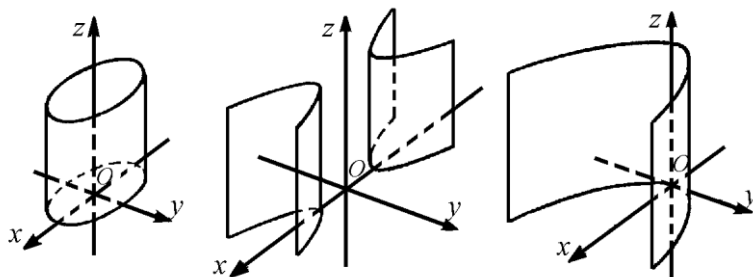
Од друга страна, координатите x, y, z на секоја точка од правата L се дадени со tx_0, ty_0, tz_0 , $t \in \mathbf{R}$ и ако замениме во (1) и извадиме t^2 пред заграда добиваме дека M лежи на конусот.

Претставувањето на S во просторот може да биде направено со методот на пресеци. Имено, пресекот на конусот со рамнината $z = h$ е елипса со полуоски $a^* = \frac{a}{c}h$, $b^* = \frac{b}{c}h$.



црт. 28

20.2. Цилиндри од втор ред. При класификацијата на површините од втор ред видовме дека постојат елиптични, хиперболични и параболични цилиндри. Равенките на овие површини се:



црт. 29

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad y^2 = 2px. \quad (3)$$

На црт. 29 графички се претставени овие површини.

Да забележиме дека при $a = b = r$ елиптичниот цилиндар преминува во кружен цилиндар $x^2 + y^2 = r^2$. Понатаму, секоја рамнина паралелна со Oxy е рамнина на симетрија за цилиндрите (3). Исто така, рамнините Oxz и Oyz се рамнини на симетрија за елиптичниот цилиндар

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и за хиперболичниот цилиндар

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

а оската Oz е нивна оска на симетрија.

ЗАДАЧИ

1. Најдете ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(1,1,1)$ и е нормална на правата $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.
2. Најдете ја пресечната точка на рамнините
 $\Pi_1: x+2y+z-4=0$, $\Pi_2: 3x-5y+3z-1=0$, $\Pi_3: 2x+7y-z-8=0$.
3. Најдете ги равенките на правата p што минува низ точката $M(2,3,4)$, паралелна со рамнината $x-y+2z-3=0$ и ја сече правата $\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{1}$.
4. Дадени се точката $M(2,3,4)$, рамнината

$$\Pi: x-y+2z+5=0$$

и правата

$$p: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Најдете ја:

- а) ортогоналната проекција M' на M врз Π ,
 - б) точката S која е симетрична на M во однос на Π ,
 - в) ортогоналната проекција M'' на M врз p ,
 - г) точката T која е симетрична на M во однос на p .
5. Најдете ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(4,-3,1)$ и е паралелна со правите
 $\frac{x+3}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3}$ и $\frac{x}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{2}$.
 6. Најдете ги равенките на правата што минува низ пресекот на рамнината $2x+y+z-6=0$ со правата $x-2=y-3=\frac{z-4}{2}$ и е нормална на дадената рамнина.
 7. Најдете го аголот меѓу правите што го сврзуваат координатниот почеток со точките $A(-4,4,2)$ и $B(2,1,2)$.
 8. Најдете го аголот меѓу правата $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ и рамнината што минува низ точката $M(2,3,4)$ и е паралелна со векторите $\vec{a} = \{1,1,-1\}$ и $\vec{b} = \{-2,-1,2\}$.
 9. Најдете го прободот на дадената рамнина со дадената права:
 - а) $x+y+z+4=0$, $x+1=\frac{y-2}{2}=z-1$,
 - б) $3x-y+2z-5=0$, $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$.

10. Најдете ја равенката на правата што минува низ точката $M(2, -1, 3)$ и е нормална на рамнината

$$x + 3y - 4z - 13 = 0.$$

Потоа, најдете ја пресечната точка на правата и рамнината.

11. Докажете дека правата

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$$

лежи во рамнината

$$x + y - z - 6 = 0.$$

12. Најдете ја равенката на рамнината што минува низ точката M и правата p :

а) $M(2, 3, 1)$ и $p: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$,

б) $M(5, 2, 3)$ и $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$,

в) $M(1, -1, 2)$ и $p: \begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

13. Дадена е равенката

$$p: \begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0, \\ x + 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Најдете ја равенката на рамнината што минува низ p и

а) низ точката $M(2, -1, 0)$,

б) е паралелна со правата $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-3}$

в) е паралелна со рамнината $x - y + z - 8 = 0$.

14. Проверете дали дадените прави се сечат. Во потврден случај најдете ја пресечната точка S и рамнината во која лежат правите:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$,

б) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 - t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -31 + 3u \\ y = 6 + 2u \\ z = 3 + 6u \end{cases}$,

в) $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ и $\frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z}{12}$.

15. Дадени се правите

$$p: \begin{cases} 7x + 2y - 2z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \text{ и } q: \frac{x-7}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

Најдете го параметарот a , така што p и q се сечат, а потоа определете ја пресечната точка S .

16. Определете го параметарот a , така што правите

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0} \text{ и } \begin{cases} x + y - 5z + 8 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

се сечат. Потоа најдете ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и е нормална на рамнината во која лежат дадените прави.

17. Дадени се правите

$$p: \frac{x-2}{a} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ и } s: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}.$$

Определете го параметарот a , така што правите p и s лежат во иста рамнина. Најдете ја равенката на таа рамнина, пресечната точка S на правите и аголот меѓу правите.

18. Најдете ја ортогоналната проекција M' на точката M врз правата p :

а) $M(1, 2, 8)$ и $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$,

б) $M(1, 0, 1)$ и $p: x = 3z + 2, y = 2z$.

19. Најдете ја ортогоналната проекција на отсечката $AB: A(1, 2, -1); B(3, 1, 2)$ врз правата

$$\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

20. Најдете ги равенките на правата q нормална на правата p , повлечена од точката M :

а) $M(1, 0, 1)$ и $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$,

б) $M(2, -3, 1)$ и $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-1}$.

21. Најдете ја ортогоналната проекција проекција на правата p врз рамнината Π :

а) $p: \frac{x+2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$ и $\Pi: 5x + 2y + 2z - 7 = 0$,

б) $p: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ и $\Pi: x + z - 2 = 0$.

22. Најдете ја равенката на рамнината што минува низ паралелните прави

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \text{ и } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$$

и најдете го растојанието меѓу правите.

23. Најдете го растојанието од точката M до правата p :

а) $M(1, 1, 1)$ и $p: \begin{cases} 4x - 2y - z - 4 = 0 \\ x + z - 15 = 0 \end{cases}$

б) $M(1, 0, 1)$ и $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$,

в) $M(4, 1, 1)$ и $p: \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - 2y - z = 4 \end{cases}$.

24. Најдете го растојанието меѓу правите:

а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x+31}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{6}$

$$\text{б) } \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1} \text{ и } \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{в) } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1} \text{ и } \begin{cases} 2x = y \\ z = 0 \end{cases}.$$

25. Најдете ги равенките на висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето B , ако $A(1, -2, -4)$; $B(3, 1, 3)$; $C(5, 1, -7)$.

26. Темињата на тетраедарот $ABCD$ се: $A(1, 2, -1)$; $B(2, 2, 2)$; $C(3, 3, -4)$, $D(5, 1, -4)$
Најдете ја должината и равенките на висината спуштена од темето D .

27. Најдете ја точката S симетрична на точката M во однос на рамнината Π :

а) $M(13, 0, 3)$ и $\Pi: 6x - y + 3z = 41$,

б) $M(-3, 6, -3)$ и $\Pi: 2x - y + 3z = -23$.

28. Најдете ја точката S , симетрична на точката M во однос на правата p :

$$\text{а) } M(3, 2, 1) \text{ и } p: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{б) } M(2, 9, 6) \text{ и } p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5},$$

$$\text{в) } M(4, 1, -3) \text{ и } p: \frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{2}.$$

29. Најдете ја заедничката нормала на првите

$$\text{а) } \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1} \text{ и } 6x = 3y = 2z,$$

$$\text{б) } \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-6} \text{ и } \frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5}.$$

30. Дадени се точките $A(1, 1, 1)$; $B(1, 2, 3)$; $C(2, -3, -1)$ и $D(1, -2, -1)$.

а) Најдете ја равенката на рамнината што минува низ точката A и е паралелна со правите AB и CD .

б) Најдете ја заедничката нормала на правите AB и CD .

31. Најдете ја равенката на рамнината која минува низ правата $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и е нормална на рамнината $2x + 3y - z = 4$.

32. Правата $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ се проектира на рамнината Oxy од точката $P(5, 5, 2)$.
Најдете ги равенките на проекцијата.

33. Најдете ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(2, 0, 1)$ и е нормална на рамнините $2x - y - 3 = 0$ и $x + y - z + 4 = 0$.

34. Најдете ги равенките на заедничката нормала на правите

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2} \text{ и } \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}.$$

35. Најдете ја равенката на рамнината која минува низ правата

$$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$$

и со рамнината $x-4y-8z+12=0$ зафаќа агол од 45° .

36. Најдете ги равенките на правата која е симетрична на правата $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{5}$ во однос на рамнината $x+y+4z-9=0$.

37. На правата

$$\begin{cases} 5x+3y-1=0 \\ 3x+\frac{9}{2}z+\frac{15}{2}=0 \end{cases}$$

најдете точка која е еднакво оддалечена од рамнините

$$3x+3y-2=0 \text{ и } 4x+y+z+4=0.$$

38. Дадени се точките $A(0,5,0)$; $B(1,-2,0)$; $C(6,-5,0)$. Најдете точка M која лежи во рамнината $3x-2y+z-1=0$ и е еднакво оддалечена од страните на $\triangle ABC$.

39. Напишете ја равенката на рамнината која е нормална на рамнината Oxy и минува низ нормалата повлечена од точката $M(1,-1,1)$ на правата

$$\begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}.$$

40. Најдете ги параметрите α и β од условот да рамнината $\alpha x + \beta y + z + 1 = 0$ ја содржи правата $x-1=y-2=z-3$.

41. Дадени се равенките на две сфери:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = \frac{21}{4} \text{ и } (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Најдете ја равенката на рамнината што минува низ пресечната кружница на сферите и радиусот на таа кружница.

42. Со равенките

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = z$$

е определена кружница. Најдете ја равенката на ортогоналната проекција на оваа кружница врз рамнината Oxy .

43. Пресекот на конусот

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$$

со рамнината

$$x+2z-4=0$$

е елипса. Најдете ја ортогоналната проекција на оваа елипса врз рамнината Oxy .

44. Дадена е равенката

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0. \quad (1)$$

Извршувајќи ја трансформацијата

$$x = \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z')$$

$$y = \frac{1}{3}(2x' - 2y' + z')$$

$$z = \frac{1}{3}(2x' + y' - 2z')$$

докажете дека (1) е равенка на едностран хиперболоид.

45. Дадена е равенката

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz - 18 = 0. \quad (1)$$

Извршувајќи ја трансформацијата

$$x = \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z')$$

$$y = \frac{1}{3}(2x' + y' - 2z')$$

$$z = \frac{1}{3}(2x' - 2y' + z')$$

докажете дека (1) е равенка на елипсоид.

46. Докажете дека правите

$$\begin{cases} 2x + 6y - 6z - 6 = 0 \\ 2x - 3y + 6z - 6 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

лежат на хиперболоидот

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1.$$

47. Докажете дека правите

$$\begin{cases} p(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = s(1 - \frac{y}{b}) \\ s(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = p(1 + \frac{y}{b}) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} p'(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = s'(1 + \frac{y}{b}) \\ s'(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = p'(1 - \frac{y}{b}) \end{cases}$$

за кои било ненулни вредности на p, p', s, s' лежат на хиперболоидот

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

48. Докажете дека правите

$$\begin{cases} p(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = sz \\ s(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2p \end{cases} \text{ и } \begin{cases} p'(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 2s' \\ s'(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = p'z \end{cases}$$

за кои било ненулни вредности на p, p', s, s' лежат на хиперболоидот

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

49. Составете ја равенката на геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од точката $F(0, 0, \frac{a}{2})$ и рамнината $z = -\frac{a}{2}$. Што претставува ова геометриско место на точки?

50. Најдете го продорот на правата

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{-3}$$

низ елипсоидот

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1.$$

51. Правата $x + z = 1, y = 0$ ротира околу z -оската. Напишете ја равенката на ротационата површина.

Х ГЛАВА

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

1. ПОИМ ЗА ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР

1.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{K}$ е поле и $\mathbf{L}$ е непразно множество. Множеството $\mathbf{L}$ го нарекуваме *векторски простор над полето $\mathbf{K}$* ако:

I. на секои два елементи $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ им е придружен еден и само еден елемент $\mathbf{z} \in \mathbf{L}$, кој го нарекуваме *збир* на елементите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, во ознака $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, при што важи

- 1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$,
- 2) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$, за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{L}$,
- 3) во $\mathbf{L}$ постои елемент $\mathbf{o}$, кој го нарекуваме *нулти елемент* (нула, нулти вектор) таков што $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{x}$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и
- 4) за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ постои елемент $\mathbf{y}$, кој го нарекуваме *спротивен* на елементот $\mathbf{x}$, таков што $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{o}$;

II. за секој $\alpha \in \mathbf{K}$ и секој елемент $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ постои елемент $\alpha \mathbf{x} \in \mathbf{L}$, кој го нарекуваме *производ на векторот $\mathbf{x}$ со бројот α* , при што важи

- 1) $\alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$, за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ и за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$;
- 2) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$, за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ и за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$;
- 3) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$; и
- 4) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, за секој $\alpha \in \mathbf{K}$ и за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$.

Елементите на векторскиот простор $\mathbf{L}$ ги нарекуваме *вектори*. Полето $\mathbf{K}$ го нарекуваме *поле на скалари*, а неговите елементи *скалари*.

1.2. Пример. а) Нека $\mathbf{K}$ е поле. Множеството

$$\mathbf{K}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbf{K}, i = 1, 2, \dots, m\},$$

во кое операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар $\alpha \in \mathbf{K}$ се дефинирани со

$$(x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m) \quad \text{и} \quad (1)$$

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_m) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m), \quad (2)$$

соодветно, е векторски простор над полето $\mathbf{K}$ (проверете!). Во $\mathbf{K}^m$ нултиот вектор е $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)$, а векторот $(-x_1, \dots, -x_m)$ е спротивен вектор на векторот $(x_1, \dots, x_m)$.

Како што знаеме, во тридимензионален простор врската меѓу точките и векторите во него може да се воспостави, како и секогаш со помош на фиксиран координатен систем, ако на секоја точка $M(x_1, x_2, x_3)$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ и го при-

дружи́ме ради́ус-векторот $\overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, x_3)$. Јасно, ова пресликување е биекција меѓу точките на тридимензионалниот простор и векторите во него.

б) Множеството $\mathbf{K}_{nm}$ од сите $n \times m$ матрици над полето $\mathbf{K}$ во однос на операциите собирање на матрици и множење на матрица со скалар од $\mathbf{K}$ е векторски простор над $\mathbf{K}$ (проверете!). Нултиот елемент во овој векторски простор е матрицата $O_{nm} = [o_{ij}]_{i=1}^n [j=1]^m$, $o_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, а спротивен елемент на елементот $A_{nm} = [a_{ij}]_{i=1}^n [j=1]^m$ е елементот $B_{nm} = [-a_{ij}]_{i=1}^n [j=1]^m$.

в) Полето комплексни броеви $\mathbf{C}$ е векторски простор над полето реални броеви $\mathbf{R}$ (проверете!). Во случајов комплексните броеви се вектори, а реалните броеви се скалари.

г) Множеството од сите непрекинати реални функции на интервалот $[a, b]$ е векторски простор над полето $\mathbf{R}$, во кој операциите собирање на вектори и производ на вектор со број се определени со:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ и } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. Овој векторски простор го означуваме со $\mathbf{C}([a, b])$.

д) Нека $\mathbf{K}$ е поле. Множеството $\mathbf{K}[x]$ од сите полиноми со коефициенти од полето $\mathbf{K}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. Навистина,

- ако $p(x) \in \mathbf{K}[x]$ и $\alpha \in \mathbf{K}$, тогаш $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$, за некој $k \in \mathbf{N}$ и некои $a_i \in \mathbf{K}$, $i = 0, 1, \dots, k$, па затоа $\alpha a_i \in \mathbf{K}$, $i = 0, 1, \dots, k$ што значи

$$\alpha p(x) = \sum_{i=0}^k (\alpha a_i) x^i, \quad (3)$$

т.е. $\alpha p(x) \in \mathbf{K}[x]$, па со (3) е добро дефиниран производ на елемент од множеството $\mathbf{K}[x]$ со елемент од полето $\mathbf{K}$, и

- ако $p(x), q(x) \in \mathbf{K}[x]$, тогаш $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$, за некои $k \in \mathbf{N}$ и некои

$$a_i \in \mathbf{K} \quad i = 0, 1, \dots, k \text{ и } q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, \text{ за некој } m \in \mathbf{N} \text{ и некои } b_i \in \mathbf{K},$$

$i = 0, 1, \dots, m$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $k \leq m$ и како $a_i + b_i \in \mathbf{K}$, за $i = 0, 1, \dots, k$ и $b_{k+1}, \dots, b_m \in \mathbf{K}$ добиваме дека со

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^k (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=k+1}^m b_i x^i \quad (4)$$

е добро дефиниран збир на елементи од множеството $\mathbf{K}[x]$.

На читателот за вежба му препуштаме да ги провери својствата I 1) - 4) и II 1) - 4) од дефиниција 1.1.

г) Со $Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ да го означиме множеството остатоци по модул n . Како што знаеме, во Z_n се дефинирани операции

$$1) \bar{i} + \bar{j} = \bar{k} \text{ ако и само ако } i + j \equiv k \pmod{n}, \text{ за } \bar{i}, \bar{j} \in Z_n,$$

$$2) \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{k} \text{ ако и само ако } ij \equiv k \pmod{n}, \text{ за } \bar{i}, \bar{j} \in Z_n.$$

Јасно, $(Z_n, +, \cdot)$ е поле ако и само ако n е прост број.

Нека n е прост број. Според примерот а) множеството Z_n^m со соодветно дефинираните операции (1) и (2) е векторски простор над полето Z_n .

Да забележиме дека векторските простори во примерите а), б), в), г) и д) имаат бесконечно многу елементи. За разлика од нив, векторскиот простор Z_n^m има конечно многу елементи и нивниот број е еднаков на бројот на варијациите со повторување од n елементи од класа m , т.е. на n^m . ♦

1.3. Лема. а) Во секој векторски простор L постои единствена нула.

б) Во секој векторски простор L за секој елемент постои единствен спротивен елемент.

в) За секои $a, b \in L$ равенката $a + x = b$ има единствено решение.

Доказ. а) Нека o и o' се нули во векторскиот простор L . Од тоа што o е нула имаме $o' = o' + o$, а од тоа што o' е нула имаме $o = o + o'$, па затоа $o = o + o' = o'$.

б) Нека b и c се спротивни елементи на елементот a . Имаме

$$b = b + o = b + (a + c) = (b + a) + c = o + c = c.$$

Спротивниот елемент на елементот $a \in L$ ќе го означуваме со $-a$.

в) Од $a \in L$ следува дека постои единствен елемент $-a$ таков да $a + (-a) = o$. Од $a + x = b$ следува $(a + x) + (-a) = b + (-a)$, односно

$$x + (a + (-a)) = b + (-a),$$

т.е. $x + o = b + (-a)$. Според тоа, $x = b + (-a)$ и единственоста следува од единственоста на елементот $-a$. Јасно

$$x + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + o = b.$$

Притоа пишуваме $x = b + (-a) = b - a$. ♦

1.4. Лема. Нека L е векторски простор над полето K . Тогаш

а) за секој елемент $x \in L$ важи $0 \cdot x = o$,

б) за секој елемент $x \in L$ спротивниот елемент е $y = (-1)x$,

в) за секои $\alpha, \beta \in K$ и за секои $x, y \in L$ важи

$$\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y \text{ и } (\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x.$$

Доказ. а) Очигледно $x = (0+1)x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = 0 \cdot x + x$. Нека y е спротивниот елемент на x . Тогаш, од равенството $x = 0 \cdot x + x$ имаме

$$\mathbf{o} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = (0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}) + \mathbf{y} = 0 \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{o} = 0 \cdot \mathbf{x}.$$

б) Нека $\mathbf{y} = (-1)\mathbf{x}$. Од тврдењето под а) за збирот $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ добиваме

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = 1 \cdot \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1-1)\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

в) За секој $\alpha \in \mathbf{K}$ и за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ имаме

$$\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \alpha\mathbf{y} - \alpha\mathbf{y} = \alpha[(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y}] - \alpha\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}.$$

За секои $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ и за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ важи

$$(\alpha - \beta)\mathbf{x} = (\alpha - \beta)\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} - \beta\mathbf{x} = [(\alpha - \beta) + \beta]\mathbf{x} - \beta\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{x}. \spadesuit$$

1.5. Аналогно како и во претходните две лема може да се докажат тврдењата искажани во следната лема. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Лема. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. Тогаш,

- 1) $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ако и само ако $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{o}$;
- 2) ако $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{o}$ и $\alpha \neq 0$, тогаш $\mathbf{x} = \mathbf{o}$;
- 3) ако $\alpha\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ и $\alpha \neq 0$, тогаш $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- 4) ако $\alpha\mathbf{x} = \beta\mathbf{x}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, тогаш $\alpha = \beta$;
- 5) $\alpha \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$. $\spadesuit$

2. ПОТПРОСТОРИ

2.1. Дефиниција. Непразното множество $\mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}$ го нарекуваме *потпростор* на векторскиот простор $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$, ако $\mathbf{L}_0$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$ во однос на операциите кои се дефинирани во $\mathbf{L}$.

2.2. Пример. а) Очигледно, во секој векторски простор $\mathbf{L}$ множеството $\{\mathbf{o}\}$ е негов потпростор (зошто?).

б) Целиот простор $\mathbf{L}$ е потпростор на векторскиот простор $\mathbf{L}$ (зошто?).

в) Множеството од сите полиноми $p(x)$ со реални коефициенти е потпростор од просторот $\mathbf{C}([a, b])$ (проверете!). $\spadesuit$

2.3. Лема. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. Непразното множество $\mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}$ е потпростор на векторскиот простор $\mathbf{L}$ ако и само ако од $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$ следува дека $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$, за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$.

Доказ. Нека од $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$ следува дека $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$, за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Ако прво ставиме $\alpha = \beta = 0$, а потоа ставиме $\alpha = -1$, $\beta = 0$ добиваме дека $\mathbf{o} \in \mathbf{L}_0$ и за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_0$ имаме $-\mathbf{x} \in \mathbf{L}_0$. Според тоа, множеството $\mathbf{L}_0$ го содржи нултиот вектор и спротивниот вектор на секој свој елемент. Точноста на останатите аксиоми од дефиницијата за векторски простор во $\mathbf{L}_0$ следува од тоа што тие се испол-

нети за $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}$. Според тоа, $\mathbf{L}_0$ е векторски простор во однос на операциите кои се дефинирани во $\mathbf{L}$, т.е. $\mathbf{L}_0$ е потпростор на $\mathbf{L}$.

Обратно, нека $\mathbf{L}_0$ е потпростор на $\mathbf{L}$. Ако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$, тогаш од тоа што $\mathbf{L}_0$ е векторски простор во однос на операциите кои се дефинирани во $\mathbf{L}$ следува дека $\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$, т.е. $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$. ♦

2.4. Пример. а) Нека $n \in \mathbf{N}$ и

$$\mathbf{K}_n[x] = \{p(x) \in \mathbf{K}[x] \mid \deg p(x) \leq n\}.$$

Ќе докажеме дека $\mathbf{K}_n[x]$ е потпростор на векторскиот простор $\mathbf{K}[x]$.

Нека $p(x), q(x) \in \mathbf{K}_n[x]$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Имаме

$$p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i, \quad k \leq n \quad \text{и} \quad q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, \quad m \leq n.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $k \leq m$. Тогаш $\alpha p(x) + \beta q(x) \in \mathbf{K}[x]$ и притоа важи

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = \sum_{i=0}^k (\alpha a_i + \beta b_i) x^i + \sum_{i=k+1}^m \beta b_i x^i$$

што значи $\deg(\alpha p(x) + \beta q(x)) \leq m \leq n$, па затоа $\alpha p(x) + \beta q(x) \in \mathbf{K}_n[x]$, т.е. $\mathbf{K}_n[x]$ е векторски потпростор од $\mathbf{K}[x]$.

б) Во векторскиот простор $\mathbf{Z}_3^2$ над полето $\mathbf{Z}_3$ множествата

$$\mathbf{U} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\} \quad \text{и} \quad \mathbf{V} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})\}$$

се потпростори од $\mathbf{Z}_3^2$ (проверете). ♦

2.5. Пример. Нека $\mathbf{L} = \mathbf{C}^2$ е векторски простор над $\mathbf{C}$, т.е. над $\mathbf{R}$. Проверете кои од следниве множества се векторски потпростори над $\mathbf{C}$, т.е. над $\mathbf{R}$ или не се потпростори и во двата случаи:

а) $\mathbf{M}_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{L} \mid \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 = 0\},$

б) $\mathbf{M}_2 = \{(z, \bar{z}) \mid z \in \mathbf{C}\},$

в) $\mathbf{M}_3 = \{(\bar{z}, z) \mid z \in \mathbf{C}\},$

г) $\mathbf{M}_4 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{L} \mid z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = 0\}, \text{ и}$

д) $\mathbf{M}_5 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{L} \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \geq 0\}.$

Решение. а) За $(u, v) = (-1+2i, 3-4i)$ и $(w, z) = (0, 0)$ имаме

$$\operatorname{Re} u + \operatorname{Re} v + \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = -1 + 3 + 2 - 4 = 0 \quad \text{и}$$

$$\operatorname{Re} w + \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z = 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

т.е. $(u, v), (w, z) \in \mathbf{M}_1$. Нека $\alpha = 1+i$ и $\beta = 1$. Имаме

$$\alpha(u, v) + \beta(w, z) = (1+i)(-1+2i, 3-4i) + 1(0, 0) = (-3+i, 7-i)$$

и како $-3+7+1-1=4 \neq 0$ заклучуваме дека во случајот кога $\mathbf{L} = \mathbf{C}^2$ е векторски простор над $\mathbf{C}$ множеството $\mathbf{M}_1$ не е потпростор од $\mathbf{L}$.

Нека $\mathbf{L} = \mathbf{C}^2$ е векторски простор над $\mathbf{R}$. Ако $(u, v), (w, z) \in \mathbf{M}_1$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, тогаш $\alpha(u, v) + \beta(w, z) = (\alpha u + \beta w, \alpha v + \beta z)$ и како

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha u + \beta w) + \operatorname{Re}(\alpha v + \beta z) + \operatorname{Im}(\alpha u + \beta w) + \operatorname{Im}(\alpha v + \beta z) = \\ = \alpha \operatorname{Re} u + \beta \operatorname{Re} w + \alpha \operatorname{Re} v + \beta \operatorname{Re} z + \alpha \operatorname{Im} u + \beta \operatorname{Im} w + \alpha \operatorname{Im} v + \beta \operatorname{Im} z \\ = \alpha(\operatorname{Re} u + \operatorname{Re} v + \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) + \beta(\operatorname{Re} w + \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

добиваме дека $\alpha(u, v) + \beta(w, z) \in \mathbf{M}_1$, т.е. во овој случај $\mathbf{M}_1$ е потпростор од $\mathbf{L}$.

б) Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над $\mathbf{C}$. Имаме

$$(1+i, \overline{1+i}), (2+3i, \overline{2+3i}) \in \mathbf{M}_2 \text{ и } i, -i \in \mathbf{C},$$

но

$$\begin{aligned} i(1+i, \overline{1+i}) - i(2+3i, \overline{2+3i}) &= i(1+i, 1-i) - i(2+3i, 2-3i) \\ &= (i-1, i+1) + (-2i+3, -2i-3) \\ &= (-i+2, -i-2) \notin \mathbf{M}_2, \end{aligned}$$

бидејќи $\overline{2-i} = 2+i \neq -2-i$. Според тоа, $\mathbf{M}_2$ не е потпростор од $\mathbf{L}$.

Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над $\mathbf{R}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}_2$. Според тоа, $\mathbf{a} = (u, \bar{u})$ и $\mathbf{b} = (v, \bar{v})$, $u, v \in \mathbf{C}$. Ако $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, тогаш

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = (\alpha u, \overline{\alpha u}) + (\beta v, \overline{\beta v}) = (\alpha u + \beta v, \overline{\alpha u + \beta v}) = (\alpha u + \beta v, \overline{\alpha u} + \overline{\beta v}) \in \mathbf{M}_2$$

бидејќи $\alpha u + \beta v \in \mathbf{C}$, $\alpha = \bar{\alpha}$ и $\beta = \bar{\beta}$. Според тоа, во овој случај $\mathbf{M}_2$ е потпростор од $\mathbf{L}$.

в) Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над $\mathbf{C}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}_3$. Според тоа, $\mathbf{a} = (\bar{u}, \bar{u})$ и $\mathbf{b} = (\bar{v}, \bar{v})$, $u, v \in \mathbf{C}$. Ако $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, тогаш

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = (\overline{\alpha u}, \overline{\alpha u}) + (\overline{\beta v}, \overline{\beta v}) = (\overline{\alpha u + \beta v}, \overline{\alpha u + \beta v}) = (\overline{\alpha u + \beta v}, \overline{\alpha u} + \overline{\beta v}) \in \mathbf{M}_3$$

бидејќи $\overline{\alpha u + \beta v} \in \mathbf{C}$. Според тоа, во овој случај $\mathbf{M}_3$ е потпростор од $\mathbf{L}$.

Јасно, и во случајот кога $\mathbf{L}$ е векторски простор над $\mathbf{R}$ добиваме дека $\mathbf{M}_3$ е потпростор од $\mathbf{L}$ (зошто?).

г) Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над $\mathbf{R}$. За

$$(u, v) = (1-i, -1-i) \text{ и } (w, z) = (-2-2i, 2-2i)$$

имаме

$$\begin{aligned} \bar{u}v + v\bar{u} &= (1-i)(-1+i) + (-1-i)(1-i) = 0 \\ \bar{w}z + z\bar{w} &= (-2-2i)(2+2i) + (-2+2i)(2-2i) = 0 \end{aligned}$$

па затоа $(u, v), (w, z) \in \mathbf{M}_4$. Но, за $\alpha = \beta = 1$ имаме

$$\alpha(u, v) + \beta(w, z) = (-1 - 3i, 1 - 3i)$$

и како

$$(-1 - 3i)(1 + 3i) + (-1 + 3i)(1 - 3i) = -1 - 3i - 3i + 9 - 1 + 3i + 3i + 9 = 16 \neq 0$$

добиваме дека $\alpha(u, v) + \beta(w, z) \notin \mathbf{M}_4$, т.е. $\mathbf{M}_4$ не е потпростор од $\mathbf{L}$. Од ова следува дека и во случај кога $\mathbf{L}$ е векторски простор над $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}_4$ не е потпростор од $\mathbf{L}$.

д) Имаме $\mathbf{M}_5 \subseteq \mathbf{L}$. Нека $(u, v) \in \mathbf{C}$. Тогаш

$$\overline{u}u = |u|^2 \geq 0 \text{ и } \overline{v}v = |v|^2 \geq 0,$$

т.е. $\overline{u}u + \overline{v}v = |u|^2 + |v|^2 \geq 0$, што значи $(u, v) \in \mathbf{M}_5$. Според тоа, $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}_5$, па затоа $\mathbf{M}_5 = \mathbf{L}$, т.е. $\mathbf{M}_5$ е потпростор од $\mathbf{L}$. ♦

2.6. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. За секои три елементи $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbf{L}$ важи $\mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3$. Ова ни овозможува да дефинираме збир на три вектори како вектор

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3.$$

Оттука, со индукција се дефинира збир на конечно многу вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{L}$ како вектор

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_k = (\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{x}_k.$$

Заради комутативноста и асоцијативноста, овој збир не зависи ниту од редоследот, ниту од начинот на кој се групираат собирачите. Претходно кажаното ни овозможува да ја воведеме следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. Ако $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{K}$ и $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{L}$, тогаш векторот $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k$ го нарекуваме *линеарна комбинација на векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$* со коефициенти $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

2.7. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$ и S е непразно подмножество од $\mathbf{L}$. Множеството $L(S)$ од сите линеарни комбинации на вектори од множеството S го нарекуваме *линеарна обвивка на множеството S* .

2.8. Лема. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$ и S е непразно подмножество од $\mathbf{L}$. Линеарната обвивка $L(S)$ на множество S е векторски потпростор на $\mathbf{L}$.

Доказ. Нека S е непразно подмножество на векторскиот простор $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$, $\mathbf{z}, \mathbf{u} \in L(S)$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Тогаш,

$$\mathbf{z} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_j \mathbf{x}_j \text{ и } \mathbf{u} = \beta_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \beta_k \mathbf{y}_k,$$

за некои $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbf{K}$ и $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \in S$. Според тоа,

$$\alpha \mathbf{z} + \beta \mathbf{u} = \alpha \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha \alpha_j \mathbf{x}_j + \beta \beta_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \beta \beta_k \mathbf{y}_k,$$

каде $\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_j, \beta\beta_1, \dots, \beta\beta_k \in \mathbf{K}$ и $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \in S$, што значи

$$\alpha\mathbf{z} + \beta\mathbf{u} \in L(S) . \blacklozenge$$

2.9. Лема. Ако $\{\mathbf{L}_a, a \in \mathbf{A}\}$ е произволна фамилија векторски потпростори на просторот $\mathbf{L}$, тогаш, $\mathbf{L}_0 = \bigcap_{a \in \mathbf{A}} \mathbf{L}_a$ е потпростор од $\mathbf{L}$.

Доказ. Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Тогаш $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}_a$, за секој $a \in \mathbf{A}$ и како $\mathbf{L}_a$ е потпростор добиваме дека $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathbf{L}_a$, за секој $a \in \mathbf{A}$, што значи дека $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathbf{L}_0$. Сега тврдењето следува од лема 2.3. $\blacklozenge$

2.10. Коментар. Ако $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ се потпростори на векторскиот простор $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$, тогаш не секогаш $\mathbf{U} \cup \mathbf{V}$ е потпростор од $\mathbf{L}$. Навистина, нека земеме $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\mathbf{L} = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{U} = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ и $\mathbf{V} = \{(0, \beta, \gamma) \mid \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}$. Тогаш векторите $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$ се елементи на $\mathbf{U} \cup \mathbf{V}$, но

$$1 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b} = (1, 0, 0) + (0, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

и како $(1, 1, 1) \notin \mathbf{U}$ и $(1, 1, 1) \notin \mathbf{V}$, добиваме дека $1 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b} \notin \mathbf{U} \cup \mathbf{V}$, т.е. $\mathbf{U} \cup \mathbf{V}$ не е потпростор од $\mathbf{L} = \mathbf{R}^3$. $\blacklozenge$

2.11. Последица. За секое непразно подмножество S на векторскиот простор $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$ неговата линеарна обвивка $L(S)$ е пресек на сите потпростори кои го содржат множеството S .

Доказ. Нека $\{\mathbf{L}_\alpha, \alpha \in \mathbf{A}\}$ е фамилијата од сите потпростори кои го содржат непразното множество S . Бидејќи $\mathbf{L}_\alpha$ е потпростор добиваме дека тој ја содржи секоја линеарна комбинација на елементи од S , што значи $L(S) \subset \mathbf{L}_\alpha$, за секој $\alpha \in \mathbf{A}$. Значи, $L(S) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbf{L}_\alpha$ и како $L(S) \in \{\mathbf{L}_\alpha, \alpha \in \mathbf{A}\}$ добиваме $L(S) = \bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} \mathbf{L}_\alpha$. $\blacklozenge$

2.12. Дефиниција. Нека

$$\mathbf{L}_i, i = 1, 2, \dots, k \tag{1}$$

е конечна фамилија потпростори на векторскиот простор $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{P}$. Множеството

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \in \mathbf{L}_i, i = 1, 2, \dots, k\}$$

го нарекуваме *сума на потпросторите* (1) и го означуваме со еден од симболите

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{L}_k \text{ или } \sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i .$$

2.13. Забелешка. а) Непосредно од асоцијативноста и комутативноста на собирањето на вектори следува

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i + \sum_{i=k+1}^p \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^p \mathbf{L}_i,$$

за секои векторски потпростори $\mathbf{L}_i$, $i=1,2,\dots,p$ на векторски простор $\mathbf{L}$.

б) Бидејќи за секој $i=1,2,\dots,k$ секој вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_i$ може да се запише во видот $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i$, каде $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$, за $j \neq i$ добиваме дека за секој $i=1,2,\dots,k$ важи $\mathbf{L}_i \subseteq \sum_{j=1}^k \mathbf{L}_j$.

в) Нека $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ се потпростори на векторски простор $\mathbf{L}$ такви што $\mathbf{L}_1 \subseteq \mathbf{L}_2$. Од тврдењето под б) следува дека $\mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$. Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$. Тогаш $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, за некои $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{L}_2$. Но, $\mathbf{L}_1 \subseteq \mathbf{L}_2$, па затоа $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{L}_2$ и како $\mathbf{L}_2$ е векторски простор добиваме $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathbf{L}_2$, т.е. $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_2$. Конечно, од $\mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ и $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_2$ добиваме дека $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2$.

2.14. Теорема. Нека (1) е конечна фамилија потпростори на векторскиот простор $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$. Тогаш $\sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i$ е потпростор на $\mathbf{L}$.

Доказ. Нека (1) е конечна фамилија потпростори на векторскиот простор $\mathbf{L}$. Тогаш $\mathbf{L}_1 \subseteq \sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i$, па затоа $\sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i \neq \emptyset$. Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Тогаш $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i$, $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mathbf{y}_i$, каде $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in \mathbf{L}_i$, за $i=1,2,\dots,k$. Но, $\mathbf{L}_i$ е потпростор, па затоа $\alpha \mathbf{x}_i + \beta \mathbf{y}_i \in \mathbf{L}_i$, за $i=1,2,\dots,k$, па затоа $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k (\alpha \mathbf{x}_i + \beta \mathbf{y}_i) \in \sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i$, т.е. $\sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i$ е потпростор на $\mathbf{L}$. ♦

2.15. Теорема. Сумата на потпросторите (1) на векторскиот простор $\mathbf{L}$ е еднаква на пресекот на сите потпростори на $\mathbf{L}$ кои го содржат секој собирок $\mathbf{L}_i$, $i=1,2,\dots,k$.

Доказ. Со $\mathbf{D}$ да го означиме пресекот на сите потпростори на $\mathbf{L}$ кои го содржат секој собирок $\mathbf{L}_i$, $i=1,2,\dots,k$. Јасно, $\sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i$ е подмножество од секој потпростор на просторот $\mathbf{L}$ кој го содржи секој собирок $\mathbf{L}_i$, $i=1,2,\dots,k$, па затоа $\sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i \subseteq \mathbf{D}$. Но, $\sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i$ е потпростор кој го содржи секој собирок $\mathbf{L}_i$, $i=1,2,\dots,k$, па затоа $\sum_{i=1}^k \mathbf{L}_i = \mathbf{D}$. ♦

2.16. Лема (идентитет на Дедикинг). Нека L е векторски простор над полето K . Ако U, V, W се потпростори на L и U е потпростор на W , тогаш

$$W \cap (U + V) = (W \cap U) + (W \cap V) = U + (W \cap V). \quad (*)$$

Доказ. Бидејќи U е потпростор на W имаме $U \subseteq W$, па затоа $W \cap U = U$. Според тоа,

$$(W \cap U) + (W \cap V) = U + (W \cap V),$$

т.е. важи десното равенство во (*).

Ако $x \in (W \cap U) + (W \cap V)$, тогаш постојат $a \in W \cap U$ и $b \in W \cap V$ такви што $x = a + b$. Значи, постојат a и b такви што $a, b \in W$, $a \in U$, $b \in V$ и $x = a + b$. Но, W е потпростор од L , па затоа $x = a + b \in W$ и притоа важи $x = a + b \in U + V$. Конечно, $x \in W \cap (U + V)$, што значи

$$(W \cap U) + (W \cap V) \subseteq W \cap (U + V). \quad (**)$$

Ако $x \in W \cap (U + V)$, тогаш $x \in W$ и $x \in U + V$. Значи, $x \in W$ и постојат $u \in U$ и $v \in V$ такви што $x = u + v$, т.е. $v = x - u$. Но, U е потпростор на W , па затоа $u \in W$ и како W е потпростор од L имаме $x - u = v \in W$, т.е. $v \in W \cap V$. Сега, $u \in W \cap U$, па затоа $x = u + v \in (W \cap U) + (W \cap V)$, т.е.

$$W \cap (U + V) \subseteq (W \cap U) + (W \cap V). \quad (***)$$

Конечно, од (**) и (***) следува левото равенство во (*). ♦

2.17. Забелешка. Условот U е потпростор на W во лема 2.16 не може да се изостави. Имено, нека $L = \mathbb{R}^3$ и нека се дадени неговите потпростори

$$U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

$$V = \{(a, 0, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\},$$

$$W = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\},$$

т.е. U не е потпростор на W . Тогаш, $U + V = \mathbb{R}^3$, па затоа $W \cap (U + V) = W$. Понатаму, $W \cap V = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$, па затоа $U + (W \cap V) = \mathbb{R}^3$. Конечно,

$$U + (W \cap V) = \mathbb{R}^3 \neq W = W \cap (U + V),$$

што значи дека условот U е потпростор на W не може да се изостави.

2.18. Дефиниција. Нека (1) е фамилија ненулти потпростори на векторскиот простор L над полето K . Ако $L_i \cap L_j = \{0\}$, $i \neq j$ тогаш за сумата на потпросторите (1) ќе велиме дека е *директна сума*. За означување на директната сума на потпросторите (1) ќе ја користиме ознаката $L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$.

2.19. Теорема. Сумата L^* на просторите (1) е директна ако и само ако од

$$\sum_{i=1}^k x_i = 0, \quad x_i \in L_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

следува

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{o}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3)$$

Доказ. Нека $\mathbf{L}^*$ е директна сума на просторите (1) и нека важи (2). За секој $j = 1, 2, \dots, k$ равенството (2) го запишуваме во видот

$$-\mathbf{x}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^k \mathbf{x}_i \quad (4)$$

Бидејќи левата страна во равенството (4) е вектор од потпросторот $\mathbf{L}_j$, а десната страна е вектор кој припаѓа на сумата потпростори

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k \mathbf{L}_i, \quad (5)$$

добиваме дека

$$\mathbf{x}_j \in \mathbf{L}_j \cap \sum_{i=1, i \neq j}^k \mathbf{L}_i = \{\mathbf{o}\},$$

па затоа $\mathbf{x}_j = \mathbf{o}$, за секој $j = 1, 2, \dots, k$.

Нека од (2) следува (3), $\mathbf{L}_j$ е еден од потпросторите (1) и нека $\mathbf{D}$ е неговиот пресек со сумата (5). Ако $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$, тогаш

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1, i \neq j}^k \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbf{L}_i, \quad i \neq j. \quad (6)$$

Равенството (6) ќе го запишеме во видот $\sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i = \mathbf{o}$, каде $\mathbf{x}_j = -\mathbf{x}$, па од претпоставката ќе следува $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{D} = \{\mathbf{o}\}$. Според тоа, $\mathbf{L}^*$ е директна сума на просторите (1). ♦

2.20. Теорема. Сумата $\mathbf{L}^*$ на просторите (1) е директна ако и само ако секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}^*$ може на единствен начин да се запише во видот

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbf{L}_i. \quad (7)$$

Доказ. Нека $\mathbf{L}^*$ е директна сума на просторите (1) и нека постои $\mathbf{x} \in \mathbf{L}^*$ таков што $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_i \in \mathbf{L}_i$ и $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i$, $\mathbf{m}_i \in \mathbf{L}_i$. Но, тоа значи, дека

$$\mathbf{o} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i = \sum_{i=1}^k (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_i). \quad (8)$$

Бидејќи $\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_i \in \mathbf{L}_i$, од (8) и од теорема 2.19 следува дека $\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_i = \mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{x}_i = \mathbf{m}_i$, за $i = 1, 2, \dots, k$.

