УНИВЕРЗИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ" - БИТОЛА
ФАКУЛТЕТ ЗА ТУРИЗАМ И УГОСТИТЕЛСТВО - ОХРИД

На мојот брат при-
јател и колега Димко

Д-р Никола Речкоски

ВЕРОЈАТНОСТ

Охрид, 1998

Издавач:
Институт за истражување на туризмот, Охрид

За издавачот:
Проф. д-р Науме Мариноски, директор

Рецензенти:
Проф. д-р Боро Пиперес事, професор на Електротехничкиот факултет во Скопје

Проф. д-р Никола Пандески, професор на Природно - математичкиот факултет во Скопје

Компјутерска обработка:
Цветко Андреески

CIP - Каталогизација во публикацијата
Народна и универзитетска библиотека
"Св. Климент Охридски", Скопје

РЕЧКОСКИ, Никола
Веројатност / Никола Речкоски - Охрид:
Институт за истражување на туризмот, 1998. -

ISBN 9989-800-16-2

ПРЕДГОВОР

Во овој учебник има доволно материјал од теоријата на веројатноста за едногодишпен курс со два до три часа неделно, но може со соодветен избор на материјалот што ќе го направи самиот наставник во согласност со наставната програма да се предаде и во еден семестар.

Некои докази се дадени повеќе нагледно, интуитивно, но има и такви кои се изведени со доволна математичка строгост. За полесно и подобро совладување на материјата решени се и многу примери и даден е голем број на задачи за вежбање, така што во голема мерка книгата претставува и учебник и збирка на задачи.

Учебникот е напишан пред сé за студентите од техничките и економските факултети, но може да им служи и на студентите по математика како воведен курс во теоријата на веројатноста.

На крај, искрена благодарност на моите рецензенти, колеги со кои што имам долгогодишно дружење и соработка.

Авторот

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВА

1.1. Множества и елементи

Поимот *множество* е основен и затоа не може да се дефинира со други поими. Секое множество е составено од елементи и поради тоа множеството е наполно определено ако се знае кои се неговите елементи.

Примери:

1) Множество од природните броеви: 1, 2, 3,…
2) Множество од сите прави во рамнината кои минуваат низ одредена точка;
3) Множество од сите студенти на прва година на некој факултет;
4) Ако тркаламе коцка за играње, можни исходи се множеството од броевите: 1, 2, 3, 4, 5, и 6.

Вообичаено е множествата да се обележуваат со големи букви: A, B, C, X, Ω итн., а нивните елементи со мали букви. Ќе пишуваме:

$p \in A$ ако p е елемент од A.

На пример, ако множеството од природните броеви го обележиме со N, тогаш $5 \in N$. Дека даден елемент p не припаѓа на множеството A, ќе пишуваме: $p \notin A$.

Ако секој елемент од множеството A е елемент и на множеството B, т.е. од $p \in A \Rightarrow$ (следи) $p \in B$, тогаш велиме дека A е *подмножество* од B и тоа ќе го запишуваме $A \subset B$. Ако важи и обратното: од $p \in B \Rightarrow p \in A$, т.е. $B \subset A$, во тој случај велиме дека множествата A и B се *еднакви* и ќе пишуваме $A = B$. Инаку кажано две множества се еднакви ако се составени од исти елементи. Кога две множества A и B не се еднакви, пишуваме $A \neq B$.

Рековме дека едно множество е определено ако се знаат неговите елементи. Според тоа, треба на некој начин да се определет елементите на дадено множество. Ако тоа е составено од конечен број елементи, тогаш можеме да ги испишуваме сите, како во примерот 4), $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Но, кај множества со бесконечно многу елементи не можеме така да постапиме и затоа треба да се кажат особините на елементите од даденото множество. На пример:

$$B = \{x : x \text{ е природен број поголем од } 10\}.$$

1.2. Операции со множества

Нека A и B се произволни множества. *Унијата* на A и B ја бележиме со $A \cup B$ и тоа е множество чии што елементи припаѓаат на A или на B. Од самата дефиниција за унија на две множества A и B, произлегува дека:

$$A \cup B = B \cup A \text{ - комутативен закон}$$

Понатаму, ако имаме три множества A, B и C, тогаш нивната унија е еднаква на $(A \cup B) \cup C$ или $A \cup (B \cup C)$, од каде што следува дека:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

што значи дека важи асоцијативниот закон при унијата и понатаму ќе пишуваме без загради $A \cup B \cup C$. На индуктивен начин може да се прави унија од повеќе множества: $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \text{ - кратка}$$

ознака за унијата.

Пресекот на две дадени множества A и B го обележуваме со $A \cap B$ и тоа е множеството чии што елементи припаѓаат и на A и на B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$$

И за пресекот на две множества важи комутативниот закон:

$$A \cap B = B \cap A$$

Доказот произлегува од самата дефиниција. Пресек може да се прави и од три множества A, B, и C на следниот начин:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Еднаквоста следи од дефиницијата и затоа натаму ќе пишуваме едноставно $A \cap B \cap C$. Индуктивно, пресек може да се направи од n - множества: $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cap A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$$ - кратка

ознака.

Кај пресекот на две множества A и B има еден карактеристичен случај - тоа е кога A и B немаат заеднички елемент и затоа $A \cap B$ е множество без елементи. Заради тоа е потребно да се воведе празно множество, кое постојано ќе го обележуваме со: „$\varnothing$".

За две множества A и B чиј што пресек е празното множество ќе велиме дека се *дисјункшни.*

Разликаша на две дадени множества A и B е множество кое ќе го означуваме со $A \setminus B$, при што:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ но } x \notin B\}$$

Разликата можеме и вака да ја запишеме:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$$

Ако $A \subset B$ и $A \neq B$, тогаш $A \setminus B = \varnothing$, а $B \setminus A \neq \varnothing$, што значи:

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

Комйлеменш на подмножеството $A \subset S$, каде што S е фиксно множество, е множеството:

$$S \setminus A = A'$$

A' е комплемент за A во S. Комплемент за A' е $S \setminus A' = A$, што значи комплемент за A' е даденото множество A:

$$(A')' = A$$

Од дефиницијата имаме дека:

$$A \cap A' = \varnothing \quad \text{и} \quad A \cup A' = S.$$

1.3. Производ на множества

Нека A и B се две множества. *Множеството производ* $A \times B$ се состои од сите подредени парови (a, b), каде $a \in A$ и $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

Производ на множеството A само со себе $A \times A$ се обележува со A^2 и се вика квадрат на множеството. Ако $A = \varnothing$, тогаш $A \times B = \varnothing$. Понатаму, $A \times B \neq B \times A$.

Пример: нека $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{a, b\}$. Тогаш:

$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Ако множеството A има m-елементи и множеството B има n-елементи, тогаш нивниот производ $A \times B$ ќе има $m \cdot n$ елементи.

Производ може да се прави и од три и повеќе множества на природен начин. Производ на множествата $A_1, A_2, ..., A_m$ се пишува $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ и елементи му се сите подредени m-торки $(a_1, a_2, ..., a_m)$, каде $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, ...,$ $a_m \in A_m$.

1.4. Множество од реални броеви

Еден од првите поими воведени во математиката уште во далечната древност е поимот број. Неопходната потреба во практиката и науката довела до претераното развивање и усложнување на поимот број.

Како резултат од броењето на одделни предмети, животни, луѓе и друго, прво се појавиле *природните* броеви $1, 2, 3, ..., n, ...$ што ние ќе ги обележуваме со буквата N.

Во множеството на природните броеви, ако собереме или помножиме два броја, добиваме пак природен број; но одземањето на два природни броја не е секогаш природен број. Ако $a < b$, тогаш $b - a$ не е природен број, па затоа се воведени негативните цели броеви 0, -1, -2,...

Множеството $\{0.\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ се вика *множество на целите броеви.*

Делење на два цели броеви не мора да биде цел број, на пример $2:3 = \dfrac{2}{3}$ и затоа мора да се прошири поимот за број на *рационален број.*

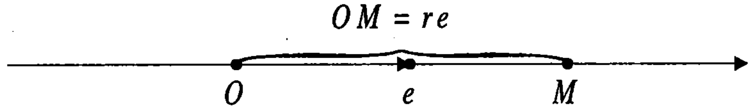
Најопшто, рационален број се пишува како $\dfrac{p}{q}$, каде p и q се цели броеви, $q \neq 0$ и уште p и q се взаемно прости, т.е. немаат заеднички делител, што ќе го запишуваме $(p,q)=1$. На пример, 2 и 3 се взаемно прости и затоа $(2,3)=1$. Бидејќи секој цел број q може да се запише како $\dfrac{q}{1}$, т.е. како дропка, следи дека целите броеви се рационални.

Нека ја разгледаме бројната права Ox (Слика 1.4.1.). при избрана отсечка за единица ($e = 1$), на секој рационален број r, може на единствен начин да му се придружи точка M од оската Ox, така што должината на отсечката OM ќе биде еднаква на $r \cdot e$ и ако $r > 0$, M е надесно од O, ако $r < 0$, M е налево од O, а за $r = 0$, M се совпаѓа со O, т.е. $M \equiv O$.

Навистина, ако r е цел број, тогаш отсечката e ја нанесуваме r пати на десно или налево од точката O, во зависност од тоа дали $r > 0$, или $r < 0$. Во случај $r = \dfrac{p}{q}$, ја делиме отсечката e на q - еднакви делови и еден таков дел нанесуваме на бројната права p пати на опишаниот начин.

Така покажавме дека на секој рационален број, при избрана мерна единица, одговара точно една точка од оската Ox.

Обратното, меѓутоа, не е секогаш точно, т.е. не на секоја точка M од бројната права, при избрана мерна единица e, одговара рационален број r, таков што $OM = r \cdot e$.



Слика 1.4.1.

На пример, ако отсечката OM е еднаква на дијагоналата на квадратот со страна еднаква на $l=1$, според Питагоровата теорема $OM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Сега ќе покажеме дека $\sqrt{2}$ не е рационален број.

Навистина, нека претпоставиме дека $\sqrt{2}$ е рационален број:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

каде $(p,q)=1$, т.е. барем еден од броевите p, q е непарен. Со квадрирање добиваме:

$$\frac{p^2}{q^2}=2, \text{ или } p^2=2q^2$$

што значи дека p^2 е парен број, па мора и p да биде парен број. Значи $p=2m$. Со заменување наместо p во $p^2=2q^2$, добиваме

$$4m^2=2q^2, \text{ или } q^2=2m^2$$

т.е. и q е парен број, што е контрадикција со фактот дека барем еден од броевите p, q е непарен. Заклучуваме дека нашата претпоставка дека $\sqrt{2}$ е рационален број е погрешна, што значи $\sqrt{2}$ не е рационален број. Броевите кои не се рационални се викаат *ирационални броеви.*

За ирационалните броеви е карактеристично тоа што секој ирационален број може да се запише како бескраен непериодичен десетичен број, додека рационалните пак, се претставуваат со бескрајни периодични десетични броеви.

Заедно, рационалните и ирационалните броеви го даваат *множеството на реалните броеви*, кое вообичаено се означува со R.

Меѓу множеството на реалните броеви и точките од бројната права Ox постои обратно еднозначна кореспонденција. Тоа ќе рече, на секој реален број одговара точно една точка M од Ox и на секоја точка M од бројната оска Ox одговара точно еден реален број, таков што

$OM = a \cdot e = a$, каде што $e = 1$ е мерната отсечка со должина 1. Реалниот број $\boldsymbol{a}$ од $OM = a \cdot e$, се вика уште *координата (апсциса)* за точката M по однос на мерната отсечка e.

За реалните броеви е точна и следната особина: меѓу два реални броеви a и b има барем еден број реален број c. Нека $a < b$. го разгледуваме бројот $c = \dfrac{a+b}{2}$:

$$\frac{a+b}{2} > \frac{a+a}{2} = a, \quad \text{и} \quad \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b, \quad \text{т.е.} \quad a < c < b.$$

Така, покажавме дека меѓу два реални броја a и b има бесконечно многу реални броеви.

Подоцна, за потребите на алгебрата, на пример за решавање на равенката

$$x^2 + 1 = 0$$

се воведени *комплексните* броеви, кои што се чиста креација на човековиот ум. Се разбира, тие денес се користат не само во алгебрата, туку и во многу други области од науката, како што е на пример, електротехниката.

Познавањата од средните училишта за комплексните броеви се доволни за овој курс по математика и затоа тука нема да се задржуваме на нив.

1.5. Апсолутна вредност

Нека a е реален број. Ги разгледуваме броевите a и $-a$, се разбира едниот од нив е поголем од 0.

Апсолутна вредност на реалниот број a се пишува со $|a|$ и се определува:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{за } a > 0 \\ -a, & \text{за } a < 0 \\ 0, & \text{за } a = 0 \end{cases}$$

Всушност, $|a|$ е поголемиот од броевите a и $-a$. Затоа во општ случај можеме да пишуваме:

$$\pm a \le |a|$$

Нека сега $\varepsilon > 0$. Тогаш од $|a| \le \varepsilon$ имаме:

$$a \le \varepsilon, \text{ и } -a \le \varepsilon$$

Второто неравенство помножено со - 1 дава $a \ge -\varepsilon$, од каде $|a| \le \varepsilon$ е еквивалентно со $-\varepsilon \le a \le \varepsilon$. Од $|b| \ge \varepsilon$ имаме или $b \ge \varepsilon$, или $-b \ge \varepsilon$. Со множење на второто неравенство со - 1 добиваме $b \le -\varepsilon$.

Тука даваме уште неколку корисни особини за апсолутната вредност.

1. $|a+b| \le |a| + |b|$

Доказ:

$$-|a| \le a \le |a|$$

$$-|b| \le b \le |b|$$

Со собирање на двете неравенства добиваме:

$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

Ако $a + b \ge 0$, тогаш $|a+b| = a + b \le |a| + |b|$.

Ако $a + b < 0$, тогаш $-(a+b) > 0$ и затоа

$$|a+b| = -(a+b) \le |a| + |b|$$

Нека сега се дадени три броеви a_1, a_2 и a_3 и тогаш:

$$|a_1 + a_2 + a_3| = |(a_1 + a_2) + a_3| \le |a_1 + a_2| + |a_3| \le |a_1| + |a_2| + |a_3|$$

На тој начин докажуваме дека:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Кратко запишано, последното гласи:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|$$

каде $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

„Σ" се чита сума од - до.

2. $|a+b| \geq |a| - |b|$

Доказ:

$$|a| = |a + b + (-b)| \leq |a+b| + |b|$$

од каде

$$|a| - |b| \leq |a+b|$$

На ист начин $|b| - |a| \leq |a+b|$.

3. Нека се a и b реални броеви. Тогаш:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Доказ:

Прво нека $a > 0$ и $b > 0$.

$$|ab| = ab = |a| \cdot |b|$$

Ако $a < 0$ и $b > 0$, тогаш

$$|ab| = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b|$$

Оваа особина може на истиот начин да се обопшти за n броеви, $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$:

$$|a_1 a_2 \ldots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|$$

Пократко можеме да запишеме:

$$\left|\prod_{j=1}^{n} a_j\right| = \prod_{j=1}^{n} |a_j|, \quad \text{каде} \quad \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

4. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

Доказ:

Како $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$ имаме $\left|\frac{a}{b}\right|=|a|\cdot\left|\frac{1}{b}\right|$, но $\left|\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{|b|}$ и затоа $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$.

1.6. Интервали

Множеството од сите реални броеви x меѓу дадени два броја a и b, се вика *интервал*.

1. Интервалот е затворен ако важи: $a\leq x\leq b$ и се пишува:

$$[a,b]=\{x: x\in R \text{ и } a\leq x\leq b\}.$$

2. Интервалот е отворен, ако важи $a<x<b$ и пишуваме:

$$(a,b)=\{x: x\in R \text{ и } a<x<b\}.$$

3. Полуотворен или полузатворен интервал е:

$$[a,b)=\{x: x\in R \text{ и } a\leq x<b\}$$

$$(a,b]=\{x: x\in R \text{ и } a<x\leq b\}.$$

Множеството R од реалните броеви уште се обележува со $(-\infty,\infty)$, каде што $-\infty$ и ∞ се само симболи, при што за секој реален број x важи: $-\infty<x<\infty$. Сега можеме да воведеме и вакви интервали:

$$(-\infty,b]=\{x: -\infty<x\leq b\}$$

$$[a,\infty)=\{x: a\leq x<\infty\}$$

и сосема слично:

$$(-\infty,b)=\{x: -\infty<x<b\}$$

$$(a,\infty)=\{x: a<x<\infty\}$$

Секој конечен интервал за кој што точката (бројот) a е средина се вика *околина за точката a*.

Имаме право броевите да ги викаме точки, затоа што воспоставивме обратно еднозначна кореспонденција меѓу реалните броеви и точките од бројната оска.

Така на пример, $(a-\delta, a+\delta)$ е околина за a со должина $a+\delta-(a-\delta)=2\delta$. Од погоре произлегува дека интервалот $(a-\delta, a+\delta)$ може да се запише и вака: $|x-a|<\delta$, додека пак, $[a-\delta, a+\delta]$ со $|x-a|\leq\delta$. Едниот е отворен интервал, а другиот е затворен.

ГЛАВА 2

2. КОМБИНАТОРИКА

2.1. Основен принцип во комбинаторика

Методите и поимите од комбинаториката имаат примена во речиси сите области од математиката, како што се теоријата на веројатност, алгебрата и други. Овде ќе ги изнесеме основните поими од комбинаториката.

Основен принцип во комбинаториката е правилото за множење на можности (начини...).

Најпрво даваме еден едноставен пример за тој принцип.

Од градот A во градот B водат m - патишта; од градот B во градот C водат n - патишта. На колку различни начини може да се оди од A преку B во C.

Решение: Бираме еден пат од A во B. кога ќе стигнеме во B по тој пат, од B во C можеме да избереме n - патишта за да стигнеме во C. Бидејќи од A во B имаме m избори и секој избор дава n избори од B во C, следи дека целокупниот број на начини е $m \cdot n$, што значи производ на можностите од A во B по можностите од B во C. Во општ вид овој основен принцип во комбинаториката можеме да го формулираме на следниот начин:

Нека е потребно да се исполнат k операции вкупно. Првата операција на n_1 начини, втората на n_2 начини итн., k - та операција на n_k начини. Според правилото за множење на можности, сите k операции можат да се изведат на:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \quad \text{- начини}$$

Еве уште еден пример за ова правило:

Пример. Ако во фудбалското првенство се натпреваруваат 18 екипи, прашање е на колку начини можат да се поделат сребрениот и златниот медал.

Решение: Ако првото место го освои една од 18-те екипи, за второто место ќе конкурираат 17 екипи, но како на првото место може да биде било која од 18-те екипи, според правилото за множење на можности, целокупниот број ќе биде $18 \cdot 17 = 306$.

Задача 1. Колку четирицифрени броеви можат да се состават од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 ако:

а) ниту една од цифрите не се повторува;

б) цифрите можат да се повторуваат;

в) броевите треба да бидат непарни?

Решение:

а) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

б) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$

в) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$

2.2. Варијации

Нека имаме n - елементи, или како што е вообичаено, нека ги земеме природните броеви: 1, 2, 3,... , n. Ако е $1 \leq k \leq n$, прашање е колку подредувања од по k - броеви се можни, ако нема повторување на дадените броеви?

Секое вакво подредување се вика *варијација без повторување од класа k*. На пример, една ваква варијација е $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$.

Бројот на сите варијации без повторување од класа k од дадените n - броеви, го означуваме со V_n^k. Задача ни е тука да го определиме тој број.

Решение: За $k = 1$, секој број за себе е варијација и очигледно $V_n^1 = n$.

За $k = 2$; на прво место може да ставиме еден од броевите 1, 2,... n; а на второ n - 1, па по правилото за множење $V_n^2 = n(n-1)$.

За $k=3$: $V_n^3 = n(n-1)(n-2)$.

На тој начин, во општ случај ќе биде:

$$V_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Специјален случај е кога $k = n$. Тогаш варијациите претставуваат *пермутации без повторување* од дадените броеви и наместо V_n^n се пишува P_n. Оттука бројот на пермутации без повторување ќе биде:

$$P_n = n(n-1)\cdots(n-1+1) = n(n-1)\cdots 1$$

Последниот производ накусо се бележи со:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$$

По дефиниција се зема $0! = 1$.

Задача 2: На колку начини може да се подредат броевите 1, 2, 3,..., $2n$, така што секој парен број да биде на парно место.

Решение: Од непарните, како и од парните броеви можеме да направиме по $n!$ подредувања и затоа по правилото за множење, целокупниот број ќе биде

$$n!\cdot n! = (n!)^2$$

2.3. Варијации со повторување.

Овде од броевите $1, 2, \ldots, n$ треба да правиме подредувања од по k броеви каде $1 \le k \le n$, ако може да се повтроуваат броевите. Таквите подредувања се викаат *варијации со повторување од класа k* и нивниот број го означуваме со $\overline{V}_n^k$. Наша задача е да го определиме бројот $\overline{V}_n^k$.

Решение: Го разгледуваме множеството $\{1, 2, \ldots, n\} = A$. Од него правиме производ k пати, т.е. A^k. Видовме, бројот на елементи во A^k е $\underbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ пати}} = n^k$. Според тоа, имаме:

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

Задача 3: Колку телефонски броеви составени од шест цифри можат да се направат ако:

а) нема повторување;

б) има повторување?

Решение:

а) $V_{10}^{6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$

б) $\overline{V}_{10}^{6} = 10^{6}$

2.4. Комбинации

Нека S е множество од n елементи, $S = \{1,2,...,n\}$. Било кое подмножество од k - елементи од S се вика *комбинација без повторување од класа k*. Тука нè интересира колкав е бројот на комбинациите.

Решение: Нека бројот на комбинациите го означиме со C_n^k. Постапуваме вака: избираме k броеви; од нив можеме да направиме $k!$ подредувања. Понатаму од останатите n - k има $(n$ - $k)!$ подредувања. Ако испишеме една пермутација од земените k и надесно допишуваме пермутации од останатите броеви n - k, на тој начин формираме пермутации од сите n броеви. По правилото за множење на можности, целокупниот број ќе биде $k! \cdot (n-k)!$, но како избор на k броеви можеме да направиме на C_n^k - начини, затоа целокупниот број на пермутации ќе биде $C_n^k \cdot k! \cdot (n-k) = n!$ или

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Со извесни пресметувања се покажува дека:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Инаку, освен C_n^k, се користи и ознаката $\binom{n}{k}$, т.е. $C_n^k \equiv \binom{n}{k}$.

Задачи:

4. На колку начини можеме да избереме 3 од 7 книги?

Решение: $C_7^3 = \dfrac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$.

5. На колку начини може да се состави комисија од три члена избирајќи од 4 парови, така што:

   а) во комисијата можат да бидат било кои луѓе;

   б) во комисијата не смее да има брачен пар.