Нека секој вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{L}^*$ може на единствен начин да се запише во видот (7) и нека

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{x}_i = \mathbf{o}, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbf{L}_i, \quad i=1,2,\dots,k.$$

Но, $\mathbf{o} = \mathbf{o} + \dots + \mathbf{o}$, па затоа $\mathbf{x}_i = \mathbf{o}$, $i=1,2,\dots,k$ и од теорема 2.19 следува дека $\mathbf{L}^*$ е директна сума на просторите (1). ♦

3. ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ

3.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. За векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ ќе велиме дека се *линеарно независни*, ако од

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{o}$$

следува $\alpha_i = 0$, $i=1,\dots,k$. Во спротивно, ако равенството

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{o}$$

е задоволено и кога $\alpha_i \neq 0$ за барем еден $i \in \{1,\dots,k\}$, тогаш ќе велиме дека векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ се *линеарно зависни*.

3.2. Пример. а) Во просторот $\mathbf{C}([a,b])$ векторите (функциите)

$$x_1(t) = \sin^2 t, \quad x_2(t) = \cos^2 t, \quad x_3(t) = 1$$

се линеарно зависни бидејќи важи равенството $x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) = 0$.

б) Во просторот $\mathbf{K}^m$ да ги разгледаме векторите

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_m = (0, \dots, 0, 1). \quad (1)$$

Од

$$\mathbf{o} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_m = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

добиваме $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, што значи векторите (1) се линеарно независни.

в) Полето комплексни броеви $\mathbf{C}$ е векторски простор над полето реални броеви $\mathbf{R}$, во кој векторите $\mathbf{e}_1 = 1$ и $\mathbf{e}_2 = i$ се линеарно независни. Проверете!

г) Во векторскиот простор $\mathbf{K}_{nm}$ од сите реални $n \times m$ матрици да го разгледаме множеството матрици

$$E_{ij} = [t_{kp}]_{k=1, p=1}^n, \quad t_{ij} = 1 \quad \text{и} \quad t_{kp} = 0, \quad \text{за} \quad k \neq i, \quad p \neq j. \quad (2)$$

Лесно се докажува дека матриците (2) се линеарно независни. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

д) Ќе докажеме дека во просторот $\mathbf{C}^3$ над полето $\mathbf{C}$ векторите

$$\mathbf{a} = (1, 1+i, i), \quad \mathbf{b} = (i, -i, 1-i) \quad \text{и} \quad \mathbf{c} = (0, 1-2i, 1-i)$$

се линеарно независни.

Нека $x, y, z \in \mathbb{C}$ се такви што $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$, т.е.

$$x(1, 1+i, i) + y(i, -i, 1-i) + z(0, 1-2i, 1-i) = (0, 0, 0).$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$(x+iy, x(1+i)-iy+z(1-2i), ix+y(1-i)+z(1-i)) = (0, 0, 0),$$

а ова е еквивалентно на системот равенки

$$\begin{cases} x+iy=0, \\ x(1+i)-iy+z(1-2i)=0, \\ ix+y(1-i)+z(1-i)=0. \end{cases}$$

Од првата равенка на системот наоѓаме $x = -iy$ и ако замениме во останатите равенки, после средувањето, добиваме

$$\begin{cases} y(1-2i)+z(1-2i)=0, \\ y(2-i)+z(1-i)=0. \end{cases}$$

Од првата равенка во последниот систем имаме $y = -z$ и ако замениме во втората равенка добиваме $y = 0$. Конечно, $z = -y = 0$ и $x = -i \cdot 0 = 0$, што значи дека векторите $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ се линеарно независни. ♦

3.3. Лема. Ако фамилијата вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ го содржи векторот $\mathbf{0}$, тогаш таа е линеарно зависна.

Доказ. Нека $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Земаме $\alpha_1 = 1$, $\alpha_i = 0$, $i = 2, 3, \dots, k$ и добиваме

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k = 1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{0},$$

што значи дека фамилијата вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ е линеарно зависна. ♦

3.4. Лема. Векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{L}$ се линеарно зависни ако и само ако барем еден од нив може да се претстави како линеарна комбинација на останатите вектори.

Доказ. Нека $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ се линеарно зависни вектори. Тогаш, постојат скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ такви што $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ и барем за еден α_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ важи $\alpha_i \neq 0$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\alpha_k \neq 0$. Ако претходното равенство го помножимо со $-\alpha_k^{-1}$, тогаш

$$\mathbf{x}_k = \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} \mathbf{x}_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_k} \mathbf{x}_2 + \dots + \frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \mathbf{x}_{k-1},$$

т.е. векторот $\mathbf{x}_k$ е линеарна комбинација на останатите вектори.

Нека еден од векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ е линеарна комбинација на останатите вектори. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е векторот $\mathbf{x}_k$. Тоа значи дека постојат $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ такви што

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}$$

од што следува $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + (-1) \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ и $\alpha_k = -1 \neq 0$, што значи дека векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ се линеарно зависни. ♦

3.5. Лема. Нека $k \geq j$. Ако векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j$ се линеарно зависни, тогаш и векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_k$ се линеарно зависни.

Доказ. За $k = j$ тврдењето е очигледно. Нека $k > j$. Бидејќи векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j$ се линеарно зависни, постојат скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ такви што

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0},$$

и барем за еден α_i , $i \in \{1, \dots, j\}$ важи $\alpha_i \neq 0$. Ако земеме $\alpha_i = 0$, $i = j+1, \dots, k$ добиваме

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_j \mathbf{x}_j + \alpha_{j+1} \mathbf{x}_{j+1} + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0},$$

што значи векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_k$ се линеарно зависни. ♦

3.6. Дефиниција. Нека S и T се две фамилии вектори во векторскиот простор L . Ќе велиме дека фамилијата S *линеарно се изразува со фамилијата* T , ако секој вектор од S може да се запише како линеарна комбинација на вектори од T .

Ако фамилијата S линеарно се изразува со фамилијата T и фамилијата T линеарно се изразува со фамилијата S , тогаш ќе велиме дека S и T се *еквивалентни фамилии вектори*.

3.7. Забелешка. Ако фамилијата Q линеарно се изразува со фамилијата S и фамилијата S линеарно се изразува со фамилијата T , тогаш очигледно фамилијата Q линеарно се изразува со фамилијата T , т.е. својството линеарно се изразува е транзитивно.

Од транзитивноста на својството на линеарното изразување следува транзитивноста на еквивалентноста на фамилиите вектори, т.е. ако Q , S и T се три фамилии вектори такви што Q и S се еквивалентни и S и T се еквивалентни, тогаш и фамилиите Q и T се еквивалентни.

3.8. Теорема. Нека L е векторски простор над полето K и

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s \tag{3}$$

и

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_t \tag{4}$$

се две фамилии вектори во просторот L . Ако фамилијата (3) е линеарно независна и линеарно се изразува со фамилијата (4), тогаш $s \leq t$. Притоа, ако $s = t$, тогаш фамилиите (3) и (4) се еквивалентни, а ако $s < t$, тогаш (3) може да се дополни со вектори од (4) до фамилија која содржи точно t вектори и која е еквивалентна на (4).

Доказ. Ако $s=1$, тогаш, очигледно $t \geq s$. Ако и $t=1$, тогаш $\mathbf{a}_1 = \alpha \mathbf{b}_1$, $\alpha \in \mathbf{K}$. Но, $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$, па затоа $\alpha \neq 0$. Според тоа, $\mathbf{b}_1 = \alpha^{-1} \mathbf{a}_1$ и фамилиите (3) и (4) се еквивалентни. Ако пак $t > 1$, тогаш

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_t \mathbf{b}_t.$$

Од $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$ следува дека барем еден од скаларите α_i , $i=1,2,\dots,t$ е различен од нула и да земеме дека $\alpha_1 \neq 0$. Тогаш

$$\mathbf{b}_1 = \alpha_1^{-1} \mathbf{a}_1 - \alpha_1^{-1} \alpha_2 \mathbf{b}_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_t \mathbf{b}_t,$$

т.е. векторот $\mathbf{b}_1$ линеарно се изразува со фамилијата

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_t. \quad (5)$$

Бидејќи секој вектор од фамилијата (4), освен $\mathbf{b}_1$, се содржи во фамилијата (5) добиваме дека (4) линеарно се изразува со (5). Од истите причини имаме дека (5) линеарно се изразува со (4), т.е. фамилиите (4) и (5) се еквивалентни. Со тоа теоремата е докажана за $s=1$.

Нека $m > 1$ и да претпоставиме дека за $s=m-1$ тврдењето е докажано. Ќе докажеме дека тврдењето важи за $s=m$. Подфамилијата

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{m-1} \quad (6)$$

на линеарно независната фамилија (3) е линеарно независна и линеарно се изразува со (4). Од индуктивната претпоставка имаме $m-1 \leq t$ и при

$$m-1=t \quad (7)$$

фамилиите (6) и (4) се еквивалентни, а при

$$m-1 < t \quad (8)$$

фамилијата (6) може да се дополни со вектори од (4) до фамилија која е еквивалентна на (4) и која содржи точно t вектори. Ќе докажеме дека равенството (7) не е можно. Навистина, ако важи (7), тогаш фамилиите (4) и (6) се еквивалентни, па затоа фамилијата (3) линеарно се изразува со фамилијата (6), што противречи на линеарната независност на фамилијата (3). Според тоа, точно е неравенството (8), т.е. $m \leq t$.

Да ја дополниме фамилијата (6) со соодветни вектори од фамилијата (4) до фамилија која содржи точно t вектори и која е еквивалентна на (4). Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е фамилијата

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_t. \quad (9)$$

Тоа значи, дека векторот $\mathbf{a}_m$ линеарно се изразува со фамилијата (9) и нека

$$\mathbf{a}_m = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_{m-1} \mathbf{a}_{m-1} + \mu_m \mathbf{b}_m + \mu_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \mu_t \mathbf{b}_t, \lambda_i, \mu_j \in \mathbf{K}. \quad (10)$$

Меѓу коефициентите μ_j барем еден е различен од нула, бидејќи во спротивно фамилијата (3) ќе биде линеарно зависна. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\mu_m \neq 0$. Ако равенството (10) го поделиме со μ_m , тогаш во случај кога $t=m$ векторот $\mathbf{b}_m$ го претставуваме како линеарна комбинација на векто-

рите (3), а во случај кога $t > m$ векторот $\mathbf{b}_m$ го претставуваме како линеарна комбинација на векторите

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \dots, \mathbf{b}_t. \quad (11)$$

Според тоа, за $t = m$ секој вектор од фамилијата (9) линеарно се изразува со фамилијата (3) и од равенството (10) следува фамилијата (3) линеарно се изразува со фамилијата (9). Значи, фамилијата (3) е еквивалентна на фамилијата (9), па затоа таа е еквивалентна и на фамилијата (4). Ако $t > m$, од истите причини фамилиите (11) и (4) се еквивалентни. ♦

3.9. Последица. Две конечни еквивалентни линеарно независни фамилии вектори имаат еднаков број елементи.

Доказ. Навистина, ако (3) и (4) се две такви фамилии, тогаш според теорема 3.8 важи $s \leq t$. Заради симетрија имаме $t \leq s$. Според тоа, $s = t$. ♦

4. БАЗА И ДИМЕНЗИЈА НА ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР

4.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. За фамилијата вектори U , $U \subseteq \mathbf{L}$ ќе велиме дека *го генерира просторот* $\mathbf{L}$ ако $\mathbf{L}$ линеарно се изразува со U .

За фамилијата вектори U , $U \subseteq \mathbf{L}$ ќе велиме дека е *база* на просторот $\mathbf{L}$ ако таа е линеарно независна и го генерира просторот $\mathbf{L}$.

4.2. Пример. а) Во просторот $\mathbf{K}^m$ да ја разгледаме фамилијата вектори

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_m = (0, \dots, 0, 1). \quad (1)$$

Според пример 3.2 б) фамилијата (1) е линеарно независна. Од друга страна, за секој

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{K}^m$$

имаме

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_m) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_m \mathbf{e}_m,$$

т.е. фамилијата (1) го генерира просторот $\mathbf{K}^m$. Следствено, фамилијата (1) е база на просторот $\mathbf{K}^m$.

б) Според пример 3.2 в) полето комплексни броеви $\mathbf{C}$ е векторски простор над полето реални броеви $\mathbf{R}$, во кој векторите $\mathbf{e}_1 = 1$ и $\mathbf{e}_2 = i$ се линеарно независни. Понатаму, ако $z \in \mathbf{C}$, тогаш $z = \alpha + i\beta$, каде $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, т.е. $z = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2$, што значи дека $\mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_2 = i$ е база на просторот комплексни броеви $\mathbf{C}$ над полето реални броеви $\mathbf{R}$.

в) Во пример 11.2 г) докажавме дека во векторскиот простор $\mathbf{K}_{nm}$ од сите реални $n \times m$ матрици множеството матрици

$$E_{ij} = [t_{kp}]_{k=1, p=1}^n, t_{ij} = 1 \text{ и } t_{kp} = 0, \text{ за } k \neq i, p \neq j \quad (2)$$

е линеарно независно. Од друга страна за секоја матрица $A = [a_{ij}]_{i=1, j=1}^n$ важи

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} E_{ij}, \text{ што значи дека (2) е база на просторот } \mathbf{K}_{nm}.$$

г) Ќе докажеме дека множеството

$$\mathbf{e}_i = x^i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

е база на векторскиот простор $\mathbf{K}_n[x]$ над полето $\mathbf{K}$. Навистина, ако

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0,$$

$\alpha_i \in \mathbf{K}, i = 0, 1, 2, \dots, n$, тогаш користејќи го фактот дека полином е еднаков на нула за секој x ако и само ако неговите коефициенти се еднакви на нула, добиваме $\alpha_i = 0$, за $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Според тоа, множеството (3) е линеарно независно.

Понатаму, ако $p(x) \in \mathbf{K}_n[x]$, тогаш

$$p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i, k \leq n, \text{ т.е. } p(x) = \sum_{i=0}^k a_i \mathbf{e}_i,$$

што значи дека (3) е база на $\mathbf{K}_n[x]$.

Понатаму, може да се докаже дека за секој $\alpha \in \mathbf{K}$ фамилијата

$$\mathbf{u}_i = (x - \alpha)^i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

исто така е база на векторскиот простор $\mathbf{K}_n[x]$.

д) Ќе докажеме дека множеството

$$3x + 4, -2, 2x^2 + 1 \quad (4)$$

е база на просторот $\mathbf{R}_2[x]$, полиноми со реални коефициенти и степен не поголем од 2. Навистина, од

$$a(3x + 4) + b(-2) + c(2x^2 + 1) = 0$$

следува

$$2cx^2 + 3ax + (4a - 2b + c) = 0$$

па затоа

$$2c = 0, 3a = 0, 4a - 2b + c = 0,$$

т.е. $a = b = c = 0$, што значи дека даденото множество е линеарно независно.

Понатаму, ако $p(x) \in \mathbf{R}_2[x]$, тогаш

$$p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}.$$

Ќе најдеме $a, b, c \in \mathbf{R}$ такви што

$$a(3x + 4) + b(-2) + c(2x^2 + 1) = p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2. \quad (*)$$

Имаме

$$(2c - \gamma)x^2 + (3a - \beta)x + (4a - 2b + c - \alpha) = 0,$$

па затоа $2c - \gamma = 0$, $3a - \beta = 0$, $4a - 2b + c - \alpha = 0$, т.е. $c = \frac{\gamma}{2}$, $a = \frac{\beta}{3}$ и $b = \frac{2\beta}{3} + \frac{\gamma}{4} - \frac{\alpha}{2}$ и притоа важи (*). Според тоа, (4) е база на $\mathbf{R}_2[x]$.

Нека $\mathbf{K} = \mathbf{Z}_2$ и да го разгледаме просторот $\mathbf{K}_2[x]$ над полето $\mathbf{K}$. Од $3 = \bar{1}$, $4 = \bar{0}$, $-2 = \bar{0}$, $2 = \bar{0}$ и $1 = \bar{1}$ следува дека полиномите (4) го добиваат видот $x, \bar{0}, \bar{1}$, т.е. тие се линеарно зависни, па затоа не се база на $\mathbf{K}_2[x]$. Уште повеќе, множеството (4) не го генерира просторот $\mathbf{K}_2[x]$, бидејќи ниту еден полином од видот $x^2 + ax + b$ не може да се запише како линеарна комбинација на полиномите (4). Зошто? ♦

4.3. Дефиниција. За векторскиот простор $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$ ќе велиме дека е *конечнодимензионален* ако има база со конечен број елементи.

4.4. Нека $\mathbf{L}$ е конечнодимензионален векторски простор и нека една негова база содржи точно n вектори. Тогаш, просторот $\mathbf{L}$ не содржи бесконечна база, бидејќи според теорема 3.8 секоја фамилија вектори која содржи повеќе од n вектори е линеарно зависна. Според тоа, секоја база на просторот $\mathbf{L}$ е конечна. Понатаму, ако U и V се две бази на просторот $\mathbf{L}$, тогаш секој вектор од U линеарно се изразува со базата V и обратно, секој вектор од V линеарно се изразува со базата U , па затоа базите U и V се еквивалентни. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. Било кои две бази на конечно димензионалниот простор $\mathbf{L}$ имаат ист број на елементи. ♦

4.5. Дефиниција. Ако $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ е база на конечно димензионалниот простор $\mathbf{L}$, тогаш ќе велиме дека $\mathbf{L}$ има *димензија* m и ќе пишуваме $\dim \mathbf{L} = m$.

Ако $\dim \mathbf{L} = m$, тогаш за просторот $\mathbf{L}$ ќе велиме дека е m -димензионален. Во натамошните разгледувања за означување на произволен m -димензионален векторски простор ќе ја користиме ознаката $\mathbf{L}_m$.

4.6. Пример. а) За просторот $\mathbf{K}^m$ имаме $\dim \mathbf{K}^m = m$.

б) Полето комплексни броеви е дводимензионален векторски простор над полето реални броеви.

в) За просторот $\mathbf{K}_{nm}$ имаме $\dim \mathbf{K}_{nm} = mn$.

г) Просторот $\mathbf{K}_n[x]$ полиноми над полето $\mathbf{K}$ со степен не поголем од n има димензија $n+1$.

д) Во просторот $\{\mathbf{o}\}$ кој се состои само од нултиот вектор нема линеарно независни вектори, па затоа $\dim \{\mathbf{o}\} = 0$. ♦

4.7. Теорема. Нека $m > 0$ и U е линеарно независна фамилија вектори во просторот L_m . Ако U содржи m вектори, тогаш таа е база на L_m , а ако содржи помалку од m , тогаш таа може да се дополни до база на L_m .

Доказ. Нека

$$u_1, u_2, \dots, u_m \quad (5)$$

е база на просторот L_m и нека

$$v_1, v_2, \dots, v_k \quad (6)$$

е произволна линеарно независна фамилија. Од теорема 3.8 следува дека $k \leq m$ и ако $k = m$, тогаш фамилијата (6) е еквивалентна на фамилијата (5), па како својството линеарно се изразува е транзитивно добиваме дека (6) е база на L_m . Ако $k < m$, тогаш фамилијата (6) може да се дополни со соодветни вектори од фамилијата (5) до фамилија која е еквивалентна на (5) и која содржи точно m вектори. Нека претпоставиме дека тоа е фамилијата

$$v_1, v_2, \dots, v_k, a_{k+1}, \dots, a_m \quad (7)$$

каде $a_{k+1}, \dots, a_m$ се вектори од фамилијата (5). Ако фамилијата (7) е линеарно зависна, тогаш барем еден од нејзините вектори е линеарна комбинација на останатите. Отфрлајќи го овој вектор добиваме фамилија од $m-1$ вектор која е еквивалентна на (7) и со која линеарно се изразува базата (5), што противречи на теорема 3.8. Според тоа, фамилијата (7) е линеарно независна и таа е база на просторот L_m . ♦

4.8. Последица. Ако U е потпростор на просторот L_m , тогаш $\dim U \leq m$ и $\dim U = m$ ако и само ако $U = L_m$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 4.7. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

4.9. Теорема. Ако U и V се потпростори на векторскиот простор L_m над полето K , тогаш

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

Доказ. Ако еден од потпросторите U или V е нултиот простор, тогаш тврдењето на теоремата е очигледно. Нека претпоставиме дека U и V се ненулти потпростори на просторот L_m , $W = U \cap V$ и

$$w_1, w_2, \dots, w_p \quad (8)$$

е база на потпросторот W (фамилијата (8) може да биде празно множество ако сумата на потпросторите U и V е директна). Да ја дополниме фамилијата (8) до база

$$w_1, w_2, \dots, w_p, u_{p+1}, \dots, u_k \quad (9)$$

на потпросторот U и до база

$$w_1, w_2, \dots, w_p, v_{p+1}, \dots, v_n \quad (10)$$

на потпросторот $\mathbf{V}$. Да ја разгледаме фамилијата

$$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_n. \quad (11)$$

Ќе докажеме, дека (11) е база на сумата $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. Ако $\mathbf{x} \in \mathbf{U} + \mathbf{V}$, тогаш $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, каде $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$. Понатаму, (9) е база на $\mathbf{U}$, па затоа $\mathbf{y}$ линеарно се изразува со векторите (9) и (10) е база на $\mathbf{V}$, што значи дека $\mathbf{z}$ линеарно се изразува со векторите (10). Според тоа, $\mathbf{x}$ линеарно се изразува со векторите (11). Ќе докажеме, дека фамилијата (11) е линеарно независна. Нека

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{w}_p + \beta_{p+1} \mathbf{u}_{p+1} + \dots + \beta_k \mathbf{u}_k + \gamma_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \dots + \gamma_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}, \quad (12)$$

каде $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_k, \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_n \in \mathbf{P}$. Од равенството (12) следува

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{w}_p + \beta_{p+1} \mathbf{u}_{p+1} + \dots + \beta_k \mathbf{u}_k = -(\gamma_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \dots + \gamma_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{z}. \quad (13)$$

Од равенството (13) следува дека $\mathbf{z} \in \mathbf{U}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$, па затоа $\mathbf{z} \in \mathbf{W}$, т.е.

$$\mathbf{z} = \delta_1 \mathbf{w}_1 + \delta_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \delta_p \mathbf{w}_p. \quad (14)$$

Понатаму, од равенствата (13) и (14) следува

$$\mathbf{0} = \mathbf{z} - \mathbf{z} = \delta_1 \mathbf{w}_1 + \delta_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \delta_p \mathbf{w}_p + \gamma_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} + \dots + \gamma_n \mathbf{v}_n$$

и како (10) е база на потпросторот $\mathbf{V}$ добиваме

$$\gamma_{p+1} = \dots = \gamma_n = 0.$$

Сега, ако замениме во равенството (13) добиваме

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{w}_p + \beta_{p+1} \mathbf{u}_{p+1} + \dots + \beta_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

и како (9) е база на просторот $\mathbf{U}$ добиваме $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_{p+1} = \dots = \beta_k = 0$, т.е. фамилијата (11) е линеарно независна, па затоа е база на сумата $\mathbf{U} + \mathbf{V}$.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека

$$\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = k + n - p = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}). \quad \blacklozenge$$

4.10. Коментар. Од претходната теорема непосредно следува, дека димензијата на директна сума потпростори од конечнодимензионален простор е еднаква на збир од димензиите на потпросторите. Понатаму, ако една по друга запишеме произволни бази на потпросторите кои учествуваат во директната сума, тогаш добиваме една нејзина база. Да забележиме дека од претходните разгледувања непосредно следува точноста на следнава последица.

4.11. Последица. Нека фамилијата (5) е база на векторскиот простор $\mathbf{L}_m$.

Тогаш

$$\mathbf{L}_m = L(\mathbf{u}_1) \oplus L(\mathbf{u}_2) \oplus \dots \oplus L(\mathbf{u}_m).$$

Доказ. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. $\blacklozenge$

5. КООРДИНАТИ НА ВЕКТОР

5.1. Дефиниција. Нека L_m е векторски простор над полето K ,

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m \quad (1)$$

е база на L_m и $\mathbf{x}$ е произволен вектор од L_m . Тогаш $\mathbf{x}$ линеарно се изразува со базата (1):

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i. \quad (2)$$

Претставувањето на векторот $\mathbf{x}$ во видот (2) го нарекуваме *разложување на $\mathbf{x}$ по базните вектори* (1), а коефициентите α_i , $i = 1, 2, \dots, m$ ги нарекуваме *координати на векторот $\mathbf{x}$ во базата* (1).

5.2. Лема. Ако (1) е база на просторот L_m над полето K и $\mathbf{x} \in L_m$, тогаш координатите на векторот $\mathbf{x}$ во базата (1) се еднозначно определени.

Доказ. Нека покрај разложувањето (2) на векторот $\mathbf{x}$ по базните вектори (1) постои уште едно разложување

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{e}_i \quad (3)$$

на векторот $\mathbf{x}$. Тогаш,

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{e}_i - \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \beta_i) \mathbf{e}_i$$

и како векторите (1) се линеарно независни добиваме $\alpha_i - \beta_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, т.е. $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \dots, m$, т.е. координатите на векторот $\mathbf{x}$ се еднозначно определени. ♦

5.3. Теорема. Нека L_m е векторски простор над полето K и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ е база на L_m . Ако $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b} \in L_m$ се такви што

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{e}_j,$$

тогаш, равенството

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i \quad (4)$$

е еквивалентно со системот равенства

$$\beta_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_{ji}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Доказ. Нека е исполнето равенството (4). Имаме

$$\mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{e}_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{e}_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{e}_j - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \lambda_i \alpha_{ji} \mathbf{e}_j$$

$$= \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{e}_j - \sum_{j=1}^m \mathbf{e}_j \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_{ji} = \sum_{j=1}^m [\beta_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_{ji}] \mathbf{e}_j$$

и како векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ формираат база на просторот L_m , од последното равенство следува системот равенства (5).

Нека е исполнет системот равенства (5). Имаме

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_{ji} \right) \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i,$$

т.е. важи равенството (4). ♦

5.4. Забелешка. Равенството (2) ќе го запишеме во друг вид кој ќе го користиме во натамошните разгледувања. Да ги воведеме ознаките

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_m].$$

Лесно се гледа, дека при овие ознаки равенството (2) е еквивалентно на равенството

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e}](\alpha), \quad (6)$$

во што можеме да се убедиме ако ги помножиме матриците $[\mathbf{e}]$ и (α) . Редицата $[\mathbf{e}]$ ја нарекуваме *базна редица*, а колоната (α) ја нарекуваме *координатна колона на векторот $\mathbf{x}$* во базата (1). Според тоа, равенството (6) означува дека векторот $\mathbf{x}$ е производ на базната редица со неговата координатна колона.

5.5. Нека

$$\mathbf{a} = [\mathbf{e}](\alpha), \quad (7)$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{e}](\beta), \quad (8)$$

каде

$$(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \quad (\beta) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix},$$

и $p, q \in \mathbf{K}$. Ако ги помножиме равенствата (7) и (8) со p и q соодветно и ги собереме добиените равенства, наоѓаме

$$p\mathbf{a} + q\mathbf{b} = p[\mathbf{e}](\alpha) + q[\mathbf{e}](\beta) = [\mathbf{e}]\{p(\alpha) + q(\beta)\} = [\mathbf{e}] \begin{bmatrix} p\alpha_1 + q\beta_1 \\ \vdots \\ p\alpha_m + q\beta_m \end{bmatrix}.$$

Последното значи, дека координатната колона на векторот $p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$ е колоната

$$(p\alpha + q\beta) = \begin{bmatrix} p\alpha_1 + q\beta_1 \\ \vdots \\ p\alpha_m + q\beta_m \end{bmatrix},$$

т.е. секој линеарен однос меѓу векторите е еквивалентен на истиот таков однос меѓу нивните координати. Всушност, последното е доказот на теорема 4.3 која во новововедените ознаки можеме да ја запишеме во следниов вид.

Теорема. Нека L_m е векторски простор над полето K и $e_1, e_2, \dots, e_m$ е база на L_m . Ако $a_1, \dots, a_k, b \in L_m$, а

$$(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, k, \quad (\beta) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

се нивните координатни колони во некоја база, соодветно, тогаш равенствата (4) и

$$(\beta) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\alpha_i) \quad (9)$$

се еквивалентни. ♦

5.6. Последица. При ознаките од теорема 5.5 равенството (9) е еквивалентно со системот равенки (5).

Доказ. Непосредно следува од фактот дека равенството (9) и системот равенки (5) се еквивалентни на равенството (4). ♦

6. МАКСИМАЛНО ЛИНЕАРНО НЕЗАВИСНА ПОДФАМИЛИЈА

6.1. Нека L_m е векторски простор над полето K и U е фамилија вектори од L_m , која содржи ненулта вектор. Тогаш U содржи линеарно независна подфамилија, на пример подфамилија која се состои од еден ненулта вектор. Секоја подфамилија на фамилијата U која содржи повеќе од m вектори е линеарно зависна, па затоа добиваме дека во U постои *максимална линеарно независна подфамилија*, бидејќи во спротивно U треба да содржи бесконечна фамилија линеарно независни вектори, што не е можно.

6.2. Теорема. Нека L_m е векторски простор над полето K и U е фамилија вектори од L_m , која содржи ненулта вектор. Секоја максимална линеарно независна подфамилија на фамилијата U е еквивалентна на U и сите максимални линеарно независни подфамилии на фамилијата U содржат ист број вектори.

Доказ. Ако фамилијата U е линеарно независна, тогаш таа се совпаѓа со својата единствена максимална линеарно независна подфамилија и теоремата е докажана. Нека фамилијата U е линеарно зависна, $u \in U$ и нека

$$u_1, u_2, \dots, u_k \quad (1)$$

е максимална линеарно независна подфамилија од U . Бидејќи (1) е максимална линеарно независна подфамилија од U добиваме дека векторите $u, u_1, u_2, \dots, u_k$ се линеарно зависни. Според тоа, постојат скалари

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \quad (2)$$

не сите еднакви на нула такви што

$$\alpha \mathbf{u} + \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Ако $\alpha = 0$, тогаш бидејќи барем еден од скаларите (2) е различен од нула добиваме, дека подфамилијата (1) е линеарно зависна, што е противречност. Според тоа, $\alpha \neq 0$ и ако во (3) поделиме со α добиваме

$$\mathbf{u} = -\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{\alpha} \mathbf{u}_i,$$

што значи дека векторот $\mathbf{u}$, односно фамилијата U линеарно се изразува со подфамилијата (1). Од друга страна (1) се содржи во U , па затоа (1) и U се еквивалентни.

Вториот дел од теоремата следува од забелешка 3.7 и теорема 3.8. ♦

6.3. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}_m$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$ и U е фамилија вектори од $\mathbf{L}_m$. Бројот на векторите на максималната линеарно независна подфамилија на фамилијата U го нарекуваме *ранг на фамилијата U* .

Јасно, ако $U = \mathbf{L}_m$, тогаш рангот на U е еднаков на $\dim \mathbf{L}_m = m$. Понатаму, ако U не содржи ненулни вектори, тогаш ќе сметаме дека рангот на U е еднаков на нула.

6.4. Пример. Најдете го рангот на системот вектори

$$\mathbf{a}_1 = \{2, 1, -1, 2\}, \mathbf{a}_2 = \{1, -3, 3, -1\}, \mathbf{a}_3 = \{1, 4, -4, 3\}, \mathbf{a}_4 = \{0, 0, 1, 2\}.$$

Решение. Бидејќи од

$$x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$$

следува $x = y = 0$, заклучуваме дека векторите $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ се линеарно независни. Понатаму, од

$$x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

следува

$$\{2x, x, -x, 2x\} + \{y, -3y, 3y, -y\} + \{z, 4z, -4z, 3z\} = \{0, 0, 0, 0\},$$

па изедначувајќи ги соодветните компоненти го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ x - 3y + 4z = 0, \\ -x + 3y - 4z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

чие решение е $x = 1, y = -1, z = -1$. Според тоа, системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ е линеарно зависен, па значи и системот $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ е линеарно зависен. Но, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ се линеарно независни, па максималниот број линеарно независни вектори е 3, т.е. рангот на системот е 3. ♦

6.5. Теорема. Нека L_m е векторски простор над полето K и U и V се фамилии вектори од L_m . Ако фамилиите U и V се еквивалентни, тогаш тие имаат ист ранг.

Доказ. Од еквивалентноста на фамилиите U и V следува дека фамилијата U не содржи ненулни вектори ако и само ако фамилијата V не содржи ненулни вектори, што значи дека и двете фамилии имаат ранг нула.

Ако фамилиите U и V содржат ненулни вектори, тогаш максималните линеарно независни подфамилии на U и V се еквивалентни на U и V , соодветно, па затоа тие се еквивалентни меѓу себе. Сега тврдењето на теоремата следува од фактот дека еквивалентни линеарно независни фамилии содржат ист број вектори. ♦

7. РАНГ НА МАТРИЦА

7.1. Да ја разгледаме $n \times m$ матрицата

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Колоните на матрицата (1) можеме да ги разгледуваме како вектори во просторот K^n , па затоа можеме да зборуваме за нивна линеарна зависност или независност. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Рангот на фамилијата колони на матрицата (1) го нарекуваме *ранг на матрицата* (1), во ознака $\text{rang } A$.

7.2. Пример. а) Нултата матрица $O_{n \times m}$ има ранг нула.

б) Матриците $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ имаат ранг еден.

в) Матриците

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

имаат ранг два. ♦

7.3. Теорема. Рангот на матрицата е еднаков на најголемиот ред на минорите на матрицата различни од нула.

Доказ. Нека најголемиот ред на минорите на матрицата A различни од нула е еднаков на r и нека еден таков минор R од r -ти ред на матрицата A е минорот кој се наоѓа во горниот лев агол на матрицата:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{1r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & a_{mr+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ќе докажеме дека првите r редици на матрицата A формираат максимално линеарно независно множество во множеството редици. За таа цел да ги воведеме ознаките

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), & \mathbf{p}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}), \\ \mathbf{q}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), & \mathbf{p}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{q}_r &= (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}), & \mathbf{p}_r &= (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rr}), \end{aligned}$$

и ќе докажеме дека редиците

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_r \quad (2)$$

се линеарно независни. Нека

$$\alpha_1 \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{q}_r = \mathbf{0}, \quad \alpha_i \in \mathbf{K}. \quad (3)$$

Од равенството (3) следува

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Системот од првите r равенства во (4) е еквивалентен на равенството

$$\alpha_1 \mathbf{p}_1 + \alpha_2 \mathbf{p}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{p}_r = \mathbf{0}.$$

Но, минорот R е различен од нула, па затоа неговите редици се линеарно независни. Според тоа,

$$\alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

Конечно, од (3) следува (5), т.е. системот (2) е линеарно независен.

Сега ќе докажеме, дека (2) е максимално линеарно независно подмножество на системот од сите редици на A . Ако A има само r редици, тогаш тврдењето е тривијално. Ако $m > r$, нека s е фиксиран природен број таков што $r < s \leq m$, а j нека се менува од 1 до n . Да ја разгледаме детерминантата

$$\Delta_{sj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & a_{sj} \end{vmatrix}$$

од $(r+1)$ -ви ред, која се добива ако на R ги допишеме редицата

$$a_{s1} \ a_{s2} \ \dots \ a_{sr} \ a_{sj}$$

и колоната

$$\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ a_{sj}. \end{array}$$

Ако $j > r$, тогаш Δ_{sj} е минор на A од $(r+1)$ -ви ред, па затоа

$$\Delta_{sj} = 0. \quad (6)$$

Ако $j \leq r$, тогаш Δ_{sj} содржи еднакви колони, па затоа важи (6). Од друга страна, да ја разложиме Δ_{sj} по елементите од последната колона:

$$0 = \Delta_{sj} = a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \dots + a_{rj}A_r + a_{sj}R, \quad (7)$$

каде со A_t е означен алгебарскиот комплемент на a_{tj} во Δ_{sj} . Очигледно, A_t не зависи од изборот на j , т.е. за сите детерминанти Δ_{sj} при фиксиран s и различен j алгебарските комплументи A_t се исти. Но, $R \neq 0$, па од (7) следува

$$a_{sj} = -\frac{1}{R}(a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \dots + a_{rj}A_r), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Ако сега $\mathbf{q}_s = (a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn})$, тогаш системот равенства (8) е еквивалентен на равенството

$$\mathbf{q}_s = -\frac{1}{R}(A_1\mathbf{q}_1 + A_2\mathbf{q}_2 + \dots + A_r\mathbf{q}_r).$$

Според тоа, редицата на A со произволен индекс s линеарно се изразува со првите r редици, па затоа (2) е максимално линеарно независно подмножество редици, т.е. рангот на A е еднаков на r . ♦

7.4. Забелешка. Во доказот на претходната теорема не користевме дека сите минори на матрицата со ред поголем од r се еднакви на нула. Имено, искористивме дека на нула се еднакви само минорите од $(r+1)$ -ви ред, кои исцело го содржат минорот од r -ти ред. Притоа, од еднаквоста на нула на овие минори следува дека матрицата има ранг r , па значи и сите минори на матрицата од повисок ред се еднакви на нула. Оттука следува следново правило за наоѓање на ранг на матрица.

При пресметување на ранг на матрица преминуваме од минор со помал ранг, кон минор со повисок ранг. Ако веќе е најден минор R од r -ти ред, кој е различен од нула, тогаш ги пресметуваме само оние минори од $(r+1)$ -ви ред кои го содржат минорот R . Ако сите овие минори се еднакви на нула, тогаш рангот на матрицата е еднаков на r .

Во случајот R го нарекуваме базен минор на матрицата.

7.5. Теорема. Рангот на матрицата A^T е еднаков на рангот на матрицата A .

Доказ. Непосредно следува од теорема 7.3. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

7.6. Теорема. Рангот на матрицата A е еднаков на максималниот број линеарно независни колони.

Доказ. Непосредно следува од теорема 7.5. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

7.7. Теорема. Детерминантата е еднаква на нула ако и само ако нејзините редици (колони) се линеарно зависни.

Доказ. Нека Δ е детерминанта од n -ти ред. Со r да го означиме највисокиот ред на минорот различен од нула. Јасно, $\Delta = 0$ ако и само ако $r < n$, т.е. ако и само ако максималното множество линеарно независни редици (колони) не се совпаѓа со множеството од сите редици (колони) на Δ , односно кога редиците (колони) на детерминатата се линеарно зависни. ♦

8. ЕЛЕМЕНТАРНИ ТРАНСФОРМАЦИИ НА МАТРИЦА

8.1. Нека A е $m \times n$ матрица. Со редиците и колоните на матрицата A ќе ги реализираме следниве операции:

а) множење на произволна редица (колона) на A со произволен ненулта скалар (реален број),

б) додавање на редица (колона) од A на друга редица (колона) помножена со произволен ненулта скалар (реален број).

Операциите зададени со а) и б) ги нарекуваме *елементарни трансформации* на матрицата A .

8.2. Лема. Со конечна низа елементарни трансформации може да се променат местата на кои било две редици (колони) на произволна матрица.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме за редиците на матриците. Доказот за колоните е напълно аналоген. Нека

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m \quad (1)$$

е множеството редици на матрицата A и нека треба да се направи транспозицијата $(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$. Со следниве елементарни трансформации:

- 1) на i -тата редица и се додава j -тата редица и на нејзиното место се добива редица $\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j$,
- 2) од j -тата редица се одзема i -тата редица и за j -та редица се добива $-\mathbf{q}_i$,
- 3) на i -тата редица и се додава j -тата редица и за i -та редица се добива $\mathbf{q}_j$,

4) j – тата редица се множи со -1 ,

очигледно се добива транспозицијата $(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$. ♦

8.3. Теорема. Елементарните трансформации не го менуваат рангот на матрицата.

Доказ. Бидејќи рангот не се менува при транспонирање на матрица, доволно е да ги разгледаме само елементарните трансформации на редиците. Нека (1) е множеството редици на матрицата A и $\alpha \neq 0$. Ако произволна редица, на пример првата, ја помножимо со α добиваме

$$\alpha \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m. \quad (2)$$

Очигледно, множествата (1) и (2) се еквивалентни, па значи ранговите на матриците се еднакви.

Нека $\beta \in \mathbf{K}$. Да го разгледаме множеството вектори

$$\mathbf{q}_1 + \beta \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m. \quad (3)$$

Јасно, (3) линеарно се изразува со (1), но и (1) линеарно се изразува со (3), бидејќи

$$\mathbf{q}_1 = (\mathbf{q}_1 + \beta \mathbf{q}_2) - \beta \mathbf{q}_2.$$

Значи, множествата вектори (1) и (3) се еквивалентни, т.е. ранговите на матриците се еднакви. ♦

8.4. Теорема. Секоја матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

со ранг r со помош на елементарните трансформации може да се сведе на матрица од видот

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Доказ. Ако $A = O_{m \times n}$, тогаш A има вид (4). Нека во A имаме елементи различни од нула. Ги разменуваме редиците и колоните на A така што $a_{11} \neq 0$. Првата редица ја помножимо со $\frac{1}{a_{11}}$. Понатаму, првата редица ја помножимо со a_{j1} , $j = 2, 3, \dots, m$ и ја одземаме од j – тата колона, со што ја добиваме матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Сега, од k -тата колона, $k = 2, 3, \dots, n$ ја одземаме првата колона помножена со b_{1k} и ја добиваме матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Аналогна постапка реализираме за матрицата

$$\begin{bmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

и после конечен број чекори преминуваме кон матрица од видот (4). Рангот на оваа матрица е еднаков на бројот на единиците кои се јавуваат во матрицата. Бидејќи рангот на матрицата не се менува при елементарни трансформации, добиваме дека бројот на единиците во матрицата (4) е еднаков на рангот на матрицата A , т.е. на r . ♦

8.5. Пример. Пресметајте го рангот на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Во првиот чекор ја множиме првата редица со 1, 1 и 2 и ја одземаме од втората, третата и четвртата редица. Во вториот чекор ја множиме првата колона со 2, 2 и 5 и ја одземаме од втората, третата и четвртата колона, а истовремено втората, тре-

тата и четвртата колона ги множиме со -1 . Во третиот чекор втората редица ја множиме со $\frac{1}{3}$. Во четвртиот чекор втората редица ја множиме со 3 и ја одземаме од четвртата редица. Во петтиот чекор ја множиме втората колона со 3 и 5 и ја одземаме со третата и четвртата колона и конечно, во шестиот чекор ја множиме третата колона со 2 и ја одземаме од четвртата колона. ♦

9. УСЛОВ ЗА ЛИНЕАРНА НЕЗАВИСНОСТ

9.1. Нека L_m е векторски простор над полето K , $e_1, e_2, \dots, e_m$ е база на L_m и нека се дадени векторите

$$a_1, a_2, \dots, a_k \quad (1)$$

чии разложувања по базните вектори се

$$a_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} e_j, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2)$$

Логично е да се запрашаме, дали фамилијата (1) е линеарно зависна и во случај на потврден одговор да најдеме максимална линеарно независна подфамилија на фамилијата (1).

Како што знаеме векторите (1) се линеарно зависни ако и само постојат скалари λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, не сите еднакви на нула такви што $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0$. Понатаму, ако ги земеме предвид равенствата (5), од теорема 5.3 следува дека последното равенство е еквивалентно на системот равенства

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_{ji} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Според тоа, векторите (1) се линеарно зависни ако и само ако системот (3) има нетривијално решение, т.е. ако и само ако рангот на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mk} \end{bmatrix}$$

е помал од k .

Нека матрицата A има ранг r и да определиме минор од r -ти ред, различен од нула. Нека овој минор се содржи во колоните $i_1, i_2, \dots, i_r$ на матрицата A . Од теорема 7.3 следува дека векторите

$$(\alpha_{1i_p}, \alpha_{2i_p}, \dots, \alpha_{mi_p}) \in K^m, \quad p = 1, 2, \dots, r$$

формираат максимална линеарно независна подфамилија на фамилијата вектори

$$(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{mi}) \in K^m, \quad i = 1, 2, \dots, r, r+1, \dots, k.$$

Последното значи, дека векторите $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ формираат максимална линеарно независна подфамилија на фамилијата (4).

Од претходните рагледувања непосредно следува следнава теорема.

Теорема. Нека $\mathbf{L}_m$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ е база на $\mathbf{L}_m$ и нека се дадени векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ чии разложувања по базните вектори се $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} \mathbf{e}_j$, $i = 1, 2, \dots, m$. Векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ се линеарно независни ако и само ако детерминантата на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \quad (4)$$

е различна од нула. ♦

9.2. Според теорема 4.7 m линеарно независни вектори на векторскиот простор $\mathbf{L}_m$ формираат база на $\mathbf{L}_m$, па затоа претходната теорема е еквивалентна на следнава теорема.

Теорема. Нека $\mathbf{L}_m$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ е база на $\mathbf{L}_m$ и нека се дадени векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ чии разложувања по базните вектори се $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} \mathbf{e}_j$, $i = 1, 2, \dots, m$. Векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ формираат база во просторот $\mathbf{L}_m$ ако и само ако детерминатата на матрицата (4) е различна од нула. ♦

10. ВРСКА МЕЃУ ДВЕ БАЗИ

10.1. Нека $\mathbf{L}_m$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$,

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m \quad (1)$$

е база на $\mathbf{L}_m$ и

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \quad (2)$$

е произволна фамилија вектори во просторот $\mathbf{L}_m$ чии разложувања по базните вектори се

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Во претходната теорема видовме дека (2) е база на $\mathbf{L}_m$ ако и само ако детерминантата на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{bmatrix} \quad (4)$$

е различна од нула. Ако последниот услов е исполнет, тогаш за матрицата (4) ќе велиме дека е *матрица за премин од базата (1) во базата (2)*,

10.2. Да ги воведеме ознаките $[\mathbf{e}] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_m]$ и $[\mathbf{a}] = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_m]$. Системот (3) е еквивалентен на матричната равенка

$$[\mathbf{a}] = [\mathbf{e}]A, \quad (5)$$

во што можеме да се убедиме ако ги помножиме матриците на десната страна во равенството (5). Според тоа, со формулата (5) е дадена врската меѓу двете бази на просторот $\mathbf{L}_m$. Имено, ако базата (1) е дадена, тогаш при соодветен избор на матрицата A , со помош на формулата (5) можеме да ја најдеме секоја база на просторот $\mathbf{L}_m$. Од друга страна, ако за матрица на премин земеме произволна несингуларна матрица, тогаш со помош на формулата (5) добиваме некоја база на просторот $\mathbf{L}_m$.

10.3. Ако матричното равенство (5) го помножиме од десно со матрицата A^{-1} , добиваме $[\mathbf{a}]A^{-1} = ([\mathbf{e}]A)A^{-1} = [\mathbf{e}](AA^{-1}) = [\mathbf{e}]E = [\mathbf{e}]$, т.е. $[\mathbf{e}] = [\mathbf{a}]A^{-1}$ и тоа е формула за изразување на базата (1) со помош на базата (2).

11. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА КООРДИНАТИ

11.1. Нека $\mathbf{L}_m$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$ и

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \quad (2)$$

се две негови бази, A е матрицата за премин од базата (1) во базата (2) и $\mathbf{b} \in \mathbf{L}_m$, при што

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^m x_j \mathbf{e}_j \text{ и } \mathbf{b} = \sum_{j=1}^m y_j \mathbf{a}_j.$$

Ги воведуваме ознаките

$$[\mathbf{e}] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_m], \quad [\mathbf{a}] = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_m], \quad (3)$$

$$(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ и } (y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

и добиваме $\mathbf{b} = [\mathbf{e}](x) = [\mathbf{a}](y)$. Но, $[\mathbf{a}] = [\mathbf{e}]A$, па затоа

$$[\mathbf{e}](x) = ([\mathbf{e}]A)(y) = [\mathbf{e}](A(y)),$$

T.e.

$$[\mathbf{e}]((x) - A(y)) = \mathbf{0} . \quad (5)$$

Но, (1) е база на $\mathbf{L}_m$, па затоа равенството (5) е еквивалентно на равенството $(x) - A(y) = 0$, т.е. на равенството

$$(x) = A(y). \quad (6)$$

Равенството (6) ја дава зависноста на координатите на векторот $\mathbf{b}$ во базите (1) и (2). Понатаму, ако (6) го помножиме од лево со матрицата A^{-1} , тогаш добиваме дека изразувањето на координатите на векторот $\mathbf{b}$ во базата (2) со помош на координатите во базата (1) е дадено со

$$(y) = A^{-1}(x). \quad (7)$$

11.2. Нека (x) и (y) се дадени со (4) и $A = [\alpha_{ij}]_{n \times n}$. Тогаш формулата (6) е еквивалентна на системот равенки

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + ... + \alpha_{1n}y_n, \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + ... + \alpha_{2n}y_n, \\ \\ x_p = \alpha_{p1}y_1 + \alpha_{p2}y_2 + ... + \alpha_{pn}y_n, \end{array} \right. \quad (8)$$

за кој $\det A \neq 0$, бидејќи тоа е детерминантата на матрицата за премин од една во друга база. Од друга страна, ако A е произволна несингуларна матрица од n -ти ред над полето $\mathbf{K}$, тогаш системите скалари $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$, поврзани со формулата (6) се координати на некој вектор во две бази, за кои матрицата на премин е A .

12. МЕТОД НА ИСКЛУЧУВАЊЕ НА НЕПОЗНАТИТЕ ЗА РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

12.1. Нека $\mathbf{K}$ е произволно поле и $a_{ij}, b_i \in \mathbf{K}$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Да разгледаме систем од m линейни равенки

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (1)$$

со n непознати

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (2)$$

Дефиниција. За подредената n – торка

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (3)$$

12.2. Пример. а) Системот

е непротивречен.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

12.3. Дефиниција. За два система ќе велиме дека се *еквивалентни* ако имаат исто множество решенија.

12.4. Лема. Ако на една од равенките на системот (1) се додаде друга равенка, помножена со произволен елемент од полето $\mathbf{K}$, тогаш се добива систем еквивалентен на системот (1).

Доказ. Ако на првата равенка во (1) ја додадеме втората равенка помножена со λ го добиваме системот:

$$\begin{cases} (a_{11} + \lambda a_{21})x_1 + (a_{12} + \lambda a_{22})x_2 + \dots + (a_{1n} + \lambda a_{2n})x_n = b_1 + \lambda b_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4)$$

Нека (3) е решение на системот (1). Тогаш

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = \alpha_m \end{cases} \quad (5)$$

се точни равенства. Ако на првото равенство во (5) го додадеме второто помножено со λ добиваме

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} + \lambda a_{21})\alpha_1 + (a_{12} + \lambda a_{22})\alpha_2 + \dots + (a_{1n} + \lambda a_{2n})\alpha_n = b_1 + \lambda b_2 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array} \right. \quad (6)$$

Бидејќи (6) се точни равенства, добиваме дека (3) е решение и на системот (4). Јасно, (1) се добива од (4), ако на првата равенка во (4) ја додадеме втората по-

Значи, дадениот систем се сведува на следниов еквивалентен систем со скалеста форма

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = 3, \\ y - 4z - 2u = -4, \\ z + \frac{u}{3} = 1, \\ \frac{2u}{3} = 2. \end{cases}$$

Така имаме

$$\begin{aligned} \frac{2u}{3} = 2 &\Rightarrow u = 3, \quad z + \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow z = 0, \quad y - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -4 \Rightarrow y = 2, \\ x - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 &= 3 \Rightarrow x = 1, \end{aligned}$$

што значи дека решение на системот е подредената четворка $(1, 2, 0, 3)$. ♦

12.8. Пример. Решете го системот равенки

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z + u = 0 \\ x - y + z + u = 1 \\ -x + y - z + u = 3. \end{cases}$$

Решение. Аналогно како во пример 12.7 добиваме

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

што значи, дадениот систем го добива следниов вид:

$$\begin{cases} x - y + z + \frac{u}{2} = 0, \\ u = 2. \end{cases}$$

Од тоа добиваме дека решение на дадениот систем е секоја четворка

$$(x, y, y - x - 1, 2),$$

каде што x и y се произволни реални броеви. ♦

12.9. Пример. Решете го системот

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 3, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x + y - z = 1, \\ x - 3y + 3z = -1. \end{cases}$$

Решение. Аналогно како во пример 12.7 добиваме

Значи, во новодобиениот систем една равенка би имала вид $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 4$ и таа нема решение. Според тоа, и дадениот систем нема решение. ♦

$$\mathbf{a}_i, \quad i=1,2,\dots,n, \quad \mathbf{b} \quad (5)$$

се еквивалентни, што значи дека нивните рангови се еднакви. Обратно, ако ранго-
вите на фамилиите (4) и (5) се еднакви, тогаш максималната линеарно независна
подфамилија U на фамилијата (4) е максимална линеарно независна подфамилија
и на фамилијата (5). Но, тоа значи дека фамилијата (4) е еквивалентна на фами-
лијата U и, значи, е еквивалентна и на фамилијата (5). Според тоа, за еквива-
лентност на фамилиите (4) и (5) потребно и доволно е тие да имаат исти рангови.

13.2. Да ги разгледаме матриците

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ и } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

За матрицата A ќе велиме дека е *матрица на системот* (1), а матрицата A ќе ја наречеме *проширена матрица* на системот (1). Како што знаеме, ранг на фамилија вектори во просторот L_m е еднаков на рангот на матрицата, чии колони се координатите на векторите. Затоа рангот на фамилијата вектори (5) е еднаков на рангот на матрицата A , а рангот на фамилијата (4) е еднаков на рангот на матрицата A . Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема (Кронекер-Капели). Системот (1) има решение ако и само ако матриците A и A имаат ист ранг. ♦

13.3. Нека претпоставиме дека системот (1) има решение и да ги определиме сите негови решенија. Нека рангот на матриците A и A е еднаков на r . Без ограничување на општоста, можеме да претпоставиме дека првите r редии на матрицата A се линеарно независни. Јасно, во тој случај првите r редии на матрицата A се линеарно независни, а секоја друга редица е нивна линеарна комбинација. Оттука следува, дека секоја равенка на системот (1) е линеарна комбинација на првите r равенки, па затоа системот

[illegible]

составен од првите r равенки на системот (1), е еквивалентен на системот (1). Да го замениме системот (1) со системот (6).

Ако $r = n$, тогаш детерминантата на системот (6) е различна од нула и тој согласно Крамеровото правило има единствено решение.

Нека претпоставиме дека $r < n$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека првите r колони на матрицата на системот (6) се линеарно независни. Непознатите

$$\begin{cases} x+2y+2z=5, \\ x-y+z=0, \\ x+2y+z=3, \\ 2x+y+3z=5. \end{cases} \quad (12)$$

Решение. Ќе го определиме рангот на матрицата A и на проширената матрица A на системот (12). Имаме:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

што значи дека A и A имаат ист ранг $r=3$. Според теоремата на Кронекер-Капели, системот има решение, и тоа само едно, бидејќи рангот на споменатите матрици е еднаков на бројот на непознатите во системот. Лесно наоѓаме дека тоа решение е $x=-1, y=1, z=2$. ♦

13.5. Пример. Со помош на теоремата на Кронекер-Капели, испитајте дали има решение системот равенки

$$\begin{cases} x-y+z-u=2, \\ -2x+2y-z+2u=-2, \\ x-y+2z-u=4. \end{cases} \quad (13)$$

Решение. Ќе го определиме рангот на матрицата A и на проширената матрица A на системот (13). Имаме:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

што значи дека A и A имаат ист ранг $r=2$. Значи, системот има решенија, и тоа бесконечно многу, бидејќи рангот $r=2$ е помал од бројот на непознатите во системот $n=4$. Ако од последната равенка ја одземеме првата, добиваме $z=2$, а потоа, избирајќи ги x и y произволно, од втората равенка добиваме $u=x-y$. Значи, секоја четворка $(x, y, 2, x-y)$, каде што x и y се произволни реални броеви, е решение на системот. ♦

$$\begin{cases} x - y + z - u = 2, \\ 2x - y + z - u = 1, \\ 3x - 2y + 2z - 2u = 0. \end{cases} \quad (14)$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

13.7. Дефиниција. Ако во равенките на системот (1) сите слободни члене еднакви на нула, тогаш за системот (1) ќе велиме дека е *хомоген систем на равенки*.

13.8. За хомоген систем линейни равенки точна е следнава теорема.

14. СВОЈСТВА НА РЕШЕНИЈАТА НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

[illegible]

227

14.2. Теорема. Множеството $\mathbf{U}$ од сите решенија на системот (1) е потпростор на просторот $\mathbf{L}_n$.

Доказ. Од $\mathbf{o} \in \mathbf{U}$ следува $\mathbf{U} \neq \emptyset$. Понатаму, нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се решенија на системот (1) и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ се нивните координати во дадената база. Тогаш, равенствата $\sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_k = 0, i = 1, 2, \dots, m$ и $\sum_{k=1}^n a_{ik} \beta_k = 0, i = 1, 2, \dots, m$ се точни, па затоа за секои $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ важи

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} (\lambda \alpha_k + \mu \beta_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} \alpha_k + \mu \sum_{k=1}^n a_{ik} \beta_k = 0, i = 1, 2, \dots, m,$$

т.е. $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in \mathbf{U}$, што значи дека множеството $\mathbf{U}$ од сите решенија на системот (1) е потпростор на просторот $\mathbf{L}_n$. ♦

14.3. Ќе ја определиме димензијата на потпросторот $\mathbf{U}$ и ќе најдеме негова база. Ако $r = n$, тогаш $\mathbf{U} = \{\mathbf{o}\}$. Нека $1 \leq r < n$ и базниот минор на системот нека се наоѓа во горниот лев агол на матрицата на системот. Тогаш слободните непознати се

$$x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n. \quad (2)$$

Да разгледаме произволна различна од нула детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{1r+1} & c_{2r+1} & \dots & c_{n-r+1} \\ c_{1r+2} & c_{2r+2} & \dots & c_{n-r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (3)$$

од $(n-r)$ -ти ред. Да ги земеме елементите

$$c_{ir+1}, c_{ir+2}, \dots, c_{in}$$

на нејзината i -та колона и истите да ги доделиме на слободните непознати (2), со што добиваме решенија

$$c_i, i = 1, 2, \dots, n-r \quad (3)$$

на системот (1) со координати

$$c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ir}, c_{ir+1}, c_{ir+2}, \dots, c_{in}, i = 1, 2, \dots, n-r.$$

Ќе докажеме дека векторите (3) формираат база на потпросторот $\mathbf{U}$. Прво тие се линеарно независни, бидејќи матрицата, чии колони се координатните колони на векторите (3) содржи ненулта минор Δ од $(n-r)$ -ви ред. Нека, векторот $\mathbf{b}$ со координати

$$b_1, b_2, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n$$

е произволно решение на системот (1). Ќе докажеме дека $\mathbf{b}$ е линеарна комбинација на решенијата (3). Да ги воведеме ознаките

$$\mathbf{d}_i = (c_{ir+1}, c_{ir+2}, \dots, c_{in}), i = 1, 2, \dots, n-r, \mathbf{f} = (b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n).$$

Бидејќи векторите $\mathbf{d}_i$, $i=1,2,\dots,n-r$ се линеарно независни и просторот кои го генерираат е со димензија $n-r$ (зошто?), добиваме дека

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \mathbf{d}_i. \quad (4)$$

Да го разгледаме векторот

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \mathbf{c}_i - \mathbf{b}.$$

Вектор е линеарна комбинација на решенија на системот (1), па затоа тој е решение на системот (1). Од равенствата (4) следува, дека почнувајќи од $(r+1)$ -та сите координати на векторот $\mathbf{g}$ се еднакви на нула, т.е. векторот $\mathbf{g}$ се добива при нулти вредности на слободните непознати. Но, во овој случај хомогениот систем линеарни равенки има само тривијално решение, па значи $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i \mathbf{c}_i$ и (3) е база на потпросторот решенија. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. Ако матрицата на хомогениот систем линеарни равенки со n непознати има ранг r , тогаш димензијата на потпросторот решенија на тој систем е еднаква на $n-r$. ♦

14.4. Дефиниција. Ако (3) е база на просторот решенија на системот (1), тогаш фамилијата редици

$$(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}), \quad i=1,2,\dots,n-r$$

ја нарекуваме *фундаментален систем решенија*.

14.5. Во претходните разгледувања докажавме, дека множеството од сите решенија на хомоген систем со n непознати е потпростор на просторот $\mathbf{L}_n$. Да ја разгледаме обратната задача: Дали секој потпростор може да биде зададен со хомоген систем линеарни равенки? Поточно кажано, ако во векторскиот простор $\mathbf{L}_n$ фиксираме некоја база и земеме произволен потпростор $\mathbf{U}$ од $\mathbf{L}_n$, дали постои хомоген систем линеарни равенки, чие множество решенија е потпросторот $\mathbf{U}$.

Очигледно, ако $\mathbf{U} = \{\mathbf{0}\}$, тогаш таков систем постои и тоа е произволен хомоген систем од n линеарни равенки со n непознати, чија детерминанта е различна од нула. Ако $\mathbf{U} = \mathbf{L}_n$, тогаш рангот на матрицата на соодветниот систем мора да е еднаков на нула, т.е. сите нејзини коефициенти се нули. Нека претпоставиме дека $\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{U} \subset \mathbf{L}_n$ и векторите

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \quad (5)$$

со координати

$$u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}, \quad i=1,2,\dots,k,$$

соодветно, нека формираат база на потпросторот $\mathbf{U}$. Да го разгледаме системот равенки

(6)

$$(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, n-k$$
$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = 0, \\ \\ c_{n-k1}x_1 + c_{n-kn}x_2 + \dots + c_{n-kn}x_n = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$
$$\mathbf{U} \subseteq \mathbf{Q}. \quad (8)$$

Теорема. Секој потпростор на векторскиот простор L_n е потпростор на некој хомоген систем линеарни равенки со n непознати. ♦

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (9)$$
$$\begin{aligned} a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 + \beta_2) + \dots + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) &= \\ &= (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n) \\ &= b_i + 0 = b_i, \end{aligned}$$

т.е. $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ е решение на системот (9). ♦

14.8. Лема. Разликата на секои две решенија на системот (9) е решение на системот (1).

Доказ. Постапете аналогно како во доказот на претходната лема. ♦

14.9. Од претходните две леми непосредно следува точноста на следнава теорема.

Теорема. Ако системот (9) има решение, тогаш сите негови решенија можат да се добијат како збир на едно решение на (9) и решенијата на соодветниот хомоген систем (1). ♦

15. ЛИНЕАРНИ ПРЕСЛИКУВАЊА НА ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ. ДЕФИНИЦИЈА И ОСНОВНИ СВОЈСТВА

15.1. Дефиниција. Нека L и L' се векторски простори над исто поле K . За пресликувањето $f: L \rightarrow L'$ ќе велиме дека е *линеарно*, ако

- а) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$, за секои $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$, и
- б) $f(\lambda \mathbf{a}) = \lambda f(\mathbf{a})$, за секој $\mathbf{a} \in L$ и секој $\lambda \in K$.

15.2. Лема. Нека L и L' се векторски простори над исто поле K . Пресликувањето $f: L \rightarrow L'$ е линеарно ако и само ако

$$f(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}), \text{ за секои } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \text{ и секои } \alpha, \beta \in K. \quad (1)$$

Доказ. Нека f е линеарно пресликување. Тогаш, ако прво го искористиме условот а), а потоа условот б) од дефиниција 15.1 добиваме дека за секои $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ и секои $\alpha, \beta \in K$ важи:

$$f(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = f(\alpha \mathbf{a}) + f(\beta \mathbf{b}) = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}),$$

т.е. важи условот (1).

Нека е исполнет условот (1). Ставаме $\alpha = \beta = 1$ и добиваме дека за секои $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ важи

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(1 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b}) = 1 \cdot f(\mathbf{a}) + 1 \cdot f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}),$$

т.е. важи условот а) од дефиниција 15.1. Ако ставиме $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$, добиваме дека за секој $\mathbf{a} \in L$ и секој $\lambda \in K$ важи

$$f(\lambda \mathbf{a}) = f(\lambda \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + 0 \cdot f(\mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a})$$

т.е. важи условот б) од дефиниција 15.1, што значи дека пресликувањето f е линеарно. ♦

15.3. Пример. а) Нултото пресликување $o: L \rightarrow L'$, определено со $o(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, за секој $\mathbf{x} \in L$ е линеарно.

б) Идентичното пресликување $e: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$, определено со $e(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ е линеарно.

в) Ќе докажеме дека пресликувањето $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ определено со

$f((a_1, a_2, a_3)) = (a_1 + a_3, a_2 - a_3)$, за секој $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ е линеарно.

Прво да забележиме дека на секој елемент $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ со f еднозначно му е придружен елементот $(a_1 + a_3, a_2 - a_3)$ од $\mathbf{R}^2$, што значи дека f е навистина пресликување од $\mathbf{R}^3$ во $\mathbf{R}^2$. Понатаму, нека $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Имаме

$$\begin{aligned} f(\alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3)) &= f((\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3)) \\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1 + \alpha a_3 + \beta b_3, \alpha a_2 + \beta b_2 - \alpha a_3 - \beta b_3) \\ &= (\alpha a_1 + \alpha a_3, \alpha a_2 - \alpha a_3) + (\beta b_1 + \beta b_3, \beta b_2 - \beta b_3) \\ &= \alpha(a_1 + a_3, a_2 - a_3) + \beta(b_1 + b_3, b_2 - b_3) \\ &= \alpha f(a_1, a_2, a_3) + \beta f(b_1, b_2, b_3) \end{aligned}$$

па од лема 15.2 следува дека пресликувањето f е линеарно.

г) Ќе докажеме дека пресликувањето $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ определено со

$$f((a_1, a_2, a_3)) = (a_1 + a_3, a_2 + 1), \text{ за секој } (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \quad (2)$$

не е линеарно.

Јасно е дека со (2) е определено пресликување од $\mathbf{R}^3$ во $\mathbf{R}^2$. Нека $\lambda \neq 1$ и $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$. Имаме

$$\begin{aligned} f(\lambda(a_1, a_2, a_3)) &= f((\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)) = (\lambda a_1 + \lambda a_3, \lambda a_2 + 1) \\ &\neq \lambda(a_1 + a_3, a_2 + 1) = \lambda f((a_1, a_2, a_3)), \end{aligned}$$

т.е. условот б) од дефиниција 15.1 не е исполнет, па затоа f не е линеарно пресликување. ♦

15.4. Теорема. Нека $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ се векторски простори над исто поле $\mathbf{K}$, при што $\mathbf{L}$ е конечно димензионален и

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \quad (3)$$

е база на $\mathbf{L}$, а

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \quad (4)$$

се произволни вектори од $\mathbf{L}'$. Тогаш, постои единствено линеарно пресликување $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ така што

$$f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Доказ. Да го разгледаме пресликувањето f определено со

$$f(\mathbf{a}) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad (5)$$

каде

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (6)$$

се координатите на векторот $\mathbf{a}$ во базата (3). Ќе докажеме дека f е линеарно пресликување. Нека $\mathbf{b} \in \mathbf{L}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Да го разложиме векторот $\mathbf{b}$ по базата (3). Имаме

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{u}_n.$$

Тогаш, векторот $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ има координати $\lambda \alpha_i + \mu \beta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, па затоа

$$f(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) \mathbf{v}_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i + \mu \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i = \lambda f(\mathbf{a}) + \mu f(\mathbf{b}),$$

па од лема 15.2 следува дека пресликувањето f определено со (5) е линеарно. Да ја докажеме единственоста на f . Нека $\varphi: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е такво линеарно пресликување што

$$\varphi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ако векторот $\mathbf{a}$ има координати (6) во базата (3), тогаш

$$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\mathbf{u}_i) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = f(\mathbf{a}),$$

па затоа $\varphi \equiv f$. ♦

15.5. Лема. Нека $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}'$ и $\mathbf{L}''$ се векторски простори над исто поле $\mathbf{K}$ и $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ и $g: \mathbf{L}' \rightarrow \mathbf{L}''$ се линеарни пресликувања. Тогаш $gf: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}''$ е линеарно пресликување.

Доказ. За секои $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{L}$ и за секои $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ важи

$$\begin{aligned} (gf)(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) &= g(f(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})) = g(\alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b})) \\ &= \alpha g(f(\mathbf{a})) + \beta g(f(\mathbf{b})) = \alpha (gf)(\mathbf{a}) + \beta (gf)(\mathbf{b}), \end{aligned}$$

па од лема 15.2 следува дека пресликувањето gf е линеарно. ♦

15.6. Лема. Нека $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е линеарно пресликување и $\mathbf{o}$ и $\mathbf{o}'$ се нултите вектори во $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$, соодветно. Тогаш $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}'$.

Доказ. Имаме $\mathbf{o} = 0 \cdot \mathbf{a}$, па затоа

$$f(\mathbf{o}) = f(0 \cdot \mathbf{a}) = 0 f(\mathbf{a}) = \mathbf{o}'. \quad \blacklozenge$$

15.7. Лема. Ако $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е линеарно пресликување и $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$, тогаш $f(-\mathbf{a}) = -f(\mathbf{a})$.

Доказ. Имаме

$$f(\mathbf{a}) + f(-\mathbf{a}) = f(1\mathbf{a}) + f((-1)\mathbf{a}) = f(1\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a}) = f(\mathbf{a} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}'$$

па затоа $f(-\mathbf{a}) = -f(\mathbf{a})$. ♦

15.8. Лема. Ако $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е линеарно пресликување, $\mathbf{Q}$ е потпростор од $\mathbf{L}$, тогаш $f(\mathbf{Q})$ е потпростор од $\mathbf{L}'$. Во случајов $f(\mathbf{L}) = \text{Im } f$ е потпростор од $\mathbf{L}'$.

Доказ. Нека $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in f(\mathbf{Q})$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Тогаш постојат $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}$ такви што $f(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$ и $f(\mathbf{b}) = \mathbf{d}$. Понатаму

$$\alpha \mathbf{c} + \beta \mathbf{d} = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}) = f(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})$$

и како $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \in \mathbf{Q}$ добиваме дека $\alpha \mathbf{c} + \beta \mathbf{d} = f(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \in f(\mathbf{Q})$, т.е. $f(\mathbf{Q})$ е потпростор од $\mathbf{L}'$. ♦

15.9. Лема. Нека $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е линеарно пресликување. Ако векторите

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \quad (7)$$

се линеарно зависни, тогаш и векторите

$$f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_k) \quad (8)$$

се линеарно зависни. Притоа важи, ако

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k$$

тогаш

$$f(\mathbf{v}) = \alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + \alpha_k f(\mathbf{u}_k).$$

Доказ. Непосредно следува од лема 15.2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

15.10. Лема. Нека $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е линеарно пресликување. Ако векторите (7) генерираат потпросторот $\mathbf{Q}$, тогаш векторите (8) го генерираат потпросторот $f(\mathbf{Q})$ и притоа важи $\dim f(\mathbf{Q}) \leq \dim \mathbf{Q}$.

Доказ. Непосредно следува од лема 15.9. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

16. ЈАДРО И РАНГ НА ЛИНЕАРНО ПРЕСЛИКУВАЊЕ

16.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ се векторски простори над исто поле $\mathbf{K}$, $\mathbf{o}'$ е нултиот вектор во $\mathbf{L}'$ и $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е линеарно пресликување. Множеството

$$f^{-1}(\mathbf{o}') = \{\mathbf{u} \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}', \mathbf{u} \in \mathbf{L}\}$$

го нарекуваме *јадро на линеарното пресликување f* и го означуваме со $\ker f$.

16.2. Теорема. $\ker f$ е потпростор на просторот $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$.

Доказ. Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ker f$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Тогаш $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b}) = \mathbf{o}'$, па затоа

$$f(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}) = \alpha \mathbf{o}' + \beta \mathbf{o}' = \mathbf{o}',$$

т.е. $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \in \ker f$, што значи $\ker f$ е потпростор на $\mathbf{L}$. ♦

16.3. Теорема. Линеарното пресликување $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е инјекција ако и само ако $\ker f = \{\mathbf{o}\}$.

Доказ. Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{L}$. Од $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ следува $f(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{o}'$, т.е. $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \ker f$.

Нека f не е инјекција, т.е. нека постојат $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{L}$ такви што $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ и $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$. Тогаш $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \ker f$ и како $\mathbf{a} - \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ добиваме дека $\ker f \neq \{\mathbf{o}\}$.

Обратно, нека $\ker f = \{\mathbf{o}\}$. Тогаш од $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ следува $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, што значи дека f е инјекција. ♦

16.4. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ се векторски простори над полето $\mathbf{K}$, просторот $\mathbf{L}$ е конечнодимензионален и $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е линеарно пресликување. Димензијата на потпросторот $\text{Im } f$ ја нарекуваме *ранг* на пресликувањето f , а димензијата на $\ker f$ ја нарекуваме *дефект* на пресликувањето f .

16.5. Теорема. Нека $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ се векторски простори над исто поле, $\mathbf{L}$ е конечно димензионален и $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е линеарно пресликување. Тогаш

$$\dim \text{Im } f + \dim \ker f = \dim \mathbf{L}, \quad (1)$$

т.е. збирот на рангот на линеарното пресликување f и неговиот дефект е еднаков на димензијата на просторот $\mathbf{L}$.

Доказ. Нека r е рангот на f и

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \quad (2)$$

е произволна база на $\text{Im } f$. Тогаш, во просторот $\mathbf{L}$ постојат вектори

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \quad (3)$$

такви, што

$$f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4)$$

Со $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$ до го означиме потпросторот генериран од векторите (3) и да ја разгледаме сумата

$$L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r) + \ker f. \quad (5)$$

Ако $\mathbf{d} \in L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r) \cap \ker f$, тогаш

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{o}' = f(\mathbf{d}) = f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i$$

и како (2) е база на $\text{Im } f$ добиваме дека $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, т.е. $\mathbf{d} = \mathbf{o}$. Значи, $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r) \cap \ker f = \{\mathbf{o}\}$, т.е. (5) е директна сума.

Ќе докажеме дека множеството (3) е линеарно независно. Навистина, од

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

следува

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i f(\mathbf{u}_i) = f\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$$

и како (2) е база на $\text{Im } f$ добиваме $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, т.е. множеството (3) е линеарно независно.

Според тоа, $\dim L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r) = r$, па затоа димензијата на директната сума (5) е $r + d$, каде $d = \dim \ker f$.

Ќе докажеме дека

$$L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r) + \ker f = \mathbf{L}, \quad (6)$$

со што теоремата ќе биде докажана. Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$. Тогаш $f(\mathbf{a}) \in \text{Im } f$, па затоа

$$f(\mathbf{a}) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r$$

за некои $\alpha_i \in \mathbf{K}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Понатаму, за векторот

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}_i \in L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$$

важи

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i = f(\mathbf{a}).$$

Нека $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{u}$. Тогаш $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{a} - \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}'$, т.е. $\mathbf{v} \in \ker f$, па затоа произволен вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$ може да се претстави како збир $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, каде $\mathbf{v} \in \ker f$ и $\mathbf{u} \in L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$. Според тоа, просторот $\mathbf{L}$ се содржи во збирот (5). Но, збирот (5) е потпростор од $\mathbf{L}$, што значи дека важи (6). ♦

17. ИЗОМОРФИЗАМ НА ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

17.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ се векторски простори над исто поле $\mathbf{K}$. Ќе велиме дека просторот $\mathbf{L}$ е *изоморфен* на просторот $\mathbf{L}'$, ако постои линеарно пресликување

$$f : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}' \quad (1)$$

кое истовремено е и биекција. Притоа ќе пишуваме $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}'$. Биекцијата f ја нарекуваме *изоморфизам* од $\mathbf{L}$ во $\mathbf{L}'$.

17.2. Пример. Докажете дека векторскиот простор $\mathbf{P}_2$ од сите полиноми над $\mathbf{R}$ со степен не поголем од 2 е изоморфен со $\mathbf{R}^3$.

Решение. Да го разгледаме пресликувањето $f : \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ дефинирано со

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2). \quad (2)$$

Јасно, пресликувањето f е добро дефинирано.

Нека $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3$. Тогаш, за полиномот $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbf{P}_2$ важи

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2),$$

т.е. пресликувањето f е сурјекција. Нека

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = f(b_0 + b_1x + b_2x^2), \text{ т.е. } (a_0, a_1, a_2) = (b_0, b_1, b_2).$$

Од последното равенство следува

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \text{ т.е. } a_0 + a_1x + a_2x^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2,$$

што значи f е инјекција. Според тоа, f е биекција.

Нека $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbf{P}_2$, $b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbf{P}_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Имаме:

$$\begin{aligned} f(\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \beta(b_0 + b_1x + b_2x^2)) &= \\ &= f(\alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_2 + \beta b_2)x^2) \\ &= (\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2) \\ &= \alpha(a_0, a_1, a_2) + \beta(b_0, b_1, b_2) \\ &= \alpha f(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \beta f(b_0 + b_1x + b_2x^2), \end{aligned}$$

па од лема 15.2 следува дека пресликувањето f е линеарно.

Конечно, пресликувањето f определено со (2) е линеарно и е биекција, што значи дека тоа е изоморфизам. ♦

17.3. Лема. а) За секој векторски простор $\mathbf{L}$ важи $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}$.

б) Ако $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}'$ и $\mathbf{L}' \cong \mathbf{L}''$, тогаш $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}''$.

в) Ако $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}'$, тогаш $\mathbf{L}' \cong \mathbf{L}$.

Доказ. а) Непосредно следува од фактот дека идентичното пресликување е линеарно и е биекција.

б) Непосредно следува од тоа што композиција на биекции е биекција и од лема 16.5.

в) Нека $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ е изоморфизам од $\mathbf{L}$ на $\mathbf{L}'$. Значи, f е биекција, па затоа постои инверзното пресликување f^{-1} кое е биекција. Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{L}'$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Бидејќи f е сурјекција постојат $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{L}$ така што $f(\mathbf{c}) = \mathbf{a}$ и $f(\mathbf{d}) = \mathbf{b}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) &= f^{-1}(\alpha f(\mathbf{c}) + \beta f(\mathbf{d})) = f^{-1}(f(\alpha \mathbf{c} + \beta \mathbf{d})) \\ &= \alpha \mathbf{c} + \beta \mathbf{d} = \alpha f^{-1}(\mathbf{a}) + \beta f^{-1}(\mathbf{b}), \end{aligned}$$

т.е. пресликувањето f^{-1} е линеарно, па значи тоа е изоморфизам. ♦

17.4. Лема. Ако (1) е изоморфизам и

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \quad (3)$$

е линейно независно множество во $\mathbf{L}$, тогаш

$$f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), \dots, f(\mathbf{u}_k) \quad (4)$$

е линейно независно множество во $\mathbf{L}'$.

Доказ. Нека $\alpha_i \in \mathbf{K}, i = 1, 2, \dots, k$ се такви што

$$\alpha_1 f(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + \alpha_k f(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}'.$$

Тогаш

$$f(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k) = \mathbf{0}'$$

и како $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, добиваме $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$. Но, векторите (3) се линейно независни, па затоа $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$, од што следува дека векторите (4) се линейно независни. ♦

17.5. Лема. Ако (1) е изоморфизам и (3) е база на $\mathbf{L}$, тогаш (4) е база на $\mathbf{L}'$, т.е. $\dim \mathbf{L} = \dim \mathbf{L}'$.

Доказ. Непосредно следува од лема 17.4 и 15.10. ♦

17.6. Лема. Ако $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ се векторски простори над исто поле $\mathbf{K}$ такви што $\dim \mathbf{L} = \dim \mathbf{L}'$, тогаш $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}'$.

Доказ. Ќе докажеме дека произволен k -димензионален векторски простор $\mathbf{L}$ е изоморфен со просторот $\mathbf{K}^k$. Нека (3) е база на $\mathbf{L}$. Ако $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$, тогаш $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i$, за некои $\alpha_i \in \mathbf{K}, i = 1, 2, \dots, k$. Да го разгледаме пресликувањето $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{K}^k$ определено со

$$f(\mathbf{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k). \quad (5)$$

Ќе докажеме дека f е изоморфизам. Ако $\mathbf{b} \in \mathbf{L}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$, тогаш координатите на овие вектори во базата (3) се различни, па затоа $f(\mathbf{b}) \neq f(\mathbf{a})$, што значи дека f е инјекција. Понатаму, ако $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \in \mathbf{K}^k$, тогаш за векторот $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{u}_i$ важи $f(\mathbf{b}) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$, т.е. f е сурјекција.

Нека $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{u}_i$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Имаме

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i + \mu \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{u}_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^k (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) \mathbf{u}_i\right) \\ &= (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1, \lambda \alpha_2 + \mu \beta_2, \dots, \lambda \alpha_k + \mu \beta_k) \\ &= \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) + \mu(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \\ &= \lambda f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i\right) + \mu f\left(\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{u}_i\right) = \lambda f(\mathbf{a}) + \mu f(\mathbf{b}), \end{aligned}$$

т.е. пресликувањето $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{K}^k$ определено со (5) е линеарно, па значи тоа е изоморфизам.

Нека $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ се конечно димензионални простори такви што $\dim \mathbf{L} = \dim \mathbf{L}' = k$. Тогаш од претходно изнесеното следува $\mathbf{L} \cong \mathbf{K}^k$ и $\mathbf{L}' \cong \mathbf{K}^k$, па од лема 17.3 б) следува $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}'$. ♦

17.7. Од претходно докажаните тврдења следува точноста на следниве теореми.

Теорема А. Два конечно димензионални векторски простори над исто поле се изоморфни ако и само ако имаат еднакви димензии. ♦

Теорема В. При фиксирана димензија n , со точност до изоморфизам постои единствен n -димензионален реален векторски простор. ♦

17.8. Лема. Ако линеарното пресликување $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ произволна база на просторот $\mathbf{L}$ ја пресликува во база на просторот $\mathbf{L}'$, тогаш f е изоморфизам.

Доказ. Нека (3) е база на $\mathbf{L}$, (4) е база на $\mathbf{L}'$, $\mathbf{u} \in \mathbf{L}$ и $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i$. Ако

$f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}'$, тогаш $\mathbf{o}' = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(\mathbf{u}_i)$ и како (4) е база на $\mathbf{L}'$ добиваме $\alpha_i = 0$, за

$i = 1, 2, \dots, k$, т.е. $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{o}$. Значи $\ker f = \{\mathbf{o}\}$, па затоа f е инјекција. Нека

$\mathbf{v} \in \mathbf{L}'$, т.е. $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \beta_i f(\mathbf{u}_i)$. Тогаш, $\mathbf{v} = f(\mathbf{w})$ каде $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{u}_i$, т.е. f е сурјекција, па значи тоа е биекција. Но, по претпоставка пресликувањето f е линеарно, па според тоа f е изоморфизам. ♦

18. ЛИНЕАРНИ ТРАНСФОРМАЦИИ. АВТОМОРФИЗМИ

18.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. Линеарното пресликување $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ го нарекуваме *линеарна трансформација* на $\mathbf{L}$. Изоморфизмот на просторот $\mathbf{L}$ во самиот себе го нарекуваме *автоморфизам*.

18.2. Теорема. Нека $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ е база на просторот $\mathbf{L}_n$ над полето $\mathbf{K}$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ се произволни вектори во $\mathbf{L}_n$. Тогаш постои единствена линеарна трансформација f на $\mathbf{L}_n$ така што $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 15.4. ♦

18.3. Теорема. Нека f е линеарна трансформација на $\mathbf{L}$. Следниве тврдења се еквивалентни:

- 1) f е автоморфизам,
- 2) секоја база на $\mathbf{L}$ со f се пресликува во база на $\mathbf{L}$,
- 3) секое линеарно независно множество вектори од $\mathbf{L}$ со f се пресликува во линеарно независно множество вектори од $\mathbf{L}$,
- 4) $f(\mathbf{L}) = \mathbf{L}$,
- 5) $\dim \operatorname{Im} f = n$,
- 6) $\ker f = \{\mathbf{o}\}$ и
- 7) трансформацијата f е инјекција.

Доказ. Непосредно следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

18.4. Пример. Дадена е линеарната трансформација $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ определена со

$$f(x, y, z) = (x, x + y, 2z). \quad (1)$$

Дали f е автоморфизам? Во случај на потврден одговор да се најде инверзната линеарна трансформација.

Решение. Лесно се проверува дека даденото пресликување е линеарно. Нека $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \ker f$, т.е.

$$f(x, y, z) = (x, x + y, 2z) = (0, 0, 0).$$

Од последното равенство имаме $x = y = z = 0$, што значи $\ker f = \{\mathbf{o}\}$, па од теорема 18.3 следува дека f е автоморфизам.

Нека g е инверзната линеарна трансформација на f . Ако (p, s, t) е слика на (x, y, z) со f , тогаш (x, y, z) е слика на (p, s, t) со g , т.е.

$$f(x, y, z) = (p, s, t) \text{ и } g(p, s, t) = (x, y, z). \quad (2)$$

Од првото равенство во (2) и од (1) добиваме

$$p = x, \quad s = x + y, \quad t = 2z, \text{ т.е. } x = p, \quad y = s - p, \quad z = \frac{t}{2}.$$

Според тоа, инверзната линеарна трансформација е определена со формулата

$$g(p, s, t) = (p, s - p, \frac{t}{2}). \quad \blacklozenge$$

18.5. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. Множеството од сите линеарни трансформации на $\mathbf{L}$ ќе го означуваме со $L(\mathbf{L})$.

Дефиниција. Нека $f, g \in L(\mathbf{L})$. Пресликувањето $\varphi: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ определено со $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ го нарекуваме *збир* на трансформациите f и g . Притоа ја прифаќаме ознаката $\varphi = f + g$.

Нека $f \in L(\mathbf{L})$ и $\lambda \in \mathbf{R}$. Пресликувањето $\psi: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ определено со $\psi(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ го нарекуваме *производ на трансформацијата f со скаларот λ* . Притоа ја прифаќаме ознаката $\psi = \lambda f$.

Дефиниција. Нека

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

е полином со реални коефициенти, f е линеарна трансформација на векторскиот простор $\mathbf{L}$ и e е идентичниот автоморфизам на $\mathbf{L}$. Тогаш со

$$p(f) = a_0e + a_1f + \dots + a_kf^k$$

е определено пресликување на $\mathbf{L}$ кое го нарекуваме *полином од f* .

18.6. Теорема. Ако f и g се линеарни трансформации на $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$, тогаш $f + g$, fg и λf , $\lambda \in \mathbf{K}$ се линеарни трансформации на $\mathbf{L}$.

Доказ. Ќе докажеме дека $f + g \in L(\mathbf{L})$. Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Имаме:

$$\begin{aligned} (f + g)(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) &= f(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) + g(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \\ &= \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}) + \alpha g(\mathbf{a}) + \beta g(\mathbf{b}) \\ &= \alpha[f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})] + \beta[f(\mathbf{b}) + g(\mathbf{b})] \\ &= \alpha(f + g)(\mathbf{a}) + \beta(f + g)(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Останатите тврдења се докажуваат аналогно. Докажете ги оставаме на читателот за вежба. ♦

18.7. Од дефиницијата на збир на линеарни трансформации следува дека $f + g = g + f$, за секои $f, g \in L(\mathbf{L})$. Меѓутоа, ако $f, g \in L(\mathbf{L})$, тогаш во општ случај важи $fg \neq gf$, што може да се види од следниов пример.

Пример. Нека $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ и $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ се определени со

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y, \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y\right), \text{ за секој } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ и}$$

$$g(x, y) = \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y, \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y\right), \text{ за секој } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Лесно се проверува дека овие пресликувања се линеарни. Меѓутоа,

$$\begin{aligned} (fg)(x, y) &= f(g(x, y)) = f\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y, \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y\right), \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \\ &= \left(\frac{23}{80}x + \frac{11}{24}y, \frac{17}{40}x + \frac{5}{12}y\right), \\ (gf)(x, y) &= g(f(x, y)) = g\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y, \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y\right) \\ &= \left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y\right), \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \\ &= \left(\frac{4}{15}x + \frac{23}{60}y, \frac{1}{2}x + \frac{7}{16}y\right), \end{aligned}$$

т.е. $(fg)(x, y) \neq (gf)(x, y)$. ♦

18.8. Последица. Полином од линеарна трансформација е линеарна трансформација. ♦

18.9. Теорема. Рангот на производ на две линеарни трансформации на просторот $\mathbf{L}_n$ е помал или еднаков од рангот на секој од множителите. Ако еден од множителите е автоморфизам, тогаш рангот на производот е еднаков на рангот на другиот множител.

Доказ. Нека r е рангот на f , p е рангот на g и d е рангот на gf . Тогаш $(gf)(\mathbf{L}_n) = g(f(\mathbf{L}_n)) \subseteq g(\mathbf{L}_n)$, т.е. $d \leq p$. Понатаму, бидејќи димензијата на потпросторот не е помала од димензијата на неговата слика при линеарна трансформација добиваме $\dim g(f(\mathbf{L}_n)) \leq \dim f(\mathbf{L}_n)$, т.е. $d \leq r$.