Решение:

а) $C_8^3 = \dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

б) $C_4^3 \cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$ или $2\cdot C_4^3 + 2\cdot C_4^2 \cdot 2 = 32$

2.5. Разделување на групи; пермутации со повторување

Нека S е множество од n елементи. Си го поставуваме следното прашање: На колку начини може множеството S да се претстави како унија од m меѓусебе дисјунктни подмножества: $A_1, A_2, \dots A_m$, така што A_1 да има k_1 елементи, A_2 да има $k_2, \dots$, A_m да има k_m елементи, при што $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Решение: Бројот го означуваме со $P(n; k_1, k_2, \dots, k_m)$ и го определуваме вака: Прво од множеството S бираме подмножество од k_1 елементи. Од остатокот $n-k_1$ избираме подмножество од k_2 елементи, итн., и по m - 1 чекори остануваат $n-(k_1+k_2+\dots+k_{m-1}) = k_m$ елементи. По правилото за множење имаме:

$$C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdots\frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!\cdot 0!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_m!}$$

Така покажавме дека бројот на можните претставувања на множеството S со n елементи како унија од меѓу себе дисјунктни подмножества со $k_1, k_2, ..., k_m$ елементи соодветно, е даден со:

$$P(n;k_1,k_2,...,k_m)=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_m!}$$

Овој резултат ја има и следнава интерпретација: нека се дадени n елементи меѓу кои што k_1 се од еден вид, k_2 се од друг вид, итн., k_m се од m - ти вид при што, јасно, $k_1+k_2+...+k_m=n$. Прашање е на колку начини можеме да ги подредиме овие n елементи. Постапуваме вака: од n места избираме k_1 и на нив поставуваме по еден елемент од првиот вид, од преостанатите $n-k_1$ места избираме k_2 места и на секое место поставуваме елемент од вториот вид, и така доаѓаме до крајните k_m места на кои поставуваме елементи од m - от вид; на тој начин ги определуваме сите можни подредувања кои се викаат *пермутации со повторување*. Тој број, како што покажавме, е еднаков на $P(n;k_1,k_2,...,k_m)$.

Задачи:

6. На колку начини можат да се разместат 8 студенти во три соби: еднокреветна, трикреветна и четирикреветна?

Решение: $P(8;1,3,4)=\frac{8!}{1!\cdot 3!\cdot 4!}=280$.

7. Колку различни зборови можат да се направат од буквите на зборот „математика"?

Решение: Буквата *м* се појавува 2 пати, *а* - 3 пати, *т* - 2 пати, *е* - еднаш, *и* - еднаш и *к* - еднаш. Следува:

$$P(8;3,2,2,1,1,1)=\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=151\,200$$

2.6. Полиномна формула

Го разгледуваме изразот:

$$(a_1+a_2+...+a_m)^n$$

Даденииов израз го степенуваме на n - ти степен, и потоа треба да направиме групирање на сличните собироци. Всушност, треба збирот $a_1+a_2+...+a_m$ n пати да го помножиме сам со себе и така ќе добиеме сума од собироци секој составен од n множители од $a_1,a_2,...,a_m$. Тука ќе се појават сите варијации со повторување од $a_1,a_2,...,a_m$ од класа n. Како што знаеме, такви има m^n. Меѓу нив има извесен број на собироци во кои што a_1 се повторува r_1 пати, a_2 - r_2 пати, така сè до a_m која се појавува r_m пати; при што, јасно, $r_1+r_2+...+r_m=n$. Според формулата $P(n;k_1,k_2,...,k_m)=\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot...\cdot k_m!}$, збирот на сите тие собирци ќе биде:

$$\frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot...\cdot r_m!}\cdot a_1^{r_1}\cdot a_2^{r_2}\cdot...\cdot a_m^{r_m}$$

и така конечно имаме:

$$(a_1+a_2+...+a_m)^n=\sum_{\substack{r\geq 0,...,r_m\geq 0\\ r_1+r_2+...+r_m=n}}\frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot...\cdot r_m!}\cdot a_1^{r_1}\cdot a_2^{r_2}\cdot...\cdot a_m^{r_m}$$

Ете, затоа броевите $P(n;r_1,...,r_m)$ се викаат и полиномни коефициенти.

За нас е од интерес кога $k=2$, $(a_1+a_2)^n$ што претставува бином степенуван на степен n. Во овој специфичен случај, $P(n;r_1,r_2)=\dfrac{n!}{r_1!\cdot r_2!}$. Како $r_1+r_2=n$, ако ставиме $r_2=r$, тогаш $r_1=n-r$ и со давање вредности на r од 0 до n ги добиваме сите можни двојки (r_1,r_2), па затоа имаме:

$$(a_1+a_2)^n=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}\cdot a_1^{n-r}\cdot a_2^r=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cdot a_1^{n-r}\cdot a_2^r$$

Последната формула се вика *биномна формула* и ние неа ќе ја користиме на повеќе места во понатамошното изложување.

Собирокот што одговара на коефициентот C_n^0 е прв, па C_n^1 е втор, или воопшто, собирокот што одговара на коефициентот C_n^k е $k+1$ - ви член во биномната формула.

Задачи:

8. Да се определи збирот на коефициентите во биномната формула!
9. Да се најде шестиот член во развојот на биномот $(2x-3y)^9$.

Решение:

8. Биномни коефициенти се: $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^k, ..., C_n^n$, па збирот е:

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

9. $C_9^5 \cdot (2x)^{9-5} \cdot (-3y)^5 = -\frac{9!}{5! \cdot 4!} \cdot (2x)^4 \cdot (3y)^5$.

2.7. Комбинации со повторување

Комбинации од m видови елементи по n елементи во *комбинација со повторување* се групи (состави) кои содржат n елементи, при што секој елемент припаѓа на еден од m видови.

На пример, од три елементи a, b, c, можеме да ги направиме следните состави од по два елемента:

$$aa, ab, ac, bb, bc, cc$$

Нека бројот на сите комбинации со повторување од m елементи во комбинација по n елемненти го означиме со $\overline{C}_m^n$. Сега сакаме да го определиме тој број. Јасно е дека секоја комбинација е потполно определена, ако се знае по колку елементи има во неа од сите m видови; се разбира може сите n елементи да бидат од еден вид итн. За да ја определиме формулата за бројот на комбинациите, постапуваме според следново правило: пишуваме онолку единици колку што има елементи од првиот вид во комбинацијата, ставаме нула, по нулата пишуваме онолку единици колку што има елементи од вториот вид во комбинацијата, и така натаму, по испишувањето на единиците од m - 1 вид на елементи пишуваме 0 и по неа онолку единици колку што има елементи од последниот вид. Се разбира ако од некој вид нема елементи во комбинацијата, по соодветната 0 ќе ставиме пак 0. Така, во наведениот пример со буквите a, b, c, ги имаме следните низи од нули и единици:

$$1100, 1001, 0101, 1010, 0110, 0011.$$

На таков начин, на секоја комбинација од m елементи групирани во групи од по n елементи, одговара низа составена од n единици и m - 1 нули, и обратно, на секоја низа еднозначно одговара комбинација. Затоа, ако од вкупно $n + m$ - 1 места избереме n места и на нив поставиме по една единица, а на преостанатите напишеме нули, на тој начин ги определуваме сите комбинации, па така:

$$\overline{C}_m^n = C_{n+m-1}^n$$

Задачи:

10. На колку начини може да се изберат три букви од следните 12 букви: А, А, А, Т, Т, Т, Г, Г, Г, Ц, Ц, Ц.

Решение: Во овој случај $m = 4$ (видови), $n = 3$, и затоа:

$$\overline{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = 20$$

11. Колку цели ненегативни решенија има равенката:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

Решение: Ако постапиме како при доказот на формулата $\overline{C}_m^n$, т.е. ако ги испишеме сите низи составени од n единици и m - 1 нули, тогаш секоја таква низа ни дава решение ставајќи: x_1 еднакво на бројот на единиците од првиот вид, x_2 еднакво на бројот на единиците од вториот вид, и така натаму, x_m еднакво на бројот на единиците од m - от вид. Според тоа, изборот е еднаков на $\overline{C}_m^n$.

Задачи:

12. Да се пресмета:

$$V_5^1 + V_5^2 + V_5^3 + V_5^4 + V_5^5$$

(Одговор: 325)

13. На колку начини може да се избере претседател, секретар и благајник во една работна организација од 53 членови?

(Одговор: 141 556)

14. Од колку елементи можеме да составиме 90 варијации од втора класа без повторување?

(Одговор: 10)

15. Во едно торбе има 14 топчиња од кои 9 бели и 5 црни. Треба да избереме 6 топчиња од кои 4 бели и 2 црни. На колку начини може тоа да се направи?

(Одговор: 1 260)

16. Да се развие биномната формула:

$$\left(\frac{x}{2}-\sqrt{x}\right)^6$$

17. Тикетот од спортската прогноза содржи 13 парови чии игри треба да се прогнозираат. Со 1 се бележи победа на првоозначениот тим, со 2 победа на второозначениот тим, а со 0 нерешен резултат. На колку начини може да се пополни тикетот?

(Одговор: 1 594 323)

ГЛАВА 3

3. ВОВЕД ВО ВЕРОЈАТНОСТ

3.1. Вовед

Веројатноста е наука за случајните или недетерминирани обиди кои уште се викаат и стохастички обиди (експерименти). Еден таков обид е тркалањето на коцката за играње, при што ние знаеме, дека ќе застане на еден од броевите: 1, 2, 3, 4, 5, 6; но никогаш не сме сигурни кој број ќе покаже. Меѓутоа, ако обидот го повторуваме n-пати и ако со s го обележиме бројот на добиените шестки, на пример, тогаш количникот $\frac{s}{n} = f$ кој се вика релативна фреквенција ни дава претстава за шансите дека при тркалање на коцката ќе застане на бројот 6. Со правење на долги серии од обиди и формирање на соодветните релативни фреквенции се посматра нивното стремење нивното стабилизирање кон некој број и таа стабилност е основа на теоријата на веројатност.

Во теоријата на веројатност, се прави математички модел, модел од припишување на границата на релативната фреквенција на можните случувања (настани, исходи) во дадениот експеримент. Природно, веројатноста на математичкиот модел ќе зависи од утврдувањето, од земањето на стабилниот број на основа релативните фреквенции, зашто дефинитивна определеност на тој број не можеме да имаме, бидејќи не е можно да се посматраат бесконечно многу фреквенции и потоа строго математички да ја определуваме нивната гранична вредност. Тоа е пак извор на проблеми за тестирање на веродостојноста што е пак предмет на статистиката.

Историски, теоријата на веројатноста почнала со проучување на игрите на среќа (хазардни игри) како што е рулетот и картите. При тоа веројатноста p за даден настан A, се определувала вака: Ако за A постојат s можности да се случи од вкупниот број n подеднакво веројатни можности, тогаш

$$p = P(A) = \frac{s}{n}.$$

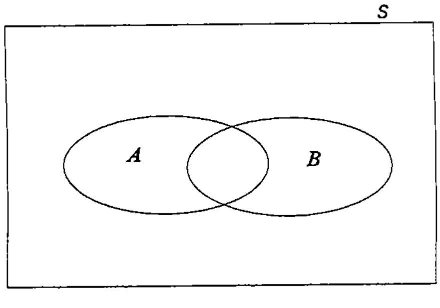
На пример, при тркалањето на коцката за играње настанот A да се добие парен број има три можности: 2, 4 и 6 т.е. s=3 и затоа

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = p.$$

Оваа класична дефиниција на веројатноста е во сушност вртење во круг, зашто идејата за подеднакво веројатни е иста со веројатноста која не била дефинирана. Модерната теорија на веројатност е чисто аксиоматска. Тоа значи веројатностите на нашите настани можат да бидат произволни, само тие мора да ги задоволуваат аксиомите. Класичната веројатност е само специјален случај на така наречените еднакввоверојатни простори.

3.2. Севкупно множество и настани

Множеството S на сите можни исходи на даден случаен обид се вика севкупно множество или натаму ќе викаме накратко множество на елементарните настани на експериментот. Треба да потенцираме, дека при секое изведување на експериментот се случува, се реализира само еден од множеството на елементарните настани. Например, при тркалањето на коцката, ако таа застане на тројката, не може истовремено да застане и на бројот четири. Случаен настан A е составен од елементарни настани или едноставно е подмножество на множеството S.



слика 3.2.1.

Понатаму S ќе го викаме и простор од елементарните настани (точки). Секој елементарен настан a е случаен настан $\{a\}$ кој натаму ќе го обележуваме едноставно со a. Празното множество $\varnothing$ и целото множество S се случајни настани; "$\varnothing$" се вика невозможен настан, а S се вика сигурен настан.

Со помош на операциите меѓу множествата од дадени настани A и B добиваме нови настани:

1. $A \cup B$ е настан, кој се случува ако се случи или A или B, со други зборови, ако се реализира елементарен настан, кој е елемент на унијата.
2. $A \cap B$ е настан кој се случува ако се случи и настанот A и настанот B.
3. A' комплемент на A, е настан кој се случува, ако не се случи настанот A.
4. $A \setminus B$ е настан кој се случува, ако се случи настанот A, но не B.

Два настани A и B велиме, дека меѓусебе се исклучуваат, ако се тие дисјунктни, т.е. ако $A \cap B = \varnothing$.

Настани кои се исклучуваат не може да се реализираат истовремено.

Пример 3.2.1. Експеримент: Тркаламе коцка за играње. Множеството S е:

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

Нека $A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,3,5\}$ тогаш

$A \cup C = \{2,3,4,5,6\}; B \cap C = \{3,5\}; C' = \{1,2,4,6\}$;

A и B меѓусебе се исклучуваат, зашто $A \cap B = \varnothing$.

Пример 3.2.2. Експеримент: Фрламе метална пара три пати со ред и ги разгледуваме сериите составени од глава Г и писмо П. Тие серии се елементарните настани и го сочинуваат множеството S (или просторот S).

S={Г Г Г, Г Г П, Г П Г, Г П П, П Г Г, П Г П, П П Г, П П П}.

Нека A={Г Г Г, Г Г П, П Г Г}, B={Г Г Г, П П П} тогаш $A \cap B$={Г Г Г}.

Пример 3.2.3. Експеримент: Фрламе метална пара сé додека не добиеме глава. Можни серии (елементарни настани) на овој експеримент се:

$$Г, П\,Г, ППГ, П\,П\,П\,Г, \ldots, \underbrace{П \ldots П}_{к-1} Г, \ldots, \infty$$

значи

$$S = \{П, П\,Г, ППГ, П\ \ ПП\,Г, \ldots, \underbrace{П \ldots П}_{к-1}Г, \ldots, \infty\}.$$

Тука "$\propto$" ни значи дека никогаш нема да се случи глава. Во овој случај множеството S има бесконечно многу, една низа од елементи, т.е. е пребројиво бесконечно множество.

Пример 3.2.4. Експеримент: Замислуваме или избираме број од интервалот [0,1], тогаш елементарен настан може да биде секој број од интервалот и следователно S=[0,1].

Ако множеството S е конечно или бесконечно пребројиво, тогаш секое подмножество од S е настан. Од друга страна, ако S е бесконечно непребројиво како што е интервалот [0,1], од технички причини некои подмножества од S не можат да бидат настани. Ние тука не сме во состојба да дадеме таков пример. Меѓутоа во секој случај фамилијата $\mathscr{A}$ од сите настани треба да ги задоволува следните услови:

1. $S \in \mathscr{A}$

2. Ако $A \in \mathscr{A}$ тогаш и $A' \in \mathscr{A}$

3. Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ се од $\mathscr{A}$ и нивната унија $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Фамилијата $\mathscr{A}$ со овие особини се вика σ [1] -алгебра на подмножества од S.

[1] σ - се чита сигма

Од $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'$ следи ако низата настани $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ се од фамилијата $\mathscr{A}$, тогаш и нивниот пресек е, зашто $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right) \in \mathscr{A}$, па и комплементот според 2. ќе биде елемент од $\mathscr{A}$ т.е. $\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

3.3 Аксиоми на веројатност

Нека S е севкупното множество, $\mathscr{A}$ е фамилијата од случајните настани и нека P е функција определена на елементите на $\mathscr{A}$ P се вика функција на веројатност, а $P(A)$ веројатност на настанот A ако важат следните аксиоми:

I. За секој настан A, $0 \leq P(A) \leq 1$

II. $P(S)=1$

III. Ако настаните A и B меѓусебе се исклучуваат, тогаш

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

IV. Ако $A_1, A_2, \ldots$ е низа од настани кои меѓусебе се исклучуваат[1], тогаш

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Следните забелешки по однос на аксиомите III и IV држат место. Пред сé со аксиомата III индуктивно можеме да покажеме, дека ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ меѓусебе се исклучуваат тогаш

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Навистина, ако претпоставиме до n-1, дека е точно тогаш

---

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$ за $i \neq j$

$$P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + P(A_n) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_{n-1}) + P(A_n).$$

Потцртуваме дека IV не следи од III. Меѓутоа ако множеството S е конечно тогаш аксиомата IV не треба.

Еве неколку теореми кои следат директно од аксиомите

Теорема 3.3.1. За празното множество $\varnothing$

$$P(\varnothing) = 0.$$

Доказ: $S \cup \varnothing = S$ и $S \cap \varnothing = \varnothing$ и според аксиомата III $P(S \cup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing)$ или $P(S) = P(S) + P(\varnothing)$ од каде $P(\varnothing) = 0$.

Теорема 3.3.2. Ако A' е комплемент за A тогаш $P(A') = 1 - P(A)$.

Доказ: Како

$$A \cup A' = S \text{ и } A \cap A' = \varnothing$$
$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1$$

од каде $P(A') = 1 - P(A)$.

Теорема 3.3.3. Ако $A \subseteq B$, тогаш $P(A) \leq P(B)$.

Доказ: Бидејќи $A \subseteq B$ имаме $B = A \cup (B \setminus A)$. Сега на база аксиомата III е $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ и од I $P(B) \geq P(A)$.

Теорема 3.3.4. Ако A и B се два настани, тогаш

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Доказ: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, како

$$A = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

$P(A) = P(A \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B)$ или

$$P(A \setminus (A \cap B)) = P(A \setminus B) = P(A) - P(B \cap A).$$

Теорема 3.3.5. Ако A и B се настани, тогаш

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Доказ: $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B)$,

следователно

$$P(A \cup B) = P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) =$$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \text{ т.е.}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Последица: Ако се дадени настаните *A, B* и *C*,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C] =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C).$$

Понатаму тројката $(S, \mathscr{A}, P)$: S множеството, $\mathscr{A}$ разгледуваната фамилија и P функцијата на веројатност, ќе ја викаме веројатностен простор.

3.4. Конечни веројатностни простори

Нека S е конечно множество; да речеме, $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Функцијата на веројатност P се дефинира на тој начин што за секое $a_i \in S$ му се припишува број p_i, наречен веројатност за a_i, при што:

а) секое $p_i \geq 0, i = 1,2,...,n$

б) $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Веројатноста $P(A)$ за настанот A е еднаква на збирот од веројатностите p_i за оние a_i, кои припаѓаат на A.

Пример 3.4.1. Нека $S = \{a_1, a_2, a_3\}$. Да се определи функцијата на веројатност ако a_1 е дупло поверојатно од a_2, a_2 е дупло поверојатно од a_3. Тогаш, ако p е веројатност за a_3, за a_2 веројатноста е $2p$, а за a_1 $4p$. Збирот од сите треба да биде единица: $p+2p+4p=1$ од каде $p = \frac{1}{7}$

$$P(a_1)=\frac{4}{7}, P(a_2)=\frac{2}{7}, P(a_3)=\frac{1}{7}.$$

На пример $P(\{a_2,a_3\})=P(a_2)+P(a_3)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$.

3.5. Конечни еквиверојатни простори

Често, физичките карактеристики на експериментот сугерираат, дека различните елементарни настани од множеството се подеднакво веројатни и затоа во тој случај на секој елементарен настан му припишуваме иста веројатност. Таков конечен веројатностен простор S се вика еквиверојатен простор или рамномерен (униформен) простор. Ако, например, S има n- точки (елементарни настани), тогаш веројатноста на секоја точка ќе биде $\frac{1}{n}$. Понатаму, ако настанот A содржи r-точки неговата веројатност $P(A)=r\cdot\frac{1}{n}=\frac{r}{n}$. Со други зборови,

$$P(A)=\frac{\text{бројот на елементите во } A}{\text{бројот на елементите во } S}.$$

Потенцираме уште еднаш дека горната формула важи кај еквиверојатните простори, но не во општ случај.

Пример 3.5.1. Колкава е веројатноста дека n-лица имаат различни денови на раѓање?

Решение: Целокупниот број на можни роденденови е еднаков на бројот на варијациите со повторување од 365 елементи од класа n, т.е. 365^n, а поволни се варијациите без повторување од класа n од 365 т.е. $365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)$, следователно веројатноста p ќе биде

$$p=\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365+n-1)}{365^n}.$$

Може да се покаже дека за $n\geq 25$ $p<\frac{1}{2}$.

3.6. Бесконечни веројатностни простори

Нека S е бесконечно преброиво множество; $S=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$. Како и при конечниот случај на секој елементарен настан a_n му припишуваме број p_n што е негова веројатност, така што

$$1.\ p_n \geq 0 \quad \text{и} \quad 2.\ p_1+p_2+...+p_n+...=\sum_{n=1}^{\infty} p_{n=1}\ .$$

веројатност $P(A)$ на даден настан е сума од веројатностите на елементарните настани кои се содржат во A:

$$P(A)=\sum_{a_j\in A} P(a_j), P(a_j)=p_j$$

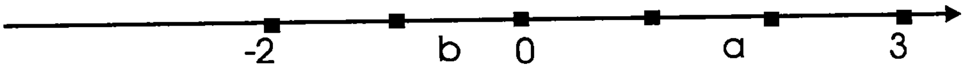
Пример 3.6.1. Нека $S=\{1,2,...,\infty\}$, кое одговара, например, на фрлањето метална пара дури не падне глава; тука n го покажува бројот на фрлањата до добивањето на глава. И секој од броевите : $1,2,...,n,...$ е можен елементарен настан. Функцијата на веројатност P ја определуваме на тој начин што на n му припишуваме веројатност $\frac{1}{2^n}$, т.е. $P(1)=\frac{1}{2^1}, P(2)=\frac{1}{2^2},..., P(\infty)=0$. На пример, ако

$$A=\{1,2,3\}, P(A)=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}.$$

За непреброиви бесконечни простори S, тука разгледуваме само примери со геометриска природа кои се во врска со должина, со плоштина на фигура или волумен на тело или поопшто волумен (мера) на ограничено множество S на кое е интеграбилна функцијата $f(x)=1$, на правата; $f(x,y)=1$ во рамнината или $f(x,y,z)=1$ во просторот, така например $P(S)=\iint_S 1\cdot dxdy$ во рамнината. Или, општо, ако пишуваме $m(S)$ и кога се работи за должина и кога се работи за плоштина или зафатнина (волумен) функцијата на веројатност е

$$p(A)=\frac{m(A)}{m(S)}. \qquad (3.6.1)$$

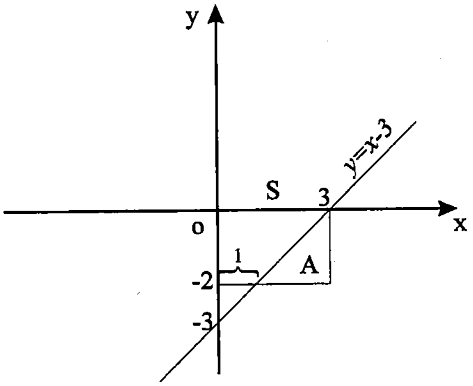
Пример 3.6.2. На правата R избираме случајно точки a и b така што $-2\leq b\leq 0$ и $0\leq a\leq 3$, како што покажува сликата 3.6.1.