Ако $r = n$, тогаш $f(\mathbf{L}_n) = \mathbf{L}_n$, па затоа $g(f(\mathbf{L}_n)) = g(\mathbf{L}_n)$, т.е. $d = p$. Ако $p = n$, тогаш g е автоморфизам. Според тоа, линеарно независните вектори g ги пресликува во линеарно независни вектори, па затоа

$$\dim g(f(\mathbf{L}_n)) = \dim f(\mathbf{L}_n), \text{ т.е. } d = r. \text{ ♦}$$

18.10. Лема. Нека $\mathbf{L}$ е n -димензионален векторски простор над полето $\mathbf{K}$, f е линеарна трансформација на $\mathbf{L}$ и $f^m = o$, за некој $m \in \mathbf{N}$. Тогаш $f^n = o$.

Доказ. Да го разгледаме множеството $\{m \mid f^m = o\} \subseteq \mathbf{N}$. Ова множество е ограничено од долу, па затоа тоа има минимален елемент. Нека

$$k = \min\{m \mid f^m = o\}. \quad (*)$$

Ќе докажеме дека $k \leq \dim \mathbf{L} = n$. Од (*) следува дека $f^{k-1} \neq o$, што значи дека постои барем еден вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ таков што $f^{k-1}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{o}$. Но, тогаш векторите

$$f^{k-1}(\mathbf{a}), f^{k-2}(\mathbf{a}), \dots, f(\mathbf{a}), \mathbf{a} \quad (**)$$

се ненулти и се линеарно независни. Навистина, ако

$$a_{k-1}f^{k-1}(\mathbf{a}) + a_{k-2}f^{k-2}(\mathbf{a}) + \dots + a_1f(\mathbf{a}) + a_0\mathbf{a} = \mathbf{o}, \quad (***)$$

тогаш на (***) ја применуваме линеарната трансформација f^{k-1} и добиваме

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= f^{k-1}(\mathbf{o}) = a_{k-1}f^{2k-2}(\mathbf{a}) + a_{k-2}f^{2k-3}(\mathbf{a}) + \dots + a_1f^k(\mathbf{a}) + a_0f^{k-1}(\mathbf{a}) \\ &= a_{k-1}f^{k-2}(f^k(\mathbf{a})) + a_{k-2}f^{k-3}(f^k(\mathbf{a})) + \dots + a_1f^k(\mathbf{a}) + a_0f^{k-1}(\mathbf{a}) \\ &= a_{k-1}f^{k-2}(o(\mathbf{a})) + a_{k-2}f^{k-3}(o(\mathbf{a})) + \dots + a_1o(\mathbf{a}) + a_0f^{k-1}(\mathbf{a}) \\ &= a_{k-1}f^{k-2}(\mathbf{o}) + a_{k-2}f^{k-3}(\mathbf{o}) + \dots + a_1\mathbf{o} + a_0f^{k-1}(\mathbf{a}) \\ &= a_{k-1}\mathbf{o} + a_{k-2}\mathbf{o} + \dots + a_1\mathbf{o} + a_0f^{k-1}(\mathbf{a}) = a_0f^{k-1}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

и како $f^{k-1}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{o}$ добиваме $a_0 = 0$. Сега на (***) ја применуваме линеарната трансформација f^{k-2} и ако земеме предвид дека $a_0 = 0$ наоѓаме

$$a_{k-1}f^{2k-3}(\mathbf{a}) + a_{k-2}f^{2k-4}(\mathbf{a}) + \dots + a_2f^k(\mathbf{a}) + a_1f^{k-1}(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$$

од што следува $a_1 = 0$. Продолжувајќи ја постапката со примена на линеарните трансформации $f^{k-3}, f^{k-4}, \dots, f$ последователно наоѓаме $a_i = 0$, за $i = 2, 3, \dots, k-2$ и ако замениме во (***) добиваме $a_{k-1}f^{k-1}(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, од што следува $a_{k-1} = 0$, т.е. векторите (**) се линеарно независни.

Но, векторите (**) припаѓаат на $\mathbf{L}$ и како $\dim \mathbf{L} = n$, добиваме дека тој може да има најмногу n линеарно независни вектори, т.е. $k \leq n$. Ако $k = n$, тогаш $\mathbf{o} = f^k = f^n$, а ако $k < n$, тогаш за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ важи

$$f^n(\mathbf{x}) = f^{n-k}(f^k(\mathbf{o})) = f^{n-k}(\mathbf{o}(\mathbf{o})) = f^{n-k}(\mathbf{o}) = \mathbf{o},$$

што значи $f^n = \mathbf{o}$. ♦

18.11. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$ и

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2. \quad (3)$$

Пресликувањето $p_i : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$, $i = 1, 2$ определено со

$$p_i(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

каде $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_i$, $i = 1, 2$ го нарекуваме *проекција* на $\mathbf{L}$ врз $\mathbf{U}_i$, $i = 1, 2$.

18.12. Лема. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$ и нека важи (3).

а) Проекциите p_i , $i = 1, 2$ на $\mathbf{L}$ врз $\mathbf{U}_i$, $i = 1, 2$ се линеарни трансформации.

б) $p_i^2 = p_i$, $i = 1, 2$, $p_1 p_2 = p_2 p_1$ и $p_1 + p_2 = e$, каде e е идентичното пресликување на $\mathbf{L}$.

Доказ. а) Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Од (3) следува дека $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1$, $\mathbf{y} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$, каде $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}_1$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{U}_2$. Но, $\mathbf{U}_i$, $i = 1, 2$ се потпростори на $\mathbf{L}$, па затоа важи $\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}_1$ и $\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 \in \mathbf{U}_2$. Сега од (4) следува

$$\begin{aligned} p_1(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) &= p_1(\alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + \beta(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)) = p_1((\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2) + (\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2)) \\ &= \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 = \alpha p_1(\mathbf{x}) + \beta p_1(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

т.е. проекцијата p_1 е линеарна трансформација.

Аналогно се докажува дека p_2 е линеарна трансформација.

б) За секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ имаме $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, каде $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_1$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{U}_2$, па затоа

$$p_1^2(\mathbf{x}) = p_1(p_1(\mathbf{x})) = p_1(p_1(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = p_1(\mathbf{u}) = p_1(\mathbf{u} + \mathbf{o}) = \mathbf{u} = p_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = p_1(\mathbf{x}),$$

$$p_2^2(\mathbf{x}) = p_2(p_2(\mathbf{x})) = p_2(p_2(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = p_2(\mathbf{v}) = p_2(\mathbf{o} + \mathbf{v}) = \mathbf{v} = p_2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = p_2(\mathbf{x}),$$

што значи $p_i^2 = p_i, i = 1, 2$. Понатаму

$$(p_1 p_2)(\mathbf{x}) = p_1(p_2(\mathbf{x})) = p_1(p_2(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = p_1(\mathbf{v}) = p_1(\mathbf{o} + \mathbf{v}) = \mathbf{o},$$

$$(p_2 p_1)(\mathbf{x}) = p_2(p_1(\mathbf{x})) = p_2(p_1(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = p_2(\mathbf{u}) = p_2(\mathbf{u} + \mathbf{o}) = \mathbf{o}$$

па затоа $p_1 p_2 = p_2 p_1 = \mathbf{o}$. Конечно,

$$(p_1 + p_2)(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x}) + p_2(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + p_2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{x} = e(\mathbf{x})$$

односно $p_1 + p_2 = e$. ♦

18.13. Теорема. Нека $\mathbf{L}$ е векторски простор над полето $\mathbf{K}$. Ако p е линеарна трансформација на $\mathbf{L}$ таква што $p^2 = p$ и ако $\mathbf{U} = \text{Im } p$ и $\mathbf{U}' = \text{Im } p'$, каде $p' = e - p$, тогаш $\mathbf{L} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}'$ и p и p' се проекциите на $\mathbf{L}$ врз $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}'$, соодветно.

Доказ. Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и да ставиме $\mathbf{u} = p(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v} = (e - p)(\mathbf{x})$. Имаме

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = p(\mathbf{x}) + (e - p)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + e(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

и како $\mathbf{u} \in \mathbf{U} = \text{Im } p$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{U}' = \text{Im } p'$, добиваме $\mathbf{L} = \mathbf{U} + \mathbf{U}'$. За да докажеме дека $\mathbf{L} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}'$, доволно е да докажеме дека $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}' = \{\mathbf{o}\}$. Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{U}'$. Од $\mathbf{a} \in \mathbf{U}$ следува дека постои $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ така да $\mathbf{a} = p(\mathbf{x})$. Понатаму, од $\mathbf{a} \in \mathbf{U}'$ следува дека постои $\mathbf{y} \in \mathbf{L}$ така да $\mathbf{a} = (e - p)(\mathbf{y})$. Според тоа, постојат $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ такви што $p(\mathbf{x}) = (e - p)(\mathbf{y})$, т.е. $p(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - p(\mathbf{y})$. Конечно, од $p^2 = p$ имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= p(\mathbf{x}) = p^2(\mathbf{x}) = p(p(\mathbf{x})) = p(\mathbf{y} - p(\mathbf{y})) = p(\mathbf{y}) - p(p(\mathbf{y})) \\ &= p(\mathbf{y}) - p^2(\mathbf{y}) = p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{y}) = \mathbf{o}, \end{aligned}$$

што значи $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}' = \{\mathbf{o}\}$, т.е. $\mathbf{L} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}'$.

Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$, $\mathbf{u} = p(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v} = (e - p)(\mathbf{x})$. Имаме

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = p(\mathbf{x}) + (e - p)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + \mathbf{x} - p(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

$$p(\mathbf{u}) = p(p(\mathbf{x})) = p^2(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) = \mathbf{u},$$

$$p(\mathbf{v}) = p((e - p)(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x} - p(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x}) - p^2(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) = \mathbf{o},$$

па затоа $p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = p(\mathbf{u}) + p(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$, т.е. p е проекција на $\mathbf{L}$ врз $\mathbf{U} = \text{Im } p$. Понатаму,

$$(e - p)(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - p(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

$$\begin{aligned} (e - p)(\mathbf{v}) &= (e - p)((e - p)(\mathbf{x})) = (e - p)(\mathbf{x} - p(\mathbf{x})) = \mathbf{x} - p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x} - p(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{x} - p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) + p^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} - p(\mathbf{x}) = (e - p)(\mathbf{x}) = \mathbf{v}, \end{aligned}$$

па затоа

$$p'(\mathbf{x}) = (e - p)(\mathbf{x}) = (e - p)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (e - p)(\mathbf{u}) + (e - p)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

т.е. $p' = e - p$ е проекција од $\mathbf{L}$ на $\mathbf{U} = \text{Im}(e - p)$. ♦

18.14. Пример. Нека $\mathbf{L} = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1)$, $\mathbf{U}_1 = L(\mathbf{a})$, $\mathbf{U}_2 = L(\mathbf{b})$.

а) Докажете дека $\mathbf{L} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2$.

б) Ако $p_i : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$, $i = 1, 2$ се проекциите на $\mathbf{L}$ врз $\mathbf{U}_i$, $i = 1, 2$ определени со (4), пресметајте $p_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, за $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{L}$.

Решение. а) Нека $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Векторите $\mathbf{a} = (1, 1)$ и $\mathbf{b} = (1, -1)$ се линеарно независни (проверете!) и како $\dim \mathbf{R}^2 = 2$, од последица 12.11 следува дека $\mathbf{L} = L(\mathbf{a}) \oplus L(\mathbf{b}) = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2$.

б) Нека $\mathbf{x} = (x, y)$. Од тврдењето под а) следува

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}_1, \mathbf{v} \in \mathbf{U}_2, \quad (5)$$

каде $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{a} = \alpha(1, 1) = (\alpha, \alpha)$ и $\mathbf{v} = \beta \mathbf{b} = \beta(1, -1) = (\beta, -\beta)$. Ако замениме во (5) добиваме

$$(x, y) = (\alpha, \alpha) + (\beta, -\beta),$$

од каде наоѓаме $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$. Според тоа, $\mathbf{u} = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$, $\mathbf{v} = (\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2})$ и како $p_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$, $p_2(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$ добиваме

$$p_1((x, y)) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) \text{ и } p_2((x, y)) = (\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}). \quad \blacklozenge$$

19. ИНВАРИЈАНТНИ ПОТПРОСТОРИ

19.1. Дефиниција. Нека f е линеарна трансформација на векторскиот простор $\mathbf{L}$ над полето $\mathbf{K}$. Ако $\mathbf{Q}$ е потпростор на $\mathbf{L}$ таков што $f(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$, тогаш просторот $\mathbf{Q}$ го нарекуваме *инваријантен потпростор на $\mathbf{L}$* во однос на f .

19.2. Пример. Дадена е линеарната трансформација $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ определена со

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3).$$

а) Докажете дека множеството

$$\mathbf{S} = \{(a+b, a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\} = \{a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

е потпростор од $\mathbf{R}^3$ инваријантен во однос на f .

б) Дали

$$\mathbf{T} = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{t(1, 1, 1) \mid t \in \mathbf{R}\} \text{ и } \mathbf{U} = \{(0, u, u) \mid u \in \mathbf{R}\} = \{u(0, 1, 1) \mid u \in \mathbf{R}\}$$

се инваријантни потпростори во однос на f .

Решение. а) Нека $\mathbf{x}_1 = a_1(1,1,0) + b_1(1,0,1)$ и $\mathbf{x}_2 = a_2(1,1,0) + b_2(1,0,1)$ се од $\mathbf{S}$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Тогаш

$$\begin{aligned}\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 &= \alpha a_1(1,1,0) + \alpha b_1(1,0,1) + \beta a_2(1,1,0) + \beta b_2(1,0,1) \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_2)(1,1,0) + (\alpha b_1 + \beta b_2)(1,0,1) \in \mathbf{S},\end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{S}$ е потпростор од $\mathbf{R}^3$. Останува да докажеме дека $\mathbf{S}$ е инваријантен во однос на f . Ако $\mathbf{x} = (a+b, a, b)$ е од $\mathbf{S}$, тогаш

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= f(a+b, a, b) = (4a+4b-a-b, a+b+2a-b, a+b-a+2b) \\ &= 3(a+b, a, b) \in \mathbf{S},\end{aligned}$$

што значи дека потпросторот $\mathbf{S}$ е инваријантен во однос на f .

б) Лесно се докажува дека множествата $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}$ се потпростори од $\mathbf{R}^3$. За кој било $\mathbf{x} = (t, t, t) \in \mathbf{T}$ имаме

$$f(\mathbf{x}) = f(t, t, t) = 4t - t - t, 2t - t + t, t - t + 2t = 2(t, t, t) \in \mathbf{T},$$

што значи дека потпросторот $\mathbf{T}$ е инваријантен во однос на f .

За кој било $\mathbf{u} = (0, u, u) \in \mathbf{U}$ имаме

$$f(\mathbf{u}) = f(0, u, u) = (-2u, u, u) \notin \mathbf{U},$$

што значи дека потпросторот $\mathbf{U}$ не е инваријантен во однос на f . ♦

19.3. Теорема. За секоја линеарна трансформација f потпросторите $f(\mathbf{L})$ и $\ker f$ се инваријантни потпростори на f .

Доказ. Јасно, од $f(\mathbf{L}) \subseteq \mathbf{L}$ следува $f(f(\mathbf{L})) \subseteq f(\mathbf{L})$, т.е. $f(\mathbf{L})$ е инваријантен потпростор на $\mathbf{L}$ во однос на f . Понатаму, ако $\mathbf{u} \in \ker f$, тогаш $f(\mathbf{u}) = \mathbf{o} \in \ker f$, т.е. $\ker f$ е инваријантен потпростор на $\mathbf{L}$ во однос на f . ♦

19.4. Теорема. Нека f е линеарна трансформација на просторот $\mathbf{L}$. Тогаш збирот и пресекот на инваријантни во однос на f потпростори на $\mathbf{L}$ се инваријантни потпростори на $\mathbf{L}$ во однос на f .

Доказ. Нека $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_k$ се потпростори на $\mathbf{L}$ инваријантни во однос на f . Ставаме $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_k$. Ако $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$, тогаш

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{a}_i \in \mathbf{M}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

и како $f(\mathbf{a}_i) \in \mathbf{M}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ имаме

$$f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}_1) + f(\mathbf{a}_2) + \dots + f(\mathbf{a}_k) \in \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_k = \mathbf{M},$$

т.е. $\mathbf{M}$ е инваријантен потпростор на $\mathbf{L}$ во однос на f .

На читателот за вежба му оставаме да докаже дека пресек на инваријантни потпростори е инваријантен потпростор. ♦

19.5. Теорема. Ако $\mathbf{Q}$ е инваријантен потпростор на просторот $\mathbf{L}$ во однос на трансформацијата f , а $p(f)$ е полином со реални коефициенти, тогаш $\mathbf{Q}$ е инваријантен во однос на $p(f)$.

Доказ. Бидејќи $\mathbf{Q}$ е инваријантен во однос на f имаме $f(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$, па затоа $f(f(\mathbf{Q})) \subseteq f(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$, т.е. $f^2(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$. Аналогно се докажува дека $f^k(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$, за секој природен број k . Конечно, ако се искористи дека $\mathbf{Q}$ е потпростор од $\mathbf{L}$, тогаш од претходно изнесеното и од теорема 19.3 следува $p(f)(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$, за секој полином $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \in \mathbf{K}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. ♦

19.6. Нека $\mathbf{Q}$ е инваријантен потпростор на просторот $\mathbf{L}$ во однос на трансформацијата f и нека φ е рестрикција на трансформацијата f на просторот $\mathbf{Q}$, т.е. $\varphi: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ е таква што $\varphi(\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})$, за секој $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$. Јасно, φ е линеарна трансформација на $\mathbf{Q}$.

Во врска со поимот рестрикција ќе ја докажеме следнава теорема.

19.7. Теорема. Нека векторскиот простор $\mathbf{L}$ е запишан како директна сума на своите потпростори $\mathbf{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, т.е.

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q}_1 \oplus \mathbf{Q}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{Q}_s \quad (1)$$

и нека f_i , $i = 1, 2, \dots, s$ се произволни линеарни трансформации на просторите $\mathbf{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, соодветно. Тогаш постои единствена линеарна трансформација f на просторот $\mathbf{L}$ така што просторот $\mathbf{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$ е инваријантен во однос на f и рестрикцијата на f на просторот $\mathbf{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots, s$ се совпаѓа со f_i , $i = 1, 2, \dots, s$, соодветно.

Доказ. Бидејќи (1) е директна сума добиваме дека секој вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$ може на единствен начин да се запише во видот

$$\mathbf{a} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \dots + \mathbf{q}_s, \quad \mathbf{q}_i \in \mathbf{Q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Дефинираме пресликување $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ со:

$$f(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{q}_1) + f_2(\mathbf{q}_2) + \dots + f_s(\mathbf{q}_s). \quad (3)$$

Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Имаме

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^s \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^s \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i \in \mathbf{Q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \sum_{i=1}^s (\alpha \mathbf{q}_i + \beta \mathbf{p}_i)$$

па затоа

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) &= \sum_{i=1}^s f_i(\alpha \mathbf{q}_i + \beta \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^s [\alpha f_i(\mathbf{q}_i) + \beta f_i(\mathbf{p}_i)] \\ &= \alpha \sum_{i=1}^s f_i(\mathbf{q}_i) + \beta \sum_{i=1}^s f_i(\mathbf{p}_i) = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}), \end{aligned}$$

т.е. f е линеарна трансформација на $\mathbf{L}$. Ако $\mathbf{q}_i \in \mathbf{Q}_i$, $i=1,2,\dots,s$, тогаш $f(\mathbf{q}_i) = f_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbf{Q}_i$, што значи просторот $\mathbf{Q}_i$, $i=1,2,\dots,s$ е инваријантен во однос на f и рестрикцијата на f на просторот $\mathbf{Q}_i$, $i=1,2,\dots,s$ се совпаѓа со f_i , $i=1,2,\dots,s$, соодветно.

Останува да ја докажеме единственоста на f . Нека g е линеарна трансформација на $\mathbf{L}$, во однос на која сите простори $\mathbf{Q}_i$, $i=1,2,\dots,s$ се инваријантни, а f_i , $i=1,2,\dots,s$ е рестрикцијата на g на $\mathbf{Q}_i$, $i=1,2,\dots,s$, соодветно. Според (2) и (3) за секој вектор $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$ имаме

$$g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{q}_1) + g(\mathbf{q}_2) + \dots + g(\mathbf{q}_s) = f_1(\mathbf{q}_1) + f_2(\mathbf{q}_2) + \dots + f_s(\mathbf{q}_s) = f(\mathbf{a}),$$

т.е. $g = f$. ♦

19.8. Пример. Нека $\mathbf{L}$ е n -димензионален векторски простор над полето $\mathbf{R}$ и нека за линеарната трансформација $f: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ важи $f^2 = -e$, каде e е идентичното пресликување на $\mathbf{L}$. Докажете дека

а) постои $\mathbf{o} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{L}$ така да $\mathbf{v}, f(\mathbf{v})$ се линеарно независни вектори, но $\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), f^2(\mathbf{v})$ се линеарно зависни вектори.

б) $n = 2m$ и постојат дводимензионални f -инваријантни потпростори $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m$ такви да $\mathbf{L} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_m$.

Решение. а) Нека $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ е произволен вектор од $\mathbf{L}$. Јасно, $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{o}$, бидејќи во спротивно имаме

$$f^2(\mathbf{v}) = f(f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \neq -\mathbf{v} = -e(\mathbf{v}),$$

т.е. $f^2 \neq -e$, што е противречност. Ќе докажеме дека $\mathbf{v}$ и $f(\mathbf{v})$ се линеарно независни. Нека $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ се такви што

$$\alpha \mathbf{v} + \beta f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}. \quad (4)$$

Имаме

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{v} + \beta f(\mathbf{v})) &= f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}, \\ \alpha f(\mathbf{v}) + \beta f^2(\mathbf{v}) &= \mathbf{o}, \\ \alpha f(\mathbf{v}) - \beta \mathbf{v} &= \mathbf{o}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ако (4) го помножиме со β и (5) го помножиме со α и ги собереме добиените равенства добиваме $(\alpha^2 + \beta^2)f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ и како $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{o}$, од последното равенство следува $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, кое во множеството $\mathbf{R}$ е можно ако и само ако $\alpha = \beta = 0$, што значи дека векторите $\mathbf{v}$ и $f(\mathbf{v})$ се линеарно независни.

За векторите $\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), f^2(\mathbf{v})$ имаме

$$1 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot f(\mathbf{v}) + 1 \cdot f^2(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{o}$$

и како $-1, 1 \neq 0$ добиваме дека тие се линеарно зависни.

б) Нека $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{o}$ е произволен вектор од $\mathbf{L}$ и да го разгледаме потпросторот $\mathbf{V}_1$ од $\mathbf{L}$ генериран од векторите $\mathbf{x}_1$ и $f(\mathbf{x}_1)$. Јасно, $\mathbf{V}_1$ е дводимензионален. Ако $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_1$, тогаш $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta f(\mathbf{x}_1)$ и притоа важи

$$f(\mathbf{y}) = f(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta f(\mathbf{x}_1)) = \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f^2(\mathbf{x}_1) = \alpha f(\mathbf{x}_1) - \beta \mathbf{x}_1 \in \mathbf{V}_1,$$

што значи дека $\mathbf{V}_1$ е f -инваријантен.

Нека $\mathbf{o} \neq \mathbf{x}_2 \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{V}_1$ и нека $\mathbf{V}_2$ е потпросторот од $\mathbf{L}$ генериран од векторите $\mathbf{x}_2$ и $f(\mathbf{x}_2)$. Аналогно, како и за $\mathbf{V}_1$ се докажува дека $\mathbf{V}_2$ е дводимензионален f -инваријантен потпростор на $\mathbf{L}$. Ќе докажеме дека $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{o}\}$. Нека $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$, т.е.

$$\alpha \mathbf{x}_1 + \beta f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y} = \gamma \mathbf{x}_2 + \delta f(\mathbf{x}_2), \quad (6)$$

за некои $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$. Ако на (6) го примениме f добиваме

$$\alpha f(\mathbf{x}_1) - \beta \mathbf{x}_1 = \gamma f(\mathbf{x}_2) - \delta \mathbf{x}_2. \quad (7)$$

Ако (6) го помножиме со γ , а (7) со $-\delta$ и ги собереме добиените равенства наоѓаме

$$\alpha \gamma \mathbf{x}_1 + \beta \gamma f(\mathbf{x}_1) - \alpha \delta f(\mathbf{x}_1) + \beta \delta \mathbf{x}_1 = (\gamma^2 + \delta^2) \mathbf{x}_2. \quad (8)$$

Равенството (8) е можно ако и само ако $\gamma = \delta = 0$, бидејќи во спротивно од (8) следува $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{V}_1$, што противречи на $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{V}_1$. Значи, $\mathbf{y} = 0 \cdot \mathbf{x}_2 + 0 \cdot f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{o}$ т.е. $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{o}\}$. Според тоа, $\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$ е директна сума и $\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \subseteq \mathbf{L}$.

Продолжувајќи ја постапката конструираме потпростори $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_{m-1}$ такви што $\mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}_j = \{\mathbf{o}\}$, за $i \neq j$, $\dim \mathbf{V}_i = 2$, за $i = 1, 2, \dots, m-1$, потпросторите се f -инваријантни и

$$\mathbf{L} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_{m-1} \oplus \mathbf{V}_m, \quad (9)$$

каде $\dim \mathbf{V}_m = 1$ или 2 (во секој чекор наоѓаме најмногу дводимензионален потпростор на $\mathbf{L}$ и како $\mathbf{L}$ е конечно димензионален, постапката мора да заврши). Случајот $\dim \mathbf{V}_m = 1$ не е можен бидејќи притоа од $\mathbf{o} \neq \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}_m \subseteq \mathbf{L}$ следува $f(\mathbf{x}_m) \in \mathbf{L}$ и како $f(\mathbf{x}_m) \notin \mathbf{V}_i$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, добиваме $f(\mathbf{x}_m) \in \mathbf{V}_m$ и $\mathbf{x}_m$ и $f(\mathbf{x}_m)$ се линеарно независни. Значи, $\dim \mathbf{V}_m = 2$. Конечно, важи (9) и притоа $n = \dim \mathbf{L} = \dim(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_{m-1} \oplus \mathbf{V}_m) = \dim \mathbf{V}_1 + \dim \mathbf{V}_2 + \dots + \dim \mathbf{V}_m = 2m$. ♦

19.9. Коментар. Во претходните разгледувања зедовме $f(\mathbf{x}_m) \in \mathbf{L}$ и $f(\mathbf{x}_m) \notin \mathbf{V}_i$. Навистина, ако $f(\mathbf{x}_m) \in \mathbf{V}_i$, за некој $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ од f -инваријантноста на $\mathbf{V}_i$ следува $f(f(\mathbf{x}_m)) \in f(\mathbf{V}_i) = \mathbf{V}_i$, т.е. $-\mathbf{x}_m \in \mathbf{V}_i$, што противречи на равенството (9), т.е. $\mathbf{V}_m \cap \mathbf{V}_i = \{\mathbf{o}\}$, за $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. ♦

$$(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

е координатната колона на векторот $\mathbf{x}$ во базата (1), т.е. $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i$. Тогаш

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{u}_i) = [f(\mathbf{u}_1) \ f(\mathbf{u}_2) \ \dots \ f(\mathbf{u}_n)](x).$$

Ако ја искористиме формулата (5) добиваме

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{u}_i) = ([\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]A)(x) = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n](A(x)). \quad (6)$$

Ако ставиме

$$A(x) = (y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

тогаш формулата (6) може да се запише во видот $f(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n](y)$, што значи дека (y) е координатната колона на векторот $f(\mathbf{x})$ во базата (1). Според тоа, врската меѓу координатите на векторите $\mathbf{x}$ и $f(\mathbf{x})$ во базата (1) е дадена со формулата

$$(y) = A(x). \quad (7)$$

Јасно, равенството (7) е еквивалентно со системот равенства

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

20.3. Пример. Нека f е линеарна трансформација на $\mathbf{R}^3$, дефинирана со

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_3, 4x_2). \quad (9)$$

Најдете ја матрицата на f во однос на базата: $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$ и $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$.

Решение. Прво треба да ги најдеме координатите на кој било вектор $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ во однос на базата $\mathbf{u}_i, i = 1, 2, 3$. Ќе го запишеме (a_1, a_2, a_3) како линеарна комбинација од $\mathbf{u}_i, i = 1, 2, 3$ со непознати скалари $x_i, i = 1, 2, 3$. Имаме

$$(a_1, a_2, a_3) = x_1(1, 1, 1) + x_2(0, 1, 1) + x_3(0, 0, 1) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3),$$

па

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = x_1 + x_2, \quad a_3 = x_1 + x_2 + x_3,$$

т.е. $x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2 - a_1, \quad x_3 = a_3 - a_2$. Значи:

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1 \mathbf{u}_1 + (a_2 - a_1) \mathbf{u}_2 + (a_3 - a_2) \mathbf{u}_3. \quad (10)$$

Имајќи ги предвид (9) и (10), добиваме:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{u}_1) &= f(1,1,1) = (3, 2, 4) = 3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3, \\f(\mathbf{u}_2) &= f(0,1,1) = (3, -1, 4) = 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3, \\f(\mathbf{u}_3) &= f(0,0,1) = (2, -1, 0) = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,\end{aligned}$$

па бараната матрица е:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

20.4. Пример. Линеарната трансформација f на просторот $\mathbf{L}_4$ во базата $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ има матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

Најдете ги просторите $f(\mathbf{L}_4)$ и $\ker f$.

Решение. Лесно се гледа дека рангот на матрицата A е еднаков на 2, па затоа $\dim f(\mathbf{L}_4) = 2$ и векторите

$$f(\mathbf{u}_1) = 4\mathbf{u}_2 + 10\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \text{ и } f(\mathbf{u}_2) = 4\mathbf{u}_1 + 8\mathbf{u}_2 + 18\mathbf{u}_3 + 7\mathbf{u}_4$$

се база на $f(\mathbf{L}_4)$. Да го определиме $\ker f$. Ако $\mathbf{x} \in \ker f$, тогаш $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ако

$$(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

е координатната колона на векторот $\mathbf{x}$, тогаш од $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ го добиваме системот

$$\begin{cases} 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 + 18x_3 + 7x_4 = 0, \\ 10x_1 + 18x_2 + 40x_3 + 17x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Според тоа, $\ker f$ е множеството решенија на системот (11). Ако, на пример, едно решение на системот (11) е $(1, -5, 2, 0)$ и $(-5, -1, 0, 4)$, од $\dim \ker f = 2$ следува дека $\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$ и $-5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_4$ е база на $\ker f$. $\blacklozenge$

20.5. Теорема. Ако во базата (1) на просторот $\mathbf{L}_n$ линеарните трансформации f и g се зададени со матриците A и B , тогаш матриците на линеарните трансформации $f + g$, fg и λg во оваа база се $A + B$, AB и λB , соодветно.

Доказ. Имаме $(f + g)(\mathbf{u}_i) = f(\mathbf{u}_i) + g(\mathbf{u}_i)$, за $i = 1, 2, \dots, n$, па затоа

$$\begin{aligned} & [(f + g)(\mathbf{u}_1) \ (f + g)(\mathbf{u}_2) \dots (f + g)(\mathbf{u}_n)] \\ &= [f(\mathbf{u}_1) \ f(\mathbf{u}_2) \dots f(\mathbf{u}_n)] + [g(\mathbf{u}_1) \ g(\mathbf{u}_2) \dots g(\mathbf{u}_n)] \\ &= [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n]A + [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n]B = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n](A + B), \end{aligned}$$

што значи дека $A + B$ е матрица на $f + g$ во базата (1).

Имаме $(\lambda g)(\mathbf{u}_i) = \lambda g(\mathbf{u}_i)$, за $i = 1, 2, \dots, n$, па затоа

$$\begin{aligned} & [(\lambda g)(\mathbf{u}_1) \ (\lambda g)(\mathbf{u}_2) \dots (\lambda g)(\mathbf{u}_n)] = [\lambda g(\mathbf{u}_1) \ \lambda g(\mathbf{u}_2) \dots \lambda g(\mathbf{u}_n)] \\ &= \lambda [g(\mathbf{u}_1) \ g(\mathbf{u}_2) \dots g(\mathbf{u}_n)] = \lambda ([\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n]B) = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n](\lambda B), \end{aligned}$$

што значи дека λB е матрица на λg во базата (1).

Нека $B = [\beta_{ij}]_{n \times n}$. Да ја пресметаме редицата

$$[(fg)(\mathbf{u}_1) \ (fg)(\mathbf{u}_2) \dots (fg)(\mathbf{u}_n)] = [f(g(\mathbf{u}_1)) \ f(g(\mathbf{u}_2)) \dots f(g(\mathbf{u}_n))].$$

Бидејќи $g(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} \mathbf{u}_i$, добиваме

$$(fg)(\mathbf{u}_j) = f(g(\mathbf{u}_j)) = f\left(\sum_{i=1}^n \beta_{ij} \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n \beta_{ij} f(\mathbf{u}_i).$$

Последниот збир е еднаков на производот на редицата $[f(\mathbf{u}_1) \ f(\mathbf{u}_2) \dots f(\mathbf{u}_n)]$ со j -тата колона на матрицата B , па затоа

$$\begin{aligned} & [(fg)(\mathbf{u}_1) \ (fg)(\mathbf{u}_2) \dots (fg)(\mathbf{u}_n)] = [f(g(\mathbf{u}_1)) \ f(g(\mathbf{u}_2)) \dots f(g(\mathbf{u}_n))] \\ &= [f(\mathbf{u}_1) \ f(\mathbf{u}_2) \dots f(\mathbf{u}_n)]B = ([\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n]A)B = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n](AB), \end{aligned}$$

т.е. AB е матрица на трансформацијата fg во базата (1). ♦

20.6. Теорема. Во однос на собирањето на линеарни трансформации и множењето на линеарна трансформација со скалар множеството $L(\mathbf{L}_n)$ е n^2 -димензионален векторски простор, изоморфен со просторот $\mathbf{K}_n$.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 20.5, 20.1, 17.7 А) и пример 4.2. ♦

20.7. Теорема. Рангот на линеарната трансформација е еднаков на рангот на нејзината матрица.

Доказ. Нека (4) е матрицата на линеарната трансформација f во базата (1). Тогаш фамилијата вектори (2) го генерира потпросторот $f(\mathbf{L}_n)$, а колоните на матрицата (4) се координатите на векторите (2) во базата (1). Затоа рангот на фамилијата (2), т.е. димензијата на потпросторот $f(\mathbf{L}_n)$ е еднаков на рангот на матрицата (4). ♦

20.8. Последица. Линеарната трансформација f на просторот $\mathbf{L}_n$ е автоморфизам ако и само ако детерминантата на нејзината матрица е различна од нула. ♦

20.9. Последица. Рангот на производот на две квадратни матрици не е поголем од рангот на секој од множителите. Притоа ако една од матриците е не-сингуларна, тогаш рангот на нивниот производ е еднаков на рангот на другата матрица.

Доказ. Непосредно следува од последица 20.8 и теорема 18.9. ♦

21. ПРОМЕНА НА МАТРИЦАТА НА ЛИНЕАРНА ТРАНСФОРМАЦИЈА ПРИ ПРОМЕНА НА БАЗАТА. СЛИЧНИ МАТРИЦИ

21.1. Нека f е линеарна трансформација на векторскиот простор L_n над полето K , A и B се нејзините матрици во базите

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \quad (1)$$

и

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n. \quad (2)$$

Ќе ја најдеме врската меѓу матриците A и B . Нека е дадена врската меѓу базите (1) и (2), т.е. е дадена матрицата на премин од базата (1) во базата (2). Нека $[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ и $[\mathbf{v}] = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$ се базните редици. Тогаш $[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}]S$ и

$$[f(\mathbf{v}_1) \ f(\mathbf{v}_2) \ \dots \ f(\mathbf{v}_n)] = [\mathbf{v}]B = ([\mathbf{u}]S)B = [\mathbf{u}](SB). \quad (3)$$

Од друга страна

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n s_{ji} \mathbf{u}_j, \quad S = [s_{ji}]_{n \times n}$$

па затоа

$$f(\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^n s_{ji} f(\mathbf{u}_j) = [f(\mathbf{u}_1) \ f(\mathbf{u}_2) \ \dots \ f(\mathbf{u}_n)] \begin{bmatrix} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{ni} \end{bmatrix}.$$

Според тоа

$$[f(\mathbf{v}_1) \ f(\mathbf{v}_2) \ \dots \ f(\mathbf{v}_n)] = [f(\mathbf{u}_1) \ f(\mathbf{u}_2) \ \dots \ f(\mathbf{u}_n)]S = ([\mathbf{u}]A)S = [\mathbf{u}](AS).$$

Од последното равенство и од равенството (3) следува $[\mathbf{u}]SB = [\mathbf{u}]AS$, т.е.

$$[\mathbf{u}](SB - AS) = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]. \quad (4)$$

Ставаме $SB - AS = D = [d_{ij}]_{n \times n}$ и го пресметуваме производот $[\mathbf{u}]D$. Тоа е редица,

чиј j -ти елемент е еднаков на $\sum_{i=1}^n d_{ij} \mathbf{u}_i$. Од (4) следува $\sum_{i=1}^n d_{ij} \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ и како (1) е база добиваме $d_{ij} = 0$, за $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, т.е. $D = [0]_{n \times n}$. Според тоа $SB = AS$, односно

$$B = S^{-1}AS. \quad (5)$$

Обратно, нека A е матрицата на линеарната трансформација f во базата (1), S е произволна несингуларна матрица и $B = S^{-1}AS$. Ако (2) е таква база на

просторот $\mathbf{L}_n$, што S е матрицата на премин од (1) во (2), тогаш согласно со формулата (5) матрицата B е матрицата на трансформацијата f во базата (2). Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема. Две квадратни матрици A и B од n -ти ред се матрици на иста линеарна трансформација на n -димензионалниот простор $\mathbf{L}_n$ ако и само ако постои несингуларна матрица од n -ти ред така што е задоволен условот (5). ♦

21.2. Дефиниција. Нека A и B се две матрици од n -ти ред. Ако постои несингуларна матрица S од n -ти ред така што $B = S^{-1}AS$, тогаш ќе велиме дека матрицата B е *слична* на матрицата A .

21.3. Пример. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Најдете две слични матрици на матрицата A .

Решение. Според дефиниција 21.2 доволно е да земеме две матрици од множеството матрици $S^{-1}AS$, каде S е несингуларна матрица. На пример:

$$\begin{aligned} \text{а) } S &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, S^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и} \\ B &= (S^{-1}A)S = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}. \\ \text{б) } S &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и} \\ C &= (S^{-1}A)S = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3/2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

- 21.4. Лема.** а) Секоја матрица A е слична на себе.
 б) Ако A е слична на B , тогаш B е слична на A .
 в) Ако A е слична на B и B е слична на C , тогаш A е слична на C .

Доказ. а) Имаме $A = E^{-1}AE = A$, т.е. A е слична на самата себе.

б) Навистина, од $B = S^{-1}AS$ следува

$$(S^{-1})^{-1}BS^{-1} = S(S^{-1}AS)S^{-1} = (SS^{-1})A(SS^{-1}) = EAE = A,$$

што значи дека B е слична на A .

в) Навистина, ако $B = S^{-1}AS$ и $C = T^{-1}BT$, тогаш

$$C = T^{-1}BT = T^{-1}(S^{-1}AS)T = (T^{-1}S^{-1})A(ST) = (ST)^{-1}A(ST)$$

и како матрицата ST е несингуларна, добиваме дека A е слична на C . ♦

21.5. Лема. Детерминантите на сличните матрици се еднакви.

Доказ. Нека матриците A и B се слични, т.е. постои матрица S така што $B = S^{-1}AS$. Тогаш

$$\det B = \det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S = (\det S)^{-1} \cdot \det A \cdot \det S = \det A. \quad \blacklozenge$$

21.6. Лема. а) Единичната матрица е слична на самата себе.

б) Скаларната матрица λE е слична на самата себе.

Доказ. а) Навистина, за секоја несингуларна матрица S важи

$$S^{-1}ES = S^{-1}S = E.$$

б) За секоја несингуларна матрица S важи $S^{-1}(\lambda E)S = \lambda S^{-1}S = \lambda E$. $\blacklozenge$

21.7. Лема. Сличните матрици имаат ист ранг.

Доказ. Тврдењето следува од фактот дека сличните матрици се матрици на една иста линеарна трансформација во две различни бази и рангот на секоја од нив е еднаков на рангот на линеарната трансформација. $\blacklozenge$

21.8. Коментар. Во врска со сличните матрици важни се следниве задачи:

а) да се најде ефективен критериум за сличност на матрици, и

б) меѓу сите матрици кои се слични на дадена матрица, да се најде матрицата која има наједноставен вид.

Решенијата на овие задачи ќе ги дадеме во натамошните разгледувања.

22. БЛОК- МАТРИЦИ 2

22.1. Теорема. Нека f е линеарна трансформација на n -димензионалниот простор L_n . Во L_n постои нетривијален инваријантен потпростор во однос на f со димензија k ако и само ако во некоја база на L_n матрицата на линеарната трансформација f има блок-матрица од видот (5).

Доказ. Нека f е линеарна трансформација на n -димензионалниот простор L_n над полето K и Q е инваријантен потпростор во однос на f . Нека

$$u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_k \quad (1)$$

е таква база на L_n , што

$$v_1, v_2, \dots, v_k \quad (2)$$

е база на Q . Да ја разгледаме матрицата на трансформацијата f во базата (1). Бидејќи потпросторот Q е инваријантен во однос на f , добиваме

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} v_j, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

па затоа можеме да запишеме

$$\begin{cases} f(\mathbf{u}_i) = \sum_{l=1}^m \beta_{li} \mathbf{u}_l + \sum_{j=1}^k \gamma_{ji} \mathbf{v}_j, & i = 1, 2, \dots, m \\ f(\mathbf{v}_i) = \sum_{l=1}^m 0 \cdot \mathbf{u}_l + \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} \mathbf{v}_j, & i = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (4)$$

Според (4) матрицата на трансформацијата f во базата (1) има вид:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1m} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2m} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \dots & \gamma_{km} & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матрицата

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{bmatrix} \quad (6)$$

која се наоѓа во десниот долен агол на матрицата (5) е матрица на рестрикцијата на трансформацијата f на потпросторот $\mathbf{Q}$ во базата (2).

Според тоа, ако во просторот $\mathbf{L}_n$ имаме инваријантен потпростор во однос на линеарната трансформација f , тогаш во соодветна база за матрицата на f имаме блок-матрица од видот (5).

Обратно, нека (1) е база на $\mathbf{L}_n$, а f е линеарна трансформација која во базата (1) е зададена со блок-матрица (5). Тогаш, очигледно важат формулите (3) и значи, потпросторот $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ е инваријантен во однос на f и матрицата (6) е матрицата на рестрикцијата на f на овој потпростор во базата (2). ♦

22.2. Теорема. Нека f е линеарна трансформација на n -димензионалниот простор $\mathbf{L}_n$ над полето $\mathbf{K}$. $\mathbf{L}_n$ е директна сума на два свои инваријантни потпростори во однос на f ако и само ако во некоја база трансформацијата f има квази-дијагонална матрица (10).

Доказ. Нека $\mathbf{L}_n$ е директна сума

$$\mathbf{L} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{Q} \quad (7)$$

на два инваријантни потпростори $\mathbf{S}$ и $\mathbf{Q}$ во однос на f . Да ја запишеме матрицата на f во базата (1), каде

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m \quad (8)$$

е база на потпросторот $\mathbf{S}$, а (2) е база на потпросторот $\mathbf{Q}$. Очигледно

$$\begin{cases} f(\mathbf{u}_i) = \sum_{l=1}^m \beta_{li} \mathbf{u}_l + \sum_{j=1}^k 0 \cdot \mathbf{v}_j, & i = 1, 2, \dots, m \\ f(\mathbf{v}_i) = \sum_{l=1}^m 0 \cdot \mathbf{u}_l + \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} \mathbf{v}_j, & i = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (9)$$

па затоа матрицата на линеарната трансформацијата f во базата (1) е:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Матрицата (10) се распаѓа на две клетки, и тоа клетката

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mm} \end{bmatrix} \quad (11)$$

која е матрица на рестрикцијата на линеарната трансформација f на потпросторот $\mathbf{S}$ и клетката (6) која е матрица на рестрикцијата на линеарната трансформација на потпросторот $\mathbf{Q}$.

Обратно, нека линеарната трансформација f во базата (1) се задава со квази-дијагонална матрица (10). Тогаш, точни се формулите (9), па затоа потпросторите $\mathbf{L}_1 = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ и $\mathbf{L}_2 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ се инваријантни во однос на f , (11) е матрица на рестрикцијата на f на потпросторот $\mathbf{L}_1$ во базата (8), (6) е матрица на рестрикцијата на f на $\mathbf{L}_2$ во базата (2). Очигледно $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}$. ♦

23. КАРАКТЕРИСТИЧЕН ПОЛИНОМ

23.1. Дефиниција. Нека е дадена матрицата $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ и нека x е променлива. Матрицата

$$\begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{bmatrix} = xE - A$$

ја нарекуваме *карактеристична матрица* на матрицата A . Детерминантата $\det(xE - A)$ ја нарекуваме *карактеристичен полином* на матрицата A .