сл. 3.6.1.

Да се определи веројатноста p дека растојанието $d = a - b$ ќе биде поголемо од 3 т.е. $d > 3$.

Решение: Множеството S се состои од сите точки во рамнината (x,y) при што $0 \le x \le 3$, $-2 \le y \le 0$ како на слика 3.6.2.



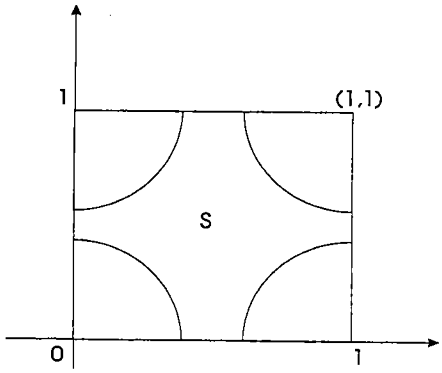
сл. 3.6.2.

Од условот имаме $d = x - y > 3$, или $y - x < -3$. Ако ставиме $y = -2$ во правата $y - x = -3$ добиваме x=1 и затоа

$$m(A) = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2,\ m(S) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Пример 7. На квадратот со темиња точките (0,0);(1,0);(1,1)и(0,1) фрламе метална пара со дијаметар $\frac{1}{2}$. Да се определи веројатноста дека парата ќе покрие едно од темињата, сл. 3.6.3



сл. 3.6.3.

Решение: Центарот (x,y) на парата во квадратот S за да покрива едно од темињата треба;

$$(x-0)^2+(y-0)^2<\frac{1}{16},(x-1)^2+y^2<\frac{1}{16},$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2<\frac{1}{16},x^2+(y-1)^2<\frac{1}{16}.$$

Плоштината $m(A)$ на четирите делови е $\frac{1}{64}\cdot\pi\cdot 4=\frac{\pi}{16}$ и затоа

$$P(A)=\frac{\frac{\pi}{16}}{m(S)}=\frac{\pi}{16}\approx 0{,}2\,.$$

Задачи

1. Метална пара и коцка се тркалаат истовремено. Да се определи множеството S.

2. Нека множеството S се состои од 4 елементи: $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. Кои од следниве функции определува веројатност на S ?

а) $P(a_1)=\frac{1}{2},P(a_2)=\frac{1}{3},P(a_3)=\frac{1}{4},P(a_4)=\frac{1}{5}$

б) $P(a_1)=\frac{1}{2},P(a_2)=\frac{1}{4},P(a_3)=-\frac{1}{4},P(a_4)=\frac{1}{2}$

в) $P(a_1)=\frac{1}{2}, P(a_2)=\frac{1}{4}, P(a_3)=\frac{1}{8}, P(a_4)=\frac{1}{8}$

г) $P(a_1)=\frac{1}{2}, P(a_2)=\frac{1}{4}, P(a_3)=\frac{1}{4}, P(a_4)=0$.

а) Не. Збирот е $\frac{77}{60}>1$.

б) Не. $P(a_3)=-\frac{1}{4}<0$.

в) Да.

г) Да.

3. Двајца мажи a_1 и a_2 и три жени a_3, a_4 и a_5 учествуваат на шаховски турнир. Учесниците од ист пол имаат подеднаква веројатност да победат, но секој маж има двапати поголеми шанси од секоја жена за да победи. Да се определи функцијата на веројатност на $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$.

Решение: $P(a_1)=P(a_2), P(a_3)=P(a_4)=P(a_5)$. Ако ставиме $P(a_3)=P(a_4)=P(a_5)=p$, тогаш $P(a_1)=P(a_2)=2p$, како треба

$$P(a_1)+P(a_2)+P(a_3)+P(a_4)+P(a_5)=1,$$

имаме

$$2p+2p+p+p+p=1,7p=1,p=\frac{1}{7}.$$

Пример $P(\{a_1,a_4\})=P(a_1)+P(a_4)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$.

4. Десет студенти седат во еден ред. Да се определи веројатноста дека двајца одредени студенти нема да бидат еден до друг.

Решение: Сите распореди се 10!. Ако ги издвоиме студентите A и B остануваат 8 од нив правиме 8! распореди. Секој од 8!-те распореди овозможува по $9\cdot 2$ неповолни распореди. Според тоа, веројатноста да бидат еден до друг е $\frac{8!9\cdot 2}{10!}=\frac{9\cdot 2}{9\cdot 10}=\frac{1}{5}$, од каде бараната веројатност ќе биде $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

5. Во една кутија има 8 исправни и 2 неисправни производи. Колкава е веројатноста дека во три избрани производи два ќе бидат исправни?

6. Во една фабрика од направените производи 96% се употребливи. Од секои 100 употребливи просечно 75 се класифицираат како прва класа. Колкава е веројатноста дека избраниот производ е од прва класа?

$$p=\frac{\frac{96}{100}\cdot 75}{100}=\frac{96\cdot 75}{10000}=0{,}72.$$

7. Од 6 исправни и 3 неисправни производи земаме 4 наеднаш. Колкава е веројатноста дека најмногу два ќе бидат неисправни? (одг. $\frac{17}{42}$).

8. На патот на движење има 5 семафори, кои можат да покажуваат црвено (Ц) или зелено (З).

а) Да се определи просторот S од можни состојби на сите пет семафори. (одг. Има 2^5 елементи).

б) Колкава е веројатноста дека автомобилот застанал на 3 од нив заради црвено светло? (одг. $\frac{5}{16}$).

9. Фрламе три пати пара. Нека A е настан да се добијат најмалку две глави. Нека B е настан да се добијат најмногу две глави. Нека C е настан трите пати да биде писмо. Да се пресметаат веројатностите:

$$P(A), P(B), P(C), P(A\cap C), P(B\cap C).$$

10. Играчот A тврди дека со тркалање на три коцки ќе добие збир 7, а играчот B дека ќе добие збир 11. По колку денари треба да вложи секој ако збирот треба да биде 140 ден.?

Решение: $P(A)=\dfrac{15}{216}, P(B)=\dfrac{27}{216}$; ако износот од играчот A е a и износот на играчот B е b, тогаш

$$a:b=P(A):P(B) \text{ и } a+b=140,$$

се добива a=50, b=90.

11. Во круг случајно избираме точка. Да се определи веројатноста дека точката ќе биде поблиску до центарот отколку до границата (периферијата). (одг. $\dfrac{1}{4}$).

12. Да се определи веројатноста p на еден настан, ако шансите да се случи се a:b.

Решение: p:(1-p)=a:b

$$bp=a(1-p) \text{или} \, p=\frac{a}{a+b}.$$

13. Да се определи веројатноста на настанот, ако неговите шанси се 3:2 да се случи. (одг. $\dfrac{3}{5}$).

14. Нека $S=\{a_1,a_2,...,a_s\}, T=\{b_1,b_2,...,b_t\}$ се конечни веројатностни простори. Нека на парот (a_i,b_j) од $S\times T$ му го придружиме бројот

$$P(a_i,b_j)=p_{ij}=P(a_i)P(b_j).$$

Да се покаже дека просторот $S\times T$ со така определените броеви е веројатностен простор, (кој се вика простор производ). Напоменуваме дека тоа не е единствениот начин да се определи функцијата мера на $S\times T$.

Доказ. Како $P(a_i),P(b_j)\geq 0$ за секои i и j следи $p_{ij}=P(a_i)P(b_j)\geq 0$. Понатаму за нивниот збир имаме

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}p_{ij}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}P(a_i)P(b_j)=\sum_{i=1}^{s}P(a_i)\sum_{j=1}^{t}P(b_j)=\sum_{i=1}^{s}P(a_i)\cdot 1=1.$$

15. Избираме точка од рамностран триаголник со страна 3. Да се определи веројатноста p дека растојанието на точката ќе биде поголемо од 1 од темињата на триаголникот. (одг. $1-\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$).

16. Пара со дијаметар $\frac{1}{2}$ се фрла на рамнината. Да се определи веројатноста дека нема да пресече права од облик

а) $x=k$

б) $x+y=k$

в) Ниту $x=k$ ниту $y=k$.

(одг. а) $\frac{1}{2}$, б) $1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, в) $\frac{1}{4}$).

Да се докаже: За било кои настани $A_1, A_2, \ldots, A_n$, важи $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$

$$=\sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{l<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

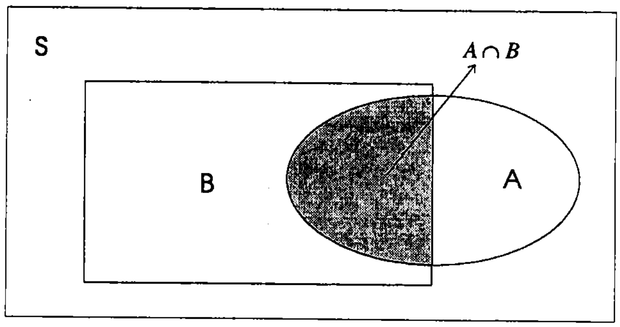
ГЛАВА 4

4. УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ И НЕЗАВИСНОСТ

4.1. Условна веројатност

Нека B е произволен настан во просторот S со $P(B)>0$. Веројатноста, дека се случил настанот A, ако е познато, дека се случил настанот B се вика условна веројатност за настанот A во однос на настанот B и ја обележуваме $P(A/B)$, а е дефинирана вака:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{4.1.1}$$



сл. 4.1.1.

Во суштност, ако ставиме $P_B(A)=P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ непосредно се проверува, дека функцијата P_B е функција на веројатност на дадената фамилија $\mathscr{A}$:

1. $0 \le P_B(A) \le 1$

2. $P_B(S) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(B)} = 1$

3. Ако $A_1, A_2, \ldots$ меѓусебе се исклучуваат, тогаш

$$P_B(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n).$$

Специјално, ако S е конечен еквиверојатен простор и $|A|$ го обележува бројот на елементите во настанот A, тогаш

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|}, P(B) = \frac{|B|}{|S|}$$

и така добиваме

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Пример 4.1.1. Тркаламе коцка. Ако знаеме, дека коцката застанала на непарен број, колкава е веројатноста дека тој број е 5? Нека B={1,3,5}, A={5} тогаш $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$. Јасно, без знаење дека се случил настанот B веројатноста за A е $P(A) = \dfrac{1}{6}$.

Пример 4.1.2. Еден човек оди во посета на една фамилија со две деца. Едно од децата излегува надвор и тоа е машко. Да се определи веројатноста, дека и другото е машко, а) ако се знае дека тоа е помладо и б) ако не се знае дека е помладо.

Решение. Множеството S за полот на децата е S={мм, мж, жм, жж}.

Под а) нам ни е познато дека е реализиран настанот B={мм, мж}, а како A={мм} затоа $P(A/B)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}$.

б) B={мм, мж, жм} и затоа $P(A/B)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$.

4.2. Множење на веројатности при условната веројатност

Од формулата $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ добиваме

$$P(A\cap B)=P(A/B)P(B) \tag{4.2.1}$$

или
$$P(A\cap B)=P(B/A)P(A) \tag{4.2.2}$$

Формулите (4.2.1) и (4.2.2) се викаат формули за множење на веројатностите кај условната веројатност. Формулите (4.2.1) и (4.2.2) многу често се од корист зошто во многу случаи е полесно да се определи условната веројатност отколку веројатноста $P(A\cap B)$. Формулата $P(A\cap B)$ може да се обопшти на следниот начин:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\cap A_n)=P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})\cdot$$
$$\cdot P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})=P(A_n/A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})\cdot P(A_{n-1}/A_1\cap\ldots\cap A_{n-2})\cdot$$
$$\cdot P(A_{n-2}/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-3})=\ldots=P(A_n/A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})P(A_{n-1}/A_1\cap\ldots\cap A_{n-2})\ldots$$
$$P(A_2/A_1)P(A_1)$$

или напишано од десно на лево имаме

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_1/A_2)P(A_3/A_1\cap A_2)\ldots$$
$$P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

Пример 4.2.1. Во еден пакет има 12 производи од кои 4 се дефектни. Случајно земаме три производи еден до друг. Да се определи веројатноста p дека сите три ќе бидат исправни.

Нека A_1 е настанот дека првиот производ е исправен, A_2 дека вториот е исправен и A_3, дека третиот е исправен. Тогаш

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}.$$

4.3. Потполна веројатност и формули на Бајес

Нека $H_1, H_2, ..., H_n$ се настани од просторот S така што:

1) Меѓусебе се исклучуваат т.е.

$H_i \cap H_j = \varnothing$ за $i \neq j$

2) $P(H_j) > 0, j = 1,2,...,n$

3) $S = \bigcup_{i=1}^{n} H_j$.

Тогаш се вели, дека дадените настани прават потполна(тотална) фамилија од настани за просторот S. Точна е следната теорема.

Теорема 4.3.1. Ако настаните $H_1, H_2, ..., H_n$ се потполна фамилија, тогаш за настанот A важи формулата:

$$P(A) = P(A / H_1)P(H_1) + P(A / H_2)P(H_2) + ... + P(A / H_n)P(H_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(A / H_j)P(H_j) \tag{4.3.1}$$

Формулата (4.3.1) се вика потполна или тотална веројатност.

Доказ. $A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} H_j \right) = \bigcup_{j=1}^{n} (A \cap H_j)$, затоа

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A \cap H_j) \right) = \sum_{j=1}^{n} P(A \cap H_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A / H_j)P(H_j),$$

при што во последната сума ја искористивме формулата за множење на веројатности.

Настаните $H_1, H_2, ..., H_n$ во потполната фамилија се викаат хипотези. Тргнувајќи од

$$P(H_j / A) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(A)} = \frac{P(A / H_j)P(H_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A / H_j)P(H_j)}$$

можеме да ја напишеме формулата

$$P(H_j / A) = \frac{P(A / H_j)P(H_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A / H_j)P(H_j)}. \tag{4.3.2}$$

За j=1, 2, 3,..., n формулата (4.3.2) се вика формула на Бајес. Бајесовата формула (формули) овозможува споредување на хипотезите и наоѓање на најверојатната меѓу нив.

Пример 4.3.1. Во еден склад сместени се истовидни производи од три фабрики *A*, *B* и *C*. Познато е дека 20% од производите се од фабриката *A*, 30% од фабриката *B* и 50% од фабриката *C*. Процентот на дефектните производи во производството на *A*, *B* и *C* изнесуваат 4%, 3% и 2% соодветно. Ако случајно земеме еден производ од складот да се определи дека е тој дефектен и потоа веројатноста дека е од фабриката *A*.

Нека H_1 е настан дека земениот производ е од фабриката *A*, H_2 дека е од фабриката *B* и H_3 дека е од фабриката *C*. Нека *F* е настанот дека земениот производ е дефектен. Тогаш

$$P(F) = P(F / H_1)P(H_1) + P(F / H_2)P(H_2) + P(F / H_3)P(H_3);$$

$$P(H_1) = \frac{1}{5}, P(H_2) = \frac{3}{10}, P(H_3) = \frac{1}{2}, \text{ понатаму}$$

$$P(F / H_1) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}, P(F / H_2) = \frac{3}{100}, P(F / H_3) = \frac{1}{50}$$

со заменување добиваме

$$P(F) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{100} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}027$$

или тоа е 2,7% дефектни производи.

$$P(H_1/F)=\frac{P(F/H_1)P(H_1)}{P(F)}=\frac{8}{27}$$

$$P(H_2/F)=\frac{P(F/H_2)P(H_2)}{P(F)}=\frac{9}{27}$$

$$P(H_3/F)=\frac{P(F/H_3)P(H_3)}{P(F)}=\frac{10}{27}.$$

Од каде гледаме, дека во складот најмногу дефектни призводи има од фабриката C и тоа $\approx 45\%$.

4.4. Независност

Настанот B се вели дека е независен од настанот A, ако веројатноста на B не зависи од тоа дали се случил настанот A или не. Со други зборови, ако веројатноста на B е еднаква на условната веројатност на B спрема A, т.е.

$$P(B)=P(B/A).$$

Како $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, добиваме

$$P(A\cap B)=P(A)P(B). \tag{4.4.1}$$

Формулата (1) ја земаме за дефиниција на независноста на два настана A и B.

Дефиниција: Настаните A и B се независни, ако за нив важи формулата (1). Ако не се независни тие се зависни.

Често се постулира дека два настана се независни или тоа се заклучува од природата на експериментот.

Пример 4.4.1. Веројатноста дека лицето A ја погодува целта е $\dfrac{1}{4}$, а веројатноста дека лицето B погодува е $\dfrac{2}{5}$. Колкава е веројатноста дека лицето A или B ќе ја погоди целта, ако двете стрелаат во исто време. Во сушност треба да се пресмета $P(A\cup B)$, т.е.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),$$

како од самата природа на експериментот следи дека A и B се независни настани, затоа $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. Со замена добиваме

$$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{11}{20}.$$

Три настани A, B и C се независни, ако:

1. $P(A\cap B)=P(A)P(B), P(A\cap C)=P(A)P(C)$ и

   $P(B\cap C)=P(B)P(C)$, т.е. секои два се меѓусебе независни.

   $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$.

Пример 4.4.2. Нека два пати фрламе метална пара. Множеството S={ГГ, ГП, ПГ, ПП} претставува еквивероjатен простор, зашто P(ГГ)=P(ГП)=P(ПГ)=P(ПП)=$\frac{1}{4}$. Нека ги разгледаме настаните:

$$A=\{ГГ,ГП\},\ B=\{ГГ,ПГ\},\ C=\{ГП,ПГ\}$$

тогаш $P(A)=P(B)=P(C)=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ и $P(A\cap B)=P(ГГ)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap C)=P(ГП)=\frac{1}{4}$, $P(B\cap C)=P(ПГ)=\frac{1}{4}$, што значи

$$P(A\cap B)=P(A)P(B), P(A\cap C)=P(A)P(C) \text{ и}$$

$$P(B\cap C)=P(B)P(C), \text{ меѓутоа}$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(\varnothing)=0\neq P(A)P(B)P(C).$$

Со други зборови условот 2. не следи од условот 1.

4.5. Независни или повторени обиди

Досега веќе имавме примери на повторување на обид, како на пример фрлање на металната пара едноподруго неколку пати. Тоj концепт на повторување може да се формализира на следниов начин:

Дефиниција: Нека S е конечен вероjатностен простор. Под n независни или повторени обиди, го подразбираме вероjатностниот простор T кој се состои од подредените n-торки на елементите од S или T е еднаков на Декартовиот производ на S n-пати само со себе. Функцијата на веројатност се определува со:

$$P((s_1,s_2,\ldots s_n))=P(s_1)P(s_2)\ldots P(s_n). \qquad (4.5.1)$$

Пример 4.5.1. Нека фрламе метална пара која не е хомогена, туку веројатноста да падне глава е p, а да падне писмо е $1\text{-}p=q$. Ако добивањето на глава го сметаме за успех и го обележиме со У, а добивањето на писмо со буквата Н (неуспех), тогаш при n повторувања на обидот елементи на просторот T ќе бидат серии од буквите У и Н или тоа се сите варијации со повторување од У и Н од класа n. Што, значи просторот T, во случајов, има 2^n елементи. Меѓу нив ќе биде, на пример серијата составена само од буквата У или серијата составена само од буквата Н и т.н. Ако во серијата буквата У се повторува k-пати, а буквата Н n-k-пати тогаш според (1) веројатноста нејзина ќе биде $p^k q^{n-k}$.

Задачи

1. Тркаламе две симетрични коцки. Да се определи веројатноста p, дека збирот од броевите ќе биде 10 или поголем од 10 ако:

а) Бројот 5 се појави на првата коцка.

б) Бројот 5 се појави барем на една коцка.

а) Ако 5 е на првата коцка, тоа значи се случил настанот $B=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$. A е настан збирот на броевите да биде 10 или поголем од 10, т.е. $A=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,6),(6,5)\}$. Според формулата за условна веројатност имаме

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

$A\cap B=\{(5,5),(5,6)\}$ и затоа $P(A/B)=\dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}=\dfrac{1}{3}.$

б) Настанот што се случил D е

$D=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)\}$,

$$A\cap D=\{(5,5),(5,6),(6,5)\}$$

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{3}{11}.$$

2. Тркаламе две симетрични коцки. Ако броевите на коцките се различни да се определи веројатноста p, дека

а) збирот е 6, б) збирот е 4 или помал од 4. (одг. а) $\frac{2}{15}$, б) $\frac{2}{15}$).

3. а) Во една група од ученици има 4 машки и 3 женски. Повикуваме по еден ученик за испит. Да се определи веројатноста p дека изборот ќе биде наизменичен машко па женско.

A_1-првиот ученик е машко, A_2-женско, A_3-машко, A_4-женско, A_5-машко, A_6-женско, A_7-машко.

$$p=P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6\cap A_7)=$$

$$=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)P(A_4/A_1\cap A_2\cap A_3)\cdot$$

$$\cdot P(A_5/A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)P(A_6/A_1\cap\ldots\cap A_5)\cdot P(A_7/A_1\cap\ldots\cap A$$

$$=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{35}.$$

б) Да се определи веројатноста, ако се 3 машки и 3 женски. (одг. $\frac{1}{20}$).

4. Нека A и B се настани со $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}$ и $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Да се најде

а) $P(A/B)$, б) $P(B/A)$, в) $P(A\cup B)$, г) $P(A'/B')$, д) $P(B'/A')$.

а) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$. б) (одг. $\frac{1}{2}$)

в) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$.

г) Прво $P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,

$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$. Сега

$$P(A'/B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}.$$

д) (одг. $\frac{5}{6}$).

5. а) Во една кутија има три метални пари; едната е симетрична, една е со дупло поголема веројатност за глава и третата е со веројатност $\frac{1}{3}$ за глава. Случајно избираме една и ја фрламе. Да се определи веројатноста p дека ќе се добие глава. Нека,

H_1 е настанот дека е избрана симетричната пара

H_2 -со дупла веројатност за глава

H_3-со веројатност $\frac{1}{3}$ за глава.

A е настанот дека ќе се добие глава.

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(A/H_1)=\frac{1}{2},\ P(A/H_2)=\frac{2}{3}, P(A/H_3)=\frac{1}{3}.$$

По формулата за потполна веројатност имаме

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+P(A/H_3)P(H_3)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}=p.$$

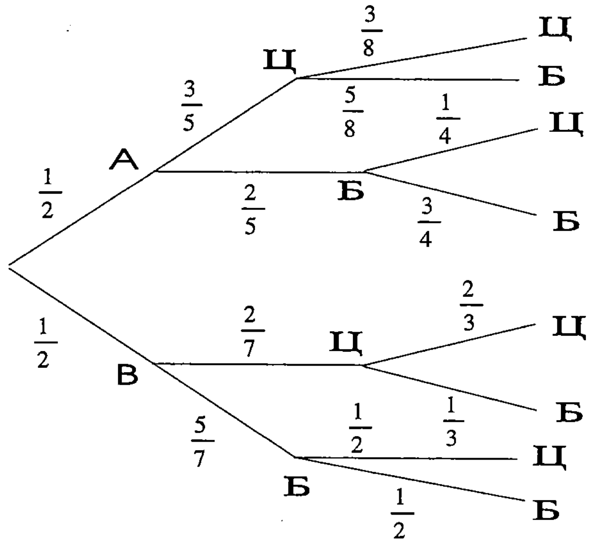
б) Да се определи веројатноста, ако една од парите на двете страни има глава. (одг. $\frac{11}{8}$).