23.2. Пример. Дадена е матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Најдете ја карактеристичната матрица на матрицата A .

б) Најдете го карактеристичниот полином $\chi(x)$ на матрицата A .

в) Пресметајте $\chi(A)$, каде $\chi(x)$ е карактеристичниот полином на матрицата A .

Решение. а) За карактеристичната матрица на матрицата A имаме

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x+3 \end{bmatrix}.$$

б) За карактеристичниот полином на матрицата A наоѓаме

$$\chi(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)(x+3) = x^3 - 7x + 6.$$

в) Имаме

$$\begin{aligned} \chi(A) &= A^3 - 7A + 6E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^3 - 7 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

т.е. $\chi(A) = [0]_{3 \times 3}$. ♦

23.3. Во пример 23.2 в) видовме дека за матрицата A и нејзиниот карактеристичен полином $\chi(x)$ важи $\chi(A) = [0]_{3 \times 3}$. Во врска со матриците и полиномите кои го имаат ова својство ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека A е квадратна матрица и

$$g(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Ако важи $g(A) = [0]_{n \times n}$, тогаш матрицата A ја нарекуваме *матрична нула на полиномот* $g(x)$, а полиномот $g(x)$ го нарекуваме *анулаторен полином на матрицата* A .

23.4. Коментар. На прашањето на егзистенцијата на анулаторен полином на квадратна матрица ќе се навратиме покасно, при што ќе ја докажеме теоремата на Хамилтон-Кели, според која карактеристичниот полином на квадратната матрица A е нејзин анулаторен полином.

23.5. Карактеристичниот полином е од n -ти степен со коефициенти од полето K и водечкиот коефициент е еднаков на 1. Очигледно, слободниот член на карактеристичниот полином $\chi(x)$ на матрицата A е

$$\chi(0) = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \det A.$$

Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема. Квадратната матрица е несингуларна ако и само ако нулата не е корен на карактеристичниот полином. ♦

23.6. Теорема. Карактеристичните полиноми на слични матрици се еднакви.

Доказ. Нека матриците A и B се слични, т.е. $B = S^{-1}AS$, за некоја несингуларна матрица S . Тогаш

$$\begin{aligned} \det(xE - B) &= \det(xE - S^{-1}AS) = \det(S^{-1}xES - S^{-1}AS) = \det(S^{-1}(xE - A)S) \\ &= \det S^{-1} \cdot \det(xE - A) \cdot \det S = (\det S)^{-1} \cdot \det(xE - A) \cdot \det S = \det(xE - A) \end{aligned}$$

т.е. сличните матрици имаат еднакви карактеристични полиноми. ♦

23.7. Забелешка. Обратното тврдење на теорема 23.6 не важи. Навистина, матриците

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

имаат ист карактеристичен полином

$$\chi(x) = (x-1)^2,$$

но тие не се слични.

23.8. Теорема. Карактеристичниот полином на триаголна блок-матрица е еднаков на производот на карактеристичните полиноми на нејзините дијагонални клетки.

Доказ. Нека

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

каде

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{m+1m+1} & a_{m+1m+2} & \dots & a_{m+1n} \\ a_{m+2m+1} & a_{m+2m+2} & \dots & a_{m+2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nm+1} & a_{nm+2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{m+11} & a_{m+12} & \dots & a_{m+1m} \\ a_{m+21} & a_{m+22} & \dots & a_{m+2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{и } O = [0]_{m \times n-m}.$$

Од теоремата на Лаплас имаме:

$$\det(xE - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & x - a_{mm} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{m+11} & -a_{m+12} & \dots & -a_{m+1m} & x - a_{m+1m+1} & -a_{m+1m+2} & \dots & -a_{m+1n} \\ -a_{m+21} & -a_{m+22} & \dots & -a_{m+2m} & -a_{m+2m+1} & x - a_{m+2m+2} & \dots & -a_{m+2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nm} & -a_{nm+1} & -a_{nm+2} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & x - a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x - a_{m+1m+1} & -a_{m+1m+2} & \dots & -a_{m+1n} \\ -a_{m+2m+1} & x - a_{m+2m+2} & \dots & -a_{m+2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{nm+1} & -a_{nm+2} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det(xE - A_1) \cdot \det(xE - A_2)$$

што и требаше да се докаже. ♦

23.9. Дефиниција. Нека A е матрица на линеарната трансформација f на n -димензионалниот векторски простор $\mathbf{L}_n$ над полето $\mathbf{K}$ во базата $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Карактеристичниот полином на матрицата A го нарекуваме *карактеристичен полином на линеарната трансформација f* .

23.10. Коментар. Дефиницијата 23.9 е коректна. Имено, бидејќи матриците соодветни на линеарната трансформација f во различни бази се слични, а според теорема 23.6 сличните матрици имаат еднакви карактеристични полиноми добиваме дека карактеристичниот полином на линеарната трансформација f е еднозначно определен и не зависи од изборот на базата.

23.11. Теорема. Карактеристичниот полином на рестрикцијата на f над инваријантен потпростор е делител на карактеристичниот полином на f .

Доказ. Нека $\mathbf{Q}$ е инваријантен потпростор на $\mathbf{L}_n$ во однос на линеарната трансформација f . Тогаш во соодветна база матрицата на f има триаголна блок-матрица од вид (1), каде A_2 е матрицата на рестрикцијата на f над $\mathbf{Q}$. Според тоа, $\det(xE - A) = \det(xE - A_1) \cdot \det(xE - A_2)$, па затоа $\det(xE - A_2)$ е делител на $\det(xE - A)$. ♦

24. СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ НА ЛИНЕАРНА ТРАНСФОРМАЦИЈА

24.1. Дефиниција. Нека f е линеарна трансформација на просторот $\mathbf{L}_n$ над полето $\mathbf{K}$. Ако во $\mathbf{L}_n$ постои ненулти вектор $\mathbf{u}$ така што

$$f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}, \quad (1)$$

за некој $\lambda \in \mathbf{K}$, тогаш скаларот λ го нарекуваме *сопствена вредност* на линеарната трансформација f , а векторот $\mathbf{u}$ го нарекуваме *сопствен вектор* на линеарната трансформација f соодветен на сопствената вредност λ .

24.2. Ненултиот вектор $\mathbf{u}$ на просторот $\mathbf{L}_n$ е сопствен ако тој го задоволува условот (1) за некој $\lambda \in \mathbf{K}$. Но,

$$\lambda \mathbf{u} = \lambda e(\mathbf{u}),$$

каде e е идентичната трансформација, па затоа условот (1) и условот

$$(f - \lambda e)(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

се еквивалентни. Множеството од сите вектори $\mathbf{u}$, кои го задоволуваат условот (2), формира инваријантен потпростор $\ker(f - \lambda e)$ во однос на линеарната трансформација $f - \lambda e$. Понатаму, бидејќи $f = f - \lambda e + \lambda e$, добиваме дека овој потпростор е инваријантен и во однос на f . Јасно, $\ker(f - \lambda e) \neq \{\mathbf{0}\}$ ако и само ако матрицата на линеарната трансформација $f - \lambda e$ е сингуларна. Нека во базата

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \quad (3)$$

линеарната трансформацијата f има матрица $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Тогаш матрицата на линеарната трансформација $f - \lambda e$ во оваа база е $A - \lambda E$. Затоа, потребен и доволен услов за постоење на сопствени вектори е

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (4)$$

Но, равенството (4) е точно ако и само ако λ е корен на карактеристичниот полином на матрицата A . Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема. λ е сопствена вредност на линеарната трансформација f ако и само ако λ е корен на карактеристичниот полином на линеарната трансформација f .

Решение. а) Прво ќе ги определиме сопствените вредности. Имаме

$$\begin{aligned}\det(\lambda E - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 1) - 2 - 2 + 2\lambda - 4 + \lambda - 1 - 2\lambda + 8 \\ &= (\lambda - 1)[(\lambda - 4)(\lambda - 2) + 1] = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2,\end{aligned}$$

од каде добиваме $(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0$, па затоа сопствените вредности се $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2/3} = 3$.

Системот (6) од коментар 28.4 за матрицата A ќе биде:

$$\begin{cases} (4 - \lambda)x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + (2 - \lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + (1 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

За $\lambda = 1$, системот (7) се сведува на

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_1 + 2x_2 = 0,$$

чие општо решение е

$$x_1 = t, \quad x_2 = -t, \quad x_3 = 2t, \quad t \in \mathbf{R},$$

па $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 2)$ е сопствениот вектор на A што соодветствува на сопствената вредност $\lambda = 1$. За $\lambda = 3$, системот (7) се сведува на

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0,$$

и неговото општо решение е $\mathbf{x} = (t, u, t + u) = t(1, 0, 1) + u(0, 1, 1)$, $t, u \in \mathbf{R}$. Значи, матрицата A има два линеарно независни сопствени вектори $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1)$ и $\mathbf{x}_3 = (0, 1, 1)$, кои соодветствуваат на сопствената вредност $\lambda = 3$.

б) Прво ќе ги определиме сопствените вредности. Имаме

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3$$

од каде добиваме $(\lambda - 2)^3 = 0$, т.е. $\lambda_{1/2/3} = 2$. Понатаму, системот (6) за матрицата B го добива видот

$$(2 - \lambda)x_1 + x_2 = 0, \quad (2 - \lambda)x_2 = 0, \quad x_1 + (2 - \lambda)x_3 = 0.$$

За $\lambda = 2$ тој се сведува на системот $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, па неговото општо решение е $\mathbf{x} = (0, 0, t)$, $t \in \mathbf{R}$. Значи, матрицата B има само еден сопствен вектор (линеарно независен) соодветен на сопствената вредност $\lambda = 2$. ♦

24.6. Нека $\mathbf{Q}$ е еднодимензионален потпростор на просторот $\mathbf{L}_n$ над полето $\mathbf{K}$. Ако $\mathbf{u}$ е ненулти вектор од $\mathbf{Q}$, тогаш $\mathbf{Q}$ е множеството $\{\alpha \mathbf{u} \mid \alpha \in \mathbf{K}\}$. Ако сега

$\mathbf{Q}$ е инваријантен во однос на линеарната трансформација f , тогаш $f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$, за некој $\lambda \in \mathbf{K}$ и $f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) = \alpha(\lambda \mathbf{u}) = \lambda(\alpha \mathbf{u})$, што значи дека сите ненулти вектори на $\mathbf{Q}$ се сопствени вектори на f соодветни на сопствената вредност λ .

Обратно, ако $\mathbf{u}$ е сопствен вектор на f со сопствена вредност λ и $\alpha \in \mathbf{K}$, тогаш $f(\alpha \mathbf{u}) = \lambda(\alpha \mathbf{u})$, па значи $L(\mathbf{u})$ е потпростор на $\mathbf{L}_n$ инваријантен во однос на f .

Според тоа, во просторот $\mathbf{L}_n$ постојат еднодимензионални инваријантни потпростори во однос на линеарната трансформација f ако и само ако f има сопствени вектори. Ако $\mathbf{u}$ е произволен сопствен вектор, тогаш $L(\mathbf{u})$ е инваријантен во однос на f еднодимензионален потпростор и секој еднодимензионален инваријантен потпростор на $\mathbf{L}_n$ во однос на f е од ваков вид.

24.7. Теорема. Сопствените вектори на линеарната трансформација f , соодветни на различните сопствени вредности се линеарно независни.

Доказ. Нека $\lambda_i, i=1,2,\dots,k$ се различни сопствени вредности на линеарната трансформација f и

$$\mathbf{u}_i, i=1,2,\dots,k \quad (8)$$

се соодветните сопствени вектори. Нека земеме максимално линеарно независно подмножество од (8) и тоа нека е

$$\mathbf{u}_i, i=1,2,\dots,r. \quad (9)$$

Ако (8) и (9) не се совпаѓаат, тогаш векторот $\mathbf{u}_{r+1}$ линеарно се изразува со векторите (9):

$$\mathbf{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}_i \quad (10)$$

па затоа

$$\lambda_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^r \lambda_{r+1} \alpha_i \mathbf{u}_i. \quad (11)$$

Од равенството (10) следува

$$f(\mathbf{u}_{r+1}) = \lambda_{r+1} \mathbf{u}_{r+1} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \mathbf{u}_i$$

и ако споредиме со равенството (11) добиваме

$$\sum_{i=1}^r \lambda_{r+1} \alpha_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i \mathbf{u}_i, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^r (\lambda_{r+1} - \lambda_i) \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

Но, векторите (9) се линеарно независни, па затоа

$$(\lambda_{r+1} - \lambda_i) \alpha_i = 0, i=1,2,\dots,r$$

и како $\lambda_{r+1} \neq \lambda_i, i=1,2,\dots,r$, имаме $\alpha_i = 0, i=1,2,\dots,r$. Според тоа, $\mathbf{u}_{r+1} = \mathbf{0}$, што противречи на дефиницијата на сопствен вектор. Значи множествата (8) и (9) се совпаѓаат. ♦

24.8. Последица. Ако линеарната трансформација f на просторот $\mathbf{L}_n$ над полето $\mathbf{K}$ има n различни сопствени вредности, тогаш $\mathbf{L}_n$ е директна сума на еднодимензионални инваријантни потпростори во однос на f и во соодветната база f се задава со дијагонална матрица.

Доказ. Ако f има n различни сопствени вредности $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$, тогаш според теорема 24.7 соодветните сопствени вектори $\mathbf{u}_i, i=1, 2, \dots, n$ се линеарно независни и притоа важи потпросторите $L(\mathbf{u}_i), i=1, 2, \dots, n$ се инваријантни во однос на f . Но, $\mathbf{u}_i, i=1, 2, \dots, n$ е база на $\mathbf{L}_n$, па од последица 4.11 следува дека $\mathbf{L}_n$ е директна сума на еднодимензионалните инваријантни потпростори $L(\mathbf{u}_i), i=1, 2, \dots, n$ во однос на f .

Нека A е матрицата на линеарната трансформација f во некоја база $\mathbf{e}_i, i=1, 2, \dots, n$ и S е матрицата на премин од базата $\mathbf{e}_i, i=1, 2, \dots, n$ во базата формирана од сопствените вектори $\mathbf{u}_i, i=1, 2, \dots, n$ на линеарната трансформација f . Тогаш, според теорема 21.1 матрицата на линеарната трансформација во базата $\mathbf{u}_i, i=1, 2, \dots, n$ е дадена со $\Lambda = S^{-1}AS$. Но,

$$f(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

па од 20.1 следува дека матрицата Λ е дијагонална. ♦

24.9. Пример. Дијагонализирајте ја матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Да се дијагонализира дадена матрица A , значи да се најде не-сингуларна матрица S , таква што матрицата $S^{-1}AS$ да е дијагонална. Во случајов за матрицата S ќе велиме дека е *дијагонализирачка*. Според последица 24.8, за да најдеме дијагонализирачка матрица за матрицата A доволно е да ги најдеме сопствените вектори на линеарната трансформација зададена со матрицата A .

Ќе ги определиме сопствените вредности на матрицата A . Имаме

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -4 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2,$$

т.е. $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$ се сопствените вредности на A .

За $\lambda_1 = -1$ имаме

$$(A + 1 \cdot E)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = (1, 1),$$

а за $\lambda_2 = -2$ имаме

$$(A + 2E)\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = (3, 4).$$

Јасно, сопствените вектори $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ се линеарно независни и дијагонализирачката

матрица е $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Понатаму, $S^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ и

$$\Lambda = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

24.10. Пример. Нека $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Пресметајте $A^k, k \in \mathbf{N}$.

Решение. Ако матрицата A може да се дијагонализира, т.е. ако $A = S\Lambda S^{-1}$, тогаш

$$A^k = \underbrace{(S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\dots(S\Lambda S^{-1})}_{k \text{ пати}} = S\Lambda^k S^{-1}, \quad (12)$$

па може да се искористи фактот дека за дијагонална матрица $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{n \times n}$ важи $\Lambda^k = [\lambda_{ij}^k]_{n \times n}$, (зошто?). Затоа, ако може, прво ќе ја дијагонализираме матрицата A . Имаме

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 5 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2,$$

т.е. сопствените вредности на A се $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ и таа може да се дијагонализира. Понатаму, за $\lambda_1 = -1$ имаме

$$(A + 1 \cdot E)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = (1, 1).$$

За $\lambda_2 = 2$ имаме

$$(A - 2E)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = (5, 2).$$

Дијагонализирачката матрица е $S = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Понатаму $S^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$ и

$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, па ако замениме во (12) наоѓаме

$$\begin{aligned} A^k &= S\Lambda^k S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2(-1)^k + 5 \cdot 2^k & 5(-1)^k - 5 \cdot 2^k \\ -2(-1)^k + 2 \cdot 2^k & 5(-1)^k - 2 \cdot 2^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^k}{3} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \frac{2^k}{3} \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

што и требаше да се определи. ♦

24.11. Пример. Дадени се сопствените вредности $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ и соодветните сопствени вектори $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 2), \mathbf{u}_3 = (-1, 0, 1)$. Најдете ја матрицата A .

Решение. Од условот следува дека матрицата A може да се дијагонализира, при што се добива матрицата

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Понатаму, дијагонализирачката матрица и нејзината инверзна се

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ако замениме во $A = S\Lambda S^{-1}$, добиваме

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

24.12. Пример. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Проверете дали е слична со A матрицата:

$$\text{а) } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{в) } D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. а) Имаме $\det A = 3 \neq 12 = \det B$, па од лема 21.5 следува дека матриците A и B не се слични.

б) Карактеристичните полиноми на матриците A и C се

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \text{ и}$$

$$\det(\lambda E - C) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3.$$

Па од теорема 23.6 следува дека матриците A и не се слични.

в) Имаме

$$\det(\lambda E - D) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = \det(\lambda E - A).$$

Според тоа, A и D имаат исти карактеристични полиноми и исти сопствени вредности: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. Бидејќи двете сопствени вредности се различни, од последица 24.8 следува дека соодветните сопствени вектори се линеарно независни и матриците A и D можат да се дијагонализираат, т.е. постојат матрици S и M такви да $A = SAS^{-1}$ и $D = M\Lambda M^{-1}$, каде Λ е дијагоналната матрица од втор ред со $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ на дијагоналата. Значи, A е слична на Λ и Λ е слична на D , па од лема 21.4 следува дека A е слична на D . ♦

25. ПОЛИНОМНИ МАТРИЦИ. ЕКВИВАЛЕНТНОСТ

25.1. Дефиниција. Матрицата

$$A(x) = \begin{bmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \dots & p_{nn}(x) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

каде $p_{ij}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ се полиноми со коефициенти од полето $\mathbf{K}$ ја нарекуваме *полиномна матрица од n -ти ред*.

25.2. Дефиниција. *Елементарни трансформации* на редица (колона) на полиномната матрица (1) ги нарекуваме следниве операции:

- а) множење на редица (колона) на матрицата (1) со ненулта константа,
- б) додавање на една редица (колона) на друга нејзина редица (колона) помножена со произволен полином $p(x)$ со реални коефициенти.

25.3. Ако матрицата $B(x)$ се добива од матрицата $A(x)$ со примена на една или повеќе елементарни трансформации, тогаш пишуваме $A(x) \sim B(x)$. Точна е следнава лема.

Лема. а) $A(x) \sim A(x)$, за секоја полиномна матрица $A(x)$.

б) Ако $A(x) \sim B(x)$, тогаш $B(x) \sim A(x)$.

в) Ако $A(x) \sim B(x)$ и $B(x) \sim C(x)$, тогаш $A(x) \sim C(x)$.

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 25.2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

25.4. Од лема 25.3 следува дека во множеството полиномни матрици од ист ред е дефинирана релација за еквиваленција. Според тоа, коректна е следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека $A(x)$ и $B(x)$ се полиномни матрици од ист ред. Ако $A(x) \sim B(x)$, тогаш ќе велиме дека матриците $A(x)$ и $B(x)$ се *еквивалентни*.

25.5. Теорема. Ако две полиномни матрици од ист ред се разликуваат само во редоследот на редиците или колоните, тогаш тие се еквивалентни.

Доказ. Доказот е аналоген на доказот на лема 16.1. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

25.6. Дефиниција. Полиномната матрица $N(x)$ од n -ти ред ја нарекуваме *канонична* ако

1) матрицата

$$N(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_r(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

е дијагонална,

2) $p_i(x), i=1,2,\dots,r$ се ненулти полиноми, со водечки коефициенти еднакви на 1, и

3) за $i=1,2,\dots,r-1$ полиномот $p_i(x)$ е делител на полиномот $p_{i+1}(x)$.

25.7. Дефиниција. Множеството полиноми

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_r(x), 0, 0, \dots, 0$$

кои се наоѓаат на главната дијагонала на каноничната матрица $N(x)$ го нарекуваме *множество инваријантни множители* на $N(x)$.

25.8. Коментар. Ако меѓу ненултите инваријантни множители има реални броеви, тогаш од условот (2) следува дека тие се еднакви на 1. Но, од условот (3) следува дека единиците, ако истите постојат, се наоѓаат на првите места на дијагоналната матрица $N(x)$, т.е. во општ случај имаме

$$N(x) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_i(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_r(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

25.9. Теорема. Секоја полиномна матрица $A(x)$ е еквивалентна на некоја канонична матрица.

Доказ. Ако $A(x)$ е нулта матрица, тогаш таа е канонична.

Нека $A(x)$ е ненулта матрица од n -ти ред. За $n=1$ тврдењето на теоремата очигледно важи, бидејќи во овој случај $A(x)=[p_{11}(x)]$ и полиномот $p_{11}(x)$ може да се помножи со реален број така што водечкиот коефициент е еднаков на 1. Нека $n>1$ и нека теоремата е точна за матрица од $(n-1)$ -ви ред. Со L да го означиме множеството од сите матрици кои се еквивалентни на матрицата $A(x)$, а со M множеството од сите полиноми кои се елементи на матриците од L . Ако $p(x) \in M$ и $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$, тогаш $\lambda p(x) \in M$ бидејќи множењето на редица со реален број е елементарна трансформација. Затоа во M постои полином $p_1(x)$, кој меѓу сите ненулта полиноми од M има најмал степен и чиј водечки коефициент е еднаков на 1. Со промена на местата на редиците и колоните на матриците од L чиј елемент е $p_1(x)$, може да се доведе овој елемент да биде прв елемент на првата редица. Според тоа, L ја содржи матрицата

$$\begin{bmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \dots & p_{nn}(x) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Ќе покажеме дека сите елементи на првата редица и првата колона на матрицата (3) се делат со $p_1(x)$. Навистина, нека, на пример

$$p_{1i}(x) = p_1(x)u(x) + r(x),$$

каде $r(x)$ е полином со степен помал од степенот на $p_1(x)$. Ако на матрицата (3) ја примениме следнава елементарна трансформација: на i -тата колона ја додаваме првата помножена со $-u(x)$, тогаш првиот елемент на i -тата колона ќе биде $r(x)$, што значи $r(x) \in M$. Затоа $r(x) = 0$, бидејќи во спротивно $r(x)$ ќе биде елемент на M со степен помал од степенот на $p_1(x)$, што не е можно. Затоа, $p_{1i}(x)$ се дели со $p_1(x)$.

Сите елементи на првата редица на матрицата (3), освен првиот ги заменуваме со 0, ако на i -тата колона, $i=2,3,\dots,n$, ја додадеме првата колона помножена со $-\frac{p_{1i}(x)}{p_1(x)}$. Аналогно сите елементи на првата колона, освен првиот ги заменуваме со 0. Затоа, во множеството L се содржи матрицата

$$\begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22}(x) & \dots & q_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q_{n2}(x) & \dots & q_{nn}(x) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Јасно, секој елемент $q_{ij}(x)$ на (4) се дели со $p_1(x)$. Навистина, ако на првата редица ја додадеме i -тата редица, $i = 2, 3, \dots, n$, ја добиваме матрицата

$$\begin{bmatrix} p_1(x) & q_{i2}(x) & \dots & q_{in}(x) \\ 0 & q_{22}(x) & \dots & q_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q_{n2}(x) & \dots & q_{nn}(x) \end{bmatrix},$$

која е од видот (3), па затоа секој елемент на првата редица се дели со $p_1(x)$.

Сега да ја разгледаме матрицата

$$\begin{bmatrix} q_{22}(x) & \dots & q_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n2}(x) & \dots & q_{nn}(x) \end{bmatrix}.$$

Таа е од $(n-1)$ -ви ред и од индуктивната претпоставка следува дека со помош на елементарни трансформации може да се сведе на каноничен вид:

$$\begin{bmatrix} p_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_3(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n(x) \end{bmatrix}.$$

Јасно, ако овие елементарни трансформации се применат на матрицата (4), при што не се менуваат првата редица и првата колона, тогаш се добива матрица од следниов вид:

$$\begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n(x) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Притоа полиномите $p_i(x)$, $i = 2, \dots, n$ се линеарни комбинации на елементите на матрицата (4) и затоа тие се делат со $p_1(x)$. Конечно, матрицата (5) е канонична матрица еквивалентна на матрицата $A(x)$. ♦

26. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ НА МИНОРИТЕ НА ПОЛИНОМНА МАТРИЦА

26.1. Нека $A(x)$ е произволна полиномна матрица од n -ти ред, со ранг r . Тоа значи дека за секој $k \leq r$, $k \in \mathbb{N}$ меѓу минорите од k -ти ред на матрицата $A(x)$ постои минор различен од нула, а секој минор со ред поголем од r , $r < n$ е еднаков на нула. Понатаму, секој минор од k -ти ред на $A(x)$ е полином од x .

Нека $d_k(x)$ е најголемиот заеднички делител на сите минори од k -ти ред на $A(x)$, $k \leq r$. Ако $r < n$, да ставиме

$$d_{r+1}(x) = d_{r+2}(x) = \dots = d_n(x).$$

Според тоа, добиваме фамилија полиноми

$$d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x). \quad (1)$$

Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Фамилијата полиноми (1) ја нарекуваме *фамилија најголеми заеднички делители* на минорите на матрицата $A(x)$.

26.2. Коментар. Ако $A(x)$ е нулта матрица, тогаш сите полиноми (1) се нулти полиноми. Ако, пак, $A(x)$ е ненулта матрица, тогаш $d_1(x)$ е најголемиот заеднички делител на сите елементи на $A(x)$, а кога $r = n$, тогаш $d_n(x)$ е еднаков на детерминантата на матрицата $A(x)$, поделена со водечкиот коефициент.

26.3. Теорема. Фамилијата најголеми заеднички делители на минорите на матрицата $A(x)$ не се менува при примена на елементарните трансформации.

Доказ. Ќе ги разгледаме елементарните трансформации на редиците. Нека i -тата редица на $A(x)$ ја помножиме со скалар $\lambda \neq 0$. Тогаш минорите од k -ти ред во кои влегува оваа редица се множат со λ , а другите минори не се менуваат. Но, најголемиот заеднички делител на фамилија полиноми не се менува, ако некои полиноми на фамилијата се помножат со реален број различен од нула.

Нека сега, на пример, на првата редица на $A(x)$ ја додадеме втората помножена со некој полином $q(x)$. Јасно, притоа се менуваат само минорите кои ја содржат првата, но не ја содржат втората редица (зошто?). Да разгледаме еден таков минор на матрицата и нека тоа е минорот:

$$f(x) = \begin{vmatrix} p_{11}(x) + q(x)p_{21}(x) & p_{12}(x) + q(x)p_{22}(x) & \dots & p_{1k}(x) + q(x)p_{2k}(x) \\ p_{31}(x) & p_{32}(x) & \dots & p_{3k}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k+11}(x) & p_{k+12} & \dots & p_{k+1k}(x) \end{vmatrix}.$$

Имаме:

$$f(x) = g(x) + q(x)h(x),$$

каде

$$g(x) = \begin{vmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1k}(x) \\ p_{31}(x) & p_{32}(x) & \dots & p_{3k}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k+11}(x) & p_{k+12} & \dots & p_{k+1k}(x) \end{vmatrix},$$

$$h(x) = \begin{vmatrix} p_{21}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{2k}(x) \\ p_{31}(x) & p_{32}(x) & \dots & p_{3k}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k+11}(x) & p_{k+12} & \dots & p_{k+1k}(x) \end{vmatrix},$$

се минори од k -ти ред на матрицата $A(x)$. Според тоа, ако на една редица на матрицата $A(x)$ додадеме друга нејзина редица, помножена со некој полином $q(x)$, тогаш кон некои минори од k -ти ред на матрицата додаваме други минори од k -ти ред, помножени со $q(x)$. Јасно, притоа најголемиот заеднички делител на сите минори од k -ти ред не се менува. ♦

26.4. Последица. Фамилиите најголеми заеднички делители на минорите на еквивалентните матрици се совпаѓаат. ♦

26.5. Теорема. Полиномна матрица е еквивалентна на единствена канонична матрица.

Доказ. Нека $A(x)$ е произволна полиномна матрица, (1) е фамилијата најголеми заеднички делители на нејзините минори и нека

$$N(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n(x) \end{bmatrix}$$

е канонична матрица, еквивалентна на матрицата $A(x)$. Тогаш, од последица 26.4 добиваме дека (1) е фамилија најголеми заеднички делители на минорите на матрицата $N(x)$. Ако рангот r на матрицата $A(x)$ е помал од n , тогаш

$$d_{r+1}(x) = d_{r+2}(x) = \dots = d_n(x).$$

Според тоа, сите минори со ред поголем од r на матрицата $N(x)$ се еднакви на нула, па затоа

$$p_{r+1}(x) = \dots = p_n(x).$$

Бидејќи $p_1(x)$ е делител на секој полином $p_i(x)$ и неговиот водечки коефициент е еднаков на 1 добиваме $d_1(x) = p_1(x)$. Аналогно,

$$d_2(x) = p_1(x)p_2(x), \dots, d_r(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_r(x).$$

Значи, дијагоналните елементи на $N(x)$ еднозначно ја определуваат фамилијата (1) и обратно, фамилијата (1) еднозначно ги определува дијагоналните елементи на $N(x)$, т.е.

$$\begin{aligned} p_1(x) &= d_1(x), \quad p_i(x) = \frac{d_i(x)}{d_{i-1}(x)}, \quad i = 2, \dots, r, \\ p_{r+1}(x) &= \dots = p_n(x) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Конечно, бидејќи за секоја матрица $A(x)$ фамилијата најголеми заеднички делители на нејзините минори е еднозначно определена, од (2) следува дека каноничната матрица $N(x)$ е еднозначно определена, т.е. полиномна матрица е еквивалентна на единствена канонична матрица. ♦

26.6. Дефиниција. Ако $N(x)$ е каноничната матрица, еквивалентна на матрицата $A(x)$, тогаш $N(x)$ ја нарекуваме *канонична форма на матрицата* $A(x)$, а множеството инваријантни множители на матрицата $N(x)$ го нарекуваме *множество инваријантни множители на матрицата* $A(x)$.

26.7. Пример. За матрицата

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & x-1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{bmatrix}$$

имаме $d_1(x) = d_2(x) = 1, d_3(x) = x(x+1)$, па затоа нејзиното множество инваријантни множители е $p_1(x) = p_2(x) = 1, p_3(x) = x(x+1)$ и

$$N(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x(x+1) \end{bmatrix}$$

е каноничната форма на $A(x)$. ♦

27. ЕЛЕМЕНТАРНИ ДЕЛИТЕЛИ НА ПОЛИНОМНА МАТРИЦА

27.1. Дефиниција. Нека $p(x)$ е полином со ненулта степен

$$p(x) = a p_1(x)^{\alpha_1} p_2(x)^{\alpha_2} \dots p_m(x)^{\alpha_m}, \quad p_i(x) \neq p_j(x), i \neq j$$

и полиномите

$$p_i(x), i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

се неразложливи. За полиномите (1) ќе велиме дека се *множество елементарни делители* на полиномот $p(x)$.

27.2. Дефиниција. *Множество елементарни делители на матрицата* $A(x)$ ја нарекуваме унијата на множествата елементарни делители на сите нејзини неконстантни инваријантни множители.

27.3. Пример. За матрицата

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & x-1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{bmatrix}$$

инваријантните множители се $p_1(x) = p_2(x) = 1$, $p_3(x) = x(x+1)$. Значи, множеството елементарни делители на матрицата $A(x)$ е $\{x, x+1\}$. ♦

27.4. Пример. За матрицата

$$B(x) = \begin{bmatrix} x^2 - 1 & x+1 \\ x+1 & x^2 + 2x+1 \end{bmatrix}$$

имаме

$$d_1(x) = x+1, d_2(x) = (x+1)^2(x^2 - 2),$$

па затоа

$$p_1(x) = x+1, p_2(x) = (x+1)(x^2 - 2).$$

Според тоа, $B(x)$ има четири елементарни делители $x+1, x+1, x-\sqrt{2}, x+\sqrt{2}$. ♦

27.5. Теорема. Две матрици од ист ред се еквивалентни ако и само имаат ист ранг и множествата елементарни делители им се совпаѓаат.

Доказ. Јасно, ако матриците се еквивалентни, тогаш тие имаат ист ранг и фамилиите елементарни делители им се совпаѓаат.

Обратно, нека матрицата $A(x)$ има ранг r и нека

$$g_1(x)^{\alpha_1}, \dots, g_1(x)^{\alpha_s}, g_2(x)^{\beta_1}, \dots, g_2(x)^{\beta_t}, \dots, g_k(x)^{\gamma_1}, \dots, g_k(x)^{\gamma_l} \quad (2)$$

е нејзиното множество елементарни делители. Во (2) важи $g_i(x) \neq g_j(x)$, за $i \neq j$.

Понатаму, ќе сметаме дека за полиномите во (2) важи

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_s, \\ \beta_1 &\geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_t, \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_1 &\geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_l. \end{aligned} \quad (3)$$

Ќе докажеме дека при даден ред n на матрицата $A(x)$, рангот r и множеството елементарни делители (2) еднозначно ги определуваат инваријантните множители

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x) \quad (4)$$

на $A(x)$. Множеството полиноми (2) е унија на множествата елементарни делители на неконстантните полиноми (4), па затоа за $i \leq r$ имаме

$$p_i(x) = g_1(x)^{\delta_{1i}} g_2(x)^{\delta_{2i}} \dots g_k(x)^{\delta_{ki}}, \quad g_j(x)^0 = 1.$$

Освен тоа, за $r < n$ имаме

$$p_{r+1}(x) = p_{r+2}(x) = \dots = p_n(x) = 0.$$

Нека неравенствата во (3) се запишани така што $s \geq t, \dots, s \geq l$. Да ги запишеме овие неравенства во видот

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_s, \\ \beta_1 &\geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_s, \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_1 &\geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_s, \end{aligned} \tag{5}$$

каде $\beta_{t+1} = \dots = \beta_s = \dots = \gamma_{l+1} = \dots = \gamma_s = 0$. Очигледно $s \leq r$, бидејќи

$$g_1(x)^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

се елементарни делители и ниту еден пар од нив не влегува во еден ист инваријантен множител. Од неравенствата (5) имаме

$$\begin{aligned} p_r(x) &= g_1(x)^{\alpha_1} g_2(x)^{\beta_1} \dots g_k(x)^{\gamma_1}, \\ p_{r-1}(x) &= g_1(x)^{\alpha_2} g_2(x)^{\beta_2} \dots g_k(x)^{\gamma_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ p_{r-s+1}(x) &= g_1(x)^{\alpha_s} g_2(x)^{\beta_s} \dots g_k(x)^{\gamma_s} \end{aligned}$$

и, ако $s < r$, тогаш

$$p_{r-s}(x) = p_{r-s-1}(x) = \dots = p_1(x) = 1.$$

Според тоа, ако две матрици имаат ист ред, ист ранг и исти множества елементарни делители, тогаш елементарните множители на овие матрици се совпаѓаат, па затоа тие се еквивалентни. ♦

27.6. Совпаѓањето на множеството елементарни делители и редот на матрицата не е доволно тие да се еквивалентни, што може да се види од следниов пример.

Пример. Матриците

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \text{ и } B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

не се еквивалентни, бидејќи нивните инваријантни множители се различни. Меѓутоа истите имаат еден единствен елементарен делител x . ♦

27.7. Теорема. Множеството елементарни делители на полиномна дијагонална матрица е унија на множествата елементарни делители на нејзините дијагонални елементи. Притоа секој елементарен делител учествува онолку пати во колку што дијагонални елементи се појавува.

Доказ. Нека $A(x)$ е дијагонална матрица од n -ти ред и

$$q_1(x), q_2(x), \dots, q_r(x) \tag{6}$$

се нејзините ненулти дијагонални елементи. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека сите водечки коефициенти на полиномите (6) се еднакви на 1,

бидејќи при множење со редиците на матрицата со броеви различни од нула не се менуваат ниту нејзините елементарни делители, ниту елементарните делители на дијагоналните елементи. Очигледно, r е рангот на матрицата $A(x)$, па затоа ако (4) е нејзиното множество инваријантни множители, тогаш $r < n$ и

$$p_{r+1}(x) = p_{r+2}(x) = \dots = p_n(x) = 0.$$

Производот

$$p_1(x)p_2(x)\dots p_r(x)$$

е еднаков на најголемиот заеднички делител на минорите од r -ти ред на матрицата $A(x)$. Но, $A(x)$ содржи само еден минор од r -ти ред

$$q_1(x)q_2(x)\dots q_r(x)$$

и затоа

$$q_1(x)q_2(x)\dots q_r(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_r(x). \quad (7)$$

Нека

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_s(x) \quad (8)$$

се сите неразложливи множители на полиномите (6), со водечки коефициенти 1. Од (7) следува дека (8) се сите неразложливи множители на неконстантните полиноми (4). Затоа елементарните делители на $A(x)$ се од видот

$$g_j(x)^\beta. \quad (9)$$

Нека j е таков да $1 \leq j \leq s$ и да го претставиме $q_i(x)$ во видот

$$q_i(x) = g_j(x)^{\alpha_i} t_{ij}(x),$$

каде $g_j(x)$ не е делител на $t_{ij}(x)$. Добиваме множество полиноми

$$g_j(x)^{\alpha_1}, g_j(x)^{\alpha_2}, \dots, g_j(x)^{\alpha_r}. \quad (10)$$

Ако не ги сметаме полиномите $g_j(x)^{\alpha_i}$, каде $\alpha_i = 0$, тогаш при фиксиран j множеството (10), по конструкција, е фамилијата на сите елементарни делители на полиномите (6), од видот (9).

Ќе сметаме дека полиномите (6) се нумерирани така да

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_r.$$

Тогаш, максималниот степен на полиномот $g_j(x)$, на кој се дели секој минор од k -ти ред на $A(x)$, при $k \leq r$ е еднаков на $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. Според тоа, ако $d_k(x)$ и $d_{k-1}(x)$ се најголемите заеднички делители на минорите на матрицата $A(x)$, тогаш $g_j(x)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}$ е максималниот степен на полиномот $g_j(x)$ кој го дели $d_k(x)$, а $g_j(x)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}}$ е максималниот степен на полиномот $g_j(x)$ кој го дели $d_{k-1}(x)$. Бидејќи $p_k(x) = \frac{d_k(x)}{d_{k-1}(x)}$, добиваме дека

$$g_j(x)^{\alpha_k}. \quad (11)$$

е максималниот степен на полиномот $g_j(x)$, со кој се дели $p_k(x)$. Ако $\alpha_k \neq 0$, тогаш полиномот (11) е елементарен делител на полиномот $p_k(x)$. Ако пак $\alpha_k = 0$, тогаш полиномот $p_k(x)$ нема елементарен делител од видот (9). Според тоа, полиномите (10) со $\alpha_k \neq 0$, $k=1, 2, \dots, r$ и само тие го формираат множеството елементарни делители на матрицата $A(x)$ од видот (9). Следствено, елементарните делители од видот (9) на полиномите (6) и на матрицата $A(x)$ се совпаѓаат. Конечно, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, од што следува тврдењето на теоремата. ♦

27.8. Последица. Множеството елементарни делители на блок матрица е унија од множествата елементарни делители на дијагоналните клетки (блокови).

Доказ. Нека

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_2(x) \end{bmatrix}$$

е блок полиномна матрица. Со елементарни трансформации го сведуваме блокот $A_1(x)$ во дијагонална форма

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} t_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_m(x) \end{bmatrix}$$

и блокот $A_2(x)$ во дијагонална форма

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_s(x) \end{bmatrix}.$$

Тогаш, елементарните делители на $A_1(x)$ се елементарните делители на неконстантните полиноми

$$t_1(x), t_2(x), \dots, t_m(x). \quad (12)$$

Елементарните делители на $A_2(x)$ се елементарните делители на неконстантните полиноми

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_s(x). \quad (13)$$

Но, елементарните трансформации на блоковите $A_1(x)$ и $A_2(x)$ можеме да ги разгледуваме како елементарни трансформации на $A(x)$, без да ги менуваме местата на колоните од различните блокови, па затоа со овие трансформации $A(x)$ се сведува на дијагонална форма со полиноми на дијагоналата

$$t_1(x), t_2(x), \dots, t_m(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_s(x).$$

Според тоа, множеството елементарни делители на $A(x)$ е унија на множествата елементарни делители на неконстантните полиноми (11) и (12). ♦

28. УНИМОДУЛАРНИ И ЕЛЕМЕНТАРНИ МАТРИЦИ

28.1. Дефиниција. За полиномната матрица $A(x)$ ќе велиме дека и *уни-модуларна* ако $\det A(x) = \text{const} \neq 0$.

28.2. Пример. а) Матрицата $A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2x-1 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}$ е унимодуларна, бидејќи $\det A(x) = 1$.

б) Матрицата $B(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ 2x & 3 \end{bmatrix}$ не е унимодуларна, бидејќи

$$\det B(x) = x^2 - 2x \neq \text{const} . \blacklozenge$$

28.3. Теорема. а) Производ на унимодуларни матрици е унимодуларна матрица.

б) Матрицата $A(x)$ е унимодуларна ако и само ако сите нејзини инваријантни множители се еднакви на 1, т.е. ако и само ако $A(x)$ е еквивалентна на единичната матрица.

Доказ. а) Нека $A(x)$ и $B(x)$ се унимодуларни матрици. Тогаш

$$\det A(x) = \alpha \neq 0 \text{ и } \det B(x) = \beta \neq 0 ,$$

па затоа

$$\det A(x)B(x) = \det A(x)\det B(x) = \alpha\beta \neq 0 ,$$

т.е. матрицата $A(x)B(x)$ е унимодуларна.

б) Нека

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x) \tag{1}$$

се инваријантните множители на $A(x)$. Бидејќи $\det A(x)$ може да се разликува од производот на полиномите (1) само за константа $\alpha \neq 0$, добиваме дека равенството

$$\det A(x) = \alpha \tag{2}$$

$\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, ако и само ако

$$p_1(x)p_2(x)\dots p_n(x) = 1 ,$$

кое важи ако и само ако $p_i(x) = 1, i = 1, 2, \dots, n$. $\blacklozenge$

28.4. Теорема. Матрицата $A(x)$ е унимодуларна ако и само ако за неа постои инверзна матрица, која исто така е полиномна.

Доказ. Нека $B(x)$ е полиномна матрица инверзна на $A(x)$. Тогаш $A(x)B(x) = E$, па затоа

$$\det A(x)\det B(x) = 1 . \tag{3}$$

Бидејќи детерминантата на полиномна матрица е полином од x , тогаш од (3) следува (2), за $\alpha \neq 0$, т.е. $A(x)$ е унимодуларна матрица.

Обратно, нека $A(x)$ е унимодуларна матрица. Да ја разгледаме полиномната матрица

$$B(x) = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

каде A_{ij} се алгебарските компленти на $\det A(x)$ и $\det A(x) = \alpha \neq 0$. Очигледно матрицата $B(x)$ е полиномна матрица и $B(x) = A(x)^{-1}$. ♦

28.5. Дефиниција. Матриците од видовите

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0 \quad (4)$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & f(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

каде $f(x)$ е полином со реални коефициенти, ги нарекуваме *елементарни матрици*.

28.6. Лема. Ако матрицата $A(x)$ е елементарна, тогаш таа е унимодуларна.

Доказ. Непосредно следува од дефинициите 28.5 и 28.1. ♦

28.7. Теорема. Множењето на полиномна матрица $A(x)$ со елементарна матрица од лево (десно) е еквивалентно со примена на елементарна трансформација на редица (колона) на матрицата $A(x)$.