6. Имаме две кутии A и B:

A има 3 црвени и 2 бели топчиња.

B има 2 црвени и 5 бели топчиња.

Случајно бираме кутија и од неа земаме топче кое го ставаме во другата кутија, потоа од другата земаме топче. Да се определи веројатноста p дека двете избрани топчиња се од иста боја. Решението може да се добие од следниов дијаграм



$$p=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{901}{1680}$$

Независност

7. Ако A и B се независни настани, тогаш и нивните спротивни настани A' и B' се независни.

Како $A'\cap B'=(A\cup B)'$ имаме

$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=$
$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$, зошто $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ од независноста, понатаму,

$$P(A'\cap B')=1-P(A)-P(B)[1-P(A)]=$$
$$=[1-P(A)][1-P(B)]=P(A')P(B').$$

8. Веројатноста дека мажот ќе живее уште најмалку 10 години е $\frac{1}{4}$, а за жената е $\frac{1}{3}$. Да се определи веројатноста, дека а) двајцата ќе бидат живи по 10 години, б) барем еден ќе биде жив, в) ниту еден, г) жената ќе биде жива.

A е настан мажот ќе биде жив.

B е настан жената ќе биде жива.

$A\cap B$ е настан двајцата ќе бидат живи. Како A и B се независни настани (иако жената го јади мажот) имаме

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

б) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$.

в) A'-мажот не е жив, B'-жената не е жива, $A'\cap B'$-двајцата не се живи и затоа $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$.

г) Треба $P(A'\cap B)=P(A')P(B)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.

Забелешка. A'и B се независни, ако A и B се независни. Навистина, $B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$ сега $P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)$, зошто множествата на десната страна се дисјунктни и како A и B се независни имаме $P(B)=P(A)P(B)+P(A'\cap B)$, од каде

$$P(A'\cap B)=P(B)[1-P(A)]=P(B)P(A').$$

9. Кутијата A има 8 производи од кои 3 се дефектни, а кутијата B има 5 производи од кои 2 се дефектни. По еден производ се зема од двете кутии.

а) Да се определи веројатноста дека двата избрани производи се исправни.

б) Која е веројатноста дека едниот е дефектен другиот не?

в) Ако едниот е дефектен другиот не да се определи веројатноста дека дефектниот е од кутијата A.

а) Нека C е настан дека производот од кутијата A е исправен, а D е настан, дека производот од кутијата B е исправен. Нам ни треба $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, зошто A и B се независни, како $P(C) = \frac{5}{8}, P(D) = \frac{3}{5}$ имаме $P(A \cap B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$. Треба

$$P[(C' \cap D) \cup (C \cap D')] = P(C' \cap D) + P(C \cap D') =$$

$$= P(C')P(D) + P(C)P(D') = \left(1 - \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{8} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{19}{40}.$$

в) Треба $P(C'/E)$ каде $E = (C' \cap D) \cup (C \cap D')$.

$$P(C'/E) = \frac{P(C' \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C' \cap D)}{P(E)} = \frac{P(C')P(D)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{19}{40}} = \frac{9}{19}.$$

Покажи, дека $C' \cap E = C' \cap D$.

10. Веројатностите, дека тројца стрелци ја погодуваат целта се $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$.

Секој стрела по еднаш.

а) Да се определи веројатноста дека точно еден ќе погоди.

б) Ако е само еден погодок, да се определи веројатноста дека погодил првиот стрелец.

Ако A е настанот погодува првиот, B погодува вториот и C погодува третиот, тогаш A' не погодува првиот, B' не погодува вториот и C' не погодува третиот.

а) Треба да се определи веројатноста на настанот:

$(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) = E$, јасно A, B и C се независни и затоа имаме

$$P[(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)] =$$

$$= P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) =$$

$$= P(A)P(B')P(C') + P(A')P(B)P(C') + P(A')P(B')P(C) =$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{31}{72},$$

т.е. $P(E)=\frac{31}{72}$.

б) Треба $P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A\cap B'\cap C')}{P(E)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{31}{72}}=\frac{6}{31}$.

11. Во кутија има 6 црвени и 4 бели топчиња. Колкава е веројатноста, дека

а) два пати со ред ќе извлечеме бело топче, ако извлеченото топче не се враќа во кутијата.

б) ако топчето се враќа во кутијата

(одг. а) $\frac{2}{15}$ б) $\frac{4}{9}$)

12. На некој факултет 4% од студентите и 1% од студентките се повисоки од 180cm. Од вкупниот број на студенти 60% се женски. Ако случајно избраниот студент или студентка е повисок од 180cm да се определи веројатноста, дека е студентка. (одг. $\frac{3}{11}$).

Повторување на обиди

13. Некој ја погодува целта со веројатност 0,3. Колку пати треба да стрела за да најмалу со 80% веројатност ќе ја погоди целта? Тој не ја погодува целта со веројатност 0,7, затоа во n-обиди да не погоди веројатноста е $0{,}7^n$. Нам ни треба $1-0{,}7^n \geq 0{,}8$ или $0{,}7^n \leq 0{,}2$. Сметаме:

$0{,}7^1=0{,}7>0{,}2$ $;0{,}7^2=0{,}49>0{,}2;0{,}7^3=0{,}343>0{,}2;$

$0{,}7^4=0{,}2401>0{,}2;0{,}7^5=0{,}16807<0{,}2$, следователно тој треба да стрела најмалу 5 пати.

14. Фудбалски тим победува (П) со веројатност 0,6; губи (Г) со веројатност 0,3 и игра нерешено (Н) со веројатност 0,1. Тимот игра три натпревари во текот на неделата.

а) Да се определи веројатноста на настанот A дека тимот ќе победи најмалку два пати.

б) Да се определи веројатноста на настанот B дека тимот ќе има една победа, една нерешена игра и еднаш ќе изгуби.

а) A={ППП, ППГ, ПГП, ГПП, ППН, ПНП, НПП}, а S има 3^3 елементи.

$P(A)$=P(ППП)+P(ППГ)+P(ПГП)+P(ГПП)+P(ППН)+P(ПНП)+P(НПП) $=0{,}6^3+0{,}6^2\cdot 0{,}3\cdot 3+0{,}6^2\cdot 0{,}1\cdot 3$.

б) (одг. 0,108).

15. Фабрика на моливи произведува годишно 400 000 моливи од кои 1% со грешка. Колкава е веројатноста да при контрола на 3 моливи барем еден е со грешка. На среќа земениот молив е дефектен со веројатност $\frac{1}{100}$, а е исправен со веројатност $\frac{99}{100}$. Три земени моливи да бидат исправни веројатноста е $0{,}99^3$, а $1-0{,}99^3$ е веројатноста барем еден да биде дефектен. Ако сакаме да пресметаме колку посто е тоа треба веројатноста да се помножи со 100.

16. Нека S е конечен веројатностен простор и нека T е веројатносниот простор на n независни обиди на S или формално S^n што е директен производ на S n пати само со себе. Да се покаже, дека со функцијата $P((a_{i1},a_{i2},...,a_{in}))=P(a_{i1})P(a_{i2})...P(a_{in})$, каде $P(a_{ik})$ е веројатноста на a_{ik} во S, претставува веројатностен простор, т.е. важи:

1) $P((a_{i1},a_{i2},...,a_{in}))\geq 0$

2) Збирот на сите $P((a_{i1},a_{i2},...,a_{in}))$ е 1.

Доказ. Бидејќи $P(a_{ik})\geq 0$ за k=1,2,...,n 1) важи . Понатаму сумата на сите броеви $P((a_{i1},a_{i2},...,a_{in}))=P(a_{i1})P(a_{i2})...P(a_{in})$ се сведува на $(P(a_1)+P(a_2)+...+P(a_r))^n$, ако $S=\{a_1,a_2,...a_r\}$. Како $\sum_{j=1}^{r}P(a_j)=1$ со тоа е докажано и 2).

17. Во еден клас од 10 машки и 5 девојки се избираат три ученици еден по еден. Да се определи веројатноста, дека

а) двата први се машки третиот е девојка,

б) првиот и третиот се машки, а вториот избран ученик е девојка,

в) Првиот и третиот се од ист пол, а вториот е од спротивниот пол.

Нека A_1 е настан првиот ученик е машко, B_1 е настан првиот избран ученик е женско, A_2 вториот избран е машко. B_2 вториот избран е женско и A_3 трето избраниот ученик е машко и B_3 трето избраниот ученик е женско. Тогаш,

а) Треба $P(A_1 \cap A_2 \cap B_3)$. Според условната веројатност имаме

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(B_3 / A_1 \cap A_2).$$

Бидејќи $P(A_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, P(A_2 / A_1) = \frac{9}{14}$ и $P(B_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{5}{13}$ со замена добиваме

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0{,}165.$$

б) Треба $P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) = \frac{15}{10} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{15}{91}$.

в) Треба $P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) = \frac{15}{91} + \frac{20}{273} = \frac{5}{21}$.

18. Нека $S = \{ a, b, c, d, e, f \}$ со

$P(a) = \frac{1}{16}, P(b) = \frac{1}{16}, P(c) = \frac{1}{8}, P(d) = \frac{3}{16}, P(e) = \frac{1}{4}$ и $P(f) = \frac{5}{16}$. Нека $A = \{a, c, e\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ и $C = \{b, c, f\}$. Да се определат: $P(A / B); P(B / C); P(C / A'); P(A \cap B')$ и $P(A / B')$. За првото бидејќи $A \cap B = \{c, e\}$ имаме

$$P(A \cap B) = P(\{c, e\}) = P(c) + P(e) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8},$$

$$P(B) = P(\{c, d, e, f\}) = P(c) + P(d) + P(e) + P(f) =$$

$= \frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$, со замена во формулата

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{7}.$$

За останатите три одговорот е: $\frac{7}{8},\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

19. Во една кутија има три метални пари, две се симетрични и една со глава од двете страни- двоглава. Случајно земаме една од нив и ја фрламе два пати. Ако двата пати се добие глава, колкава е веројатноста, дека е двоглава пара. (одг. $\frac{2}{3}$)

20. Нека A и B се настани со $P(A)=\frac{1}{4}, P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ и $P(B)=p$.

а) Да се најде p, ако A и B меѓусебе се исклучуваат.

б) Да се најде p, ако A и B се независни.

в) Да се најде p, ако $A\subseteq B$. (одг. а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $\frac{1}{3}$).

21. Нека A,B,C се назависни настани. Да се покаже, дека следните комбинации A',B,C; A,B',C;...; A',B',C;...; A',B',C'; се исто така, независни. Понатаму покажи дека A и $B\cup C$ се независни и т.н.

На пример, за A',B,C:

Од

$$B\cap C=(A\cap(B\cap C))\cup(A'\cap(B\cap C))$$

имаме

$$P(B\cap C)=P(A\cap B\cap C)+P(A'\cap B\cap C),$$

имајќи ја во обзир независноста на A,B,C добиваме

$$P(B)P(C)=P(A)P(B)P(C)+P(A'\cap B\cap C) \text{ или}$$

$$P(A'\cap B\cap C)=P(B)P(C)[1-P(A)]=P(B)P(C)P(A')$$

Аналогно за другите комбинации. За A и $B \cup C$:

$$P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$$

$$= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) =$$

$$= P(A)[P(B) + P(C) - P(B \cap C)] =$$

$$= P(A)P(B \cup C),$$

т.е. А и $B \cup C$ се независни.

22. Една екипа победува (П) со веројатност 0,5; губи (Г) со веројатност 0,3 и игра нерешено (Н) со веројатност 0,2. Екипата игра два пати. Да се определи просторот S од елементарните настани, да се определат нивните веројатности и потоа да се определи веројатноста дека екипата ќе победи барем еднаш.

Одг. S={ ПП, ПГ, ПН, НН, ГГ, ГН, НП, НГ, ГП}.Барем еднаш ќе победи со веројатност 0,75.

ГЛАВА 5

5. ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

5.1. Дефиниција и примери

Нека S е множество на некој случаен обид. Нека $g(s)$ $s \in S$ е функција (пресликување) од S во множеството R од реалните броеви. Ако A е подмножество од S т.е. $A \subseteq S$ со $g(A)$ го обележуваме подмножеството од R кое се состои од вредностите на функцијата $g(s)$ за $s \in A$, накратко $g(A) = \{g(s); s \in A\}$; например $g(S)$ е множеството на сите вредности од функцијата $g(s)$.

Аналогно, ако B е подмножество од R тогаш со $g^{-1}(B)$ го обележуваме множеството од сите точки од S кои што со функцијата $g(s)$ се пресликуваат во множеството B. Накусо ќе пишуваме вака: $g^{-1}(B) = \{s; s \in S \text{ и } g(s) \in B\}$. Така на пример $g^{-1}(R) = S$. $g^{-1}(B)$ се вика контра слика на B.

Во теоријата на веројатност предмет на испитување се функциите на множеството S определени со следната дефиниција.

Дефиниција: Случајна променлива X на множеството S е функција од S во множеството R од реалните броеви таква што $X^{-1}(B)$, каде B е интервал во R, е случаен настан во S.

Според тоа, не секоја функција дефинирана на S е случајна променлива. Меѓутоа, ако множеството S е конечно или преброиво бесконечно, тогаш знаеме секое подмножество од S е случаен настан и следователно, во тој случај, секоја функција определена на S е случајна променлива. И, уште еднаш да потенцираме, ако множеството S е дискретно, тогаш секоја функција определена на S е случајна променлива. Ако множеството S е недискретно (континуирано) тогаш постојат функции определени на него кои не се случајни променливи, но за среќа такви функции не се среќаваат во примената.

Вообичаено е случајните променливи да се обележуваат со големите букви X, Y, Z, U и т.н.

Нека X и Y се случајни променливи на даден простор S, тогаш $X+Y$, kX (k е реален број), XY, $\frac{X}{Y}$ се определени на вообичаениот начин:

$$(X+Y)(s)=X(s)+Y(s),\ XY(s)=X(s)Y(s) \text{ и т.н.}$$

Очигледно, секоја константна функција $X(s)\equiv k$ за $s\in S$ е случајна променлива, зашто $X^{-1}(B)=S$, ако $k\in B$ или $X^{-1}(B)=\varnothing$, ако $k\notin B$, а тие се случајни настани во S.

Пример 5.1.1. Фрламе пара три пати. Множеството S (просторот S) е:

S={ГГГ, ГГП, ГПГ, ПГГ, ППГ, ПГП, ГПП, ППП}.

Еве две случајни променливи на S:

X= на бројот на главите

Y= (бројот на главите)$\cdot$ (бројот на писмата)

Така

X(ГГГ)=3	Y(ГГГ)=3$\cdot$ 0=0
X(ГГП)=2	Y(ГГП)=2$\cdot$ 1=2
X(ГПГ)=2	Y(ГПГ)=2$\cdot$ 1=2
X(ПГГ)=2	Y(ПГГ)=2$\cdot$ 1=2
X(ППГ)=1	Y(ППГ)=2$\cdot$ 1=2
X(ПГП)=1	Y(ПГП)=2$\cdot$ 1=2
X(ГПП)=1	Y(ГПП)=2$\cdot$ 1=2
X(ППП)=0	Y(ППП)=3$\cdot$ 0=0.

бидејќи бројот на писмата во секој елементарен настан е еднаков на 3-бројот на главите = 3 - $X(s)$, затоа $Y(s)=X(s)[3-X(s)]$, $s\in S$.

Пример 5.1.2. Нека случајната променлива X е еднаква на случајно избраниот број $t \in [0,1]$, т.е. $X(t) = t$ за секое t од интервалот $[0,1]$. Во овој случај и множеството $S = [0,1]$ и множеството $X(S)$ од вредностите кои се исти се интервалот $[0,1]$ т.е. се недискретни (тие се континуирани).

Кога множеството од вредности на случајната променлива X е конечно или може да се претстави како низа т.е. е пребоиво, тогаш велиме дека случајната променлива е дискретна. Недискретните случајни променливи ќе ги викаме континуирани случајни променливи.

Пример 5.1.3. Нека случајно бираме број од интервалот [0,1] и нека X е еднаква на првата децимала по десетичната запирка, тогаш множеството S е интервалот [0,1], а множеството вредности на X т.е. $X(S) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ т.е. е конечно.

5.2. Распределба на веројатностите кај дискретните случајни променливи

Нека случајната променлива X е определена на просторот S и има конечно множество од вредности:

$X(S) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, каде $x_i \in R$. $X^{-1}(\{x_i\}) = A_i$ е настанот од S кој со функцијата X се пресликува во бројот x_i. Веројатноста на A_i ја бележиме вака: $P(A_i) = P(s; s \in S \text{ и } X(s) = x_i)$ или кратко $P(A_i) = P(X = x_i)$. Случајните настани: $A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n$ меѓусебе се исклучуваат, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, ако $i \neq j$, освен тоа $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, зашто

$$S = X^{-1}(\{x_1, ..., x_i, ..., x_n)\} = \bigcup_{i=1}^{n} X^{-1}(\{x_i\}) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \text{ т.е.}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(S) = 1.$$

Во примерот 5.1.1., случајната променлива X ги има вредностите: 0,1,2,3 или, ако ставиме $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ имаме

$$A_1 = X^{-1}(0) = \{\text{ППП}\},\ A_2 = X^{-1}(1) = \{\text{ППГ, ПГП, ГПП}\},$$

$$A_3 = X^{-1}(2) = \{\text{ГГП, ГПГ, ПГГ}\},\ A_4 = X^{-1}(3) = \{\text{ГГГ}\},\ \text{следователно}$$

$$P(A_1) = P(X = 0) = \frac{1}{8},\ P(A_2) = P(X = 1) = \frac{3}{8},$$

$$P(A_3) = P(X = 2) = \frac{3}{8},\ P(A_4) = P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Сега на множеството од вредностите на дадена случајна променлива X дефинираме функција f на следниот начин: Ако $X(S) = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = E$, тогаш $f : E \to R$ е определено со

$$f(x_1) = P(X = x_1),\ f(x_2) = P(X = x_2), ...$$
$$..., f(x_i) = P(X = x_i), ..., f(x_n) = P(X = x_n).$$

Вака определената функција f се вика функција на распределба на веројатностите за случајната променлива X. Според тоа функцијата f е, во општ случај, дефинирана на некое множество E од реалните броеви, а нејзините вредности се наоѓаат на интервалот [0,1], што значи за функцијата $f(x)$ секогаш е исполнето: $0 \le f(x) \le 1$.

Ако случајната променлива X има конечно многу вредности, се прави табела на која се нанесуваат вредностите на X и соодветните веројатности, т.е. вредностите на нејзината функција за распределба на веројатностите.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
f	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Табела 5.2.1

Во случај кога просторот S е конечен, се прават и такви табели на кои се нанесуваат сите елементи (точки) од S соодветните вредности на случајната променлива X во тие точки и веројатностите за тие вредности.

Пример 5.2.1. Нека X е еднаква на бројот од главите при три фрлања на металната пара, а W е времето на чекање до појавувањето на првата глава (или е 0, ако трите фрлања се писмо). Не интересира распределбата на веројатностите за променливата $Z = X + W$.

S	ГГГ	ГГП	ГПГ	ПГГ	ППГ	ПГП	ГПП	ППП
X	3	2	2	2	1	1	1	0
W	1	1	1	2	3	2	1	0
$Z=X+Y$	4	3	3	4	4	3	2	0
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Табела 5.2.2.

Гледаме, дека множеството на вредности за функцијата Z е $\{0,2,3,4\}$ и табелата за Z ќе биде

Z	0	2	3	4
f	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Табела 5.2.3.

Забелешка. Функцијата W можеме да ја сфатиме како број на обиди, број на фрлања до првиот успех, во случајов до првата глава.

Задачи за вежба

1. Се тркалаат две коцки. Случајната променлива Z еднаква на 0, ако максимумот на двата броја е поголем од 4, инаку Z е еднаква на 2. Да се направи табела.
2. X е еднаква на бројот од последователните глави при трите фрлања на металната пара. [Например, X(ГГП)=2, X(ГПГ)=1].
3. Во кутија има 3 бели и 2 црни топчиња. Избираме 2 и ставаме X да биде еднаква на бројот на црните топчиња. Да се направи табела за X.
4. Во кутија има две бели, две црни и едно црвено топче. Бираме 3 и ставаме X= бројот на црните, Y= бројот на белите топчиња. Да се направат табели за X, Y и $Z=X+Y$.

5.3. Бернулиева, геометриска и биномна распределба

Нека кај даден случаен обид не интересира случувањето на даден настан A. Нека веројатноста $P(A)=p$ и јасно $P(A')=1-p=q$. Ако случајната променлива X е еднаква на 0, ако не се случи настанот A и еднаква е на 1 ако се случи имаме

X	0	1
f	q	p

Табела 5.3.1.

Таква случајна променлива се вика Бернулиева случајна променлива, или само Бернулиева распределба.

Нека обидот го повторуваме додека се случи настанот A, или уште се вели го повторуваме обидот до првиот успех, зашто случувањето на настанот A го сметаме за успех, а не случувањето за неуспех. Ако успехот го бележиме со У, а неуспехот со Н тогаш просторот S е:

$$S=\{Y,HY,HHY,\ldots,\underbrace{H\ldots H}_{k-1}Y,\ldots\} \tag{5.3.1}$$

Нека за момент направиме едно мало отстапување (дигресија) во изложувањето, со тоа што ќе се потсетиме на случаен обид кој се состои од два елемента Y и H, при што $P(Y)=p$, $P(H)=1\text{-}P(Y)=1\text{-}p=q$. Тогаш елементи на k-от директен производ се серии составени од буквата Y и H со должина k. При што, на пример,

$$P(\underset{k-1}{H\ldots H}Y)=\underset{k-1}{P(H)\ldots P(H)}\,P(Y)=q^{k-1}p\,.$$

Според тоа елементите на просторот (5.3.1) припаѓаат на соодветните директни производи од наведениот двоелементен простор.

Нека со W ја обележиме случајната променлива која е еднаква на времето на чекање до првиот успех или што е исто еднаква е на бројот на повторувањата до првиот успех, тогаш W ги прима вредностите: $1,2,\ldots,k,\ldots$ Така, на пример $W(HY)=2$, $W(\underset{k-1}{H\ldots H}\,Y)=k$.

Случајна променлива W со вредности: $1,2,3,\ldots,k,\ldots$ и $P(W=k)=q^{k-1}p$ се вели, дека има геометриска распределба на веројатностите и едноставно таква случајна променлива се вика геометриска распределба.

Понекогаш е важно да се знае веројатноста кај геометриски распределената случајна променлива W дека е поголема од некоја вредност $P(W>j)$. Оваа веројатност можеме да ја определиме од фактот што

$$P(W > j) = 1 - P(W \leq j) = 1 - P(W = 1) - P(W = 2) - \ldots - P(W = j) =$$

$$= 1 - p - qp - \ldots - q^{j-1}p = 1 - p(1 + q + \ldots + q^{j-1}) =$$

$$= 1 - p\frac{q^j - 1}{q - 1} = 1 + p\frac{q^j - 1}{1 - q} = 1 + p\frac{q^j - 1}{p},$$

(зошто $p + q = 1$). Од каде добиваме $P(W > j) = q^j$.

Пример 5.3.1. Со помош на геометрискиот ред да се покаже дека множеството S од (5.3.1) со функцијата $P(\underbrace{H\ldots H}_{k-1}Y) = q^{k-1}p$ е веројатностен простор.

Прво е јасно дека $q^{k-1}p \geq 0$, второ

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Постои една важна особина на геометриската распределба. Таа особина се нарекува недостаток на меморија (или заборавност при работењето). Имено, еве за што станува збор. Нека е познато, дека во првите j обиди не сме имале успех, веројатноста за успех во следниот обид е исто така еднаква на p како при првиот обид. Со други зборови дотогашните случувања т.е. целата историја е ирелевантна за следниот обид. Тоа интуитивно е јасно заради независноста на посебните повторувања на обидот. Но нека го покажеме, тоа извонредно својство, математички потпирајќи се на фактите во теоријата на веројатност до сега.

Нека случајната променлива W има геометриска распределба на веројатностите; нека j е цел број. Тогаш

P(успех во j+1-то повторување/нема успех до j-то повторување)=

$$P(W = j+1/W > j) = \frac{P(W = j+1 \text{ и } W > j)}{P(W > j)} = \frac{P(W = j+1)}{P(W > j)} = \frac{q^j p}{q^j} = p.$$

Треба да објасниме некои работи при докажувањето. Имено: прво ја применуваме дефиницијата за условната веројатност, потоа бидејќи $\{W>j\}$ го содржи настанот $\{W=j+1\}$ затоа $\{W=j+1$ и $W>j\}=\{W=j+1\}$ и на крајот користиме дека $P(W>j)=q^j$.

Пример 5.3.2. Во изминатата година на еден дел од автопатот имало 30 денови во кои се случувале инциденти. Претпоставуваме, дека веројатноста да се случи инцидент во некој ден е независен од другите денови. Колкава е веројатноста дека нема да има инцидент во текот на првите две недели од јануар?

Нека случајната променлива W е еднаква на времето (деновите) на чекање до првиот инцидент. Според условот ни треба

$$P(W>14)=\left(1-\frac{30}{365}\right)^{14}=0{,}3010.$$

Нека сега разгледаме друга случајна променлива која е, исто така, определена со повторување на даден обид или, како што уште се вели со примена на Бернулиевата шема. Нека земеме, дека се направени n независни повторувања. Нека случајната променлива X е еднаква на бројот на успесите во сите n повторувања. Тогаш множеството од вредности на X е $\{0,1,2,...,n\}$, а просторот S се состои од сите серии со должина n составени од буквите У и Н. При што, ако во дадена серија s буквата У се појавува k-пати, а буквата Н останатите n - k пати, тогаш бидејќи S е n-ти директен производ на двоелементниот веројатностен простор $\{У, Н\}$ со $P(У)=p$ и $P(Н)=1-p=q$ имаме $P(s)=p^k q^{n-k}$.

Како бројот на сериите со k успеси и $n-k$ неуспеси е еднаков на $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dbinom{n}{k}$, затоа случајниот настан составен од тие серии има веројатност $\dbinom{n}{k}p^k q^{n-k}$, т.е. $P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

Случајна променлива X со вредности 0, 1, 2,..., k,...,n при што $P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k q^{n-k}$; $k=0, 1,..., n$, се вика биномна случајна променлива или само биномна распределба. Биномните веројатности се бележат со

$$B(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

Пример 5.3.3. Хомогена коцка за играње се тркала n пати. Веројатноста да се појави шестката во секој обид е $\frac{1}{6}$. Затоа веројатноста да се појави бројот 6 точно k пати е еднаков на $B(k;n,\frac{1}{6})=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$.

Пример 5.3.4. Хомогена пара се фрла 8 пати. Да се определи веројатноста дека ќе падне писмо најмалку 3 пати. Тука треба да се определи веројатноста:

$$1-B(0,8,\frac{1}{2})-B(1,8,\frac{1}{2})-B(0,2,\frac{1}{2})=$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^8-\binom{8}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^8-\binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{219}{256}.$$

Пример 5.3.5. Да се определи најверојатниот број на успеси при биномните веројатности.

Поаѓаме од

$$B(k,n,p)-B(k-1,n,p)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}-\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}p^{k-1}q^{n-k+1}=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}\left[\frac{p}{k}-\frac{q}{n-k+1}\right]=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}\cdot\frac{np-pk+p-kq}{k(n-k+1)}=$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k+1)!}p^{k-1}q^{n-k}\cdot\frac{(n+1)p-k}{1}.$$

а) Ако $(n+1)p$ е цел број, тогаш за

$$k<(n+1)p \qquad B(k,n,p)>B(k-1,n,p)$$

т.е. веројатностите растат, за

$$k=(n+1)p \qquad B(k,n,p)=B(k-1,n,p)$$

и потоа веројатностите опаѓаат. Според тоа во овој случај имаме две максимални вредности: $B((n+1)p-1,n,p)$ и $B((n+1)p,n,p)$.

б) Ако $(n+1)p$ не е цел број, тогаш до $k=[(n+1)p]$ (цел дел) веројатностите растат, максимумот се постигнува за $k=[(n+1)p]$ што значи имаат една максимална веројатност.

Задачи

1. Екипата A кога игра победува со веројатност $\frac{2}{3}$. Ако A игра 4 игри, да се најде веројатноста, дека ќе победи а) точно 2 игри, б) барем 1 игра, в) повеќе од половината.

Тука $n=4$, $p=\frac{2}{3}$ и $q=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

а) $B(2;4,\frac{2}{3})=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

б) Воопшто да не победи, веројатноста е

$$B(0;4,\frac{2}{3})=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81},$$

затоа веројатноста да победи барем еднаш е $1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}$.

в) Веројатноста да победи повеќе од две игри е

$$B(3;4,\frac{2}{3})+B(4;4,\frac{2}{3})=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+\binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{27}.$$

2. Една фамилија има 6 деца. Да се определи веројатноста, дека а) 3 се машки, 3 се женски, б) повеќе машки од женски.

Тука земаме $p=\frac{1}{2}$, а $n=6$

а) $B(3;6,\frac{1}{2})=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$, б) Треба да ги определиме веројатностите $B(4;6,\frac{1}{2})$, $B(5;6,\frac{1}{2})$, $B(6;6,\frac{1}{2})$ и да ги собереме.

3. Веројатноста еден човек да ја погоди целта е $\frac{1}{4}$. а) Ако стрела 7 пати да се определи веројатноста дека, целта ќе ја погоди најмалку 2 пати. б) Колку пати треба да стрела за да веројатноста да ја погоди целта биде поголема од $\frac{2}{3}$?

а) Одг. $\frac{4547}{8192}$.

б) Во n стрелања да не ја погоди целта веројатноста е $B(0;n,\frac{1}{4})$, а барем еднаш да погоди веројатноста е $1-\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$ и оваа веројатност треба да биде поголема од $\frac{2}{3}$, т.е. $1-\left(\frac{3}{4}\right)^n>\frac{2}{3}$ или $\left(\frac{3}{4}\right)^n<\frac{1}{3}$; за $n=1$ $\frac{3}{4}<\frac{1}{3}$, за $n=2$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}<\frac{1}{3}$, за $n=3$ $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}<\frac{1}{3}$; но за $n=4$ $\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}<1$. Со други зборови тој треба да стрела барем 4 пати.

4. Во текстот покажавме дека геометриски распределената случајна променлива ја има особината на заборавност. Нека, сега претпоставиме дека вредностите на случајната променлива W е множеството $\{1, 2, 3,...\}$ и нека важи $P(W=j+1/W>j)=p$ за j=0, 1, 2,..., каде p е константно. Да се покаже дека важат следните равенства:

а) $P(W=j)=pP(W>j-1)$

б) $P(W>j)=P(W>j-1)-P(W=j)=(1-p)P(W>j-1)$

в) $P(W>j)=(1-p)^j P(W>0)=(1-p)^j$

г) $P(W=j)=pP(W>j-1)=p(1-p)^{j-1}$

Следователно, W е геометриски распределена.

а) Од условот во задачата и формулата за условна веројатност имаме

$$P(W=j+1/W>j)=\frac{P(W=j+1 \text{ и } W>j)}{P(W>j)}=\frac{P(W=j+1)}{P(W>j)}=p,$$

т.е. $P(W=j+1)=pP(W>j)$, ако наместо j ставиме j-1 имаме $P(W=j)=pP(W>j-1)$.

б) Настанот $(W>j-1)=(W>j)\cup(W=j)$

$$P(W>j-1)=P(W>j)+P(W=j)$$

$$P(W>j)=P(W>j-1)-P(W=j),$$

од а) следи

$$P(W>j)=P(W>j-1)-pP(W>j-1)=(1-p)P(W>j-1)$$

в) $P(W>j)=(1-p)P(W>j-1)=(1-p)^2P(W>j-2)=...=$

$$=(1-p)^jP(W>0)=(1-p)^j, \text{ зошто } P(W>0)=1.$$

г) $P(W=j)=pP(W>j-1)=p(1-p)^{j-1}$.

5.4. Уште некои дискретни распределби

5.4.1. Хипергеометриска распределба

Нека во една кутија има N топчиња од кои M се бели, а останатите N - M се црни. Бираме случајно n топчиња. Нека случајната променлива X е еднаква на бројот од белите топчиња меѓу избраните n. Според тоа случајната променлива X може да ги има вредностите 0, 1, 2,...,n; јасно ако $n \le M$. Ако не интересира во избраните n да има точно j-бели тогаш веројатноста е $\frac{\binom{M}{j}\binom{N-M}{n-j}}{\binom{N}{n}}$, т.е.

$$P(X=j)=\frac{\binom{M}{j}\binom{N-M}{n-j}}{\binom{N}{n}} \tag{5.4.1.1}$$

Се разбира треба и $n-j \le N-M$.

Случајна променлива X со множество на вредности $\{0, 1, ..., n\}$ при што веројатностите се определуваат според (5.4.1.1) се вели дека е хипергеометриски распределена случајна променлива или само хипергеометриска распределба.

Пример 5.4.1.1. Во кутија има 100 топчиња од кои 40 зелени и 60 црвени. Случајно земаме 4. Да се определи веројатноста дека три се црвени.

Тука $N = 100$, $M = 60$, $N - M = 40$, $n = 4$. Случајната променлива X ги прима вредностите 0, 1, 2, 3, 4, при што $P(X = j) = \frac{\binom{60}{j}\binom{40}{4-j}}{\binom{100}{4}}$, за $j = 3$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{60}{3}\binom{40}{1}}{\binom{100}{4}} = 0{,}3491.$$

Да се направи табела за случајната променлива.

5.4.2. Негативна биномна распределба

Видовме, геометриската распределба го опишува времето на чекање до првиот успех или бројот на повторувањата во Бернулиевата шема. Нека фиксираме позитивен цел број r и нека случајната променлива W е еднаква на времето на чекање до r-тиот успех. Според тоа множеството на вредности за W е $\{r, r + 1, r + 2,...\}$. Тоа значи, $W = j$, ако r-тиот успех се случил во j-тото повторување на обидот; затоа мора $j \geq r$. За ваква случајна променлива се вели дека има негативна биномна распределба на веројатностите.

Нека земеме $W = j$. Тогаш имаме r - 1 успеси во првите j - 1 експерименти и j-тиот обид го дава r-тиот успех.

$P(W = j) = P($ r-1 успеси во j - 1 обиди и успех во j-тиот обид$)=$

$= P(r$ - 1 успеси за j - 1 обиди$) \cdot p =$

$\binom{j-1}{r-1}p^{r-1}q^{j-1-(r-1)} \cdot p = \binom{j-1}{r-1}p^r q^{j-r}$ за $j = r, r + 1, r + 2,...$

Специјално за $r = 1$ добиваме $P(W = j) = \binom{j-1}{0}pq^{j-1} = q^{j-1}p$, т.е. геометриската распределба.

5.4.3. Триномна расӣределба

Нека изведуваме независни обиди при што секој обид има три можни исходи (настани), кои ги бележиме со a,b и c; при што

$$P(a) = p,\ P(b) = q,\ P(c) = r$$

јасно $p + q + r = 1$. Во суштност станува збор за веројатностен простор $S=\{a, b, c\}$ со дадените веројатности p, q и r соодветно. Ако имаме n повторувања на обидот тогаш го разгледуваме директниот производ S^n чии што елементи се сите варијации со повторување од елементите a,b,c; што значи има 3^n елементи. Веројатноста, како што знаеме, се определува на следниот начин: Ако во варијацијата s буквата a се појавува i пати, буквата b, j пати и буквата c, k пати тогаш $P(s) = p^i q^j r^k$. Како такви варијации, според триномните коефициенти, има $\dfrac{n!}{i!\,j!k!}$ затоа случајниот настан со точно i a исходи, j b исходи и k c исходи има веројатност $\dfrac{n!}{i!\,j!k!} p^i q^j r^k$. За $r = 0$ ја добиваме биномната распределба.

Пример 5.4.3.1. Нека некоја екипа победува (П) со веројатност p, губи (Г) со веројатност q и игра нерешено (Н) со веројатност r. Ако екипата играла n натпреварувања и ако случајната променлива X е еднаква на бројот од победите тогаш нејзините вредности се 0, 1, 2,..., n; при што

$$P(X = i) = \frac{n!}{i!\,j!k!} p^i q^j r^k, \text{ за } i = n$$

$$P(X = n) = \frac{n!}{n!0!0!} p^n q^0 r^0 = p^n$$

зошто секогаш $i + j + k = n$.

Полиномна распределба: Тука разгледуваме случаен обид со m елеметарни настани; $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$, при што $P(s_j) = p_j$, $p_1 + ... + p_m = 1$. Ако обидот го повториме N пати тогаш го разгледуваме N-тиот директен производ на просторот S, т.е. го разгледуваме веројатносниот простор S^N чии што елементи се сите варијации со повторување од множеството S од класа N, ги има вкупно

m^N. Ако t е варијација во којашто s_1 се појавува j_1 пати, $s_2\, j_2$ пати,..., $s_m\, j_m$ пати тогаш веројатноста за t е

$$P(t) = p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_m^{j_m}, \; j_1 + j_2 + \dots + j_m = N .$$

Бидејќи според полиномните коефициенти има вкупно $\dfrac{N!}{j_1!\, j_2! \dots j_m!}$ такви варијации, затоа веројатноста на настанот што се состои од таквите варијации ќе биде

$$\frac{N!}{j_1!\, j_2! \dots j_m!} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_m^{j_m} .$$

5.4.4. Пуасонова распределба

Една од најзначајните распределби, според нејзината примена, е Пуасоновата распределба. Таа се среќава во врска со бројот на земјотреси, сообраќајни незгоди, телефонски повици во една централа, број на купувачи во продавница и воопшто како распределба на број на појавувања на т.н. ретки настани.

Случајната променлива X има Пуасонова распределба, ако нејзино множество на вредности се ненегативните цели броеви $\{0, 1, 2, \dots\}$ и

$$P(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \qquad (5.4.4.1)$$

каде $\lambda > 0$ е фиксен број.

Имајќи во обзир, дека

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \text{ за } -\infty < x < \infty$$

непосредно се проверува, дека со (5.4.4.1) е определена случајна променлива; зашто $\dfrac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} > 0$ и

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 .$$

Што значи кај Пуасоновата распределба функцијата f за распределба на веројатностите е определена на множеството $\{0, 1, 2, ...\}$ со вредности $f(j)=\frac{\lambda^{j}}{j!}e^{-\lambda}$, се пишува уште $P(j,\lambda)$ или само $P(j)$.

Пример 5.4.4.1. Нека бројот на паднатите плодови под едно дрво во текот на ноќта има Пуасонова распределба со параметар $\lambda=2$. Понатаму ќе покажеме дека λ е просечниот број на паднати плодови за една ноќ. Да се најде а) $P(X=0)$, б) $P(X\leq 3)$, в) $P(X\geq 2)$ и г) $P(X=0/X<2)$.

а) $P(X=0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=e^{-2}=0,1353$

б) $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$

$$=\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}+\frac{2^3}{3!}e^{-2}=e^{-2}\left(1+2+2+\frac{8}{6}\right)=0,8571.$$

в) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=$

$$=1-e^{-2}(1+2)=0,5940$$

г) $P(X=0/X<2)=\frac{P(X=0 \text{ и } X<2)}{P(X<2)}=\frac{P(X=0)}{P(X<2)}=\frac{e^{-2}}{e^{-2}(1+2)}=\frac{1}{3}.$

Пример 5.4.4.2. Нека бојот на кучињата скитници за еден ден е случајна променлива X со $\lambda=3,2$ т.е. просечниот број на забележаните кучиња за еден ден е 3,2. Да се најде веројатноста $P(X<5)$ за два дена. Бројот на кучињата и во два дена има Пуасонова распределба, само што просекот ќе биде двојно поголем т.е. $\lambda=2\cdot 3,2=6,4$. Следователно

$$P(X<5 \text{ за два дена})=\sum_{j=0}^{4}\frac{6,4^j}{j!}e^{-6,4}=0,2351.$$

Пример 5.4.4.3. Претпоставуваме дека бројот на дивечот вдолж еден шумски пат има Пуасонова распределба. На должина од s метри од патот просечниот број е $0,03s$. Да се определи веројатноста дека нема да има дивеч на $100m$. Средниот број е $0,03\cdot 100=3$ и затоа

$P(X_{100}=0)=\frac{3^0}{0!}e^{-3}=0{,}04979$. Да се определи растојанието s на кое 95% сме сигурни дека ќе сретнеме дивеч.

$$P(X_s=0)=\frac{0{,}03s}{0!}e^{-0{,}03s}=e^{-0{,}03s}.$$

Нам ни треба $1-P(X_s=0)\geq 0{,}95$

$$1-e^{-0{,}03s}\geq 0{,}95 \text{ или}$$

$$e^{-0{,}03s}\leq 0{,}05$$

$$-0{,}03s\leq \ln 0{,}05$$

$$s\geq -\frac{\ln 0{,}05}{0{,}03}=99{,}86.$$

Спомнавме, дека Пуасонова распределба имаат феномените со мала веројатност. Ќе покажеме дека биномната веројатност $B(j;n,p)$ ако p е доволно мало може да се апроксимира со Пуасоновата веројатност $P(j,\lambda)$, ако $np\to\lambda$ кога $n\to\infty$. Прецизно кажано изгледа вака: За веројатности p_n такви што $np_n\to\lambda$ каде λ е фиксен број важи апроксимацијата $B(j;n,p_n)\to P(j,\lambda)$ кога $n\to\infty$. Ние за поедноставно ќе земеме дека за големи вредности на n е исполнет условот $np=\lambda$.

$$B(j;n,p)=\binom{n}{j}p^jq^{n-j}=\frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!}p^j(1-p)^n\cdot(1-p)^{-j}.$$

Од $np=\lambda$ имаме $p=\frac{\lambda}{n}$, со замена наместо p добиваме

$$B(j;n,p)=\frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!}\cdot\frac{\lambda^j}{n^j}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-j}=$$

$$=\frac{\lambda^j}{j!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\frac{n}{\lambda}\cdot\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-j}.$$

Сега бараме лимес кога $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} B(j;n,p) = \frac{\lambda^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)..\left(1-\frac{j-1}{n}\right)\left[\left(1-\frac{1}{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right]^{\lambda}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-j};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)..\left(1-\frac{j-1}{n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right]^{\lambda} = e^{-\lambda},$$

зашто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\frac{n}{\lambda}} = e^{-1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-j} = 1,$$

конечно

$$\lim_{n\to\infty} B(j;n,p) = \frac{\lambda^{\ j}}{j!}e^{-\lambda},$$

или

$$B(j,n,p) \approx \frac{\lambda^{\ j}}{j!}e^{-\lambda}.$$

Пример 5.4.4.4. Статистички се покажало дека веројатноста за пожар во некоја куќа во изминатата година е $\frac{1}{150}$. Во населба со 500 куќи, која е веројатноста дека ќе има повеќе од 4 пожари?

Според биномната распределба за $n = 500, p = \frac{1}{150}$ имаме

$$B(j;500,\frac{1}{150}) = \binom{500}{j}\left(\frac{1}{150}\right)^{j}\left(1-\frac{1}{150}\right)^{500-j}.$$

Бараната веројатност ќе биде

$$1 - B(0;500,\frac{1}{500}) - B(1;500,\frac{1}{150}) - B(2;500,\frac{1}{150}) -$$

$$- B(3;500,\frac{1}{150}) - B(4;500,\frac{1}{150}).$$

Но како 500 е голем број, а $\frac{1}{150}$ е мала веројатност, ние можеме да ја искористиме Пуасоновата апроксимација: $500 \cdot \frac{1}{150} = 3{,}333 = \lambda$, следователно, ако случајната променлива X е еднаква на бројот на пожарите имаме

$$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) \approx$$

$$\approx 1 - e^{-3{,}333}\left(1 + 3{,}333 + \frac{3{,}333^2}{2} + \frac{3{,}333^3}{6} + \frac{3{,}333^4}{24}\right) = 0{,}2435.$$

5.5. Очекување на дискретна случајна променлива

Очекувањето на случајна променлива или поточно математичко очекување или средна вредност е еден од најважните броеви кои ја карактеризираат случајната променлива.

Пред да го дефинираме тој број даваме пример кој треба да биде мотив за дефиницијата на средната вредност.

Пример 5.5.1. Некој игра некоја игра на среќа со n елементарни настани (исходи). Тоа значи множеството S има n елементи

$S=\{s_1, s_2,..., s_n\}$. На s_1 добива x_1 денари, на $s_2 x_2$ денари и т.н. на $s_n x_n$ денари при што под "добива" на некои исходи може да губи и тогаш соодветната сума ќе биде негативна. Нека играчот ја повторува играта N пати. Нека во тие N пати s_1 се случи k_1 пати, $s_2 k_2$ пати и т.н. $s_n k_n$ пати и јасно, дека $k_1+k_2+...+k_n=N$. Како во една игра ако се случи s_1 добива x_1 денари за k_1 случувања на s_1 ќе добие вкупно $k_1 x_1$, аналогно на s_2 ќе добие $k_2 x_2$,..., на s_n ќе добие $k_n x_n$ денари. Следователно целокупната сума од сите N игри ќе биде:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_n x_n = S_N,$$

ако поделиме со бројот на повторувањата на играта N ќе се добие просечната (средната) добивка за едно играње,

$$\frac{k_1 x_1}{N}+\frac{k_2 x_2}{N}+...+\frac{k_n x_n}{N}=\frac{S_N}{N} \text{ или}$$

$$\frac{S_N}{N}=x_1\frac{k_1}{N}+x_2\frac{k_2}{N}+...+x_n\frac{k_n}{N}.$$

Имајќи во обзир дека $\frac{k_1}{N},\frac{k_2}{N},...,\frac{k_n}{N}$ се релативни фреквенции соодветно за $s_1, s_2,..., s_n$; заклучуваме, дека

$$\frac{S_N}{N}\approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n,$$

каде $p_1, p_2,..., p_n$ се веројатностите за настаните $s_1, s_2,..., s_n$. Добиениот резултат ни дава за право да ја дадеме следната дефиниција.