Доказ. Нека елементарната матрица е од видот (5) и при тоа нека:

$$I(x) = \begin{bmatrix} 1 & g(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

и $A(x) = [p_{ij}(x)]_{n \times n}$. Тогаш

$$I(x)A(x) = \begin{vmatrix} p_{11}(x) + g(x)p_{21}(x) & p_{12}(x) + g(x)p_{22}(x) & \dots & p_{1n}(x) + g(x)p_{2n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \dots & p_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \dots & p_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

од што следува тврдењето на теоремата при множење од лево со матрица од видот (5). На читателот за вежба му оставаме тврдењето да го докаже за множење од десно со матрица од видот (5). За множење со елементарна матрица од видот (4) тврдењето е очигледно. ♦

28.8. Теорема. Полиномната матрица $A(x)$ е унимодуларна ако и само ако може да се запише како производ на елементарни матрици.

Доказ. Нека матрицата $A(x)$ може да се запише како производ на елементарни матрици. Од лема 28.6 и теорема 28.3 а) следува дека $A(x)$ е унимодуларна матрица.

Обратно, унимодуларната матрица $A(x)$ е еквивалентна на единичната, т.е. таа се добива од единичната со помош на конечен број елементарни трансформации. Според теорема 28.7 примената на елементарна трансформација е еквивалентна на множење од лево или од десно со елементарна матрица, па затоа $A(x)$ може да се запише како производ на елементарни матрици. ♦

28.9. Теорема. Матриците $A(x)$ и $B(x)$ од n -ти ред се еквивалентни ако и само ако постојат унимодуларни матрици од n -ти ред $U(x)$ и $V(x)$ такви што

$$B(x) = V(x)A(x)U(x). \quad (6)$$

Доказ. Матриците $A(x)$ и $B(x)$ се еквивалентни ако и само ако $B(x)$ може да се добие со последователна примена на елементарни трансформации, што е еквивалентно со множење од лево и од десно со соодветни елементарни матрици. Затоа $A(x)$ и $B(x)$ се еквивалентни ако и само ако постојат елементарни матрици

$$U_1(x), U_2(x), \dots, U_m(x), V_1(x), V_2(x), \dots, V_t(x) \quad (7)$$

од n -ти ред така да

$$B(x) = V_t(x) \dots V_2(x) V_1(x) A(x) U_1(x) U_2(x) \dots U_m(x). \quad (8)$$

Ставаме

$$V(x) = V_t(x) \dots V_2(x) V_1(x) \text{ и } U(x) = U_1(x) U_2(x) \dots U_m(x).$$

Според теорема 28.8 матриците $V(x)$ и $U(x)$ се унимодуларни и ако замениме во (8) добиваме дека матриците $A(x)$ и $B(x)$ се еквивалентни ако и само ако постојат унимодуларни матрици $U(x)$ и $V(x)$ такви што важи (6). ♦

29. МАТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

29.1. Дефиниција. Нека

$$A_i, i = 0, 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

се квадратни матрици од n -ти ред над полето $\mathbf{K}$ и x е променлива. Изразот

$$A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_kx^k \quad (2)$$

го нарекуваме *матричен полином од x од n -ти ред*, а матриците (1) ги нарекуваме *негови коефициенти*. Ако $A_k \neq [0]_{n \times n}$, тогаш (2) е полином од k -ти степен, а A_kx^k е негов водечки член.

29.2. Забелешка. Во (2) производите A_ix^i ги подразбираме како множење на матрица со скалар, т.е. секој елемент на матрицата A_i се множи со мономот x^i , а собирањето во (2) е обичното собирање на матрици.

29.3. Пример. а) Имаме

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x^2 = \begin{bmatrix} x^2 + x + 1 & x^2 + 2x - 1 \\ x^2 - 1 & x - 1 \end{bmatrix}.$$

Забележуваме дека дадениот матричен полином е запишан како полиномна матрица. Последното важи за секој матричен полином, што може да се види од дефиниција 29.1.

б) Важи и обратното тврдење од пример а). Имено, секоја полиномна матрица на единствен начин може да се запише како матричен полином. Така, за полиномната матрица $B(x)$ од пример 29.2. имаме

$$B(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ 2x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x^2. \quad \blacklozenge$$

29.4. Теорема. Нека (2) и $B(x) = xE - B$ се два матрични полиноми од n -ти ред. Тогаш постојат единствени матрици

$$Q_1(x), R_1 \quad (3)$$

од n -ти ред така што

$$A(x) = Q_1(x)B(x) + R_1 \quad (4)$$

каде R_1 е константна матрица. Исто така, постојат единствени матрици

$$Q_2(x), R_2 \quad (5)$$

од n -ти ред така што

$$A(x) = B(x)Q_2(x) + R_2 \quad (6)$$

каде R_2 е константна матрица.

Матриците (3) и (5) ги нарекуваме *количник и остаток при делење на $A(x)$ со $B(x)$ од десно и од лево*, соодветно.

Доказ. Ќе ги докажеме егзистенцијата и единственоста на количникот и остатокот од делењето на $A(x)$ со $B(x)$ од десно. Ако $A(x) = A$ е константна матрица, тогаш ставаме $Q_1(x) = O = [0]_{n \times n}$, $R_1 = A$ и тврдењето е очигледно. Нека степенот k на полиномот (2) е поголем од нула и нека A_k е коефициентот пред x^k . Ставаме $G_1(x) = A_k x^{k-1}$, $C_1(x) = A(x) - G_1(x)B(x)$. Тогаш

$$A(x) = G_1(x)B(x) + C_1(x). \quad (7)$$

Јасно, водечкиот член на $G_1(x)B(x)$ е еднаков на водечкиот член $A_k x^k$ на полиномот $A(x)$, па затоа $C_1(x) = O = [0]_{n \times n}$ или степенот m_1 на полиномот $C_1(x)$ е помал од k . Ако $C_1(x)$ е константна матрица, тогаш равенството (7) има вид (4) и $G_1(x)$ и $C_1(x)$ се количникот и остатокот при делењето на $A(x)$ со $B(x)$ од десно. Ако $m_1 \geq 1$, тогаш за матрицата $C_1(x)$ добиваме

$$C_1(x) = G_2(x)B(x) + C_2(x) \quad (8)$$

каде $C_2(x) = O = [0]_{n \times n}$ или степенот m_2 на полиномот $C_2(x)$ е помал од m_1 . Од (7) и (8) следува

$$A(x) = [G_1(x) + G_2(x)]B(x) + C_2(x).$$

Ако $C_2(x)$ е константна матрица, тогаш $G_1(x) + G_2(x)$ и $C_2(x)$ се количникот и остатокот при делењето на $A(x)$ со $B(x)$ од десно. Ако $m_2 \geq 1$, тогаш продолжувајќи ја постапката добиваме

$$A(x) = [G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_i(x)]B(x) + C_i(x),$$

каде $C_i(x)$ е константна матрица. Јасно, $G_1(x) + G_2(x) + \dots + G_i(x)$ и $C_i(x)$ се количникот и остатокот при делењето на $A(x)$ со $B(x)$ од десно. Според тоа, ја докажавме егзистенцијата на количникот и остатокот.

Да ја докажеме единственоста на количникот и остатокот. Нека $Q_1(x)$ и $Q(x)$ се количници, а R_1 и R се остатоци при делењето од десно на $A(x)$ со $B(x)$. Тогаш

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x) \quad (9)$$

и ако од (9) го одземеме (4) добиваме

$$O_n = Q_1(x)B(x) + R_1 - Q(x)B(x) - R = [Q_1(x) - Q(x)]B(x) + R_1 - R$$

т.е.

$$[Q_1(x) - Q(x)]B(x) = R - R_1. \quad (10)$$

Ако $Q_1(x) \neq Q(x)$, тогаш десната страна на (10) не е константна матрица, што е противречност. Значи $Q_1(x) = Q(x)$, па затоа $R_1 = R$. ♦

30. КРИТЕРИУМИ ЗА СЛИЧНИ МАТРИЦИ

30.1. Лема. Нека A и B се квадратни матрици од n -ти ред над полето K . Нивните карактеристични матрици се еквивалентни ако и само ако постојат константни несингуларни матрици од n -ти ред S и V така што

$$xE - B = V(xE - A)S. \quad (1)$$

Доказ. Како што знаеме, матриците $xE - A$ и $xE - B$ се еквивалентни ако и само ако постојат унимодуларни матрици $U(x)$ и $V(x)$ така што

$$xE - B = V(x)(xE - A)U(x). \quad (2)$$

Бидејќи константна несингуларна матрица е унимодуларна, добиваме дека од (1) следува (2), т.е. доволноста на условот е докажана.

Нека постојат унимодуларни матрици $U(x)$ и $V(x)$ такви што важи (2). За унимодуларната матрица $V(x)$ постои инверзна полиномна матрица $S(x)$, па од (2) следува

$$S(x)(xE - B) = (xE - A)U(x). \quad (3)$$

Да ги поделиме $S(x)$ од лево со $xE - A$ и $U(x)$ од десно со $xE - B$. Имаме

$$\begin{cases} S(x) = (xE - A)Q_1(x) + S \\ U(x) = Q_2(x)(xE - B) + U \end{cases} \quad (4)$$

Од (3) и (4) следува

$$[(xE - A)Q_1(x) + S](xE - B) = (xE - A)[Q_2(x)(xE - B) + U]$$

па затоа

$$(xE - A)(Q_1(x) - Q_2(x))(xE - B) = (xE - A)U - S(xE - A). \quad (5)$$

Ако $Q_1(x) \neq Q_2(x)$, тогаш на левата страна на (5) имаме полином со степен не помал од два, што не е можно. Затоа $Q_1(x) = Q_2(x)$, т.е.

$$(xE - A)U = S(xE - B). \quad (6)$$

Останува да докажеме дека матриците U и S се несингуларни. За таа цел матрицата $V(x)$ да ја поделиме од лево со $xE - B$:

$$V(x) = (xE - B)Q_3(x) + V.$$

Тогаш

$$\begin{aligned} E &= S(x)V(x) = S(x)[(xE - B)Q_3(x) + V] \\ &= S(x)(xE - B)Q_3(x) + S(x)V \end{aligned} \quad (7)$$

Сега, од (3), (4) и (7) наоѓаме

$$\begin{aligned} E &= (xE - A)U(x)Q_3(x) + [(xE - A)Q_1(x) + S]V \\ &= (xE - A)[U(x)Q_3(x) - Q_1(x)] + SV. \end{aligned} \quad (8)$$

Ако $U(x)Q_3(x) \neq Q_1(x)$, тогаш десната страна на (8) не е константа, што не е можно. Затоа $U(x)Q_3(x) = Q_1(x)$, па од равенството (8) следува $E = SV$, т.е. $V = S^{-1}$. Понатаму, од равенството (6) имаме

$$xU - xS = AU - SB.$$

Ако $U \neq S$, тогаш десната страна во последното равенство е полином од прва степен, што не е можно. Значи, $U = S$. Ако во (6) ставиме $U = S$ и $V = S^{-1}$ го добиваме равенството (1). ♦

30.2. Теорема. Нека A и B се матрици од n -ти ред над полето $\mathbf{K}$. Матриците A и B се слични ако и само ако нивните карактеристични матрици се еквивалентни.

Доказ. Нека матриците A и B се слични. Тогаш постои несингуларна матрица S така да $B = S^{-1}AS$, па затоа

$$xE - B = xE - S^{-1}AS = S^{-1}(xE)S - S^{-1}AS = S^{-1}(xE - A)S,$$

што според лема 30.1 значи дека $xE - B$ и $xE - A$ се еквивалентни.

Нека $xE - B$ и $xE - A$ се еквивалентни. Тогаш важи (1) каде $V = S^{-1}$, па затоа

$$xE - B = S^{-1}(xE - A)S = xE - S^{-1}AS,$$

т.е. $B = S^{-1}AS$. ♦

31. ПОИМ ЗА НОРМАЛНА ФОРМА

31.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{K}$ е произволно поле, $n \geq 1$ и

$$g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_i \in \mathbf{K}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ја нарекуваме *матрица придружена на полиномот* $g(x)$.

31.2. Лема. Инваријантните множители на карактеристичната матрица на матрицата (2) придружена на полиномот (1) се $1, 1, \dots, 1, g(x)$.

Доказ. Да го разгледаме множеството

$$d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x)$$

на најголеми заеднички делители на минорите на матрицата

$$xE - A = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Имаме

$$\begin{aligned} d_n(x) &= \det(xE - A) = (-1)^{n+1} a_0 (-1)^{n-1} + (-1)^{n+2} a_1 x (-1)^{n-2} \\ &\quad + \dots + (-1)^{2n-1} a_{n-2} x^{n-2} (-1) + (-1)^{2n} (x + a_{n-1}) x^{n-1} \\ &= x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = g(x). \end{aligned}$$

Минорот од $(n-1)$ -ви ред, кој се добива после прецртувањето на првата редица и последната колона на матрицата $xE - A$ е еднаков на $(-1)^{n-1}$, па затоа $d_{n-1}(x) = 1$. Понатаму, $d_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-2$ е делител на $d_{n-1}(x)$, па затоа

$$d_i(x) = 1, i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Конечно, за инваријантните множители на карактеристичната матрица на матрицата A имаме

$$p_1(x) = 1, p_i(x) = \frac{d_i(x)}{d_{i-1}(x)} = 1, i = 2, 3, \dots, n-1, p_n(x) = \frac{d_n(x)}{d_{n-1}(x)} = g(x). \quad \blacklozenge$$

31.3. Дефиниција. Нека

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_s(x) \tag{3}$$

е фамилија полиноми со ненулти степени, коефициенти од полето $\mathbf{K}$ и водечки коефициенти еднакви на 1, за кои важи $g_i(x)$ е делител на $g_{i+1}(x)$, за $i = 1, 2, \dots, s-1$. Блок матрицата

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{bmatrix}$$

каде A_i , $i = 1, 2, \dots, s$ е матрицата придружена на полиномот $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$ ја нарекуваме *матрица на Фробениус придружена на полиномите* (3).

31.4. Лема. Ако A е матрица на Фробениус од n -ти ред придружена на полиномите (3), тогаш

$$1, 1, \dots, 1, g_1(x), g_2(x), \dots, g_s(x), \quad (4)$$

каде бројот на единиците е $n-s$, е множеството инваријантни множители на матрицата $x E - A$.

Доказ. Имаме

$$x E - A = \begin{bmatrix} x E - A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x E - A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x E - A_s \end{bmatrix}.$$

Со помош на елементарни трансформации на редиците и колоните секоја од клетките $x E - A_i$ (блоковите) ја сведуваме на каноничен вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_i(x) \end{bmatrix}.$$

Овие трансформации можеме да ги разгледуваме како трансформации на $x E - A$, па затоа $x E - A$ е еквивалентна на матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_1(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & g_s(x) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ако ги промениме местата и на колоните на матрицата (5), добиваме

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & g_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & g_s(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

и (6) е каноничната форма на матрицата $x E - A$ на чија дијагонала се наоѓаат полиномите (4). ♦

31.5. Дефиниција. Ако A е матрица на Фробениус, слична на некоја матрица B , тогаш за A ќе велиме дека е *општа нормална форма на матрицата B* .

31.6. Теорема. Нека B е произволна квадратна матрица над полето K . Постои единствена матрица на Фробениус слична на матрицата B .

Доказ. Нека

$$p_i(x), p_{i+1}(x), \dots, p_n(x) \quad (7)$$

е множеството неконстантни инваријантни множители на матрицата $x E - B$. Тогаш за $j = i, i+1, \dots, n-1$ полиномот $p_j(x)$ е делител на полиномот $p_j(x)$, па значи постои матрица на Фробениус

$$A = \begin{bmatrix} A_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{i+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{bmatrix}$$

придружена на полиномите (7). Редот на матрицата A е еднаков на степенот на производот

$$p_i(x) p_{i+1}(x) \dots p_n(x) = \det(x E - A),$$

т.е. на n . Од лема 31.4 следува дека матрицата $x E - A$ ги има истите инваријантни множители како и матрицата $x E - B$, па значи матриците $x E - A$ и $x E - B$ се еквивалентни. Конечно од теорема 30.2 следува дека матриците A и B се слични.

Ако матриците на Фробениус A и C се слични, тогаш множествата инваријантни множители на нивните карактеристични матрици се совпаѓаат, што значи дека дијагоналните клетки на матриците A и C и нивниот распоред на дијагоналата се еднозначно определени. Според тоа, $A = C$, па затоа општата нормална форма е еднозначно определена. ♦

31.7. Теорема. За секоја линеарна трансформација f на просторот L_n постои база на L_n , во која f има матрица на Фробениус.

Доказ. Непосредно следува од фактот што за секоја квадратна матрица постои општа нормална форма и фактот дека сличните матрици се матрици на некоја линеарна трансформација во различни бази. ♦

32. МИНИМАЛЕН ПОЛИНОМ

32.1. Нека f е линеарна трансформација на просторот L_n над полето K . Да ги запишеме последователно степените на трансформацијата f :

$$e = f^0, f, f^2, \dots, f^{n^2}. \quad (1)$$

Според теорема 20.6 $\dim L(\mathbf{L}_n) = n^2$, па затоа множеството вектори (1) е линеарно зависно. Според тоа, постојат скалари $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$, од кои барем еден е различен од нула така што

$$\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i f^i = o,$$

каде o е нултата трансформација. Да ставиме

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i x^i.$$

Тогаш $p(f) = o$. Според тоа, за секоја линеарна трансформација f на просторот $\mathbf{L}_n$ постои неконстантен полином $p(x)$ така да $p(f) = o$.

Претходно изнесеното е непосреден повод за следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека f е линеарна трансформација на просторот $\mathbf{L}_n$ над полето $\mathbf{K}$. Ако $m(x)$ е неконстантен полином со реални коефициенти таков што

$$1) \quad m(f) = o,$$

$$2) \quad \text{водечкиот коефициент на } m(x) \text{ е еднаков на еден и}$$

3) меѓу неконстантните полиноми кои го задоволуваат условот 1) полиномот $m(x)$ има најмал степен,

тогаш за полиномот $m(x)$ ќе велиме дека е *минимален полином на линеарната трансформација f* .

32.2. Теорема. Минималниот полином на линеарна трансформација е еднозначно определен.

Доказ. Нека $m(x)$ и $g(x)$ се минимални полиноми на линеарната трансформација f и $t(x) = m(x) - g(x)$. Тогаш $t(f) = m(f) - g(f) = o$. Понатаму, водечките коефициенти на полиномите $m(x)$ и $g(x)$ се еднакви на еден, па затоа полиномот $t(x)$ има степен помал од степенот на полиномот $m(x)$. Но, $m(x)$ е минимален полином за f , па затоа последното е можно ако и само ако $t(x) = 0$, т.е. $m(x) = g(x)$. ♦

32.3. Теорема. Ако $m(x)$ е минимален полином на линеарната трансформација f , а $q(x)$ е произволен полином, тогаш

$$q(f) = o \tag{2}$$

ако и само ако полиномот $m(x)$ е делител на полиномот $q(x)$.

Доказ. Нека

$$q(x) = u(x)m(x) + r(x) \tag{3}$$

каде $u(x)$ и $r(x)$ се количникот и остатокот од делењето на $q(x)$ со $m(x)$. Од (3) следува

$$q(f) = u(f)m(f) + r(f) = r(f) \quad (4)$$

и како $q(f) = 0$ добиваме $r(f) = 0$. Но, степенот на $r(x)$ е помал од степенот на $m(x)$ и како $m(x)$ е минимален полином добиваме дека $r(x) = 0$. Според тоа, $m(x)$ е делител на $q(x)$.

Обратно, ако $m(x)$ е делител на $q(x)$, тогаш $q(x) = u(x)m(x)$ за некој $u(x)$, па затоа $q(f) = u(f)m(f) = 0$, т.е. важи (2). ♦

32.4. Теорема. Ако k е степенот на минималниот полином на линеарната трансформација f на просторот L_n над полето $\mathbf{K}$, тогаш множеството $\mathbf{M}$ од сите полиноми од f со реални коефициенти е векторски потпростор од просторот $L(L_n)$ со димензија k . Притоа

$$e = f^0, f, f^2, \dots, f^{k-1} \quad (5)$$

е база на $\mathbf{M}$.

Доказ. Очигледно, збирот на два полиноми од f и производот на полином од f со скалар се полиноми од f , па затоа сите полиноми од f формираат векторски потпростор од просторот $L(L_n)$ над полето $\mathbf{K}$.

За секој полином $q(x)$ важи равенството (4), каде $r(x)$ е остатокот од делењето на полиномот $q(x)$ со минималниот полином на f . Притоа $r(x) = 0$ или степенот на полиномот $r(x)$ е помал од k , па затоа

$$r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}, \quad a_i \in \mathbf{K}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

па значи, согласно равенството (4) имаме

$$q(f) = a_0 + a_1f + a_2f^2 + \dots + a_{k-1}f^{k-1}.$$

Според тоа, фамилијата (5) го генерира потпросторот $\mathbf{M}$.

Останува да докажеме дека фамилијата (5) е линеарно независна. Ако

$$b_0 + b_1f + b_2f^2 + \dots + b_{k-1}f^{k-1} = 0, \quad b_i \in \mathbf{K}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

тогаш $t(f) = 0$, каде

$$t(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{k-1}x^{k-1}.$$

Одтука следува дека $t(x) = 0$, т.е. $b_i = 0, i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, што значи дека множеството (5) е линеарно независно. ♦

40.5. Теорема. Ако просторот L_n е директна сума на инваријантни потпростори Q_i , $i = 1, 2, \dots, s$ во однос на линеарната трансформација f , а $m_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$ се минималните полиноми на рестрикциите на трансформација f на

потпросторите $\mathbf{Q}_i$, $i=1,2,\dots,s$, соодветно, тогаш минималниот полином на трансформацијата f е еднаков на најмалиот заеднички содржател на полиномите $m_i(x)$, $i=1,2,\dots,s$.

Доказ. Нека

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{Q}_1 \oplus \mathbf{Q}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{Q}_s \quad (6)$$

каде $\mathbf{Q}_i$, $i=1,2,\dots,s$ се инваријантни потпростори во однос на линеарната трансформација f . Нека $m_i(x)$, $i=1,2,\dots,s$ е минималниот полином на рестрикцијата f_i , $i=1,2,\dots,s$ на трансформацијата f на потпросторот $\mathbf{Q}_i$, $i=1,2,\dots,s$, соодветно, а $m(x)$ е минималниот полином на f . Тогаш од $f_i(\mathbf{Q}_i) = f(\mathbf{Q}_i)$ следува $m(f_i)(\mathbf{Q}_i) = m(f)(\mathbf{Q}_i) = \{\mathbf{o}\}$, па затоа секој полином $m_i(x)$ е делител на полиномот $m(x)$. Од друга страна, нека $g(x)$ е полином кој се дели со секој полином $m_i(x)$. Да го запишеме $g(x)$ во видот

$$g(x) = g_i(x)m_i(x), \quad i=1,2,\dots,s. \quad (7)$$

Од равенствата (7) следува

$$g(f) = g_i(f)m_i(f), \quad i=1,2,\dots,s. \quad (8)$$

Ако $\mathbf{a}$ е произволен вектор од просторот $\mathbf{L}_n$, тогаш од (6) следува

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_s, \quad \mathbf{a}_i \in \mathbf{Q}_i, \quad i=1,2,\dots,s. \quad (9)$$

Од равенствата (8) и (9) следува

$$\begin{aligned} [g(f)](\mathbf{a}) &= [g(f)](\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_s) \\ &= [g_1(f_1)m_1(f_1)](\mathbf{a}_1) + [g_2(f_2)m_2(f_2)](\mathbf{a}_2) + \dots + [g_s(f_s)m_s(f_s)](\mathbf{a}_s) \\ &= \mathbf{o} + \mathbf{o} + \dots + \mathbf{o} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Според тоа, $[g(f)](\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, за секој $\mathbf{a} \in \mathbf{L}_n$, т.е.

$$g(f) = \mathbf{o}. \quad (10)$$

Докажавме, дека равенството (10) е точно ако и само ако $g(x)$ се дели со секој полином $m_i(x)$, $i=1,2,\dots,s$, па затоа $m(x)$ е најмалиот заеднички содржател на полиномите $m_i(x)$, $i=1,2,\dots,s$. ♦

32.6. Во просторот $\mathbf{L}_n$ да фиксираме некоја база и на секоја линеарна трансформација f на $\mathbf{L}_n$ да ја придружime нејзината матрица A во фиксираната база. Тогаш на нултата линеарна трансформација $\mathbf{o}$ и само на неа и соодветствува нултата матрица O . Значи за произволен полином $p(x)$ важи $p(f) = \mathbf{o}$ ако и само ако $p(A) = O$. Затоа од равенството $p(A) = O$ следува $f(B) = \mathbf{o}$ за секоја матрица B слична на матрицата A .

Претходно изнесеното е непосреден повод за следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека A е квадратна матрица. Ако $m(x)$ е неконстантен полином со реални коефициенти таков што

$$1) \quad m(A) = O,$$

- 2) водечкиот коефициент на $m(x)$ е еднаков на еден и
- 3) меѓу неконстантните полиноми кои го задоволуваат условот 1) полиномот $m(x)$ има најмал степен,

тогаш ќе велиме дека $m(x)$ е *минимален полином на матрицата* A .

32.7. Од претходните разгледувања непосредно следува точноста на следниве три теореми.

Теорема А. Минималниот полином на линеарната трансформација f е еднаков на минималниот полином на нејзината матрица A . ♦

Теорема Б. Минималните полиноми на слични матрици се еднакви. ♦

Теорема В. Минималниот полином на распаднавачката матрица е еднаков на најмалиот заеднички содржател на нејзините дијагонални клетки. ♦

32.8. Теорема. Минималниот полином на матрицата е еднаков на последниот инваријантен множител на нејзината карактеристична матрица.

Доказ. Бидејќи минималните полиноми на сличните матрици се еднакви, а нивните карактеристични матрици имаат еднакви инваријантни множители, можеме да ја искористиме општата нормална форма на матрица. Нека

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Во просторот L_n да земеме некоја база

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1} \quad (11)$$

и нека f е линеарната трансформација, чија матрица во базата (11) е матрицата A . Тогаш

$$\begin{cases} f(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_1, \\ f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2, \\ \dots\dots\dots \\ f(\mathbf{u}_{n-2}) = \mathbf{u}_{n-1}, \\ f(\mathbf{u}_{n-1}) = -(a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_2 + \dots + a_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}). \end{cases} \quad (12)$$

Формулите (12) можеме да ги запишеме во видот

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = e(\mathbf{u}_0), \\ \mathbf{u}_1 = f(\mathbf{u}_0), \\ \mathbf{u}_2 = f(\mathbf{u}_1) = f^2(\mathbf{u}_0), \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{u}_{n-1} = f^{n-1}(\mathbf{u}_0), \end{cases} \quad (13)$$

и

$$f^n(\mathbf{u}_0) = f(\mathbf{u}_{n-1}) = -(a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_2 + \dots + a_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}). \quad (14)$$

Ако $\mathbf{a}$ е произволен вектор од просторот $\mathbf{L}_n$, тогаш

$$\mathbf{a} = b_0\mathbf{u}_0 + b_1\mathbf{u}_1 + \dots + b_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}, \quad b_i \in \mathbf{R}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ако ги искористиме формулите (13) добиваме

$$\mathbf{a} = b_0e(\mathbf{u}_0) + b_1f(\mathbf{u}_0) + \dots + b_{n-1}f^{n-1}(\mathbf{u}_0) = (b_0e + b_1f + \dots + b_{n-1}f^{n-1})(\mathbf{u}_0)$$

т.е.

$$\mathbf{a} = [p(f)](\mathbf{u}_0) \quad (15)$$

каде

$$p(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$$

е полином со реални коефициенти. Нека сега

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Од формулата (15) имаме

$$\begin{aligned} [g(f)](\mathbf{a}) &= [g(f)]\{[p(f)](\mathbf{u}_0)\} = [p(f)]\{[g(f)](\mathbf{u}_0)\} \\ &= [p(f)][(a_0e + a_1f + \dots + a_{n-1}f^{n-1} + f^n)(\mathbf{u}_0)] \\ &= [p(f)][f^n(\mathbf{u}_0) + (a_0e + a_1f + \dots + a_{n-1}f^{n-1})(\mathbf{u}_0)]. \end{aligned}$$

Ако ги искористиме формулите (13) и (14) наоѓаме

$$\begin{aligned} [g(f)](\mathbf{a}) &= [p(f)][-(a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}) + (a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_{n-1}\mathbf{u}_{n-1})] \\ &= [p(f)](\mathbf{o}) = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Според тоа, за секој вектор $\mathbf{a}$ од просторот $\mathbf{L}_n$ важи $[g(f)](\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, па затоа $g(f) = \mathbf{o}$, што значи дека полиномот $g(x)$ се дели на минималниот полином $m(x)$ на линеарната трансформација f . Нека

$$m(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{k-1}x^{k-1} + x^k.$$

Тогаш

$$m(f) = c_0e + c_1f + \dots + c_{k-1}f^{k-1} + f^k$$

т.е.

$$[m(f)](\mathbf{u}_0) = c_0\mathbf{u}_0 + c_1f(\mathbf{u}_0) + \dots + c_{k-1}f^{k-1}(\mathbf{u}_0) + f^k(\mathbf{u}_0) = \mathbf{o}. \quad (16)$$

Од равенството (16) следува дека $k \geq n$, бидејќи множеството

$$\mathbf{u}_0, f(\mathbf{u}_0), \dots, f^{n-1}(\mathbf{u}_0)$$

е линеарно независно. Ако земеме предвид дека $g(x)$ се дели со $m(x)$ и n е степенот на полиномот $g(x)$ добиваме дека $m(x) = g(x)$. Значи, $g(x)$ е минималниот полином на матрицата A , која е придружена на овој полином.

Нека сега

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{bmatrix}$$

е произволна матрица на Фробениус, а

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_s(x) \quad (17)$$

е множеството полиноми придружени на A . Тогаш $p_i(x)$ е минималниот полином на клетката A_i , па затоа минималниот полином $m(x)$ на матрицата A е еднаков на најмалиот заеднички содржател на полиномите (17). Но, последниот полином се дели на секој од претходните, па затоа

$$m(x) = p_s(x),$$

и $p_s(x)$ е последниот инваријантен множител на матрицата $xE - A$. ♦

32.9. Теорема (Хамилтон-Кели). Квадратна матрица е корен на својот карактеристичен полином.

Доказ. Ако $\chi(x)$ е карактеристичниот полином на матрицата A , а $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ се инваријантните множители на нејзината карактеристична матрица, тогаш

$$p_1(x)p_2(x)\dots p_n(x) = \chi(x). \quad (18)$$

Од друга страна, $p_n(x)$ е минималниот полином на матрицата A , па затоа од равенството (18) следува $\chi(A) = O$. ♦

32.10. Последица. Секој корен на карактеристичниот полином на матрицата е корен на нејзиниот минимален полином.

Доказ. Непосредно следува од теорема 32.9 и фактот дека полиномот $p_n(x)$ се дели со секој полином $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. ♦

32.11. Пример. а) Со помош на теоремата на Хамилтон-Кели, најдете ја инверзната матрица на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

б) Користејќи го карактеристичниот полином пресметајте $\det A$.

Решение. Прво ќе го најдеме карактеристичниот полином на A . Имаме

$$\chi(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -2 & x-2 & 1 \\ 0 & 3 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)[(x-2)(x-1)-3] = x^3 - 4x^2 + 2x + 1.$$

Според теоремата на Хамилтон-Кели матрицата A е корен на нејзиниот карактеристичен полином, т.е.

$$A^3 - 4A^2 + 2A + E = O. \quad (19)$$

Ако равенството (19) го помножиме со A^{-1} , добиваме $A^{-1} = -A^2 + 4A - 2E$. Конечно, со замена во последното равенство добиваме

$$A^{-1} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -3 \\ -6 & -9 & 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

б) За карактеристичниот полином на матрицата A имаме

$$\det(xE - A) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

Ако ставиме $x = 0$ добиваме $\det(-A) = a_0$, т.е. $\det A = (-1)^n a_0$. Во конкретниот случај имаме $\det A = (-1)^3 a_0 = (-1)^3 \cdot 1 = -1$. ♦

32.12. Пример. Најдете го минималниот полином на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Ќе го определиме карактеристичниот полином на матрицата A . Имаме

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ -1 & x-1 & -3 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-3) - 3 - 3 - 3(x-1) - 3(x-1) - (x-3) \\ &= x^3 - 2x^2 + x - 3x^2 + 6x - 3 - 7x + 3 = x^2(x-5). \end{aligned}$$

Според последица 32.10 секој корен на карактеристичниот полином е корен и на минималниот полином. Корени на $\chi(x)$ се $x_{1/2} = 0$ и $x_3 = 5$. Според тоа, корени на минималниот полином се 0 и 5 и неговиот степен е помал или еднаков на 3. Според тоа, минималниот полином ќе биде точно еден од следниве полиноми

$$p(x) = x(x-5) \text{ или } q(x) = x^2(x-5).$$

Имаме:

$$p(A) = A(A-5E) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

Од теоремата на Хамилтон-Кели следува $q(A) = O$. Но, степенот на $p(x)$ е помал од степенот на $q(x)$, па затоа минималниот полином на матрицата A е $m(x) = x(x-5)$. ♦

32.13. Забелешка. Минималниот полином, $m(x)$, на една матрицата A може да се најде и со следнава “едноставна,, постапка:

- 1) ако $A = a_0 E$, тогаш минималниот полином на матрицата A е $m(x) = x - a_0$;
- 2) ако $A \neq aE$, за секој $a \in \mathbf{R}$, но $A^2 = a_1 A + a_0 E$, тогаш минималниот полином на матрицата A е $m(x) = x^2 - a_1 x - a_0$;
- 3) ако $A^2 \neq aA + bE$, за секои $a, b \in \mathbf{K}$, но $A^3 = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 E$, тогаш $m(x) = x^3 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$; итн.

32.14. Пример. Користејќи ја постапката од забелешка 32.13 најдете го минималниот полином на матрицата:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. За дадената матрица е јасно дека $A \neq aE$, за секој $a \in \mathbf{R}$. Да ставиме:

$$A^2 = a_1 A + a_0 E,$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Земајќи ги предвид елементите во првата редица и првите две колони, добиваме: $6 = 2a_1 + a_0$, $5 = a_1$, т.е. $a_1 = 5$, $a_0 = -4$. Конечно, од

$$5A - 4E = 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A^2$$

следува дека минималниот полином на A е $m(x) = x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$. ♦

33. НОРМАЛНА ФОРМА НА ЖОРДАН

33.1. Дефиниција. Нека α е произволен елемент од полето $\mathbf{K}$. Матрицата

$$J_m(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

ја нарекуваме *клетка на Жордан*.

33.2. Пример. Клетки на Жордан се матриците

$$J_1(-3) = [-3], \quad J_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_3(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad J_4(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

33.3. Карактеристичната матрица на клетката на Жордан е матрица од видот

$$xE - J_m(\alpha) = \begin{bmatrix} x-\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x-\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x-\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x-\alpha \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Ќе ги пресметаме инваријантните множители и елементарните делители на матрицата (1). Прво ќе го определиме множеството $d_1(x), d_2(x), \dots, d_m(x)$ од најголеми заеднички делители на нејзините минори. Очигледно

$$d_m(x) = \det(xE - J_m(\alpha)) = (x - \alpha)^m.$$

Понатаму, да го разгледаме минорот M од $(m-1)$ -ви ред на матрицата (1), кој се добива после прецртувањето на првата редица и последната колона. Очигледно, $M = (-1)^{m-1}$, па затоа $d_{m-1}(x) = 1$, од што следува $d_i(x) = 1$, за $i = 1, 2, \dots, m-1$. Според тоа, матрицата (1) има само еден неконстантен инваријантен множител

$$p_m(x) = (x - \alpha)^m,$$

па затоа $(x - \alpha)^m$ е единствен елементарен делител на матрицата (1).

33.4. Дефиниција. Матрицата од видот

$$A = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_k}(\alpha_k) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

каде $J_{m_i}(\alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ се клетки на Жордан, ја нарекуваме *матрица на Жордан*.

33.5. Пример. Матриците

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

се Жорданови матрици. Да забележиме дека секоја клетка на Жордан е Жорданова матрица. ♦

33.6. Карактеристичната матрица на Жордановата матрица (2) има вид

$$xE - A = \begin{bmatrix} xE - J_{m_1}(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & xE - J_{m_2}(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & xE - J_{m_k}(\alpha_k) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Ќе го определиме множеството елементарни делители на матрицата (3). Според последица 27.8 множеството елементарни делители на блок-матрица е унија од множествата елементарни делители на дијагоналните клетки (блокови). Но, клетката (1) има единствен елементарен делител $(x - \alpha)^m$, па затоа единствени елементарните делители на матрицата (3) се полиномите

$$(x - \alpha_i)^{m_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4)$$

Ако B е матрица од n -ти ред, тогаш детерминантата на матрицата $xE - B$ е полином од n -ти степен со водечки коефициент 1, па затоа рангот на матрицата $xE - B$ е n . Според тоа, две карактеристични матрици се еквивалентни ако и само ако тие имаат исти множества елементарни делители. Од друга страна, две матрици се слични ако и само нивните карактеристични матрици се еквивалентни. Од досега изнесеното следува точноста на следнава теорема.

Теорема. Две Жорданови матрици се слични ако и само ако нивните дијагонални клетки на Жордан се совпаѓаат, т.е. кога тие се разликуваат само во распоредот на клетките на Жордан на дијагоналата. ♦

33.7. Дефиниција. Ако B е квадратна матрица и A е Жорданова матрица слична на B , тогаш за матрицата A ќе велиме дека е *Жорданова нормална форма на матрицата A* .

33.8. Очигледно, на дијагоналата на Жорданова матрица се наоѓаат сите корени на нејзиниот карактеристичен полином. Понатаму, карактеристичните полиноми на слични матрици се еднакви, па затоа потребен услов за да над полето $\mathbf{K}$ постои Жорданова нормална форма на матрицата B е сите корени на карактеристич-

ниот полином на матрицата B да припаѓаат на полето $\mathbf{K}$. Меѓутоа, овој услов е и доволен, што може да се види од следнава теорема.

Теорема. Нека карактеристичниот полином $\chi(x)$ на квадратната матрица B се разложува над полето $\mathbf{K}$ во производ на линеарни множители. Тогаш постои таква Жорданова матрица A над полето $\mathbf{K}$, што $A = S^{-1}BS$, каде S е несингуларна матрица над тоа поле. Притоа, матрицата A е единствена до распоредот на дијагоналните клетки на Жордан.

Доказ. Производот на инваријантните множители на матрицата $xE - B$ е еднаков на $\chi(x)$, што значи дека секој неразложлив неконстантен инваријантен делител има степен еден. Според тоа, секој елементарен делител на матрицата $xE - B$ има вид $(x - \alpha)^m$. Нека (4) е множеството елементарни делители на матрицата $xE - B$. Бидејќи производот на сите полиноми (4) е еднаков на производот на сите инваријантни множители на матрицата $xE - B$, т.е. е еднаков на $\det(xE - B)$ добиваме $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Да ја запишеме Жордановата матрица од видот (2). Јасно, матрицата A е од n -ти ред и како (4) е множеството елементарни делители на матрицата $xE - A$, добиваме дека матриците $xE - A$ и $xE - B$ се слични.

Ако C е друга Жорданова матрица, слична на B , тогаш според теорема 33.6 матриците A и C се разликуваат само во распоредот на дијагоналните клетки на Жордан. ♦

33.9. Последица. Над полето комплексни броеви $\mathbf{C}$ секоја квадратна матрица е слична на некоја Жорданова матрица.

Доказ. Тврдењето непосредно следува од теорема 33.8 и фактот дека секој полином со комплексни коефициенти над $\mathbf{C}$ се разложува во производ на линеарни множители. ♦

33.10. Пример. Најдете ја Жордановата нормална форма на матрицата

$$B = \begin{bmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & 7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Решение. Имаме

$$d_3(x) = (x-1)^2(x+3), \quad d_1(x) = d_2(x) = 1.$$

Според тоа, елементарните делители на матрицата $xE - B$ се полиномите $(x-1)^2$ и $x+3$, па затоа Жордановата нормална форма на матрицата B е

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \quad \blacklozenge$$

33.11. Како што може да се види, дијаголната матрица е Жорданова матрица, кај која сите клетки се од прв ред, т.е.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_1(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_1(\alpha_n) \end{bmatrix}.$$

Бидејќи редот на клетката на Жордан е еднаков на степенот на соодветниот елементарен делител, добиваме дека Жордановата нормална форма на матрицата A е дијагонална ако и само ако сите елементарни делители на матрицата $x E - A$ се со степен еден. Последниот инваријантен множител $p_n(x)$ на матрицата $x E - A$ се дели на сите претходни и како $p_n(x)$ нема повеќекратни корени, добиваме дека сите елементарни делители се со степен еден. Но, $p_n(x)$ се совпаѓа со минималниот полином на матрицата A , па затоа е точна следнава теорема.

Теорема. Квадратната матрица A од n -ти ред над полето $\mathbf{K}$ е слична над $\mathbf{K}$ на некоја дијагонална матрица ако и само ако минималниот полином на матрицата A над полето $\mathbf{K}$ се разложува како производ на линеарни множители и нема повеќекратни корени. ♦

34. РЕАЛНА НОРМАЛНА ФОРМА НА ЖОРДАН

34.1. Нека $x^2 + px + q$ е полином со реални коефициенти, кој не се разложува над полето реални броеви и нека $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ се неговите корени. Тогаш $\beta \neq 0$. Матрицата со ред $2k$.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

можеме да ја запишеме во видот

$$\begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E & C & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & C & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E & C \end{bmatrix} \quad (1)$$

каде матрицата

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

се повторува на дијагоналата k пати, а E и 0 се единичната и нултата матрица од втор ред. Матрицата (1) ја нарекуваме *обопштена клетка на Жордан* и ја означуваме $J_k(\alpha, \beta)$.

34.2. Пример. Матриците

$$J_1(2, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } J_2(0, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

се обопштени клетки на Жордан со ред 2 и 4 соодветно. ♦

34.3. Ќе ги пресметаме елементарните делители на карактеристичната матрица на обопштената клетка на Жордан. Имаме:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-\alpha & -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & x-\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x-\alpha & -\beta & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta & x-\alpha & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & x-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & x-\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \beta & x-\alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

Од теоремата на Лаплас имаме

$$\det(xE - A) = \begin{vmatrix} x-\alpha & -\beta \\ \beta & x-\alpha \end{vmatrix}^k = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^k = (x^2 + px + q)^k.$$

Ако $d_1(x), d_2(x), \dots, d_{2k}(x)$ е множеството најголеми заеднички делители на минорите на матрицата (2), тогаш

$$d_{2k}(x) = \det(xE - A) = (x^2 + px + q)^k.$$

Полиномот $d_{2k-1}(x)$ е делител на полиномот $d_{2k}(x)$, па затоа или

$$d_{2k-1}(x) = 1 \quad (3)$$

или $d_{2k-1}(x)$ се дели со полиномот $x^2 + px + q$, што значи бројот $\alpha + i\beta$ е корен на $d_{2k-1}(x)$. Во последниот случај секој минор од $(2k-1)$ -ви ред на матрицата (2) се анулира за $x = \alpha + i\beta$. Да го разгледаме минорот $\omega(x)$ на матрицата (2), кој останува после прецртувањето на првата редица и последната колона на матрицата (2), и да ја пресметаме неговата вредност за $x = \alpha + i\beta$:

$$\omega(\alpha + \beta i) = \begin{vmatrix} \beta & \beta i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \beta i & -\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta & \beta i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \beta i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \beta \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Детерминантата (4) е од ред $2k-1$, на нејзината главна дијагонала се наоѓаат броевите $\beta, 0, \beta, 0, \dots, 0, \beta$; паралелно на главната дијагонала, под неа, се распоредени броевите $-1, -1, \dots, -1$; на двете дијагонали над главната дијагонала, паралелно на неа, се распоредени броевите $\beta i, \beta i, \dots, \beta i$ и $0, -\beta, 0, -\beta, \dots, 0$ и сите останати елементи се еднакви на нула. Да ја означиме детерминантата од $(2k-1)$ -ви ред од видот (4) со Δ_{2k-1} . Имаме:

$$\Delta_{2k-1} = \beta \begin{vmatrix} 0 & \beta i & -\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \beta & \beta i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \beta i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \beta \end{vmatrix} - \beta i \begin{vmatrix} -1 & \beta i & -\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \beta i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \beta \end{vmatrix} \quad (5)$$

Ако од првата редица во првата детерминанта во (5) пред знакот на детерминантата извадиме i и ги разложиме двете детерминанти во (5) по нивните први колони добиваме:

$$\Delta_{2k-1} = (-1)^3 \beta i \Delta_{2k-3} - (-1)^2 \beta i \Delta_{2k-3} = -2\beta i \Delta_{2k-3} \quad (6)$$

Понатаму, бидејќи $\beta \neq 0$ и $\Delta_1 = \beta \neq 0$, од (6) следува дека $\Delta_{2k-1} \neq 0$. Според тоа, $\omega(\alpha + \beta i) \neq 0$, што значи дека $\alpha + i\beta$ не е корен на $d_{2k-1}(x)$, па затоа важи (3). Последното значи, дека $d_i(x) = 1$, за $i = 1, 2, \dots, 2k-1$. Според тоа, единствен неконстантен инваријантен множител на матрицата (2) е

$$(x^2 + px + q)^k, \quad (7)$$

па затоа (7) е единствен елементарен делител на матрицата (2).