Дефиниција: Нека X е случајна променлива дефинирана на просторот S со конечно множество од вредности $X(S)=\{x_1, x_2,..., x_n\}$, тогаш средна вредност или очекување (или: очекувана вредност) за X, бележена со $E(X)$ или μ_X, или просто со E или μ, е дефинирано со

$$E(X)=x_1 P(X=x_1)+x_2 P(X=x_2)+...+x_n P(X=x_n) \qquad (1)$$

или со помош на функцијата за распределба на веројатностите f

$$E(X)=x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+...+x_n f(x_n).$$

Пример 5.5.2. Тркаламе две коцки. Множеството S од можните исходи еднакво со директниот производ на множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$, т.е. S има 36 точки подеднакво веројатни со веројатност $\frac{1}{36}$, $S=\{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$. Нека X на точката $(a,b)\in S$ му го придружува поголемиот број т.е. $X(a,b)=\max(a,b)$. Тогаш X е случајна променлива на S со множество од вредности $X(S)=\{1,2,3,4,5,6\}$. Ги определуваме веројатностите за вредностите на X:

$$P(X=1)=f(1)=P((1,1))=\frac{1}{36}$$

$$P(X=2)=f(2)=P(\{(2,1),(2,2),(1,2)\})=\frac{3}{36}$$

$$P(X=3)=f(3)=P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(1,3),(2,3)\})=\frac{5}{36}$$

$$P(X=4)=f(4)=P(\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(1,4),(2,4),(3,4)\})=\frac{7}{36}$$

слично,

$$P(X=5)=f(5)=\frac{9}{36} \text{ и } P(X=6)=f(6)=\frac{11}{36}.$$

Табеларно претставени

$X(S)$	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Табела 5.5.1.

Средната вредност за X е:

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}=4{,}47$$

Пример 5.5.3. Бернулиевата случајна променлива

$$X=\begin{cases}0 & \text{со веројатност } q\\ 1 & \text{со веројатност } p\end{cases}$$

$E(X)=0\cdot q+1\cdot p=p$.

Пример 5.5.4. Од пакет со 12 производи од кои три се дефектни случајно, земаме три. Да се определи очекуваниот број на дефектни производи.

Просторот S се состои од $\binom{12}{3}=220$ подеднакво веројатни настани $\binom{9}{3}=84$ се комбинации без дефектен производ.

$3\cdot\binom{9}{2}=108$ со 1 дефектен производ

$\binom{3}{2}\cdot 9=27$ со 2 дефектни производи

$\binom{3}{3}=1$ трите дефектни производи

Нека случајната променлива X е еднаква на бројот на дефектните производи во избраните 3. Вредности на X се 0,1,2,3.

$$EX=0\cdot\frac{84}{220}+1\cdot\frac{108}{220}+2\cdot\frac{27}{220}+3\cdot\frac{1}{220}=\frac{165}{220}=0{,}75.$$

При игрите на среќа, средната вредност ги покажува условите на играта: Ако таа е позитивна тогаш условите се подобри за играчот, ако е негативна се полоши и кога е еднаква на 0, тогаш играта е фер, е рамноправна.

Пример 5.5.5. Играч тркала коцка. Ако падне прост број добива толку поени колкав што е бројот, ако бројот не е прост губи поени колкав што е бројот. Средната вредност на поените во играта е

$$E=2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}-1\cdot\frac{1}{6}-4\cdot\frac{1}{6}-6\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}.$$

Според тоа условите се негативни за играчот.

Пример 5.5.6. Ако $X\equiv k$, тогаш $E(X)=k$.

Нека X и Y се случајни променливи со конечно многу вредности и определени на ист простор S. Тогаш, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

Доказ. Нека

$X(S)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}Y(S)=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$;

$A_i=\{X=x_i\}, B_j=\{Y=y_j\}$. Ги разгледуваме следните настани.

$$A_i\cap B_j=\{s; s\in S \text{ и } X(s)=x_i, Y(s)=y_j\}\quad i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m.$$

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j \text{ , зашто } \bigcup_{j=1}^{m} B_j = S \text{ ,}$$

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B_j \text{ , зашто } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \text{ .}$$

На $A_i \cap B_j$ случајната променлива X има вредност x_i, а случајната променлива Y има вредност y_j, затоа $X+Y$ има вредност $x_i + y_j$ од тука

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) P(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i P(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j P(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} P(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap B_j) .$$

Во втората двојна сума го променивме редот на сумирање: прво по i потоа по j. Така добиваме

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) + \sum_{j=1}^{m} y_j P(B_j) = E(X) + E(Y) .$$

$$E(kX) = kE(X) .$$

Навистина, ако $X(S) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, тогаш $kX(S) = \{kx_1, kx_2, ..., kx_n\}$ и затоа

$$E(kX) = \sum_{i=1}^{n} kx_i P(X = x_i) = k \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = kE(X) .$$

Ако се дадени: $X_1, X_2, ..., X_n$ случајни променливи на просторот S, со едноставна индукција се покажува, дека

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) .$$

Средна вредност на биномната распределба: Ако случајната променлива има биномна распределба на веројатностите, тогаш

$$E(X)=\sum_{j=0}^{n} jP(X=j)=\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}p^j q^{n-j}=\sum_{j=0}^{n} j\frac{n!}{j!(n-j)!}p^j q^{n-j}=$$

$$\sum_{j=1}^{n} j\frac{n!}{j!(n-j)!}p^j q^{n-j}=np\sum_{j=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!}p^{j-1}q^{n-1-(j-1)}$$

ставаме $j-1=k$ и добиваме

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}p^k q^{n-1-k}=np(p+q)^{n-1}=np,$$

зашто $p+q=1$. Според тоа, ако X има биномна распределба $E(X)=np$.

Средна вредност на Пуасоновата распределба: Нека X има Пуасонова распределба, тогаш

$$E(X)=\sum_{j=0}^{\infty} j\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{(j-1)!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}$$

ставаме j-1=k и добиваме

$$=\lambda\ e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

Според тоа случајна променлива со Пуасонова распределба има средна вредност $E(X)=\lambda$.

Ако случајната променлива X има пребroиво бесконечно множество од вредности на просторот S $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots\}$, тогаш редот $\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X=x_j)$ може да биде дивергентен, тоа значи, дека X нема средна вредност. Според тоа не сите случајни променливи имаат средна вредност. Меѓутоа случајните променливи со конечно многу вредности имаат средна вредност.

5.6. Дисперзија

Друга важна бројна карактеристика на случајната променлива е дисперзијата. Таа претставува мерка за растурување на вредностите на случајната променлива во однос на нејзината средна вредност.

Дефиниција. Дисперзија на случајна променлива X е бројот

$$D(X) = E[X - E(X)]^2. \qquad (5.6.1)$$

Бројот $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ се вика стандардна девијација (стандардно отстапување) за X. Во суштост дисперзијата $D(X)$ на случајната променлива X е еднаква на математичкото очекување на случајната променлива $(X - E(X))^2$. Според тоа за да случајната променлива X има дисперзија, прво треба да има средна вредност.

Нека случајната променлива X е определена со следнава табела

$X(S)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Табела 5.6.1.

Нека $E(X) = \mu$, тогаш според (5.6.1) $D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_1 - \mu)^2 f(x_i)$.

Од дефиницијата за дисперзија и особините на средната вредност имаме

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X^2 - 2E(X) \cdot X + E^2(X)] =$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

така ја добиваме корисната формула

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 \qquad (5.6.2)$$

Ако случајната променлива X е константна $X \equiv k$ на просторот S тогаш $D(X) = D(k) = 0$. Навистина, ако $X \equiv k, X^2 \equiv k^2$ знаеме $E(k) = k$ и $E(k^2) = k^2$, според (5.6.2)

$$D(k) = E(k^2) - E(k)^2 = k^2 - (k)^2 = 0$$

Сега ја даваме следната важна особина за дисперзијата на X

$$D(aX + b) = E[aX + b - E(aX + b)]^2 = E[aX + b - aE(X) - b]^2 =$$

$$= E[aX - aE(X)]^2 = E[a^2X^2 - 2a^2E(X) + a^2E^2(X)] =$$

$$= a^2E(X^2) - 2a^2E(X)\cdot E(X) + a^2E^2(X) = a^2E(X^2) - a^2E(X) =$$

$$= a^2[E(X^2) - E^2(X)] = a^2D(X), \text{ т.е.}$$

$$D(aX + b) = a^2D(X).$$

Пример 5.6.1. Нека случајната променлива X кај коцката за играње ги прима вредностите еднакви на бројот што го покажува коцката. Да се определи дисперзијата на X.

$$EX = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2},$$

$$EX^2 = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6} + 4^2\cdot\frac{1}{6} + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Според (5.6.2) $DX = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$ и $\sigma_X = \sqrt{\frac{35}{12}}$.

5.7. Нормирани случајни променливи

Нека X е случајна променлива со средна вредност μ и стандардна девијација $\sigma > 0$. Нормирана (стандардизирана) случајна променлива X^* која одговара на X е дефинирана со

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Средната вредност и дисперзијата за нормираната случајна променлива X^* се:

$$E(X^*) = E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}[E(X) - E(\mu)] = \frac{1}{\sigma}[\mu - \mu] = 0.$$

$$D(X^*) = D(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}D(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

5.8. Коваријација и коефициент на корелација

Нека се дадени случајните променливи X и Y определени на ист простор S и двете со конечно многу вредности:

$$X(S)=\{x_1,x_2,...,x_n\},\quad Y(S)=\{y_1,y_2,...,y_m\}.$$

При дефиницијата на коваријацијата се појавува случајната променлива XY, затоа малку се задржуваме на неа. Имено, нека

$$A_i=\{s;X(s)=x_i\}, i=1,2,...,n$$

$$B_j=\{s;Y(s)=y_j\}, j=1,2,...,m.$$

На $A_i\cap B_j$ случајната променлива X има вредност x_i, а случајната променлива Y има вредност y_j следователно случајната променлива XY на $A_i\cap B_j$ има вредност $x_i y_j$. Настаните $A_i\cap B_j$ меѓусебе се исклучуваат, зашто меѓусебе се исклучуваат:

$$A_1,A_2,...,A_n \text{ и } B_1,B_2,...,B_m.$$

Понатаму од $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$ и $\bigcup_{j=1}^{m}B_j=S$ непосредно следи

$$A_i=\bigcup_{j=1}^{m}A_i\cap B_j \text{ и } B_j=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap B_j.$$

Нека, сега го разгледаме збирот

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j P(A_i\cap B_j) \tag{5.8.1}$$

можно е меѓу вредностите $x_i y_j$, $i=1,...,n; j=1,...,m$ да има еднакви, па со групирање имајќи во обзир, дека $A_i\cap B_j$ меѓусебе се исклучуваат, доаѓаме до збирот кој е еднаков на средната вредност на случајната променлива XY. Следователно, со сумата (5.8.1) е определена средната вредност $E(XY)$.

Дефиниција: Коваријација на случајните променливи X и Y е бројот $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ (5.8.2)

Од (5.8.2) добиваме

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X\mu_Y) =$$
$$= E(X \cdot Y) - \mu_X\mu_Y - \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y =$$
$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y = E(XY) - EX \cdot EY,$$

со што ја добиваме формулата

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY. \tag{5.8.3}$$

Ако $X=Y$ од (5.8.3) следи

$$\mathrm{Cov}(X,X) = E(X^2) - (EX)^2 = D(X).$$

Дефиниција: Коефициент на корелација за случајните променливи X и Y е бројот

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}. \tag{5.8.4}$$

За нормираните случајни променливи X^* и Y^* имаме

$$\mathrm{Cov}(X^*,Y^*) = E(X^*Y^*) - EX^* \cdot EY^* = E(\frac{X-EX}{\sigma_X} - \frac{Y-EY}{\sigma_Y}) - 0 =$$

$$\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \rho(X,Y).$$

Теорема 5.8.1. За коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$ на случајните променливи X и Y важи неравенството $|\rho(X,Y)| \leq 1$. При тоа, $|\rho(X,Y)| = 1$, ако и само ако, Y е линеарно зависна од X.

Доказ: Како дисперзијата е ненегативна, од равенството

$$D(X^* \pm Y^*) = E[(X^* \pm Y^*)^2] - [E(X^* \pm Y^*)]^2 =$$
$$= E(X^{*2}) + E(Y^*)^2 \pm 2E(X^*Y^*) = D(X^*) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X^*,Y^*) + D(Y^*) =$$
$$= 1 \pm 2\rho(X,Y) + 1 = 2(1 \pm \rho(X,Y)) \geq 0$$

од каде мора $|\rho(X,Y)| \leq 1$. Ако $|\rho(X,Y)| = 1$, тогаш мора $D(X^* - Y^*) = 0$, што е можно ако $X^* = Y^*$, т.е.

$$Y=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\cdot E(X)+E(Y).$$

Ако $\rho(X,Y)=-1$, тогаш мора $D(X^*+Y^*)=0$ или $Y^*=-X^*$ и пак добиваме дека Y е линеарно изразена со X.

Задачи

1. Да се определи средната вредност μ, дисперзијата σ^2 и стандарната девијација σ за следните случајни променливи:

а)

X	2	3	11
f	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

б)

X	-5	-4	1	2
f	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

в)

X	1	3	4	5
f	0,4	0,1	0,2	0,3

а) Одг. $\mu=4,\sigma^2=10,\sigma=3{,}2$

б) Одг. $\mu=-1,\sigma^2=8{,}25,\sigma=2{,}9$

в) Одг. $\mu=3,\sigma^2=3,\sigma=1{,}7$.

2. Тркаламе коцка. Нека X е еднаква на покажаниот број помножен со 2, а нека Y е еднаква на 1, ако е бројот непарен и еднаква е на 3, ако е бројот парен на коцката. Да се определи средната вредност μ и дисперзијата σ^2 за случајните променливи: а) X, б) Y, в) $X+Y$, г) XY.

а) Одг. $\mu=7, \sigma^2=11{,}7$ б) Одг. $\mu=2, \sigma^2=1$

в) Одг. $\mu=9, \sigma^2=14{,}7$ г) Одг. $\mu=15, \sigma^2=134{,}3$.

3. Фрламе пара додека не добиеме глава или пет писма. Да се определи очекуваниот број на фрлања. Множеството S се состои од следните елементи: Г, ПГ, ППГ, ПППГ, ППППГ, ППППП. Нека случајната променлива X е еднаква на бројот на фрлањата, тогаш

$$f(1)=P(X=1)=\frac{1}{2}, f(2)=P(X=2)=\frac{1}{4}, f(3)=P(X=3)=\frac{1}{8},$$

$$f(4)=P(X=4)=\frac{1}{16}, f(5)=P(X=5)=\frac{2}{32},$$

следователно $EX=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{2}{32}=1{,}9$.

4. Еден играч фрла 2 пари. Тој добива 10 ден. ако падне една глава, добива 200 ако паднат две глави. Од друга страна губи 500, ако нема глава. Да се определи очекуваната вредност на играта и дали е играта поволна за играчот.

Случајната променлива X е еднаква на денарите, што играчот ги добива или губи, т.е. X: 1,2,-5. Просторот $S=\{$ПГ, ГП, ПП, ГГ$\}$;

$$P(X=100)=\frac{1}{2}, P(X=200)=\frac{1}{4}, P(X=-500)=\frac{1}{4}$$

$$EX=100\cdot\frac{1}{2}+200\cdot\frac{1}{4}-500\cdot\frac{1}{4}=-25.$$

Тоа значи дека играта не е поволна за онај што ја игра.

5. Играч фрла две пари. Добива 5 ден. за 2 глави, добива 2 ден. за една глава и добива 1 ден. ако нема глава. а) Да се определи очекуваната сума по игра. б) Колку треба денари да вложи играчот во почетокот на играта за да биде играта рамноправна?

а)Овдека случајната променлива X е еднаква на парите што ги добива по игра т.е. X: 1,2,5.

$$EX = 1\cdot P(X=1) + 2\cdot P(X=2) + 5\cdot P(X=5) = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{4} = 2{,}5,$$

значи очекуваната добивка по игра е 2,5 ден.

б) За да биде играта рамноправна тој треба да вложи 2,5 ден. по игра.

6. Нехомогена пара со веројатност $\frac{1}{3}$ за глава и $\frac{2}{3}$ за писмо се фрла додека не падне глава или 5 писма. Да се определи очекуваниот број на фрлања на парата.

Просторот $S=\{$Г, ПГ, ППГ, ПППГ, ППППП, ППППГ$\}$.

Случајната променлива X е еднаква на бројот на фрлањата X:1,2,3,4,5.

$EX = 1P(X=1)+2P(\text{ПГ})+3P(\text{ППГ})+4P(\text{ПППГ})+5P(\{\text{ППППП, ППППГ}\})=$

$$= 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{211}{81}.$$

7. Да се определи средната вредност на геометриската распределба. Ако случајната променлива X има геометриска распределба на веројатностите, тогаш

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

Знаеме $1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}+q^k+\ldots = \frac{1}{1-q}$ за $|q|<1$. Со диференцирање на двете страни имаме

$$1+2q+\ldots+kq^{k-1}+\ldots = \frac{1}{(1-q)^2}, \text{ т.е } \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2},$$

затоа $E(X) = p\cdot\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$ и така добиваме, дека $E(X) = \frac{1}{p}$.

8. Веројатноста, дека еден производ од некоја фабрика е дефектен е 0,02. Во пратка од 10 000 производи колкав е очекуваниот број на дефектни производи? Средната вредност за случајна променлива X

што има биномна распределба е $EX=np$. Во овој случај n=10 000, p=0,02 затоа $EX=10000\cdot 0{,}02=200$.

9. Да се покаже, дека дисперзијата на Пуасоновата распределба е λ. Ако случајната променлива X има Пуасонова распределба, знаеме од текстот

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}=\lambda .$$

Поаѓајќи од формулата $D(X)=E(X^2)-(EX)^2$, треба да ја определиме

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!},$$

ставаме k-1=j и добиваме

$$e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda e^{-\lambda}\left[\sum_{j=0}^{\infty}j\frac{\lambda^j}{j!}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\right]=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left[\lambda\cdot e^{\lambda}+e^{\lambda}\right]=\lambda^2+\lambda,$$

$$D(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda .$$

5.9. Повеќедимензионални случајни променливи

Нека X и Y се случајни променливи дефинирани на просторот S со соодветни множества од вредности

$$X(S) = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\} \text{ и } Y(S) = \{y_1, y_1, \ldots, y_j, \ldots y_m\}.$$

Го разгледуваме пресликувањето од S во R^2 определено на следниот начин

$$s \to (X(s), Y(s)) \qquad s \in S \tag{5.9.1}$$

Според (5.9.1) на секое $s \in S$ му придружуваме пар или точка $(X(s), Y(s))$ од рамнината R^2. Можеме, на пример, пресликувањето (5.9.1) да го обележиме вака

$$(X, Y) : S \to R^2 \tag{5.9.2}$$

и да пишуваме $(X, Y)(s) = (X(s), Y(s))$ за $s \in S$. Можеството од вредности за пресликувањето определено со (5.9.2) е еднакво на производот

$$X(S) \times Y(S) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_n, y_m)\} \tag{5.9.3}$$

На множеството (5.9.3) дефинираме функција h определена со

$$h(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

каде P е веројатноста на S.

Вака определената функција h се вика заедничка функција на распределбата или заедничка веројатносна функција за X и Y и обично се задава табеларно:

X \ Y	y_1	y_2	...	y_m	Сума
x_1	$h(x_1,y_1)$	$h(x_1,y_2)$	...	$h(x_1,y_m)$	$f(x_1)$
x_2	$h(x_2,y_1)$	$h(x_2,y_2)$	...	$h(x_2,y_m)$	$f(x_2)$
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
x_n	$h(x_n,y_1)$	$h(x_n,y_2)$	...	$h(x_n,y_m)$	$f(x_n)$
Сума	$g(y_1)$	$g(y_2)$	...	$g(y_m)$	

табела 5.9.1

Функциите f и g се определени со $f(x_i)=\sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j)$ и $g(y_j)=\sum_{i=1}^{n} h(x_i, y_j)$ т.е. $f(x_i)$ е сума на елементите во i-тиот ред од табелата, а $g(y_j)$ е сума на елементите во j-тата колона од табелата; тие се викаат маргинални распределби и се во сушност индивидуалните распределби за веројатностите на X и Y соодветно. Заедничката распределба h или ќе велиме само распределба ги задоволува следните услови

1. $h(x_i, y_j) \geq 0$ и 2. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j)=1$.

Всушност, од двата услови произлегува оправданоста на терминот распределба за функцијата h.

Дефиниција: Пресликувањето (5.9.2) заедно со функцијата на распределба h се вика дводимензионална случајна променлива, а X и Y се нејзини координати (или компоненти).

Сосема, аналогно се дефинираат тридимензионални случајни променливи при дадени три случајни променливи X,Y и Z и т.н. во општ случај n-димензионални случајни променливи кога се дадени $X_1, X_2, \ldots, X_n$ променливи.

Особините 1. и 2. На функцијата h лесно се проверуваат, ако ставиме како порано

$$A_i=\{s: X(s)=x_i\} \text{ и } B_j=\{s: Y(s)=y_j\},$$

при што знаеме $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=S$ и $\bigcup_{j=1}^{m} B_j=S$.

$$A_i \cap B_j=\{s: X(s)=x_i \text{ и } Y(s)=y_j\} = (X=x_i, Y=y_j) \text{ кратко запишување.}$$

Од: $A_i=(X=x_i)=\bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j$ добиваме

$$P(A_i)=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{m} P(A_i \cap B_j)=\sum_{j=1}^{m} P(X=x_i, Y=y_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j)=f(x_i)$$

што значи f функцијата на распределба за случајната променлива X, и аналогно добиваме дека, g е функцијата на распределба на веројатностите за случајната променлива Y. Очигледно, дека $h(x_i, y_j) \geq 0$ зашто е еднаква на веројатноста $P(A_i \cap B_j)$ понатаму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h(x_i,y_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Така ги проверивме двете особини 1. и 2. на функцијата h.

Пример 5.9.1. Од заедничката табела на случајните променливи X и Y да се направат посебните табели.

X \ Y	4	10	Сума
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Сума	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

табела 5.9.2

X	1	3
f	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

табела 5.9.3

Y	4	10
g	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

табела 5.9.4

5.10. Независни случајни променливи

Случајните променливи X и Y дефинирани на просторот S велиме, дека се независни ако

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \qquad (5.10.1)$$

за сите парови (x_i, y_j).

Следователно, ако f и g се функции на распределба за веројатностите на X и Y соодветно тогаш

$$h = (x_i, y_j) = f(x_i)g(y_j).$$

Пример 5.10.1. Нека X и Y се случајни променливи со заедничка распределба дадена со табелата

X \ Y	2	3	4	Сума
1	0,06	0,15	0,09	0,30
2	0,14	0,35	0,21	0,70
Сума	0,20	0,50	0,30	

табела 5.10.1

За X и Y табели се 5.10.2 и 5.10.3.

X	1	2
f	0,30	0,70

табела 5.10.2

Y	2	3	4
g	0,20	0,50	0,30

табела 5.10.3

Провери, дека X и Y се независни. На пример,

$P(X=1, Y=2) = 0{,}06 = 0{,}30 \cdot 0{,}20 = P(X=1, Y=2)$ и т.н.