34.4. Дефиниција. Блок матрицата

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix},$$

кај која секоја дијагонална клетка е клетка на Жордан или обопштена клетка на Жордан, ја нарекуваме *обопштена Жорданова матрица*.

34.5. Елементарни делители на обопштена Жорданова матрица. Карактеристичната матрица $x E - A$ на обопштената Жорданова матрица исто така е блок матрица

$$x E - A = \begin{bmatrix} x E - A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x E - A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x E - A_k \end{bmatrix},$$

па затоа таа има точно k елементарни делители:

$$e_1(x), e_2(x), \dots, e_k(x),$$

при што полиномот $e_i(x), i = 1, 2, \dots, k$ е елементарен делител на клетката $x E - A_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, соодветно. Ако $A_i = J_m(\alpha)$, тогаш

$$e_i(x) = (x - \alpha)^m,$$

а ако $A_i = J_m(\alpha, \beta)$, $\beta \neq 0$, тогаш

$$e_i(x) = (x^2 + px + q)^m,$$

каде $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$ се корените на полиномот $x^2 + px + q$.

34.6. Пример. За матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

имаме

$$e_1(x) = x - 1, e_2(x) = (x - (2 + i))(x - (2 - i)) = x^2 - 4x + 5. \blacklozenge$$

34.7. Теорема. Две обопштени Жорданови матрици A и B се слични ако и само ако тие се разликуваат само во распоредот на клетките на дијагоналата.

Доказ. Доказот е аналоген на доказот на теорема 33.6. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. $\blacklozenge$

34.8. Теорема. Секоја реална квадратна матрица B е слична над полето реални броеви на некоја обопштена Жорданова матрица A . Матрицата A е определена со точност до распоред на дијагоналните клетки.

Доказ. Нека

$$p_1(x)^{m_1}, p_2(x)^{m_2}, \dots, p_k(x)^{m_k} \quad (7)$$

е множеството елементарни делители на матрицата $x E - B$ над полето реални броеви. Бидејќи секој полином $p_j(x)$ е неразложлив над полето реални броеви добиваме

$$p_j(x) = x - \alpha_j \text{ или } p_j(x) = x^2 - p_j x + q_j.$$

Во првиот случај земаме $A_j = J_{m_j}(\alpha_j)$, а во вториот случај $A_j = J_{m_j}(\alpha_j, \beta_j)$ каде $\alpha_j + \beta_j$ и $\alpha_j - \beta_j$ се корените на полиномот $p_j(x)$. Да ја разгледаме обопштената Жорданова матрица

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}.$$

Редот на оваа матрица е еднаков на степенот на производот на полиномите (7), т.е. е еднаков на редот на матрицата B . Полиномите (7) го формираат множеството елементарни делители на матрицата $xE - A$, па значи матриците $xE - A$ и $xE - B$ се еквивалентни, па затоа матриците A и B се слични.

Ако C е друга обопштена матрица на Жордан, слична на матрицата B , тогаш од теорема 34.7 следува дека C и A се совпаѓаат распоредот на клетките на дијагоналата. ♦

34.9. Дефиниција. Обопштената Жорданова матрица, слична на матрицата B , ја нарекуваме *реална Жорданова нормална форма* на матрицата B .

34.10. Теорема. Нека L_n е n -димензионален векторски простор над полето реални броеви, $n > 0$, а f е линеарна трансформација на просторот L_n . Тогаш во просторот L_n постои едно или дводимензионален инваријантен попростор во однос на f .

Доказ. Ако постојат сопствени вредности на линеарната трансформација f , тогаш според 32.6 во просторот L_n постои едnodимензионален подпростор инваријантен во однос на f . Ако пак карактеристичниот полином на линеарната трансформација f нема реални корени, тогаш ќе избереме таква база $u_1, u_2, \dots, u_n$ на просторот L_n , во која f се задава со обопштена Жорданова матрица. Тогаш, очигледно, $L(u_{n-1}, u_n)$ е дводимензионален подпростор инваријантен во однос на f . ♦

35. ЛИНЕАРНИ ТРАСФОРМАЦИИ НА ПРОМЕНЛИВИ

35.1. Нека u е вектор во векторскиот простор L_n ,

$$x_1, x_2, \dots, x_n \tag{1}$$

се неговите координати во една база, а

$$y_1, y_2, \dots, y_n \tag{2}$$

во друга база. Тогаш координатите (2) линеарно се изразуваат со координатите (1), т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{array} \right. \quad (3)$$

Ако f е линеарна трансформација на векторскиот простор $\mathbf{L}_n$, тогаш координатите на векторот $f(\mathbf{u})$ линеарно се изразуваат со помош на координатите на векторот $\mathbf{u}$. Воопшто, често се среќаваме со ваков вид замена, при која новите променливи линеарно се изразуваат со помош на старите. Затоа природно е да ја воведеме следнава дефиниција.

Дефиниција. Нека $\mathbf{K}$ е произволно поле, а (1) се променливи кои примаат произволни вредности од полето $\mathbf{K}$. *Линеарна трансформација на променливите* (1) *над полето* $\mathbf{K}$ ја нарекуваме нивната замена со променливите (2), кои се изразуваат со променливите (1) со формулите (3).

Матрицата $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ ја нарекуваме *матрица на трансформацијата* (3).

35.2. Забелешка. Очигледно, ако

$$(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, (y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

тогаш системот равенства (3) е еквивалентен на матричното равенство

$$A(x) = (y). \quad (4)$$

35.3. Сега да разгледаме последователна примена на две линеарни трансформации на променливи. Нека променливите (1) се трансформираат во променливите (2) според формулата (4), а променливите (2) во променливите

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n \quad (5)$$

според формулата

$$B(y) = (z) \quad (6)$$

каде

$$B=[b_{ij}]_{n \times n}, (z)=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Од формулите (6) и (4) наоѓаме

$$(z) = B(A(x)) = (BA)(x). \quad (7)$$

Одтука следува, дека ако променливите (5) линеарно се изразуваат со променливите (2), а променливите (2) линеарно се изразуваат со променливите (1), тогаш постои линеарна трансформација на променливи, која (1) ги трансформира во (5). Оваа трансформација е определена со формулата (7).

Трансформацијата (7) ја нарекуваме *производ на трансформациите* (6) и (4). Согласно со формулата (7) точна е следнава теорема.

Теорема. Матрицата на производ на линеарни трансформации е еднаква на производот на матриците на множителите. ♦

35.4. Забелешка. Бидејќи секоја трансформација на променливи е потполно определена со својата матрица, од теорема 35.3 и асоцијативноста на производот на матрици следува асоцијативноста на производот на линеарните трансформации на променливите.

35.5. Дефиниција. Линеарната трансформација на променливите ја нарекуваме *несингуларна*, ако нејзината матрица е несингуларна.

35.6. Нека (4) е несингуларна линеарна трансформација. Ако двете страни на (4) од лево се помножи со матрицата A^{-1} , добиваме

$$(x) = A^{-1}(y). \quad (8)$$

Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. За несингуларната линеарна трансформација на променливите (4) линеарната трансформација (8) ја нарекуваме *инверзна линеарна трансформација*.

35.7. Теорема. Производ на несингуларни линеарни трансформации на променливите е несингуларна линеарна трансформација на променливите.

Доказ. Непосредно следува од фактот дека детерминантата на производ на квадратни матрици е еднаква на производот на нивните детерминанти, а матрицата на производот на линеарните трансформации на променливите е еднаква на производот на матриците на множителите. ♦

36. КВАДРАТНИ ФОРМИ

36.1. Дефиниција. Нека K е поле. *Квадратна форма* од n променливи

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

над полето K го нарекуваме полиномот

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j. \quad (2)$$

36.2. Забелешка. Нека $f(x_1, x_1, \dots, x_n)$ е квадратна форма. Ако во формулата (2) ставиме

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_1, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \dots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \quad (4)$$

36.4. Забелешка. а) Од условот (3) следува дека елементите на матрицата на квадратната форма (4) се симетрични во однос на главната дијагонала, т.е. важи

За матрицата A ќе велиме дека е *симетрична*, ако важи равенството (5). Очигледно, матрицата на квадратната форма (4) е симетрична. Да забележиме дека важи и обратното, т.е. секоја симетрична матрица е матрица на некоја квадратна форма.

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) = (x)^T A(x) = [x_1 \ x_1 \ \dots \ x_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (6)$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -4 & -7 \end{bmatrix}.$$

308

т.е. во квадратната форма (4) променливите (1) да ги замениме со соодветните изразувања со помош на формулите (7). Притоа добиваме нова квадратна форма $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ со матрица B . Ако ја искористиме формулата (6) добиваме дека

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y)^T B(y) = (C(x))^T B(C(x)) = (x)^T (C^T B C)(x),$$

каде $C = S^{-1}$. Одтука следува, дека $C^T B C$ е матрицата на квадратната форма (4), т.е. дека

$$A = C^T B C. \quad (8)$$

Понатаму, бидејќи матриците C и C^T се несингуларни, од формулата (8) следува дека матриците A и B имаат ист ранг, т.е. точна е следнава теорема.

Теорема. Рангот на матрицата на квадратната форма не се менува ако на формата примениме несингуларна линеарна трансформација на променливите. ♦

36.7. Дефиниција. Рангот на матрицата на квадратната форма го нарекуваме *ранг на квадратната форма*.

37. ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА КВАДРАТНИ ФОРМИ. КАНОНИЧЕН ВИД НА КВАДРАТНА ФОРМА

37.1. Дефиниција. Нека

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

и

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2)$$

се квадратни форми над полето $\mathbf{K}$. Ако постои линеарна несингуларна трансформација на променливите

$$(x) = S(y) \quad (3)$$

над полето $\mathbf{K}$, која ја трансформира формата (1) во формата (2), тогаш ќе велиме дека квадратната форма (1) е *еквивалентна* на квадратната форма (2) и ќе пишуваме

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim g(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

37.2. Лема. а) За секоја квадратна форма $f(x_1, x_1, \dots, x_n)$ важи

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim f(x_1, x_1, \dots, x_n).$$

б) Ако $f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim g(y_1, y_2, \dots, y_n)$, тогаш

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) \sim f(x_1, x_1, \dots, x_n).$$

в) Ако

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim g(y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ и } g(y_1, y_2, \dots, y_n) \sim h(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

тогаш $f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim h(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Доказ. а) Непосредно следува од фактот дека $(x) = E(x)$. ♦

б) Нека $f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim g(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тогаш постои несингуларна линеарна трансформација на променливите (3), која ја трансформира формата (1) во формата (2). Но, тогаш трансформацијата $(y) = S^{-1}(x)$ е несингуларна и ја трансформира формата (2) во формата (1), па затоа

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) \sim f(x_1, x_1, \dots, x_n).$$

в) Нека

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim g(y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ и } g(y_1, y_2, \dots, y_n) \sim h(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

и трансформација $(x) = S_1(y)$ ја трансформира формата (1) во формата (2), а трансформацијата $(y) = S_2(z)$ ја трансформира формата (2) во формата

$$h(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (4)$$

Тогаш, трансформацијата $(x) = (S_1 S_2)(z)$ ја трансформира формата (1) во формата (4), па затоа

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim h(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad \blacklozenge$$

37.3. Забелешка. Од лема 37.2 следува дека релацијата над множеството квадратни форми воведена во дефиниција 37.1 е релација на еквиваленција. Според тоа, со помош на оваа релација множеството квадратни форми можеме да го разбиеме на класи на еквиваленција. Логично е да се запрашаме дали во секоја класа на еквиваленција можеме да најдеме квадратна форма која има наједноставен вид. Одговорот на ова прашање е позитивен и истото ќе го покажеме во следните разгледувања.

37.4. Теорема. Квадратната форма со матрица B е еквивалентна на квадратната форма со матрица A ако и само ако над полето $\mathbf{K}$ постои несингуларна матрица S таква што

$$A = S^T B S. \quad (5)$$

Доказ. Нека A е матрица на квадратната форма (1), B е матрица на квадратната форма (2) и нека постои несингуларна матрица S така да важи условот (5). Ако на формата (1) да ја примениме несингуларната линеарна трансформација на променливите $(x) = S^{-1}(y)$, тогаш од дискусијата во 36.6 следува дека добиваме квадратна форма со матрица B , т.е. ја добиваме квадратната форма (2). Значи,

$$f(x_1, x_1, \dots, x_n) \sim g(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Обратно, нека формите (1) и (2) се еквивалентни. Тогаш постои таква несингуларна линеарна трансформација на променливите $(x) = S^{-1}(y)$ со која формата (1) се трансформира во формата (2). Јасно, за матриците A, B и S важи формулата (5). ♦

37.5. Последица. Еквивалентните квадратни форми имаат ист ранг.

Доказ. Непосредно следува од теорема 37.4. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

37.6. Теорема. Секоја квадратна форма (1) над полето $\mathbf{K}$ може да се трансформира во еквивалентна квадратна форма (2) која не содржи производи на различни променливи. Бројот на квадратите во квадратната форма (2) е еднаков на рангот на квадратната форма.

Доказ. Нека

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (6)$$

Доказот ќе го спроведеме со индукција по бројот на променливите n . Ако $n=1$, тогаш $f(x_1) = a_{11}x_1^2$ и тврдењето е докажано. Нека $n > 1$ и да претпоставиме дека тврдењето е точно за квадратни форми со број на променливи помал од n . Ќе разгледаме два случаи:

- 1) квадратната форма (6) содржи квадрат на некоја променлива, и
- 2) квадратната форма не содржи квадрат на ниту една променлива, т.е. $a_{ii} = 0$, за $i = 1, 2, \dots, n$.

Во првиот случај нека $a_{ii} \neq 0$. Ставаме $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ и пресметуваме

$$a_{ii}^{-1} y_i^2 = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_i x_j + a_{ii} x_i^2 + A \quad (7)$$

каде со A е означен збирот на членовите кои не зависат од x_i . Ако ги изедначиме изразите (6) и (7) и земеме предвид дека $a_{ij} = a_{ji}$ добиваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - a_{ii}^{-1} y_i^2 = g(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n), \quad (8)$$

при што на десната страна во (8) имаме квадратна форма која не зависи од x_i . Да ја разгледаме линеарната трансформација на променливите, определена со

$$\begin{cases} y_j = x_j, & i = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n. \end{cases} \quad (9)$$

Нејзината детерминанта е

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_{ii} \neq 0,$$

па затоа тоа е несингуларна линеарна трансформација на променливи. Ако оваа трансформација ја примениме на формата (6), тогаш согласно (8) добиваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{ii}^{-1} y_i^2 + g(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n). \quad (10)$$

$g(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ е квадратна форма над полето $\mathbf{K}$, која содржи помалку од n променливи. Од индуктивната претпоставка следува дека постои несингуларна линеарна трансформација на променливите над полето $\mathbf{K}$:

$$z_j = \alpha_{j1} y_1 + \dots + \alpha_{ji-1} y_{i-1} + \alpha_{ji+1} y_{i+1} + \dots + \alpha_{jn} y_n, \quad j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, \quad (11)$$

која ја трансформира оваа форма во видот

$$g(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) = b_1 z_1^2 + \dots + b_{i-1} z_{i-1}^2 + b_{i+1} z_{i+1}^2 + \dots + b_n z_n^2. \quad (12)$$

Да ја разгледаме трансформацијата

$$\begin{cases} z_j = \alpha_{j1} y_1 + \dots + \alpha_{ji-1} y_{i-1} + \alpha_{ji+1} y_{i+1} + \dots + \alpha_{jn} y_n, & j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, \\ z_i = y_i, \end{cases} \quad (13)$$

која е линеарна трансформација на променливите $y_1, y_2, \dots, y_n$ со детерминанта

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i-1} & 0 & \alpha_{1i+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i-11} & \dots & \alpha_{i-1i-1} & 0 & \alpha_{i-1i+1} & \dots & \alpha_{i-1n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{i+11} & \dots & \alpha_{i+1i-1} & 0 & \alpha_{i+1i+1} & \dots & \alpha_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{ni-1} & 0 & \alpha_{ni+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \det[\alpha_{ij}]_{n-1 \times n-1} \neq 0$$

бидејќи (11) е несингуларна линеарна трансформација на променливи. Затоа (13) е несингуларна линеарна трансформација на променливи. Ако (13) ја примениме на квадратната форма (7), тогаш согласно со формулата (12) добиваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{ii}^{-1} z_i^2 + b_1 z_1^2 + \dots + b_{i-1} z_{i-1}^2 + b_{i+1} z_{i+1}^2 + \dots + b_n z_n^2,$$

т.е. квадратната форма (1) ја трансформираме во еквивалентна квадратна форма (2) која не содржи производи на различни променливи.

Нека сега $a_{ii} = 0$, за $i = 1, 2, \dots, n$. Ако таа не содржи елементи различни од нула, тогаш таа има нулта матрица, т.е. е квадратна форма која не содржи производи на различни променливи. Ако пак $a_{ij} \neq 0$, тогаш да ја разгледаме следнава линеарна трансформација на променливите

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j, \\ x_j = y_i - y_j, \\ x_k = y_k, \text{ за } k \neq i, j. \end{cases} \quad (14)$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $i < j$ и притоа детерминантата на трансформацијата (14) е

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & & & i & & & j & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 i & \left| \begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 j & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
 \end{array} \right| & = & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.
 \end{array}
 \end{array}$$

Според тоа, постои линеарна трансформација инверзна на линеарната трансформација (14) и ако ја примениме инверзната трансформација на квадратната форма (6), добиваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2a_{ij}(y_i^2 - y_j^2) + \dots \quad (15)$$

Десната страна на (15) е квадратна форма, која содржи квадрат на променлива. Согласно на првиот дел од доказот, со помош на некоја несингуларна трансформација таа може да се сведе на квадратна форма која не содржи производи на различни променливи.

На крајот, нека квадратната форма

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2 \quad (16)$$

не содржи производи на различни променливи е еквивалентна на квадратната форма (1). Тогаш рангот на формата (16) е еднаков на рангот на формата (1). Но, рангот на формата (16) е еднаков на рангот на матрицата

$$\begin{bmatrix}
 b_1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & b_2 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & b_n
 \end{bmatrix},$$

чиј ранг е еднаков на бројот на дијагоналните елементи различни од нула, т.е. на бројот на квадратите во квадратната форма. ♦

37.7. Дефиниција. Квадратната форма (2) од теорема 37.6 ја нарекуваме *каноничен вид на квадратната форма* (1).

37.8. Пример. За квадратната форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \quad (17)$$

ќе најдеме несингуларна линеарна трансформација на променливите над полето реални броеви, со која (17) се трансформира во каноничен вид.

Решение. За квадратната форма (17) важи $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$, па затоа согласно со доказот на теорема 37.6 земаме

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Тогаш,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 + y_2)y_3 + y_3(y_1 - y_2) \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2. \end{aligned}$$

Понатаму, земаме

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3, \\ z_2 = y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1, \\ z_3 = y_3 = x_3 \end{cases} \quad (18)$$

и добиваме

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2,$$

што значи дека (18) е бараната несингуларна линеарна трансформација. ♦

37.9. Теорема. За секоја симетрична матрица A над полето K постои над K несингуларна матрица S таква што $S^T A S$ е дијагонална матрица.

Доказ. Непосредно следува од претходната теорема и фактот дека секоја симетрична матрица е матрица на некоја квадратна форма. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

37.10. Пример. Матрицата на квадратната форма $f(x_1, x_2, x_3)$ над полето реални броеви е

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Најдете ја каноничната форма на f .

Решение. Нека A е произволна симетрична матрица. Дијагоналната матрица $S^T A S$ од теорема 37.9 може да се добие со извршување на една низа елементарни операции на редиците на матрицата A и истата низа елементарни операции на колоните на матрицата A . Последното непосредно следува од фактот дека секоја несингуларна матрица е производ на низа елементарни матрици (зошто?).

Овој метод ќе го употребиме во конкретниов случај. За таа цел матриците A и E ќе ги запишеме како блок матрица. Имаме

$$[A | E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Прво ќе ги извршиме елементарните трансформации со редиците: на втората редица и ја додаваме првата помножена со 2 и од третата редица ја одземаме првата помножена со -3 . Потоа ги реализираме соодветните елементарни трансформации со колоните. Имаме:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right], \text{ а потоа } \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Понатаму, на третата редица ја додаваме втората редица помножена со 2, а потоа ја реализираме соодветната трансформација на колоните и добиваме:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right], \text{ а потоа } \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right].$$

Да забележиме, дека согласно со теорема 36.7 елементарните трансформации на редиците се еквивалентни со множењето од лево со соодветната елементарна матрица. Затоа, при трансформацијата на матрицата A , ако ги бележиме само трансформациите на редиците на единичната матрица, на местото на истата ја добиваме матрицата S^T . Според тоа, матрицата A е дијагонализирана:

$$S^T A S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \text{ при што } S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Конечно, каноничната форма на квадратната форма $f(x_1, x_2, x_3)$ е:

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - 7y_3^2. \blacklozenge$$

38. НОРМАЛЕН ВИД НА КВАДРАТНА ФОРМА

38.1. Нека

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1}$$

е квадратна форма над полето комплексни броеви $\mathbf{C}$, а

$$b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2 \tag{2}$$

е нејзиниот каноничен вид. Да ја разгледаме линеарната трансформација на променливите, определена со формулите

$$\begin{cases} z_i = \sqrt{b_i} y_i, & \text{ако } b_i \neq 0, \\ z_k = y_k, & \text{ако } b_k = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Очигледно, трансформацијата (3) е несингуларна. Ако истата ја примениме на квадратната форма (2), истата ја трансформираме во видот

$$\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \dots + \varepsilon_n z_n^2, \quad \varepsilon_i = 1 \text{ или } \varepsilon_i = 0. \quad (4)$$

Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. Квадратната форма (4) ја нарекуваме *нормален вид* на *квadratната форма* (1) над полето комплексни броеви.

38.2. Теорема. Секоја квадратна форма над полето комплексни броеви, со помош на линеарни несингуларни комплексни трансформации, може да се сведе на нормален вид. Бројот на квадратите во нормалниот вид е еднаков на рангот на почетната квадратна форма, што значи дека нормалниот вид е определен со точност до ознака на променливите.

Доказ. Непосредно следува од тоа што, со помош на несингуларна линеарна трансформација секоја квадратна форма може да се сведе на каноничен вид и разгледувањата во 38.1. ♦

38.3. Теорема. Две комплексни квадратни форми се еквивалентни ако и само ако имаат ист ранг.

Доказ. Ако две квадратни форми се еквивалентни, тогаш според последица 37.5 тие имаат ист ранг. Обратно, ако две квадратни форми имаат ист ранг, тогаш тие имаат ист нормален вид, па затоа се еквивалентни. ♦

38.4. Теорема. За секоја комплексна симетрична матрица A постои таква комплексна несингуларна матрица S , што

$$S^T A S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

при што бројот на единиците на дијагоналата е еднаков на рангот на матрицата A .

Доказ. Непосредно следува од теорема 38.2. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

38.5. Нека (1) е реална квадратна форма, т.е. квадратна форма над полето реални броеви, а (2) е нејзиниот каноничен вид. Ако на формата (2) ја примениме реалната несингуларна линеарна трансформација на променливите

$$\begin{cases} z_i = \sqrt{b_i} y_i, & \text{ако } b_i > 0, \\ z_i = \sqrt{-b_i} y_i, & \text{ако } b_i < 0, \\ z_k = y_k, & \text{ако } b_k = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \dots + \varepsilon_n z_n^2, \quad \varepsilon_i = 1 \text{ или } \varepsilon_i = -1 \text{ или } \varepsilon_i = 0. \quad (6)$$

$$\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \dots + \varepsilon_n z_n^2, \quad \varepsilon_i = 1 \text{ или } \varepsilon_i = -1 \text{ или } \varepsilon_i = 0. \quad (6)$$

Дефиниција. Квадратната форма (6) ја нарекуваме *нормален вид* на квадратната форма (1) над полето реални броеви.

Доказ. Непосредно следува од тоа што, со помош на несингуларна линеарна трансформација секоја квадратна форма може да се сведе на каноничен вид и разгледувањата во 38.5. ♦

Доказ. Нека линеарната несингуларна трансформација на променливите

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_r^2,$$
$$z_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$
$$z_1^2 + \dots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \dots - z_r^2,$$
$$s < t \tag{9}$$
[illegible]

317

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (11)$$

е едно ненулно реално решение на системот (10). Имаме:

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) = (\sum_{i=1}^n a_{1i} c_i)^2 + \dots + (\sum_{i=1}^n a_{si} c_i)^2 - (\sum_{i=1}^n a_{s+1i} c_i)^2 - \dots - (\sum_{i=1}^n a_{ri} c_i)^2.$$

Но, за $i = 1, 2, \dots, s$ имаме $\sum_{i=1}^n a_{ji} c_i = 0$, па затоа

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) = -(\sum_{i=1}^n a_{s+1i} c_i)^2 - \dots - (\sum_{i=1}^n a_{ri} c_i)^2 \leq 0. \quad (12)$$

Аналогно, од (8) следува дека

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) = (\sum_{i=1}^n b_{li} c_i)^2 + \dots + (\sum_{i=1}^n a_{li} c_i)^2 \geq 0. \quad (13)$$

Од (12) и (13) следува дека $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, па затоа

$$\sum_{i=1}^n b_{ki} c_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, t. \quad (14)$$

Но, равенствата

$$\sum_{i=1}^n b_{ki} c_i = 0, \quad k = t+1, t+2, \dots, n \quad (15)$$

се исто така точни, бидејќи (11) е решение на системот (10). Од равенствата (14) и (15) следува дека (11) е решение на системот

[illegible]

Последното не е можно, бидејќи детерминантата на последниот систем е различна од нула и тој нема нетривијални (ненулни) решенија. Од добиената противречност следува, дека неравенството (9) не е можно. Аналогно заклучуваме дека не е можно и неравенството $s > t$, па затоа важи $s = t$, од што следува тврдењето на теоремата. ♦

38.8. Дефиниција. Разликата меѓу бројот на позитивните и бројот на негативните квадрати во нормалниот вид на реалната квадратна форма ја нарекуваме *сигнатура на реалната квадратна форма*.

38.9. Теорема. Две реални квадратни форми се еквивалентни над полето реални броеви ако и само ако имаат еднакви рангови и сигнатури.

Доказ. Точнoста на теоремата следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

38.10. Теорема. За секоја реална симетрична матрица A постои таква не-сингуларна реална матрица S , што матрицата $S^T A S$ е дијагонална, на чија дијагонала се распоредени $1, -1, 0$. Бројот на 1 и бројот на -1 на дијагоналната матрица не зависи од изборот на матрицата S .

Доказ. Точноста на теоремата следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

39. ПОЗИТИВНО И НЕГАТИВНО ОПРЕДЕЛЕНА РЕАЛНА КВАДРАТНА ФОРМА

39.1. Дефиниција. Нека

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

е квадратна форма над полето реални броеви и нека променливите

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (2)$$

примаат само реални вредности. Тогаш при секој избор на вредностите на променливите (2) квадратната форма (1) е реален број. Квадратната форма (1) ја нарекуваме *позитивно определена (дефинитна)* ако

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$$

секогаш кога меѓу променливите барем една е различна од нула. Квадратната форма (1) ја нарекуваме *негативно определена (дефинитна)* ако

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0,$$

секогаш кога меѓу променливите барем една е различна од нула.

39.2. Теорема. Ако квадратната форма (1) е позитивно определена, тогаш позитивно определена е и секоја форма еквивалентна со неа.

Доказ. Нека (1) и

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (3)$$

се еквивалентни квадратни форми. Тоа значи, дека

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (4)$$

каде

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \det[a_{ij}] \neq 0, \quad a_{ij} \in \mathbf{R}.$$

Ако формата (2) не е позитивно определена, тогаш постојат реални броеви $y_i^{(0)}, i = 1, 2, \dots, n$ такви што $g(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \leq 0$. Понатаму, системот равенки

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = y_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

за кој $\det[a_{ij}] \neq 0$ има ненулно решение, кое може да се најде, на пример, со Крамеровото правило и нека тоа решение е $x_i^{(0)}, i = 1, 2, \dots, n$. Сега од равенството (4) добиваме

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = g(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \leq 0,$$

т.е. квадратната форма (1) не е позитивно определена. Според тоа, ако една од еквивалентните квадратни форми не е позитивно определена, тогаш и другата не е позитивно определена. ♦

39.3. Ако квадратната форма (1) има нормален вид

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2, \quad (5)$$

тогаш од теорема 39.2 следува дека таа е позитивно определена. Ако пак нормалниот вид

$$\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \dots + \varepsilon_n y_n^2, \quad (6)$$

на формата (1) е различен од (5), тогаш таа не е позитивно определена, бидејќи во тој случај формата (6) не е позитивно определена. Навистина, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\varepsilon_1 \neq 1$, т.е. $\varepsilon_1 = -1$ или $\varepsilon_1 = 0$. Ако ставиме $y_1^{(0)} = 1, y_2^{(0)} = \dots = y_n^{(0)} = 0$, тогаш

$$g(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) = \varepsilon_1 \leq 0,$$

т.е. точна е следнава теорема.

Теорема. Нормалниот вид на позитивно определена квадратна форма од n променливи содржи n позитивни квадрати. ♦

39.4. Лема. При несингуларна реална линеарна трансформација на променливите, знакот на детерминантата на матрицата на реалната квадратна форма не се менува.

Доказ. Ако A и B се матриците на две еквивалентни реални квадратни форми, тогаш $B = S^T A S$, каде S е несингуларна матрица. Од $\det S = \det S^T$ следува

$$\det B = \det(S^T A S) = \det S^T \cdot \det A \cdot \det S = (\det S)^2 \det A,$$

и ако $(\det S)^2 > 0$ добиваме дека при несингуларна реална линеарна трансформација на променливите, знакот на детерминантата на матрицата на реалната квадратна форма не се менува. ♦

39.5. Последица. Детерминантата на матрицата на позитивно определена квадратна форма е позитивен број.

Доказ. Навистина, нормалниот вид на позитивно определена квадратна форма е квадратна форма со единична матрица, па од лема 39.4 следува дека детерминантата на матрицата на позитивно определена квадратна матрица е позитивен број. ♦

39.6. Дефиниција. Нека $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Минорите

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det A$$

ги нарекуваме *главни минори на матрицата* A .

39.7. Теорема (критериум на Силвестер). Реалната квадратна форма е позитивно определена ако и само ако сите главни минори на нејзината матрица се позитивни.

Доказ. Нека (1) е реална квадратна форма и A е матрицата на (1). Ако $n=1$, тогаш формата (1) има вид

$$f(x_1) = a_{11}x_1^2$$

и таа е позитивна ако и само ако $a_{11} > 0$. Но, a_{11} е единствен главен минор на матрицата на формата, што значи дека за $n=1$ тврдењето на теоремата е точно. Нека претпоставиме дека $n > 1$ и да претпоставиме дека теоремата е точна за квадратни форми кои имаат помалку од n променливи. Квадратната форма (1) ќе ја запишеме во следниов вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i x_n + a_{nn} x_n^2. \quad (7)$$

Ставаме

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} x_i x_k. \quad (8)$$

Квадратната форма (8) има $n-1$ променлива и нејзината матрица B се добива од матрицата A со прецртување на последниот ред и последната колона. Јасно, ако на множеството од сите главни минори на матрицата B ја додадеме $\det A$, го добиваме множеството од сите главни минори на матрицата A .

Нека (1) е позитивно определена квадратна форма. Тогаш формата (8) е позитивно определена. Навистина, ако постојат $x_i^{(0)}, i=1, 2, \dots, n-1$ такви што

$$g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) \leq 0,$$

тогаш од формулата (7) добиваме дека

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, 0) = g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) \leq 0,$$

што противречи на претпоставката дека квадратната форма (1) е позитивно определена. Но, B е матрица на позитивно определената квадратна форма (8), па од индуктивната претпоставка следува дека сите главни минори на матрицата B се позитивни. Понатаму, од последица 39.5 имаме дека $\det A > 0$, па затоа сите главни минори на матрицата A се позитивни.

Нека сите главни минори на матрицата A се позитивни. Тогаш позитивни се сите главни минори на матрицата B и според индуктивната претпоставка позитивно е определена квадратната форма (8). Постои реална несингуларна трансформација на променливите

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in-1}x_{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

со која квадратна форма (8) се трансформира во нормален вид

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2.$$

Понатаму, линеарната трансформација

$$\begin{cases} y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in-1}x_{n-1}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ y_n = x_n \end{cases}$$

исто така е несингуларна. Ако истата ја примениме на квадратната форма (7), добиваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} y_i y_n + a_{nn} y_n^2. \quad (9)$$

Сега да ја разгледаме линеарната трансформација на променливите, определена со формулите

$$\begin{cases} z_i = y_i + a_{in} y_n, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ z_n = y_n. \end{cases}$$

Очигледно, оваа трансформација е несингуларна. Ако истата ја примениме на квадратната форма (9) добиваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + c z_n^2. \quad (10)$$

каде c е некој реален број. Детерминантата на матрицата на квадратната форма, на десната страна на (10), е еднаква на c . Согласно лема 39.4 таа од $\det A$ се разликува за позитивен множител. Но, $\det A > 0$, па затоа $c > 0$ и (10) е позитивна квадратна форма. Конечно, од теорема 39.2 следува дека квадратната форма (1) е позитивно определена. ♦

39.8. Последица. Реалната квадратна форма е негативно определена ако и само ако сите главни минори на нејзината матрица со непарен ред се негативни, а сите нејзините главни минори со парен ред се позитивни.

Доказ. Квадратната форма е $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е негативно определена ако и само ако квадратната форма $-f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е позитивно определена. Матриците на овие две форми се разликуваат по знак, па значи и главните минори од ист ред се еднакви ако редот е парен, а се разликуваат ако нивниот ред е непарен. ♦

39.9. Пример. Испитајте ја знаковно определеноста на квадратната форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3. \quad (11)$$

Решение. Матрицата на дадената квадратна форма е

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Нејзините главни минори се

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0 \text{ и } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

па од теорема 39.7 следува дека квадратната форма (11) е позитивно определена. ♦

40. ЕВКЛИДСКИ ПРОСТОР

40.1. Дефиниција. Реалниот векторски простор $\mathbf{L}$ го нарекуваме *Евклидски* ако на секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ му е придружен еден и само еден реален број $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, таков што

- 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$, за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$;
- 2) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ и за секој $\lambda \in \mathbf{R}$;
- 3) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$, за секои $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$; и
- 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ ако и само ако $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Вака дефинираната функција $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ја нарекуваме *скаларен производ* на векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Од аксиомата 3) непосредно следува дека $(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = 0$ за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$.

40.2. Пример. а) Лесно се докажува дека со формулата

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

е дефиниран скаларен производ во просторот $\mathbf{C}[a, b]$. Имено, од својствата на интегралот следува дека се исполнети првите три аксиоми од дефиниција 40.1, а точ-

носта на аксиомата 4) следува од фактот дека $\int_a^b x^2(t)dt \geq 0$, за секоја реална непре-

кинната функција $x(t)$, а ако $\int_a^b x^2(t)dt = 0$, тогаш од непрекинатоста на функцијата $x(t)$ следува $x(t) = 0$, за секој $t \in [a, b]$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

б) Во просторот $\mathbf{R}^m$ за секои $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ дефинираме

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (1)$$

Од својствата на реалните броеви непосредно следува дека со формулата (1) е дефиниран скаларен производ во просторот $\mathbf{R}^m$ (проверете!). ♦

40.3. Дефиниција. Должина (норма) на векторот $\mathbf{x}$ во Евклидскиот простор $\mathbf{L}$ го нарекуваме бројот

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}. \quad (2)$$

Векторот чија должина е еднаква на еден го нарекуваме *единечен вектор*.

40.4. Пример. а) Во просторот $\mathbf{C}[a, b]$ должината на векторот $\mathbf{x} = x(t)$ е дадена со формулата

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

б) Во просторот $\mathbf{R}^m$ должината на векторот $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ е дадена со формулата

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}.$$

40.5. Лема. Нека $\mathbf{L}$ е Евклидски простор. Тогаш,

а) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и $\|\mathbf{x}\| = 0$ ако и само ако $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

б) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и за секој $\lambda \in \mathbf{R}$.

Доказ. а) Непосредно следува од аксиомата 4) во дефиниција 40.1.

б) Непосредно следува од аксиомите 1) и 2) во дефиниција 40.1. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

40.6. Лема (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако $\mathbf{L}$ е Евклидски простор, тогаш за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ е исполнето неравенството

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \quad (3)$$

Доказ. Ако $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, тогаш неравенството (3) следува од лема 40.5 а) и од коментарот во дефиниција 40.1.

Нека претпоставиме дека $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. Ако се искористи дека за секој реален број λ важи $(\lambda \mathbf{x} - \mathbf{y}, \lambda \mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0$ добиваме

$$\lambda^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0. \quad (4)$$

На левата страна на неравенството (4) имаме квадратен трином во однос на λ со константни коефициенти. Овој трином е ненегативен ако и само ако неговата дискриминанта е непозитивна, т.е. ако и само ако $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y})$, од што следува неравенството (3).

Јасно, во неравенството (3) важи знак за равенство ако и само ако $\lambda \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{o}$, што значи ако и само ако $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$, т.е. ако и само ако векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ се линеарно зависни. ♦

40.8. Последица (неравенства на триаголник). Ако $\mathbf{L}$ е Евклидски простор, тогаш за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ се исполнети неравенствата

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \| \text{ и } \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \geq \| \mathbf{x} \| - \| \mathbf{y} \| .$$

Доказ. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &\leq \| \mathbf{x} \|^2 + 2 \| \mathbf{x} \| \cdot \| \mathbf{y} \| + \| \mathbf{y} \|^2 = (\| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|)^2 \end{aligned}$$

или $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$.

Ако го искористиме претходното неравенство добиваме

$$\| \mathbf{x} \| = \| \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| + \| \mathbf{y} \|, \text{ т.е. } \| \mathbf{x} \| - \| \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| .$$

Понатаму, заради симетрија имаме $\| \mathbf{y} \| - \| \mathbf{x} \| \leq \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|$. Конечно, од последните две неравенства следува неравенството

$$\| \| \mathbf{x} \| - \| \mathbf{y} \| \| \leq \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| . \spadesuit$$

40.9. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ е Евклидски простор. Тогаш, *агол меѓу векторите* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ е аголот $0 \leq \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \pi$ определен со

$$\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \|} \quad (5)$$

40.10. Забелешка. Согласно со неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, оваа дефиниција е коректна, бидејќи за $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, дефиниран со равенството (5) точно е неравенството $|\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq 1$. Јасно, ако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ се единечни вектори, тогаш $\cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Нека $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ е единечен вектор во просторот $\mathbf{R}^m$ и со α_i , $i = 1, 2, \dots, m$ да го означиме аголот меѓу векторот $\mathbf{x}$ и векторот $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогаш за секој $i = 1, 2, \dots, m$ важи $x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = \cos \alpha_i$, т.е.

$$\mathbf{x} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m) .$$

Понатаму, бидејќи $\| \mathbf{x} \| = 1$ добиваме

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_m = 1 .$$

Косинусите $\cos \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ги нарекуваме *косинусни правци* на векторот $\mathbf{x}$.

Ако $\mathbf{x}$ не е единечен вектор и ако $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, тогаш очигледно векторот $\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|}$ е единечен и неговите косинусни правци ги нарекуваме *косинусни правци* за векторот $\mathbf{x}$. Покрај тоа, за векторот $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и неговиот единечен вектор $\mathbf{x}_0$ важи

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|}) = \frac{1}{\| \mathbf{x} \|} (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{\| \mathbf{x} \|} \cdot \| \mathbf{x} \|^2 = \| \mathbf{x} \| .$$

40.11. Дефиниција. Нека $\mathbf{L}$ е Евклидски простор. За векторите $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}$ ќе велиме дека се *ортогонални* ако $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Ако $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, тогаш согласно со дефиниција 40.9 имаме дека аголот меѓу ортогоналните вектори е $\frac{\pi}{2}$. Јасно, нултиот вектор е ортогонален на секој вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$.

40.12. Пример. а) Во просторот $\mathbf{R}^m$ условот за ортогоналност на векторите $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ има облик

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m = 0.$$

На пример, векторите

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_m = (0, \dots, 0, 1)$$

се по парови заемно ортогонални.

б) Во просторот $\mathbf{C}([a, b])$ условот за ортогоналност на векторите $x(t)$ и $y(t)$ има облик

$$\int_a^b x(t)y(t)dt = 0.$$

Лесно се проверува дека во просторот $\mathbf{C}([-\pi, \pi])$ секои два вектори од тригонометрискиот систем

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

се заемно ортогонални. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

40.13. Лема. Заемно ортогоналните ненулти вектори $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ се линеарно независни.

Доказ. Нека претпоставиме дека векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ се линеарно зависни, т.е. дека $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$, каде, на пример, $\alpha_1 \neq 0$. Ако последното равенство скаларно го помножиме со $\mathbf{x}_1$, тогаш од претпоставката дека $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ се заемно ортогонални следува $\alpha_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = 0$, што не е можно бидејќи $\alpha_1 \neq 0$ и $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \neq 0$. Сега тврдењето следува од добиената противречност. ♦

40.14. Лема. Ако векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ се ортогонални на векторот $\mathbf{y}$, тогаш и секоја нивна линеарна комбинација е ортогонална на векторот $\mathbf{y}$.

Доказ. Навистина, ако $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}_m$ е произволна линеарна комбинација на векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, тогаш

$$(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}_m, \mathbf{y}) = \alpha_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \dots + \alpha_m (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}) = 0,$$

т.е. векторот $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}_m$ е ортогонален на векторот $\mathbf{y}$. ♦

40.15. Во претходните излагања видовме дека линеарната обвивка на векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ образува подпростор $\mathbf{L}_0$ на векторскиот простор $\mathbf{L}$. Според тоа, ако векторот $\mathbf{y}$ е ортогонален на секој од векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, тогаш тој е ортого-

нален на секој вектор од подпросторот L_0 . Во овој случај ќе велиме дека векторот y е *ортогонален на подпросторот* L_0 . Поопшто, ако P е произволно множество вектори од Евклидскиот простор L , тогаш ќе велиме дека векторот y е ортогонален на множеството P ако тој е ортогонален на секој вектор од P .

Ако се искористи лема 40.14 може да се докаже дека множеството $P^\perp$ од сите вектори кои се ортогонални на множеството P е подпростор на Евклидскиот простор L (деталите ги оставаме на читателот за вежба). Ако P е подпростор од Евклидскиот простор L , тогаш за подпросторот $P^\perp$ ќе велиме дека е *ортогонален комплемент на подпросторот* P .

40.16. Дефиниција. Базата $x_1, \dots, x_m$ на конечнодимензионалниот Евклидски простор L ќе ја нарекуваме *ортогонална* ако векторите $x_1, \dots, x_m$ се по парови ортогонални.

Ортогоналната база $x_1, \dots, x_m$ ќе ја нарекуваме *ортонормирана* ако $\|x_i\| = 1$, за $i = 1, 2, \dots, m$.

40.17. Пример. Во просторот R^m множеството

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_m = (0, \dots, 0, 1)$$

е ортонормирана база. ♦

40.18. Нека $x_1, \dots, x_m$ е произволна ортонормирана база на Евклидскиот простор L . Секој вектор $y \in L$ може да се претстави во облик

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m, \quad (6)$$

каде α_i , $i = 1, 2, \dots, m$ се координатите на векторот y . Овие координати ќе ги нарекуваме *Фуриеви коефициенти* на векторот y во однос на ортонормираната база $x_1, \dots, x_m$.