Ако се дадени три случајни променливи X, Y и Z ќе велиме дека се независни ако

$$P(X = x_i, Y = y_j, Z = z_k) = P(X = x_i)P(Y = y_j)P(Z = z_k)$$

на тој начин се дефинира независноста и на дадени n случајни променливи

$X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Еве две важни теореми за независни случајни променливи кои во општ служај не важат.

Теорема 5.10.1 Нека X и Y се независни случајни променливи. Тогаш:

1. $E(XY) = E(X)E(Y)$
2. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$
3. $Cov(X, Y) = 0$

Доказ.

1. Нека $X(S)=\{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\}$ и $Y(S)=\{y_1, y_1, ..., y_j, ... y_m\}$.

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(X=x_i)P(Y=y_j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)\sum_{j=1}^{m} y_j P(Y=y_j)=E(X)E(Y).$$

2. $D(X+Y)=E(X+Y)^2-(E(X+Y))^2$,

$$E(X+Y)^2=E(X^2+2XY+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)=$$
$$=E(X^2)+2E(X)E(Y)+E(Y^2);$$
$$(E(X+Y))^2=(E(X)+E(Y))^2=E^2(Y)+2E(X)E(Y)+E^2(Y)$$

како $E(XY)=E(X)E(Y)$, со замена во 2. добиваме

$$D(X+Y)=E(X^2)-E^2(X)+E(Y^2)-E^2(Y)=D(X)+D(Y).$$

3. $Cov(X,Y)=E(X-E(X))(Y-E(Y))=$

$$=E(XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y))=$$
$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y),$$

бидејќи $E(XY)=E(X)E(Y)$ следи $Cov(X,Y)=0$. Со тоа теремата е докажана. Од особината 2. во докажаната теорема како обопштување точна е следната многу важна теорема.

Теорема 5.10.2. Нека X_1, X_2,..., X_n се независни случајни променливи.Тогаш

$$D(X_1+X_2+...+X_n)=D(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

Доказ.

$$D(X_1+...+X_{n-1}+X_n)=D(X_1+...+X_{n-1})+D(X_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1} D(X_i)+D(X_n)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

При индуктивна претпоставка дека важи за *n-1* случајни променливи и уште, ако X, Y и Z се независни случајни променливи такви ќе бидат и X+Y и Z.

Нека ја докажеме втората претпоставка, т.е. ако X, Y и Z се независни, тогаш и X+Y и Z се, исто така, независни:

$P(X+Y=a, Z=b)=P(X+Y=a)P(Z=b)$, последново треба да го докажеме. Нека

$$A_i=(X=x_i) \quad, B_j=(Y=y_j) \text{ , тогаш}$$

$$A_i \cap B_j=(X=x_i, Y=y_j) \text{ при што е јасно, дека}$$

$$\bigcup_{i,j}(A_i \cap B_j)=\bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{m} Ai \cap\ Bj)=S\ .$$

$C=(Z=b)$, следователно $C=\bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{m}(A_i \cap B_j) \cap C)$. Фамилијата

$\{A_i \cap B_j,$ каде $i=1,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots m\}$ ја делиме на две:

1) $\{A_i \cap B_j,$ за кои $x_i+y_j=a\}$ и 2) $\{A_i \cap B_j,$ за кои $x_i+y_j \neq a\}$

нам ни треба пресек на C со $A_i \cap B_j$, од фамилијата 1) и тој пресек ќе биде $\bigcup_{i,j}{}'(A_i \cap B_j) \cap C$, прим (') обележува унија по елементите од првата фамилија. И така

$$P(X+Y=a,\ Z=b)=P(\bigcup_{i,j}{}'(A_i \cap B_j) \cap C\ )=\sum_{i,j}{}' P(A_i \cap B_j \cap C)=$$

$$=\sum_{i,j}{}' P(A_i \cap B_j)P(C)=P(C)P(X+Y=a)\,.$$

Пример 5.10.2. Нека X и Y се независни случајни променливи, X има Пуасонова распределба со параметар α, Y има Пуасонова распределба со параметар β. Како X и Y имаат множество од вредности $\{0,1,2,\ldots,\}$ истото ќе биде и за Z=X+Y.

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{j=0}^{k}P(X=j,Y=k-j)=\sum_{j=0}^{k}P(X=j)P(Y=k-j)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{\alpha^j}{j!}e^{-\alpha}\cdot\frac{\beta^{k-j}}{(\alpha-j)!}e^{-\beta}=e^{-(\alpha+\beta)}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{k!}\cdot\frac{k!}{j!(k-j)!}\alpha^j\beta^{k-j}=$$

$$=\frac{1}{k!}e^{-(\alpha+\beta)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\alpha^j\beta^{k-j}=\frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{k!}(\alpha+\beta)^k,$$

од каде гледаме, дека Z има Пуасонова распределба со параметар $\alpha+\beta$.

Со едноставна индукција примерот може да се генерализира. Имено, ако се дадени независните случајни променливи $X_1, X_2,\dots,X_n$ сите со Пуасонова распределба со параметар $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$ соодветно, тогаш и нивниот збир $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ е случајна променлива со параметар $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$.

Нека се навратиме во Бернулиевата шема во врска со поимот на независност на случајни променливи. Разгледуваме експеримент чиј што простор S се состои од два елементи S={У, Н}. У(успех) се случува со веројатност p, а Н(неуспех) се случува со веројатност q, $p+q=1$. Со n повторувања на експериментот го добиваме просторот S^n чии што елементи се серии со должина n составени од буквите У и Н. На просторот S^n ги разгледуваме случајните променливи: $X_1, X_2,\dots, X_n$ при што

$$X_j=\begin{cases} 1, \text{ако на j - то место е У} \\ 0, \text{инаку} \end{cases}, \text{ при } j=1,2,\dots,n$$

Знаеме, веројатноста на елемент од S^n е еднаква на производот на p и q при што на местото на буквата У се става p, а на местото на буквата Н се става q. Настанот $(X_j=1)$ го формираат сите серии кои на j-то место ја имаат буквата У. Веројатноста на тој настан е еднаков на збирот од веројатностите на неговите елементи (серии) и како во сите тие собирци на j- то место е p, го вадиме пред заграда. Во заградата збирот е еднаков на $(p+q)^{n-1}=1$, зашто p+q=1, следователно $P(X_j=1)=p$, и одма $P(X_j=0)=1-P(X_j=1)=1-p=q$ тоа е веројатноста на настанот од сите серии кои на j-то место ја имаат буквата Н. Сега $P(X_i=1, X_j=1)$ е еднаква на збирот од веројатностите на сите серии кај кои на i-то и j-то место стои буквата У. Во нивните веројатности на тие места стои p, затоа вадиме p^2 и во заградата останува збир еднаков на $(p+q)^{n-2}=1$.

Аналогно имаме $P(X_i=1, X_j=0)=pq=P(X_i=1)P(X_i=0)$ како што $p^2=P(X_i=1)P(X_j=1)$, и така работејќи се убедуваме дека случајните променливи $X_1, X_2,\dots, X_n$ се независни. Нека, сега ја разгледаме случајната променлива

$$X=X_1+X_2+\dots+X_n$$

Оваа случајна променлива во секоја серија има вредност еднаква на бројот на буквите У во таа серија т.е. на бројот на успесите. Следователно $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, зашто точно $\binom{n}{k}$ серии има во кои буквата У се повторува k-пати. Тоа пак покажува, дека случајната променлива X има биномна распределба. Бидејќи

$$E(X_j)=p\cdot 1+q\cdot 0=p,\quad E(X_j^2)=1\cdot p+0=p \text{ и затоа}$$

$$D(X_j)=p-p^2=p(1-p)=pq,\ j=1,2,...,n.$$

$$E(X)=\sum_{j=1}^{n}E(X_j)=\sum_{j=1}^{n}p=np$$

$$D(X)=\sum_{j=1}^{n}D(X_j)=\sum_{j=1}^{n}pq=npq=\sigma^2, \text{а } \sigma=\sqrt{npq}.$$

Независноста на случајни променливи се запазува при доволно широки околности. Имено, нека претпоставиме, дека $X_1, X_2,\dots, X_n$ се независни. Нека F и G се функции од j и k променливи соодветно. Тогаш двете случајни променливи

$$U=F(X_1,...,X_j)\ ,\ V=G(X_{j+1}...,X_{j+k}) \text{ се независни.}$$

Пример 5.10.3. Нека $F(x,y,z)=xy+z, G(x,y)=\sin xe^y$. Тогаш, ако $X_1,X_2,\dots, X_5$ се независни, такви ќе бидат и $U=X_1X_2+X_3$ и $V=\sin X_4e^{X_5}$.

5.11. Функции од случајна променлива

Нека X и Y се случајни променливи на ист простор S. Ако постои функција F таква што Y=F(X) тогаш велиме дека случајната променлива Y е функција од случајно променливата X; така што $Y(s)=F[X(s)]$ за s $\in$S. На пример за $F(x)=(x+k)^2$ имаме $F(X)=(X+k)^2$. Ја имаме следната фундаментална теорема.

Теорема 5.11.1. Нека X и Y се случајни променливи на ист простор S при што Y=F(X). Тогаш

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}F(x_i)f(x_i)$$

каде f е функција на распределба за веројатностите на X.

Слично, случајната променлива Z е функција од случајните променливи X и Y, ако

Z=H(X,Y) т.е. $Z(s) = H(X(s), Y(s))$ каде $H(x, y)$ е дадена функција од две независни променливи. Во овој случај ја имаме следната теорема,

Теорема 5.11.2. Нека X и Y се случајни променливи на ист простор S и нека Z=H(X,Y). Тогаш

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} H(x_i, y_j) h(x_i, y_j)$$

kade h е заедничката распределба за X и Y .

Доказот е речиси очигледен, ако S го напишеме како $\bigcup_{i,j} Ai \cap Bj$, каде $A_i = (X = x_i)$ $B_j = (Y = y_j)$ со кои што досега се среќававме повеќе пати. На $A_i \cap B_j$ $Z(s) = H(x_i, y_j)$ и следователно

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} H(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} H(x_i, y_j) h(x_i, y_j)$$

5.12. Кумулативна функција на дискретна случајна променлива

Нека X е дискретна случајна променлива. За секој реален број x, $P(X \le x) = P(X^{-1}(-\infty, x])$ бидејќи е веројатност, е број од интервалот [0,1]. Затоа

$$F(x) = P(X \le x) \tag{5.12.1}$$

е функција дефинирана на R со вредности на интервалот [0,1]. Се вика кумулативна функција на распределба за случајната променлива X, зашто покажува како се акумулира веројатноста за вредностите на X. Натаму, функцијата F(x) едноставно ќе ја викаме функција на распределба или дистрибуција.

Пример 5.12.1 Нека ја определиме дистрибуцијата на Бернулиевата случајна променлива $X(s) = \{0,1\}$ при што, да се потсетиме,

$$P(X=0)=q \qquad P(X=1)=p \qquad p+q=1.$$

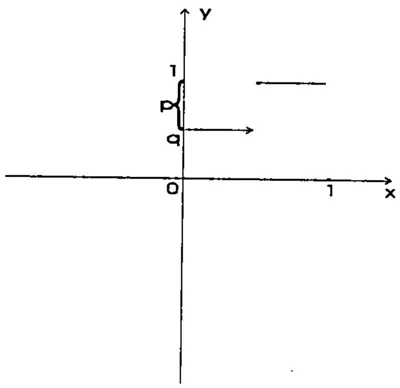
За $x<o$ $F_{(x)}=P(X\le x)=0$, зашто

настанот $(X\le x)=X^{-1}(-\infty,x]=\varnothing$.

За $x=0$ $F_{(0)}=P(X\le 0)=P(X=0)=q$,

за $0<x<1$ $F_{(x)}=P(X\le x)=P(X\le 0)$, зашто на интервалот (0,x] случајната променлива X нема вредности. За $x=1$

$F_{(1)}=P(X\le 1)=P(S)=1$ и јасно за $x>1$ $F_{(x)}=1$.



слика 5.12.1

Од сликата 5.12.1 гледаме дека функцијата F(x) е степенеста функција, на лево од нулата е еднаква на нула, во нулата има вредност q т.е. прави скок од 0 на q, потоа од 0 до 1 е еднаква на q, а во 1 прави скок за p т.е. од q на q+p=1 и јасно на десно од 1 е стално еднаква на 1.

Во сушност, функцијата на распределба за дискретна случајна променлива е секогаш степенеста функција. Нека претпоставиме дека множеството од вредности $X(S)=\{x_1,x_2,...,x_i,...,x_n\}$ при што нека $x_1<x_2<...<x_n$. Ние знаеме $P(X=x_i)=f(x_i)$, каде f е функцијата за распределба на веројатностите за X по однос на вредностите за X. Според тоа

$$F_{(x)}=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i)=\sum_{x_i\le x}f(x_i)$$

Со други зборови кумулативната функцијата F(x) се добива од функцијата *f(x)* со акумулирање(собирање) на вредностите на *f(x)* на определен дел од правата R.

Нека направиме една мала анализа на функцијата F(x) за случајна променлива X со конечно многу вредности $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

1. Нека $x' < x''$ тогаш $F(x') \leq F(x'')$ затоа што $(X \leq x') \subseteq (X \leq x'')$ или

   очигледно

   $$X^{-1}((-\infty, x']) \subseteq X^{-1}((-\infty, x'']) =$$
   $$= X^{-1}((-\infty, x'] \cup (x', x'']) = X^{-1}((-\infty, x']) \cup X^{-1}((x', x''])$$

   т.е. F(x) монотоно расте на R.

2. За $x < x_1$ имаме $X^{-1}((-\infty, x]) = \emptyset$ бидејќи функцијата X нема вредности на интервалот $(-\infty, x]$ и затоа контрасликата е празна, следователно

   $$F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0 \text{ за } x < x_1.$$

Можеме формално да пишуваме $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$. За $x \geq x_n$ имаме

$X^{-1}((-\infty, x]) \supseteq X^{-1}((-\infty, x_n]) = S$ и затоа $F(x) = P(X \leq x) = P(S) = 1$ и пак формално можеме да запишеме $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

3. $F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{i-1}) + f(x_i)$,

   за $x_{i-1} \leq x < x_i$ ќе биде

   $F(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{i-1})$ и следователно

   $\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} F(x) = F(x_i -) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{i-1})$, тоа е лимесот од лево во x_i Според тоа $F(x_i) - F(x_i -) = f(x_i)$ што покажува, дека функцијата на распределба *F(x)* има прекин во $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Конечно, ако $x_i \leq x < x_{i+1}$

$F(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_i)$ тоа значи, дека $\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} F(x) = F(x_i)$. Со други зборови функцијата *F(x)* е непрекината од десно. Така ги покажавме следните карактеристични особини за функцијата на распределба *F(x)*

1. *F(x)* монотоно расте

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$

3. Во секоја точка x е непрекината од десно, но од лево не мора.

Наведените особини ги има и функцијата на распределба $F(x)$ за случајна променлива со преброиво бесконечно множество $X(S)=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$. И во тој случај определена е со $F(x)=P(X\le x)=\sum\limits_{x_i\le x} f(x_i)$.

Пример 5.12.2. Да се определи функцијата на распределба $F(x)$ за геометриска распределба.

Решение: Знаеме, за случајна променлива X со геометриска распределба множеството од вредности $X(S)=\{1,2,\dots.\}$ со $P(X=j)=q^{j-1}p$, $p+q=1$

За x<1 $F(x)=0$, зашто $(X<1)=\varnothing$; за $x\ge 1$ постои единствен цел број j таков што $j\le x<j+1$, во сушност $j=[x]$-цел дел.

$$F(x)=P(X\le x)=P(X=1)+\dots+P(X=j)=$$

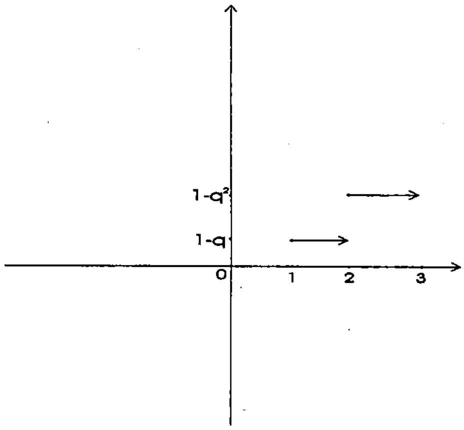
$$=p+\dots+q^{j-1}p=p(1+\dots+q^{j-1})=p\frac{q^j-1}{q-1}=$$

$$=p\frac{1-q^j}{1-q}=1-q^j.$$

Следователно за

$j-1\le x<j$ $\quad F(x)=1-q^{j-1}$ i $\quad \lim\limits_{\substack{x\to j\\ x<j}} F(x)=1-q^{j-1}=F(j-)$ и од тука

$F(j)-F(j-)=1-q^j-1+q^{j-1}=q^{j-1}(1-q)=q^{j-1}p$ тоа е скокот на функцијата во точката $x=j$, слика 5.12.2.



слика 5.12.2

Задачи

1. Заедничката распределба на X и Y е:

Y \ X	-2	-1	4	5	Сума
1	0,1	0,2	0	0,3	0,6
2	0,2	0,1	0,1	0	0,4
Сума	0,3	0,3	0,1	0,3	

табела 1

Да се најде а)E(X) и E(Y), б)$Cov(X,Y)$, в)σ_x, σ_y и g(X,Y).

Одговор: а) E(X)=1,4 , E(Y)=1 ; б) $Cov(X,Y)$=-5; в) σ_x=0,49 , σ_y=3,1 , g(X,Y)=-0,3.

2. Пара се фрла 4 пати. Нека X е еднаква на бројот на главите, а Y е еднака на бројот на главите во најголемата низа глави (пример Y(ПГПГ)=1, Y(ПГГП)=2,...) . а) Да се определи заедничката распределба на X и Y, б) Да се определат $Cov(X,Y)$ и g(X,Y).

Одговор : б) $Cov(X,Y)$=0,85 , g(X,Y) =0,89.

3. Нека X има вредности {0,1,2}, а Y={4,5,6}.

Да се пополни табелата т.е. да се определат непознатите, ако X и Y се независни.

Y / X	4	5	6	Сума
0	1/6	d	1/6	j
1	a	e	k	1/3
2	b	f	h	1/3
Сума	e	g	i	

табела 2

Решение: $j+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ затоа $j=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}+d+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ $d=0$ т.е.

$P(X=0)P(Y=5)=d=0$, како $P(X=0)P(Y=6)=\frac{1}{6}$ следи $P(X=0)\neq 0$;

па мора $P(Y=5)=0$. Од тука $P(X=1)P(Y=5)=l=0$,

$P(X=2)P(Y=5)=f=0$; од $P(X=0)P(Y=6)=\frac{1}{6}$ и $P(X=0)P(Y=4)=\frac{1}{6}$

имаме $P(Y=4)=P(Y=6)$ затоа $P(X=1)P(Y=4)=P(X=1)P(Y=6)$

или $a=k$ па од $a+0+a=\frac{1}{3}$ $a=k=\frac{1}{6}$; од $P(X=2)P(Y=4)=$

$=P(X=2)P(Y=6)$ имаме $b=h$ или $b=h=\frac{1}{6}$, $c=\frac{1}{2}$, $g=0$ $i=\frac{1}{2}$.

4. Направени се $n+m$ Бернулиеви обиди т.е. ист обид повторен е $n+m$ пати со веројатност за успех p. Нека случајната променлива X е еднаква на бројот на успесите во првите n обиди, а Y е еднаква на бројот на успесите во последните m обиди .

а) Како се распределени X и Y,

б) дали X и Y се независни ?

в) покажи дека X +Y има биномна распределба .

5. Нека X е случајна променлива со распределба на веројатностите f. Момент од ред k U_k е дефиниран со

$$U_k=E(X^k)=\sum_{i=1}^{n}x_i^k f(x_i).$$

Да се определат U_1, U_2, U_3, U_4 и U_5 за X определена со табелата:

X	-2	1	3
f	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

табела 3

(Забележуваме дека U_1 е средната вредност, а U_2 го користевме при определување на дисперзијата).

$$U_1=\sum_i x_i f(x_i)=-2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}=0$$

$$U_2=\sum_i x_i^2 f(x_i)=(-2)^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}=4{,}5\ ,$$

$$U_3=\sum_i x_i^3 f(x_i)=(-2)^3\cdot\frac{1}{2}+1^3\cdot\frac{1}{4}+3^3\cdot\frac{1}{4}=3$$

$$U_4=\sum_i x_i^4 f(x_i)=(-2)^4\cdot\frac{1}{2}+1^4\cdot\frac{1}{4}+3^4\cdot\frac{1}{4}=28{,}5$$

$$U_5=\sum_i x_i^5 f(x_i)=(-2)^5\cdot\frac{1}{2}+1^5\cdot\frac{1}{4}+3^5\cdot\frac{1}{4}=45.$$

5.13. Неравенство на Чебишев. Закон на големите броеви.

Законот на големите броеви потврдува дека статистичкиот аспект кој се базира на релативните фрекфенции е суштината на теоријата на веројатноста. Имено фрекфенциите кои се резултат на долги серии на повторувања на експериментите се приближуваат кон веројатноста на разгледуваниот настан. Доказот се базира на добро познатото неравенство на Чебишев што го даваме во следната теорема

Теорема 5.13.1. (неравенство на Чебишев): Нека X е случајна променлива со средна вредност μ и стандардна девијација σ. Тогаш за $\varepsilon > 0$ важи неравенството

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (6.13.1)$$

Доказ. Тргнуваме од дефиницијата на дисперзијата за X:

$$D(X)=\sigma^2=\sum_i (x_i-\mu)^2 f(x_i), \text{каде } f(x_i)=P(X=x_i).$$

Од сумата ги испуштаме собирците во кои што $|x_i-\mu|<\varepsilon$. Со тоа десната страна се намалува, а новодобиената сума ја бележиме со $\sum'$ т.е.

$$\sigma^2 \geq \sum_i {}'(x_i-\mu)^2 f(x_i).$$

Како во сумата $\sum'$ $|x_i-\mu|\geq\varepsilon$ имаме понатаму

$$\sigma^2 \geq \sum{}'\varepsilon^2 f(x_i)=\varepsilon^2\sum{}' f(x_i)$$

Но $\sum_i{}' f(x_i)$ е еднаква на веројатноста на настанот дека $|X-\mu|\geq\varepsilon$ и затоа

$$\sigma^2 \geq \varepsilon^2 P(|X-\mu|\geq\varepsilon).$$

По делењето со ε^2 го добиваме неравенството (1) кое се вика неравенство на Чебишев. Случајниот настан $|X-\mu|\geq\varepsilon$ е спротивен на настанот $|X-\mu|<\varepsilon$, следователно

$$P(|X-\mu|<\varepsilon)=1-P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (2)$$

Теорема 5.13.2.(Законот за големите броеви). Нека X_1, X_2,... е низа од независни случајни променливи еднакво распределени со средна вредност μ и дисперзија σ^2. Нека ја разгледаме

$$\overline{S_n}=\frac{X_1+X_2+...X_n}{n} \quad \text{каде } S_n=X_1+X_2+...X_n$$

која е случајна променлива што се вика аритметичка средина. Тогаш за $\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{S}_n-\mu|\geq\varepsilon)=0$ или еквивалентно

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{S}_n-\mu|<\varepsilon)=1.$$

Доказ. Прво ги определуваме средната вредност и дисперзијата за $\overline{S}_n$:

$$E(\overline{S}_n)=\frac{E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)}{n}=\frac{n\cdot\mu}{n}=\mu .$$

Бидејќи $X_1, X_2,\dots X_n$ се независни, за дисперзијата имаме

$$D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)=n\sigma^2.$$

$$D(\overline{S}_n)=D\left(\frac{X_1+X_2+...+X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D(X_1+X_2+...+X_n)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

Со примена на неравенството на Чебишев за случајна променлива $\overline{S}_n$ имаме

$$P(\left|\overline{S}_n-\mu\right|\geq\varepsilon)\geq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\quad \text{или}$$

$$P(\left|\overline{S}_n-\mu\right|<\varepsilon)\leq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Ако пуштиме $n\to\infty$, бидејќи $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\to 0$, а $1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\to 1$ ги добиваме границите во теоремата.