Ако последователно скаларно го помножиме равенството (6) со секој од векторите $x_1, \dots, x_m$, за Фуриевите коефициенти α_i добиваме

$$\alpha_i = (y, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

Ако $z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m$ е друг вектор во просторот L , тогаш лесно се гледа дека за скаларниот производ на векторите y и z важи формулата

$$(y, z) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m. \quad (8)$$

Според тоа, точна е следнава лема.

Лема. Нека $x_1, \dots, x_m$ е произволна ортонормирана база на конечнодимензионалниот Евклидски простор L . Тогаш скаларниот производ на два вектори е еднаков на збирот од производите на соодветните Фуриеви коефициенти. ♦

40.19. За конструирање на ортонормиран систем во Евклидски простор важна е следнава теорема, која ќе ја прифатиме без доказ.

Теорема (теорема за ортогонализација). Нека $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$ е произволна низа линеарно независни вектори во Евклидскиот простор $\mathbf{L}$ (конечна или бесконечна). Со $\mathbf{L}_k$ да ја означиме линеарната обвивка на првите k векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Тогаш, постојат вектори $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k, \dots$ такви, што

- а) За секој природен број k линеарната обвивка $\mathbf{L}'_k$ на векторите $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ се совпаѓа со линеарната обвивка $\mathbf{L}_k$ на векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.
- б) За секој природен број k векторот $\mathbf{y}_{k+1}$ е ортогонален на просторот $\mathbf{L}_k$. ♦

40.20. Теорема. Во конечно димензионален Евклидски простор $\mathbf{L}$ постои ортонормирана база.

Доказ. Во конечно димензионалниот Евклидски простор $\mathbf{L}$ постои база која се состои од конечно многу вектори $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$. Според теорема 40.19 за векторите $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ постојат вектори $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ кои се по парови ортогонални и такви што

$$L(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}) = L(\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}).$$

Значи, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ е ортогонална база и ако истата ја нормираме ја добиваме бараната ортонормирана база на $\mathbf{L}$. ♦

41. ПРАВА И ОТСЕЧКА ВО ПРОСТОРОТ $\mathbf{R}^m$

41.1. Дефиниција. Нека $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \in \mathbf{R}^m$ и $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ е фиксиран ненулти вектор. Множеството точки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ во просторот $\mathbf{R}^m$, чии координати можат да се запишат во облик

$$x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t \in \mathbf{R} \quad (1)$$

го нарекуваме *права* во просторот $\mathbf{R}^m$, која минува низ точката $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ и е во правец на векторот $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Делот од правата, кој соодветствува на промена на параметарот t на интервал од видот $(-\infty, t_0]$ или $[t_0, +\infty)$ го нарекуваме *полуправа* во просторот $\mathbf{R}^n$.

Равенката на права во просторот $\mathbf{R}^n$ во векторски запис има вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + t\mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1')$$

каде $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ и $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Ако се дадени две различни точки $(x'_1, \dots, x'_m)$ и $(x''_1, \dots, x''_m)$, тогаш равенката на правата, која минува низ овие точки, има вид

$$x_i = x'_i + (x''_i - x'_i)t, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Нека се дадени две точки $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_m)$ и $\mathbf{x}'' = (x''_1, \dots, x''_m)$ во $\mathbf{R}^m$ и со $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ да ги означиме векторите со истите координати. Тогаш равенката на правата која минува низ точките $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ во векторски запис гласи

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + (\mathbf{x}'' - \mathbf{x}')t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Очигледно, дека во случај $n = 3$ добиваме права во обичниот тридимензионален простор, а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ е векторот паралелен на таа права.

41.2. Дефиниција. Делот од правата, кој соодветствува на вредностите на параметарот t за некој интервал $[t', t'']$, го нарекуваме *отсечка* во просторот $\mathbf{R}^n$. Точките $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ на таа отсечка, кои соодветствуваат на вредностите t' и t'' на параметарот t , ги нарекуваме нејзини *краеви*, и разгледуваната отсечка ќе ја означуваме со $[\mathbf{x}', \mathbf{x}']$. *Растојанието* $\rho(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|$ меѓу краевите на отсечката $[\mathbf{x}', \mathbf{x}'']$ ќе го наречеме *должина* на отсечката $[\mathbf{x}', \mathbf{x}'']$.

40.3. Пример. Нека $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^m$, $d > 0$. Множеството

$$K_m = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m); \quad a_i < x_i < a_i + d, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$$

го нарекуваме *m-димензионална отворена коцка*. Секоја точка од видот

$$(a_1 + \lambda_1 d, \dots, a_m + \lambda_m d), \quad \lambda_i = 0 \text{ или } 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ја нарекуваме *теме* како на отворената коцка K_m . Две темиња на коцката кои се разликуваат само во вредностите на еден λ_i ги нарекуваме *соседни*. Интервалот кој соединува соседни темиња на коцката, го нарекуваме нејзин *раб*. Должината на работ на коцката K_m , па според тоа и на коцката $\bar{K}_m$ е еднаква на d . За две темиња на коцката ќе велиме дека се *спротивни* ако сите вредности на λ_i се различни. Интервалот кој поврзува спротивни темиња на коцката го нарекуваме *дијагона* на коцката и нејзината должина е еднаква на $d\sqrt{n}$. Лесно се гледа дека

$$d\sqrt{n} = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_m} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_m} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

1. Проверете дали множеството $\mathbf{L}$ е векторски простор над даденото поле $\mathbf{K}$.
 - а) $\mathbf{L} = \{x + y\sqrt[3]{2} \mid x, y \in \mathbf{Q}\}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{Q},$
 - б) $\mathbf{L} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{Q}, x + y = z + 1\}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{Q},$
 - в) $\mathbf{L} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{Q}, 2x + y = 3z\}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{Q},$

$$\text{г) } \mathbf{L} = \{a + bx^2 + cx^4 \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{R},$$

2. Во множеството $\mathbf{L}$ од сите позитивни реални броеви под “собирање” на “векторите” x и y ќе го подразбираме обичниот производ xy на реални броеви, а под “множење” на векторот x со скаларот s ќе го подразбираме степенот x^s . Докажете дека $\mathbf{L}$ е векторски простор над $\mathbf{R}$.
3. Докажете дека множеството $\mathbf{L}$ од сите матрици

$$M = x_0 E + x_1 A + x_2 A^2 + \dots + x_k A^k,$$

каде што k е природен број, $x_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, \dots, k$, E е единичната матрица

$$\text{од трет ред и } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ е векторски простор над полето реални}$$

броеви, во однос на собирањето на матрица и множењето матрица со скалар.

4. Кое од дадените множества е потпростор од векторскиот простор $\mathbf{R}^3$:
 - а) $S = \{(a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbf{R}\}$,
 - б) $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a \leq b \leq c\}$,
 - в) $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a + 2b + 3c = 0\}$.
5. Кое од дадените множества е потпростор од векторскиот простор $\mathbf{R}^4$:
 - а) $S = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, 5a + d = 6\}$,
 - б) $S = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, 5a + d = 0\}$,
 - в) $S = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_5 = 0, a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3, 4\}$.
6. Докажете дека множеството S од сите дијагонални матрици од n -ти ред е потпростор од векторскиот простор $\mathbf{R}_{nn}$ од сите реални квадратни матрици од n -ред.
7. Докажете дека множеството S од сите долнотриаголни (горнотриаголни) матрици од n -ти ред е потпростор од векторскиот простор $\mathbf{R}_{nn}$ од сите реални квадратни матрици од n -ред.
8. Докажете дека векторите $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ и $(3, -1, 2)$ го генерираат просторот $\mathbf{R}^3$.
9. Докажете дека множеството $S = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ е потпростор од векторскиот простор $\mathbf{R}^3$ и дека векторите
 - а) $(1, 2, 0)$ и $(-1, 0, 0)$
 - б) $(2, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$ и $(1, 3, 0)$
 го генерираат овој потпростор.
10. Векторите $\mathbf{a}_1 = (7, 5, -1)$ и $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0)$ од просторот $\mathbf{R}^3$ изразете ги како линеарна комбинација на векторите $\mathbf{c}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{c}_2 = (2, 0, 4)$ и $\mathbf{c}_3 = (3, 1, 3)$.

11. Полиномот $p(x) = x^2 + 4x - 3$ над $\mathbf{R}$ изразете го како линеарна комбинација на полиномите $p_1(x) = x^2 - 2x + 5$, $p_2(x) = 2x^2 - 3x$ и $p_3(x) = x + 3$.
12. Нека $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ се линеарно независни вектори во векторскиот простор $\mathbf{L}$ и нека $\mathbf{L}_k = L(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_n\})$, за $k = 1, 2, \dots, n$. Докажете, дека, ако $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_k$, за $k = 1, 2, \dots, n$, тогаш $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
13. Докажете, дека ако секој од $m+1$ вектори $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{m+1} \in \mathbf{L}$ е линеарна комбинација на векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbf{L}$, тогаш векторите $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{m+1}$ се линеарно зависни.

14. Во векторскиот простор $\mathbf{R}_{22}$ од сите квадратни матрици од втор ред дадени се множествата

$$\text{а) } S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\} \text{ и } T = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbf{R} \right\},$$

$$\text{б) } S = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, c, d \in \mathbf{R} \right\} \text{ и } T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{R} \right\}.$$

Докажете дека S и T се потпростори од $\mathbf{R}_{22}$ и најдете $S+T$ и $S \cap T$.

15. Најдете $S+T$ и $S \cap T$, ако S и T се следниве потпростори од $\mathbf{R}^3$:

$$\text{а) } S = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbf{R}\} \text{ и } T = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbf{R}\},$$

$$\text{б) } S = \{(a, a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\} \text{ и } T = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbf{R}\},$$

$$\text{в) } S = \{(a, a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\} \text{ и } T = \{(0, b, b) \mid b \in \mathbf{R}\},$$

$$\text{г) } S = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbf{R}\} \text{ и } T = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbf{R}\},$$

$$\text{д) } S \text{ е линеарната обвивка на векторите } (1, 2, 0) \text{ и } (3, 1, 1), \text{ а}$$

$$T = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbf{R}\}.$$

Дали $\mathbf{R}^3$ е директна сума од S и T ?

16. Дали векторскиот простор $\mathbf{R}_{22}$ од сите квадратни матрици од втор ред е директна сума на потпросторите

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, c, d \in \mathbf{R} \right\} \text{ и } T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbf{R} \right\}.$$

17. Докажете дека векторскиот простор $\mathbf{R}_{22}$ од сите квадратни матрици од втор ред е директна сума на своите потпростори:

$$\text{а) } S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbf{R} \right\} \text{ и } T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\},$$

$$\text{б) } S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\} \text{ и } T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & c \end{bmatrix} \mid x, y, c \in \mathbf{R} \right\}$$

18. Нека $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ се следниве потпростори од $\mathbf{R}^4$:

$$\mathbf{U} = \{(a, b, c, d) \mid a + b + c + d = 0, a, b, c, d \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{V} = \{(a, b, c, d) \mid a = b, a, b, c, d \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{W} = \{(a, 0, 0, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}.$$

Докажете дека $\mathbf{R}^4 = \mathbf{U} + \mathbf{V}$, $\mathbf{R}^4 = \mathbf{U} + \mathbf{W}$, $\mathbf{R}^4 = \mathbf{V} + \mathbf{W}$. Во кој случај сумата е директна.

19. Дали во просторот $\mathbf{R}_{22}$ од сите квадратни матрици од втор ред, векторите $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ се лиенарно независни?

20. Во векторскиот простор $\mathbf{R}_{22}$ од сите реални квадратни матрици од втор ред $\mathbf{U}$ е потпросторот генериран од матриците

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Најдете една база и димезијата на $\mathbf{U}$.

21. Во просторот $\mathbf{R}_{33}$ од сите реални квадратни матрици од трет ред дадено е множеството S од сите антисиметрични матрици, т.е. матрици од видот

$$\begin{bmatrix} a & p & q \\ -p & b & r \\ -q & -r & c \end{bmatrix}.$$

Докажете дека S е потпростор од $\mathbf{R}_{33}$. Најдете ја димензијата на S и определете една база на S .

22. Кои од следните множества вектори

а) $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (4, 8, -3)$;

б) $\mathbf{x}_1 = (3, 3, 2)$, $\mathbf{x}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (4, 0, 0)$;

в) $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 4)$, $\mathbf{x}_2 = (2, -5, 6)$, $\mathbf{x}_3 = (3, 8, 3)$; и

г) $\mathbf{x}_1 = (2, 0, 3)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 2, -1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 6, 3)$

формираат база во $\mathbf{R}^3$?

23. Најдете една база и димензијата на векторскиот потпростор $\mathbf{U}$ генериран од решенијата на системот равенки:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2t = 0 \\ 2x + u - v = 0 \end{cases} \end{array}$$

24. Нека $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ се следниве потпростори од $\mathbf{R}^4$:

$$\mathbf{U} = \{(a, b, c, d) \mid b - 2c + d = 0\} \text{ и } \mathbf{V} = \{(a, b, c, d) \mid a = d, b = 2c\}.$$

Најдете една база и димензија на $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

25. Надополнете ги до база во $\mathbf{R}^3$ следните системи вектори:

а) $\mathbf{x}_1 = (3, -1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1)$, и

б) $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 2, 1)$.

26. Нека $\mathbf{L}$ е множеството реални полиноми со степен помал или еднаков на 3. Надополнете ги до база следниве системи вектори:
- $p_1(t) = 3 + 2t + 3t^2 - 2t^3$, $p_2(t) = t - t^3$; и
 - $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 3t^2$, $p_3(t) = t + 2t^2 - t^3$.
27. Нека е $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ база во векторскиот простор $\mathbf{L}$ и $\mathbf{e} \in \mathbf{L}$. Докажете дека векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ формираат база во $\mathbf{L}$ ако и само ако k -та координата на $\mathbf{e}$ во однос на базата $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ е различна од нула.
28. Докажете дека векторите $\mathbf{x}_1 = (2, 0, 3)$; $\mathbf{x}_2 = (1, 2, -2)$ и $\mathbf{x}_3 = (1, 6, 3)$ формираат база во просторот $\mathbf{R}^3$. Кој од овие вектори може да се замени со векторот $\mathbf{x} = (1, -1, 2)$, за повторно да се добие база на $\mathbf{R}^3$?
29. Нека $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ е база во векторскиот простор $\mathbf{L}$ и $\mathbf{e}', \mathbf{e}'' \in \mathbf{L}$. Најдете потребен и доволен услов (изразен со помош на координати) за да векторите $\mathbf{e}', \mathbf{e}'', \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$ повторно формираат база во $\mathbf{L}$.
30. Ако $\mathbf{L}_0$ е потпростор од конечно димензионалниот простор $\mathbf{L}$ и ако $\dim \mathbf{L} = \dim \mathbf{L}_0$, тогаш $\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}_0$. Докажете!
31. Најдете ги димензиите на збирот и пресекот линеарните обвивки на множествата вектори
 $A = \{(1, 3, 1, 3), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\}$ и $B = \{(1, 1, 1, 1), (3, 1, 3, 1), (1, 2, 1, 2)\}$.
32. Во просторот $\mathbf{R}^3$, најдете ја матрицата A на премин:
- од базата $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ во базата $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$
 - од базата $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ во базата $(1, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$.
33. Во просторот $\mathbf{R}^4$, најдете ја матрицата A на премин од базата $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$ во базата $(0, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 2, 3)$, $(2, 2, 3, 3)$, $(2, 3, 3, 3)$.
34. Докажете, дека ако два потпростора $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ од конечнодимензионалниот векторски простор $\mathbf{L}$ имаат нулти пресек, тогаш збирот на нивните димензии не е поголем од димензијата на $\mathbf{L}$.
35. Ако векторскиот простор $\mathbf{L}$ е директна сума на потпросторите $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, тогаш димензијата на $\mathbf{L}$ е еднаква на збирот на димензиите на $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Докажете!
36. Докажете дека за секој векторски потпростор $\mathbf{U}$ на просторот $\mathbf{R}^n$ може да се најде потпростор $\mathbf{V}$ на $\mathbf{R}^n$ таков што $\mathbf{R}^n = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$.
37. Докажете дека векторскиот простор $\mathbf{R}^n$ е директна сума на потпросторите $\mathbf{U}: x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ и $\mathbf{V}: x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
38. Најдете го рангот на системот вектори:
- $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(3, 3, 1)$ и $(1, -1, 1)$,
 - $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$ и $(1, 3, 5)$,

- в) $(2,3,2,3)$, $(1,2,-1,3)$, $(3,4,5,3)$ и $(-1,-1,-3,0)$,
 г) $(3,2,1,1)$, $(0,0,1,-1)$, $(0,0,1,1)$ и $(1,2,1,1)$,
 д) $(0,1,2,1,3,1)$, $(1,-1,0,2,1,0)$, $(2,-1,2,5,5,1)$ и $(1,0,2,3,4,1)$.

39. Во $\mathbf{R}^4$ најдете го рангот на следниов систем вектори: $(1,0,0,1)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,-1)$, $(2,1,1,0)$, $(0,1,-1,0)$. Потоа најдете два различни максимално линеарно независни подсистеми на овој систем.

40. Разгледувајќи ги матриците $A, B, \dots$ како “вектори” во векторскиот простор $\mathbf{R}_{22}$, односно $\mathbf{R}_{33}$, најдете го рангот на следниов систем од такви “вектори”:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

Потоа најдете еден максимален линеарно независен подсистем.

41. Најдете го рангот на матрицата:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \end{bmatrix},$ б) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$ в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$

г) $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix},$ д) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 3 & -9 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$

42. Дадени се матриците:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$

Да се најде рангот на матриците A, B, AB, BA . Дали матрицата A е не-сингуларна.

43. Користејќи ја теоремата на Кронекер-Капели, проверете дали дадениот систем има решенија:

а) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 3y = 5, \\ x + y = 3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y - z = 4 \end{cases}$

и во потврден случај решете го системот.

44. Најдете го параметарот a така да системот:

$$\text{а) } \begin{cases} -x+3y-2z+3u=1 \\ x+2y-z+4u=2 \\ x+7y-4z+11u=a \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x-2y+3z+u=2 \\ x+y+4z-u=3 \\ 2x+2y+8z-2u=a+2 \end{cases}$$

има решение.

45. Проверете дали е линеарно даденото пресликување:

а) $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ определено со $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$

б) $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ определено со $f(x, y, z) = xyz$

в) $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ определено со $f(x, y) = (x, 0, 0, y^2)$,

г) $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ определено со $f(x, y) = (x, 0, x+y, 0)$,

д) $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ определено со $f(x, y, z) = (x, yz)$.

46. Пресликувањата $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ и $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ се определени со

$$f(x, y) = (3x - 2y, 2x - y, -x + y) \text{ и } g(x, y, z) = (-2x + 3y - z, 3y - 2y + 5z)$$

Докажете дека:

а) f и g се линеарни,

б) $gf = e$ и

в) $fg \neq e$.

47. Дадени се линеарните трансформации $f, g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ определени со:

$$f(x, y, z) = (z, -y, x) \text{ и } g(x, y, z) = (x, y, z - x).$$

Пресметајте $f + g$, fg , gf .

48. Дадена е линеарната трансформација $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ определена со

а) $f(x, y, z) = (x - y, x + 2y + 3z, 2x - 2y)$,

б) $f(x, y, z) = (x - 2y, x - 3y, x + y - z)$.

Најдете една база и димензијата на $\ker f$ и $\text{Im } f$.

49. Нека f е линеарна трансформација на $\mathbf{R}^3$ определена со:

$$f(1, 1, 0) = (2, 3, 5), \quad f(0, 1, 1) = (0, -1, 2) \text{ и } f(1, 0, 0) = (2, 4, 2).$$

Докажете дека f има инверзна линеарна трансформација и дека

$$f^{-1}(p, s, t) = \left(\frac{1}{2}p, 2p - s, 7p - 3s - t\right).$$

50. При стандардната база, линеарната трансформација f ги пресликува векторите

а) $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ и $(1, 1, 0)$ во векторите $(0, 0, 1)$, $(2, 0, 1)$ и $(0, 2, 2)$, соодветно.

б) $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ и $(1, 1, 1)$ во векторите $(2, 3, 5)$, $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, -1)$, соодветно.

Најдете ја матрицата A на f . Дакожете дека постои инверзна трансформација g на f и најдете ја матрицата на g .

51. Дадени се линеарните трансформации $f, g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ со матрици

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

во некоја база. Во истата база најдете ги матриците на линеарните трансформации:

а) $f + g$, б) $f - 2g$, в) fg , г) gf .

52. Најдете ја матрицата на линеарната трансформација $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ определена со $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ во однос на:

а) стандардната база $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$,

б) базата $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$ и $(0, 0, 1)$,

в) базата $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 3)$ и $(0, 0, 1)$.

53. Проверете дали векторските потпростори $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ на просторот $\mathbf{R}^3$ се инваријантни во однос на линеарната трансформација f :

а) определена со

$$f(x, y, z) = (3x + y + z, x + 3y + x, 2z),$$

каде $\mathbf{V} = \{(t, t, 0) \mid t \in \mathbf{R}\}$ и $\mathbf{U} = \{(a, b, -a - b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

б) определена со $f(x, y, z) = (x + y, y, z)$, каде

$$\mathbf{U} = \{(a, 0, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\} \text{ и } \mathbf{V} = \{(t, t, 0) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

в) определена со матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

каде $\mathbf{U} = \{(3s, 0, 5s) \mid s \in \mathbf{R}\}$ и $\mathbf{V} = \{(3a, 0, 5a + b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

54. Докажете дека матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ е нула на полиномот

$$p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x$$

55. Докажете дека за матрицата од n -ти ред

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

минималниот полином е еднаков на карактеристичниот полином $(\lambda - 1)^n$.

56. Најдете ги сопствените вредности и соодветните сопствени вектори за матрицата:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

б) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$

в) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$

$$\text{г)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{д)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{е)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

57. Најдете ги сопствените вредности и сопствените вектори на линеарната трансформација $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ определена со:

а) $f(x, y, z) = (x + 3y, 3x - 2y - z, z - y),$

б) $f(x, y, z) = (x - 4z, 3y, -2x - z).$

58. Најдете ги сопствените вредности на квадратната матрица од n -ти ред

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

59. Докажете дека сопствените вредности на матрицата $A^T A$, каде

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\text{се } \lambda_1 = \sum_{i=1}^n a_i^2, \lambda_i = 0, i = 2, 3, \dots, n.$$

60. Најдете ги сопствените вредности и сопствените вектори на матриците

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ и } B = A - 5E. \text{ Каква е врската меѓу нив?}$$

61. Докажете дека матриците A и B се слични, со матрица на сличност P :

$$\text{а)} A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{б)} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ и } P = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 4 \\ -7 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

62. Најдете дијагонална матрица Λ , слична на матрицата A :

$$\text{а)} A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{б)} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

63. Нека $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Покажете дека A и B имаат раз-

лични карактеристични полиноми, но имаат ист минимален полином. Дали матриците A и B се слични?

64. Докажете дека дадената матрица A има една еднократна и една двократна сопствена вредност, но дека има три независни сопствени вектори, па затоа таа може да се дијагонализира и да се најде дијагоналната матрица Λ слична на A :

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

65. Докажете дека матриците A и A^T имаат ист карактеристичен полином, па значи и исти сопствени вредности.

66. Нека λ е сопствена вредност на матрицата A и $\mathbf{x}$ е соодветниот сопствен вектор.

а) Докажете дека $\mathbf{x}$ е сопствен вектор и на матрицата $B = A - \alpha E$, $\alpha \in \mathbf{R}$ и најдете ја соодветната сопствена вредност μ на B .

б) Нека $\lambda \neq 0$ и A е несингуларна матрица. Докажете дека $\mathbf{x}$ е сопствен вектор и на A^{-1} и најдете ја соодветната сопствена вредност на μ на A^{-1} .

67. Докажете, дека за несингуларната матрица A важи

$$\det(\lambda E - A^{-1}) = \det A \cdot \det\left(\frac{1}{\lambda} E - A\right),$$

па значи, ако сопствените вредности на A се $\lambda_i, i=1,2,\dots,n$, различни или не, тогаш сопствените вредности на A^{-1} се $\frac{1}{\lambda_i}, i=1,2,\dots,n$, а сопствени-те на матрицата A^{-1} се совпаѓаат со сопствените вектори на матрицата A .

68. Докажете дека сопствените вредности на матрицата A^2 се еднакви, со истата кратност, на квадратите на сопствените вредности на матрицата A .

69. Докажете дека сите сопствени вектори на матрицата A се сопствени вектори и на матрицата $p(A)$, каде $p(t)$ е произволен полином. Притоа, ако $AX = \lambda X$, тогаш $p(A)X = p(\lambda)X$.

70. Со транспонирање на релацијата $S^{-1}AS = \Lambda$ и најдете ја матрицата што ја дијагонализира матрицата A^T .

71. Со помош на елементарни трансформации сведете ја следнава полиномна матрица во канонична форма:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x+5 \end{bmatrix}, & \text{б) } \begin{bmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}, \\ \text{в) } \begin{bmatrix} x^2-1 & 0 \\ 0 & (x-1)^3 \end{bmatrix}, & \text{г) } \begin{bmatrix} x^2 & x^2-x & 3x^2 \\ x^2-x & 3x^2-x & x^3+4x^2-3x \\ x^2+x & x^2+x & 3x^2+3x \end{bmatrix}. \end{array}$$

72. Со помош на множеството инваријантни множители и фамилијата најголеми заеднички делители на минорите на полиномна матрица сведете ја следнава полиномна матрица во канонична форма:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x(x-2) & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)(x-2) \end{bmatrix}, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} x(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x(x-2) & 0 \\ 0 & 0 & x(x-3) \end{bmatrix},$$

73. Најдете ги инваријантните множители на следнава полиномна матрица:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3x^2+2x-3 & 2x-1 & x^2+2x-3 \\ 4x^2+3x-5 & 3x-2 & x^2+3x-4 \\ x^2+x-2 & x-2 & x-1 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} x-a & b & b & b \\ 0 & x-a & b & b \\ 0 & 0 & x-0 & b \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{bmatrix},$$

74. Најдете ги елементарните делители на следнава полиномна матрица:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x^3+2 & x^3+1 \\ 2x^3-x^2-x+3 & 2x^3-x^3-x-2 \end{bmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} x^2+2 & 2x+1 & x^2+1 \\ x^2+4x+4 & 2x+3 & x^2+4x+3 \\ x^2-4x+3 & 2x-1 & x^2-4x+2 \end{bmatrix}.$$

75. Полиномната матрица

$$A = \begin{bmatrix} -2x^2+5x+3 & -x^2+3x+2 & -x+6 \\ -3x^2+7x+11 & -3x^2+9x+1 & -2x+8 \\ -x^2+2x+8 & -2x^2+5x+3 & -x+4 \end{bmatrix}$$

поделете ја од лево со матрицата $xE - B$, каде

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

76. Полиномната матрица

$$A = \begin{bmatrix} -x^3+x^2+3x+6 & x^2+2x & x^2+2x+6 \\ -2x^3+2x^2+9x+8 & x^2+6x+1 & 2x^2+7x+8 \\ -x^3+x^2+3x+5 & x^2+2x-9 & x^2+5x-2 \end{bmatrix}$$

поделете ја од десно со матрицата $xE - B$, каде

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

77. Најдете ја Жордановата нормална форма на матрицата

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad \text{в) } \begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

78. Најдете ја Жордановата нормална форма на матрицата

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & n-2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & n-1 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & n & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

79. Докажете дека матрицата A е *нилпотентна*, т.е. $A^k = O$, за некој $k \in \mathbb{N}$ ако и само сите нејзини сопствени вредности се еднакви на нула.
80. Докажете дека нилпотентна ненулта матрица не може со трансформација на сличност да се дијагонализира.
81. За матрицата A ќе велиме дека е *иденпотентна* ако $A^2 = A$. Најдете ја Жордановата нормална форма на иденпотентна матрица A .
82. За матрицата A ќе велиме дека е *инволуторна* ако $A^2 = E$. Докажете дека инволуторна матрица е слична на дијагонална матрица и најдете го видот на дијагоналната матрица.
83. За матрицата A ќе велиме дека е *периодична* ако $A^k = E$, за некој $k \in \mathbb{N}$. Докажете дека периодична матрица е слична на дијагонална матрица и најдете го видот на дијагоналната матрица.
84. Најдете ја Жордановата нормална форма на матрицата

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}, \text{ со ред } n \geq 3.$$

85. Докажете дека секоја квадратна матрица може да се претстави како производ на две симетрични матрици, едната од кои е несунгуларна.
86. Линеарната трансформација од видот

$$y_1 = x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n,$$

$$y_2 = x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n,$$

.....

$$y_n = x_n$$

ја нарекуваме *триаголна*. Докажете дека триаголната линеарна трансформација е несингуларна и дека нејзината инверзна трансформација е повторно триаголна.

87. Следните квадратни форми сведете ги во каноничен вид:

а) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$,

б) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$

88. Над полето реални броеви најдете го нормалниот вид на квадратната форма:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

б) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$,

в) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

89. За следните квадратни форми најдете го нормалниот вид и една несингуларна линеарна трансформација со која се добива:

а) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$,

б) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$,

в) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

г) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

90. За следниве квадратни форми најдете барем по една линеарна трансформација која едната форма ја трансформира во другата:

а) $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$ и

$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$,

б) $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$ и

$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$.

91. Со помош на критериумот на Силвестер испитајте ја знаковата определеност на квадратната форма:

а) $x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_3 + 8x_2x_3$,

б) $-x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

в) $2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

92. Најдете ги сите вредности на параметарот c за кои е позитивно определена квадратната форма:

а) $5x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2cx_1x_2 + 2x_1x_3$,

в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2cx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

г) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2cx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$,

д) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2cx_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

94. (Питагорова теорема). Нека $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ се по парови заемно ортогонални вектори во евклидскиот простор $\mathbf{L}$. Докажете дека

$$\|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_n\|^2.$$

95. (Беселово неравенство). Нека $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ се ортонормирани вектори во Евклидскиот простор $\mathbf{L}$. Докажете дека за секој вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ важи неравенството

$$\sum_{i=1}^n |(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)| \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

Притоа знак за равенство важи ако и само ако $\mathbf{x} \in L(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\})$.

96. Докажете дека за секое множество $\mathbf{S}$ во Евклидскиот простор $\mathbf{L}$ важи $[(\mathbf{S}^\perp)^\perp]^\perp = \mathbf{S}^\perp$. Најдете пример на Евклидски простор $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{S}$ такво што $(\mathbf{S}^\perp)^\perp \neq \mathbf{S}$.

97. Докажете дека за произволни елементи $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ на Евклидскиот простор $\mathbf{L}$ важи

$$\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| - \|\mathbf{z} + \mathbf{x}\| - \|\mathbf{y} + \mathbf{z}\| + \|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}\| \geq 0.$$

98. Докажете, дека за секои елементи $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$ на Евклидскиот простор $\mathbf{L}$ важи

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \cdot \|\mathbf{z} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|.$$

99. Нека $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ се потпростори од Евклидскиот простор $\mathbf{L}$. Докажете, дека

а) ако $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$, тогаш $\mathbf{V}^\perp \subset \mathbf{U}^\perp$, и

б) $(\mathbf{U}^\perp)^\perp = \mathbf{U}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson, J. A.; Lewis, J.; Saylor, O. D.: *Discrete Mathematics with Combinatorics*, Pearson Education, Inc., 2004
2. Axler, S.: *Linear Algebra Done Right*, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
3. Chakrabarti, A.: *Elements of Ordinary Differential Equations and Special Functions*, New Age International Limited, New Delhi, 1996
4. Cvetković, D.: *Diskretne matematičke strukture*, Naučna knjiga, Beograd, 1995
5. Cvetković, D.; Simić, S.: *Diskretna matematika*, Prosveta, Niš, 1995
6. Ferrar, W. L.: *Finite Matrices*, Oxford and the Clarendon Press, Glasgow, 1960
7. Fischer, G.: *Lineare Algebra*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbade, 2005
8. Franklin, J. N.: *Matrix Theory*, Prentice-Hall, New Jersey, 1968
9. Gilbert, J.; Gilbert, L.: *Elements of Modern Algebra*, PWS, Boston, 1995
10. Hoffmann, B.: *About Vectors*, Prentice-Hall, New Jersey, 1966
11. Kuiper, N. H.: *Linear Algebra and Geometry*, North-Holand, Amsterdam, 1965
12. Lang, S.: *Linear Algebra*, Springer Verlag, 1987
13. Marcus, M.; Minc, H.: *Introduction to Linear Algebra*, The Macmillan Company, New York, 1965
14. Mitrović, D. S.; Đoković, D. Ž.: *Polinomi i matrice*, Naučna knjiga, Beograd, 1991
15. Shephard, G. C.: *Vector Spaces of Finite Dimension*, Oliver & Boyd, Edinbyrg, 1966
16. Ušćumlić, M. P.; Miličić, P. M.: *Zbirka zadataka iz više matematike* I, 1994, II, 1989, Nauka, Beograd
17. Белман, Р.: *Введение в теорию матриц*, Наука, Москва, 1969
18. Воеводин, В. В.: *Линейная алгебра*, Наука, Москва, 1974
19. Выгодский, М. Я.: *Аналитическая геометрия*, Наука, Москва, 1963
20. Гантмахер, Ф. Р.: *Теория матриц*, Москва, 1988
21. Гельфанд, И. М.: *Лекции по линейной алгебре*, Наука, Москва, 1966
22. Дьедонне, Ж.: *Линейная алгебра и элементарная геометрия*, Наука, Москва, 1972
23. Ефимов, Н. В.: *Краткий курс аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1975
24. Ильин, В. А.; Позняк, Э. Г.: *Аналитическая геометрия*, Наука, 1981
25. Канатников, А. Н.; Крищенко, А. П.: *Линейная алгебра*, МГТУ, Москва, 2002
26. Карчица, Д.: *Конечно-димензионални векторски простори*, Уни. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1985

27. Малчески, Р.; Малческа, В.: *Алгебарски структури*, ФОН универзитет, Скопје, 2010
28. Мальцев, А. И.: *Основы линейной алгебры*, Наука, Москва, 1970
29. Проскуряков, И. В.: *Сборник задач по линейной алгебре*, Наука, Москва, 1974
30. Райков, Д. А.: *Векторные пространства*, Наука, Москва, 1962
31. Самарџиски, А.: *Векторска алгебра низ задачи*, Уни. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1991
32. Тышкевич, А. С.; Феденко, А. С.: *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, Высшэйшая школа, Минск, 1968
33. Улчар, Ј.: *Аналитичка геометрија со векторска алгебра*, Нумерус, Скопје, 1995
34. Целакоски, Н.: *Задачи по линейна алгебра*, Проосветно дело, Скопје, 1996
35. Цубербилер, О. Н.: *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1966
36. Шилов, Г. Е.: *Конечномерные линейные пространства*, Наука, Москва, 1969

ИНДЕКС НА ПОИМИ

А

Агол меѓу вектори, 325
Агол меѓу рамнини, 146
Алгебарска линија, 139
Алгебарска површина, 138
Алгебарска површина од n -ти ред, 138
Алгебарски комплемент (кофактор), 29
Автоморфизам, 239
Анулаторен полином на матрица, 259

Б

База на векторски простор, 200
Базен минор на матрица, 211
Беселово неравенство, 342
Блок (клетка), 51
Блок-матрица, 51
Блокови (клетки) на блок-матрица, 51

В

Вектор (векторска величина), 79
Векторска равенка на права, 147
Векторска равенка на рамнина, 140
Векторски производ на вектори, 109
Векторски простор, 185

Г

Гаусов метод, 221
Главни минори на матрица, 321
Главни оски на двополов хиперболоид, 169
Главни оски на еднополов хиперболоид, 168
Главни оски на елипсоид, 168
Генератриса, 135

Д

Двоен векторски производ, 121
Двуполов хиперболоид, 168
Десен координатен систем, 109
Десна тројка вектори, 108
Детерминанта на Вандермонт, 38
Детерминанта на матрица, 19
Детерминанта на систем
 линеарни равенки, 47
Дефект на пресликување, 235
Дијагонализирачка матрица, 266
Дијагонална матрица, 9
Димензија на векторски простор, 202
Директна сума на потпростори, 194
Должина (норма) на вектор, 324
Должина на орбита, 13
Должина на отсечка, 329
Долнотриаголна матрица, 9

Е

Евклидски простор, 323
Единечен вектор (орт), 87, 324
Единична матрица, 7
Еднакви вектори, 80
Еднакви матрици, 1
Еднополов хиперболоид, 168
Еквивалентна квадратна форма, 309
Еквивалентни матрици, 269
Еквивалентни системи линеарни
 равенки, 219
Еквивалентни фамилии вектори, 198
Елементарни делители на обопштена
 Жорданова матрица, 304
Елементарни трансформации, 212, 269
Елипсоид, 167
Елиптичен параболоид, 171
Елиптичен цилиндар, 170

Ж

Жорданова нормална форма на
 матрица, 299

З

Заедничка нормала на две прави, 154
Збир на два вектора, 85, 185
Збир на трансформации, 240
Збир на матрици, 2
Знак на пермутација, 14

И

Идемпотентна матрица, 57, 340
Идентитет на Дедикинг, 194
Идентично пресликување, 232
Изоморфизам, 236
Изоморфни простори, 236
Имагинарен елипсоид, 168
Имагинарен конус од втор ред, 169
Имагинарен цилиндар, 170
Инваријантен потпростор, 245
Инверзibilна матрица, 44
Инверзна линеарна трансформација, 307
Инверзна матрица, 44
Инволуторна матрица, 56, 340
Интерполационен полином
на Лагранж, 50
Истонасочени вектори, 80
 i -та редица на матрица, 1

Ј

Јадро на линеарно пресликување, 234
 j -та колона на матрица, 1

К

Каноничен вид на квадратна форма, 313
Канонична равенка на еднополов
хиперболоид, 168
Канонична равенка на двополов
елипсоид, 169
Канонична равенка на елипсоид, 168
Канонични равенки на права, 147
Канонична равенка на реален конус од
втор ред, 169
Канонична форма на матрица, 275
Карактеристична матрица на матрица, 259
Карактеристичен полином на линеарна
трансформација, 261
Карактеристичен полином на матрица, 259
Квадратна матрица, 1
Квадратна форма, 307
Квазидијагонална (блок-дијагонална)
матрица, 57
Клетка на Жордан, 297
Коефициенти на квадратен дел, 162
Коефициенти на линеарен дел, 162
Коефициенти на разложување
на вектор, 95
Колинеарни вектори, 79
Количник при делење од лево (десно), 284
Компланарни вектори, 91
Компонента на вектор врз оска, 80

Компоненти на разложување
на вектор, 95
Комутирачки матрици, 6
Конечнодимензионален векторски
простор, 202
Конус од втор ред, 169
Конусна површина со теме во
координатниот почеток, 136
Координатен почеток, 77
Координати на вектор, 82, 205
Координатна база, 95
Координатни оски, 77
Косинусни правци на вектор, 84, 325
Кососиметрична матрица, 50
Кошиев број за пермутација, 14
Крамерово правило, 48
Критериум на Силвестер, 321
 k -цикл, 12

Л

Лева тројка вектори, 108
Линеарна комбинација на вектори, 89, 191
Линеарна обвивка на множество, 191
Линеарна трансформација, 239
-- на променливи, 306
Линеарно зависни вектори, 89, 196
Линеарно независни вектори, 90, 196
Линеарно пресликување, 231

М

Максимално линеарно независна
подфамилија, 207
Матрица на Жордан, 298
Матрица на квадратна форма, 308
Матрица на линеарна трансформација, 250
-- трансформација, 306
Матрица на премин од база во база, 217
Матрица на Фробениус придружена на
полиноми, 287
Матрица од ред $n \times m$, 1
Матрица придружена на полином, 286
Матричен полином, 283
Матрична нула на полином, 259
 m -димензионална отворена коцка, 329
Метод на издвојување на линеарни
множители, 36
Метод на рекурентни врски, 37
Мешан производ на вектори, 116
Минимален полином на линеарна
трансформација, 290
--- матрица, 293
Минор на детерминанта, 29

Множество инваријантни
множителі, 270, 275
Множество елементарни делители на
полином, 275
- - - матрица, 275

Н

Негативно определена квадратна
форма, 319
Непарна пермутација, 14
Непротивречен систем линеарни
равенки, 219
Неравенство на Коши- Буњаковски-
Шварц, 324
- - триаголник, 324
Несингуларна матрица, 43
Низа на Фибоначи, 65
Нилпотентна матрица, 340
Нормален вид на квадратна
форма, 316, 317
Нормален вид на равенки на права, 158
Нормален вид на равенка на рамнина, 144
Нулта матрица, 2
Нулти вектор, 79, 185
Нулто пресликување, 231

О

Обопштена Жорданова матрица, 303
Обопштена клетка на Жордан, 302
Општа нормална форма на матрица, 289
Општа равенка на рамнина, 140
Општа равенка на површина, 162
Орбита на елемент, 13
Орт (единечен вектор), 87, 324
Ортогонален комплемент на
потпростор, 327
Ортогонална база, 327
Ортогонални вектори, 325
Ортонормирана база, 327
Остаток при делење од лево (десно), 284
Отсечка во просторот $\mathbf{R}^m$, 328

П

Параболичен цилиндар, 171
Параболоид, 171
Параметарски равенки, 137
Параметарски равенки на права, 147
Параметарски равенки на рамнина, 142
Парна пермутација, 14
Периодична матрица, 340
Питагорова теорема, 342

Површина од втор ред, 162
Позитивно определена квадратна
форма, 319
Полином од линеарна трансформација, 241
Полиномна матрица, 269
Полуправа во просторот $\mathbf{R}^m$, 328
Потпростор на векторски простор, 188
Права во просторот $\mathbf{R}^m$, 328
Правило на триаголник, 85
Проекција на вектор, 80
Проекција на простор на потпростор, 243
Производ на вектор со скалар, 87, 185
Производ на матрица со број, 3
- -, матрици, 5
Производ на трансформација со
скалар, 241
Противречен систем линеарни
равенки, 219
Проширена матрица на систем линеарни
равенки, 221

Р

Равенка на површина, 133
Равенки на права низ две точки, 148
Равенка на рамнина низ три точки, 141
Равенки на центар на површина
од втор ред, 164
Радиус вектор на точка, 83
Разлика на вектори, 86
Разложување на вектор, 95, 205
Ранг на квадратна форма, 309
Ранг на матрица, 209
Ранг на пресликување, 235
Ранг на фамилија вектори, 208
Растојание од точка до рамнина, 145
Реален векторски простор, 89
Реален елипсоид, 168
Реален конус од втор ред, 169
Реален цилиндар, 170
Реална Жорданова нормална форма, 305
Рекурентна врска, 37
Рестрикција на трансформација, 247
Решение на систем линеарни
равенки, 219, 227

С

Сигнатура на реална квадратна форма, 318
Симбол на Кронекер, 7
Симетрична матрица, 308
Сингуларна матрица, 43
Скалар (скаларна величина), 79
Скаларен производ на вектори, 103, 323

Скаларна матрица, 9
 Слични матрици, 255
 Слободен член на равенка, 162
 Слободни непознати, 225
 Соседни темиња на коцка, 329
 Сопствен вектор на линеарна
 трансформација, 262
 Сопствена вредност на линеарна
 трансформација, 262
 Спротивна матрица, 2
 Спротивен вектор, 80, 185
 Спротивни темиња на коцка, 329
 Спротивнонасочени вектори, 80
 Стандардно упростување на равенка на
 површина од втор ред, 166
 Степен на матрица, 7
 Субматрица на матрица, 28
 Сума на потпростори, 192

Т

Теорема за ортогонализација, 327
 Теорема на Кронекер-Капели, 224
 Теорема на Лаплас, 31
 Теорема на Хамилтон – Кели, 295
 Транспозиција, 12
 Транспонирана матрица, 10
 Трансцедентна површина, 138
 Триаголна детерминанта, 20, 341
 Тривијално решение, 227
 Тридијагонална матрица, 62

У

Унимодуларна матрица, 280

Ф

Фамилија вектори генерира простор, 200
 Фамилија линеарно се изразува, 198
 Фамилија најголеми заеднички делители
 на минори, 273
 Фундаментален систем решенија, 229
 Фуријеви коефициенти на вектор во
 однос на база, 327

Х

Хиперболичен параболоид, 171
 Хиперболичен цилиндар, 170
 Хомоген систем линеарни равенки, 227
 Хомогена функција од n -ти ред, 137

Ц

Центар на површина од втор ред, 164
 Централна површина од втор ред, 165
 Централна површина со генератриса, 135
 Целобројна матрица, 46

Ч

Член на детерминанта, 19

Ш

Шурови комплементи, 71