Тука ја докажавме теоремата за големите броеви при претпоставка, дека постојат дисперзиите на случајните променливи X_i. Забележуваме, дека теоремата важи ако постојат средните вредности $E(X_i)$.

Теоремата што ја докажавме се вика слаб закон на големите броеви, заради слична, но построга теорема наречена јак закон на големите броеви.

За да покажеме, дека законот на големите броеви нé води кон тврдењето дека теоријата на веројатноста е базирана на статистичкиот аспект т.е. на интерпретацијата на релативните фрекфенции на независните обиди, разгледуваме настан А во даден случаен експеримент. Нека обидот независно го повторуваме голем број n пати. Дефинираме случајна променлива X_i со

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{ако во } i\text{-от обид се случи} \quad A\\ 0, & \text{ако не се случува} \quad A\end{cases}$$

Во суштност случајната променлива X_i е определена на просторот составен од серии со должина n од буквите У за успех(ако се случи А) и Н за неуспех(ако не се случи А). Веројатноста на серија со k-успеси и

n-k неуспеси, како што знаеме, е $p^k q^{n-k}$, а додека веројатноста на настанот составен од сите серии со k-пати буквата У и n-k пати буквата Н е определена со биномните веројатности

$$B(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},$$

каде p е веројатноста да се случи настанот А, а $q=1-p$ е веројатноста да не се случи. Сега, ако s е серија со k успеси и n-k неуспеси тогаш $X_i(s)=1$, ако на

i-тото место во s стои буквата У инаку $X_i(s)=0$. Случајната променлива

$S_i=X_1+X_2+\ldots+X_n$ во наведената серија s има вредност $S_n(s)=X_1(s)+\ldots X_n(s)=$

на бројот на успесите во таа серија. Како

$E(X_i)=1\cdot P(X_i=1)+0\cdot P(X_i=0)=1\cdot P(A)=p$ имаме $E(S_n)=np$, а

$D(X_i)=pq$ и $D(S_n)=npq$. Од законот на големите броеви имаме

$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-P(A)\right|\prec\varepsilon\right)\to 1$ каде $n\to\infty$, за фиксно $\varepsilon>0$.

Од законот на големите броеви имаме, дека релативната фрекфенција $\frac{S_n}{n}$ се стреми кон веројатноста $P(A)$ со сé поголема и поголема веројатност т.е. со веројатност која се приближува кон 1, ако $n\to\infty$. Или уште вака веројатноста, дека фрекфенцијата $\frac{S_n}{n}$ се разликува од правата веројатност $P(A)$ за $\varepsilon>0$ станува неизмерно блиска до 1 како $n\to\infty$.

Ако секое повторување на експериментот ни зема, на пример, една минута, тогаш $\frac{S_n}{n}$ се стреми кон $\mu(A)$ како минутите (времето) минува.

Пример 5.13.1. Нека разгледаме случајна променлива X_1 на временскиот интервал [0,1] која има Пуасонова распределба со средна вредност λ и, како што ни е познато, дисперзија λ. Случајната променлива X_t на временскиот интервал [0,t] има средна вредност и дисперзија λt. Според неравенството на Чебишев

$$P\left(\left|\frac{X_t}{t}-\lambda\right|\geq\varepsilon\right)=P(|X_t-\lambda t|\geq\varepsilon t)\leq\frac{D(X_t)}{(\varepsilon t)^2}=\frac{\lambda t}{\varepsilon^2 t^2}=\frac{\lambda}{\varepsilon^2 t}\to 0, \quad t\to\infty.$$

Според тоа средниот број на случувања во интервалот [0,t] како $t\to\infty$ се приближува кон λ. Значи, уште една потврда на фрекфенциската интерпретација на теоријата на веројатност.

ГЛАВА 6

6. КОНТИНУИРАНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

6.1. Дефиниција и примери

Случајната променлива X дефинирана на просторот S се вика недискретна или континуирана, ако нејзиното множество од вредности X(S) е бесконечно непреброиво. Најчесто X(S) е некој интервал ограничен или неограничен. На пример, нека случајниот обид е бирање на број t од интервалот $[a,b]$, а случајната променлива X е еднаква на вредноста на тој број т.е. X(t)=t. Во овој случај и просторот S и множеството на вредности X(S) се еднакви на множеството на интервалот $[a,b]$.

Во дадениов експеримент да се случи настанот t_0 т.е. веројатноста да се избере тој број е еднаква на нула. Тоа може да изгледа парадоксално, меѓутоа ако изборот на било кој број од интервалот $[a,b]$ е подеднаков веројатен тогаш е сосема природно веројатноста да биде еднаква на 1 поделено со бројот на сите броеви од интервалот, но како има бесконечно многу затоа и веројатноста ќе биде нула. Според тоа тука е целисходно да зборуваме за веројатност, дека дадениот број ќе биде од некој интервал или уште поопшто од некој дел на интервалот $[a,b]$. Например, веројатноста на настанот A, дека избраниот број ќе биде поблиску до левиот крај a отколку до десниот крај b на интервалот е еднаква на должината од левата половина поделена со должината на интервалот т.е. еднаква е на $\frac{1}{2}$. Истото се однесува, на пример за веројатноста на настанот $(t_1 \leq X \leq t_2)$

каде $(a \le t_1 \le t_2 \le b)$. Поради тоа кај континуираните случајни променливи од посебен интерес е, определувањето на кумулативната функција на распределба или само функција на распределба.

6.2. Функција на распределба и функција на густина

Нека X е случајна променлива. Тогаш нејзината функција на распределба (дистрибуција) е

$$F(x) = P(X \le x) \text{ каде } x \in R \tag{6.2.1}$$

Според тоа функцијата $F(x)$ е дефинирана на множеството R од реалните броеви, а вредностите ѝ се наоѓаат на интервалот [0,1] затоа што нејзини вредности се веројатности на случајни настани. Ако $x' < x''$ тогаш очигледно, дека $(X \le x') \subseteq (X \le x'')$ и следователно $F(x') = P(X \le x') \le P(X \le x'') = F(x'')$. Понатаму, ако $x \to \infty$ тогаш $(X \le x)$ се стреми кон сигурниот настан и $F(x) = P\ (X \le x)$ тежи кон 1 т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$. Аналогно, ако $x \to -\infty$ настанот $(X \le x)$ се стреми кон празниот настан $\varnothing$ и затоа $F(x) \to 0$ т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Нека сега за дадено $x_0 \in R$ разгледуваме низа (x_n) која монотоно расте , $x_n < x_0$ за секое n, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Од монотоноста на функцијата $F(x)$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0 -)$ т.е. постои лимес од лево во точката x_0. Од друга страна, ако $x_n \to x_0$ и $x_n > x_0$ тогаш $F(x_n) - F(x_0) = P(x_0 < X \le x_n)$ но очигледно случајните настани

$A_n = (x_0 < X \le x_n)$ имаат празен пресек

$A = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n ... \cap ... = \varnothing$, зашто ако $s \in A$ тогаш x_0ₙX(s) бидејќи, ако $X(s) \le x_0$ $s \notin A_n$. Како $A_1 \supset A_2 \supset ...$ следи дека $A_n \to \varnothing$ и затоа $P(A_n) \to 0$ или $F(x_n) - F(x_0) \to 0$ од каде $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} F(x_n) = F(x_0)$. На тој начин докажавме, дека $F(x)$ е непрекината од десно во секоја точка. Еве ги покажаните особини на функцијата на распределба $F(x)$:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

2. $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$

3. $F(x)$ е непрекината од десно

4. $F(x)$ монотоно расте

Но најчесто функцијата $F(x)$ е непрекината и има извод $F'(x)$ освен, можеби, во конечно многу точки. Примери на функции на распределба кои немаат извод во бесконечно многу точки има, но во примената речиси сите функции на распределба се непрекинати и имаат извод освен во конечен број на точки. Затоа понатаму ќе работиме со такви функции.

Дефиниција: Нека случајната променлива X има функцијата на распределба $F(x)$; тогаш функција на густина се дефинира со

$$f(x)= F'(x)$$

во точките во кои има извод.

Пример 6.2.1. Нека случајната променлива X има функцијата на распределба

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & 0<x \end{cases}$$

Да се најде функција на густина и следните веројатности: $P(X\leq 1), P(X>2)$ и $P(3<X\leq 4)$.

Решение. Со диференцирање на $F(x)$ добиваме

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & 0<x \end{cases}$$

На основа дефиницијата на функцијата на распределба, имаме

$$P(X\leq 1)=F(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

$$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-F(2)=1-\frac{2}{2+1}=\frac{1}{3}$$

$$(X\leq 4)=P(X\leq 3)\bigcup(3<X\leq 4)$$

како настаните од десната страна се исклучуваат имаме

$$P(X \le 4) = P(X \le 3) + P(3 < X \le 4) \quad \text{или}$$

$$P(3 < X \le 4) = F_{(4)} - F_{(3)} = \frac{4}{4+1} - \frac{3}{3+1} = \frac{1}{20}.$$

Од фактот што функцијата на густина $f(x)$ е интеграбилна на секој интервал $(a,b]$ и $F(x)$ е примитивна за секој $f(x)$ од математичката анализа следи

$$\int_a^b f(x)dx = F_{(b)} - F_{(a)} = P(a < X \le b) \qquad (6.2.2)$$

Кога $a \to -\infty$ тогаш $F_{(a)} \to 0$ и ако наместо b ставиме x добиваме

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (6.2.3)$$

Со равенството (6.2.3) напишана е фундаменталната врска меѓу функцијата на распределба $F(x)$ и функцијата на густина $f(x)$. Заслужува на едно место да ги напишеме следните две равенства :

1. $F'(x) = f(x)$ освен во точките во кои што не е диференцијабилна (тие се конечен број).

2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Основната причина заради која функцијата на густина $f(x)$ е важна е тоа што функцијата на распределба ги определува веројатностите од облик

$P(X \le x)$, а додека другите веројатности се определуваат со определени интеграли од функцијата на густина, како што е напишано во равенството (6.2.2)

На база на непрекинатоста на функцијата на распределба $F(x)$ го имаме следното

$$P(X = x_0) \le P(x_0 - \varepsilon < X \le x_0) = F(x_0) - F(x_0 - \varepsilon),$$

ако $\varepsilon \to 0$ тогаш

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P(X = x_0) = P(X = x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} [F(x_0) - F(x_0 - \varepsilon)] = 0.$$

Тоа ги повлекува следните три работи:

1. За сите непрекинати случајни променливи веројатноста, дека ќе примат конкретна вредност x_0 е нула.
2. Сега не мораме да водиме сметка за строги неравенства или не во следните случаи

$$P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(a < X \leq b) = P(a < X \leq b).$$

Всушност, ние, веќе тоа го направивме со равенството (6.2.2). Освен тоа во оние точки во кои што $F(x)$ нема извод т.е. не е определена функцијата $f(x)$, ние во тие точки можеме да ѝ припишеме било кои вредности на $f(x)$ и со тоа вредноста на интегралот не се менува, затоа можеме, секогаш, да сметаме дека функцијата $f(x)$ е секаде определена.

При определувањето на функцијата на густина за дадена случајна променлива најчесто прво се определува функцијата на распределба и потоа се бара нејзиниот извод.

Пример 6.2.2. Се стрела на кружна мета со радиус r. Да се определи функцијата на густина на случајната променлива X еднаква на растојанието до центарот и да се пресмета веројатноста $P\left(X \leq \frac{r}{2}\right)$.

Решение: Плоштината на метата е $r^2\pi$. Плоштината на делот од метата што се состои од сите точки кои се на растојание помало или еднакво на x е $x^2\pi$. Следователно

$P(X \leq x) = \frac{x^2\pi}{r^2\pi} = \frac{x^2}{r^2} = F(x)$ од каде $F'(x) = f(x) = \frac{2x}{r^2}$ за $0 < x < r$ и $f(x)=0$ надвор од интервалот $(0,r)$.

Веројатноста $P\left(X \leq \frac{r}{2}\right) = F\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4}$.

Задачи

1. Нека претпоставиме, дека функцијата на густина $f(x)$ за случајната променлива е

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{c}{x^3}, & 1 < x \end{cases}$$ каде c е константа.

Да се определи c и да се пресмета $P(X \geq 3)$. Пред сé треба $c>0$ зашто $f(x) \geq 0$ и треба

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Овдека $\int_{1}^{\infty} \frac{c}{x^3}dx = \frac{-c}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \Big|_{1}^{\infty} = \frac{c}{2} = 1$, $c = 2$,

$$P(X \geq 3) = \int_{3}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{x^2}\Big|_{3}^{\infty} = \frac{1}{9}.$$

2. Да се определи c за да функцијата

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{c}{(x+2)^2}, & x > 0 \end{cases}$$

биде функција на густина. Да се пресметаат

$$P(X > 4),\ P(X < 2),\ P(1 \leq X < 3).$$

3. Како во 2. За функцијата

$$f(x) = \begin{cases} ce^{x} & , \ x < 0 \\ ce^{-x} & , \ x > 0 \end{cases}$$

$$P(X > 1)\ ,\ P(-3 < X \leq 4)\ ,\ P(X < -2).$$

4. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad x < -1 \ \text{или} \quad x > 2 \\ cx^2 & \quad -1 < x < 2 \end{cases}$

$P(X > 0)$, $P(X < 1)$, $P(0 \leq X < 1)$.

5. Нека S е топка со радиус r. Нека избереме случајна точка во топката. Нека X е растојанието од точката до центарот. Колкава е $P(X \leq x)$. Да се определи функцијата на густина. Да се определат

$P(X > \frac{r}{2})$, $P(X < 0{,}8R)$.

6.3. Средна вредност на континуирани променливи

Нека X е континуирана случајна променлива определена на просторот S со множеството од вредности X(S)=[a,b]. Нека функцијата на густина $f(x)$, која очигледно за $x<a$ и $x>b$ е еднаква на нула;

$$F(x)=P\ (X\le x)=0 \text{ ако } x<a \text{ и затоа } F'(x)=0$$

$$F(x)=P\ (X\le x)=1, \text{ за } x\ge b \text{ и пак } F'(x)=0$$

Го делиме интервалот [a,b] како при определениот интеграл со делбени точки $a=x_0<x_1\ldots<x_{i-1}<x_i\ldots<x_n=b$. Ако на интервалот $(x_{i-1},x_i]$ земеме $X\approx x_i$ и $f(x)\approx f(x_i)$ тогаш

$P\ (x_{i-1}<X\le x_i)=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\approx f(x_i)\Delta x_i$. Средната вредност на дискретната случајна променлива со вредности x_1, $x_2,\ldots,x_i\ \ldots,x_n$ и веројатности $f(x_i)\Delta x_i$ соодветно е $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i$. Оваа сума сосема природно можеме да ја сметаме за приближна вредност на средната вредност на континуираната променлива X и како $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i$ е Риманова сума за функцијата $x\,f(x)$ средната вредност е дадена со

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{6.3.1}$$

Може интегралот (6.3.1) да не постои и во тој случај ќе велиме дека случајната променлива X нема средна вредност. Се знае дека постои средната вредност (6.3.1), ако постои интегралот $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx$.

Поопшто, ако случајната променлива Y=$H(X)$, каде $H(x)$ е функција од една променлива, тогаш на интервалот $(x_{i-1},x_i]$ во горното равенство случајната променлива Y има приближна вредноет $H(x_i)$ и затоа

$$E[H(X)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx \tag{6.3.2}$$

Ако $H(x) = (x-\mu)^2$ каде $\mu = E(X)$, тогаш $E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$ претставува дисперзија за случајната променлива X, т.е. имаме

$$D(X) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx \tag{6.3.3}$$

$\sigma^2 = \sqrt{D(X)}$ е стандардна девијација. И овдека како и при дискретниот случај

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (EX)^2.$$

6.4. Рамномерна распределба

Нека на интервалот $[a,b]$ случајно бираме број. X е еднаква на вредноста од тој број. Ако $x \in [a,b]$ тогаш веројатноста

$P\ (a < X \le x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ ако $x<a$ тогаш $P\ (X \le x) = 0$ зашто бираме број од интервалот $[a,b]$.

Следователно $P\ (X \le x) = \dfrac{x-a}{b-a} = F(x)$ за $a \le x \le b$ и за $x>b$ ставаме $F(x) = 1$. Од тука $f(x) = F'(x) = \dfrac{1}{b-a}$ за $a<x\le b$ и надвор од тој интервал $f(x)=0$.

Случајна променлива X која има функција на густина

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{за } a < x < b \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$$

и функција на распределба

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x \le b \\ 1 & , \quad x>b \end{cases}$$

велиме, дека има рамномерна распределба на интервалот $[a,b]$. Средната вредност е:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{xdx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{b+a}{2}.$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_a^b \frac{x^2dx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Со замена во формулата за $D(X)$ добиваме

$$D(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(a+b)^2}{12}.$$

Пример 6.4.1. Семафорот покажува зелено светло во траење на една минута и црвено половина минута. Да се определи веројатноста, дека ќе стигнеме на црвено. Да се определи веројатноста при претпоставка, дека сте стигнале на црвено ќе чекате повеќе од 10 секунди.

Времето на пристигнување U во текот на 90 секунди е подеднакво веројатно т.е. U има рамномерна распределба со густина $\frac{1}{90}$ за $0<U<90$.

$P(U>60)=P($стигнување на црвено$)=\int_{60}^{90}\frac{1}{90}du=\frac{1}{3}$ што е сосема логично.

$P($ чекање повеќе од 10 секунди/ако се стигнало на црвено$)=$

$$=P(U<80\ /\ U>60)=\frac{P(60<U<80)}{P(U>60)}=\frac{\frac{20}{90}}{\frac{30}{90}}=\frac{2}{3}.$$

Задачи

a. Нека X е непрекината случајна променлива со густина

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x+k & \text{за } 0\le x\le 3\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}$$

а) Да се пресмета k *б)* Да се најде $P(1\le X\le 2)$.

(Одг. *а)* $к=\frac{1}{12}$ б) $p=\frac{1}{3}$)

2. Случајната променлива X е рамномерно распределена на интервалот [0,1] а) Која е функцијата на густина ? б) Да сеопредели P (првата децимална цифра е 6) в) P (втората децимална цифра е 2) г) P (втората цифра е 7/ако првата е 2).

а) $f(x)=1$ за $0<x<1$. б) Треба $P(0{,}6\le X\le 0{,}7)=\int_{0,6}^{0,7}dx=0{,}1$

в)

$$p=\frac{P(\text{првата цифра 7 и втората 2})}{P(\text{првата 2})}=\frac{P(0{,}27\le X\le 0{,}28)}{P(0{,}2\le X\le 0.3)}=\frac{0{,}01}{0{,}1}=0{,}1.$$

a. Лицето А се очекува да пристигне меѓу 7 и 7^{30}. Лицето В доаѓа во 7^{15} за да се сретне со лицето А. а) Да се најде P (В стигнува пред А) , б) P (В чека помалку од 5 мин.) , в) P (В чека помалку од 10 мин. / В е пред А).

Густината е $f(x)=1/30$ за 7 „X„ 7^{30}. Ако X е времето на доаѓање за А.

а) $P(X>7^{15})=\int_{15}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}.$

б) $P(7^{15}<X<7^{20})=\int_{15}^{20}\frac{1}{30}dx=\frac{x}{30}\Big|_{15}^{20}=\frac{1}{6}+P(7\ <X<7^{15})=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$

в) Одг. $\frac{2}{3}$.

a. Нека X е рамномерно распределена на $[0,b]$. Земаме фиксен број 0 „ $d\le b$. Нека A е настанот $(X\le d)$. Да се покаже дека X при дадено A

има рамномерна распределба на $[0,d]$.

а. $P(X \le x / A) = \dfrac{P(X \le x \text{ и } X \le d)}{P(X \le d)} = \dfrac{\frac{x}{b}}{\frac{d}{b}} = \dfrac{x}{d}$.

6.5. Експоненцијална распределба

Нека Т е случајна променлива која е еднаква на времетраењето на работењето на некоја машина или на некој нејзин дел. Ако, на пример, делот работи сега се претпоставува дека тој ќе продолжи да работи како да е поставен сега, тоа значи изминатото време што работел не е битно, или со други зборови како да заборавил дека работел до сега.

За да особината на заборавност ја напишеме со математичма формула од каде ќе тргнеме во изведувањето на функцијата на распределба и густината земаме $s, t \ge 0$ да бидат некои времиња. Тогаш имајќи ја во обзир особината на заборавност, ако апаратот функционира во моментот t, веројатноста дека ќе продолжи да работи уште некое време s е еднаква на веројатноста како да почнува да работи од тој момент т.е. како да почнува од нула. Сето тоа, со помош на условната веројатност можеме да го напишеме во следниот облик

$$P(T > t+s / T > t) = P(T > s). \qquad (6.5.1)$$

Пример за ваква веројатност може да биде и времето на задржување на муштерија во некоја продавница или времето на телефонски разговор и.т.н.

Нека, сега преминеме кон изведувањето на функцијата на распределба и функцијата на густина за случајната променлива T. Нека ставиме

$$G(t)=P(T > t)$$

за $t \ge 0$. Тогаш ако h ,0

$$G(t+h)=P(T > t+h) = P(T > t+h \text{ и } T > t),$$

според формулата за условната веројатност

$$P(T > t+h \text{ и } T > t)= P(T > t+h / T > t)P(T > t).$$

Ако во формулата (6.5.1) наместо s стои h имаме

$P(T > t+h \,/\, T > t)P(T > t) = P(T > h)\, P(T > t) = G(h)G(t)$, така добивме

$$G(t+h) = G(t)G(h).$$

Нека, сега од двете страни извадиме $G(t)$ и потоа поделиме со h

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h} = G(t)\cdot\frac{G(h)-1}{h} \qquad (6.5.2)$$

При претпоставка дека апаратот не е земен дефектен можеме да претпоставиме дека ќе работи некое време, т.е. $G(0)=P(T>0)=1$. Ставаме во (2) наместо 1 $G(0)$ и земаме лимес од двете страни кога $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h)-G(t)}{h} = \lim_{h\to 0} G(t)\cdot\frac{G(h)-G(0)}{h} \qquad (6.5.3)$$

од каде на основа дефиницијата за извод имаме

$$G'(t) = G(t)\, G'(0).$$

Функцијата $G(t)$ монотоно опаѓа, зашто помала е веројатноста за поголемо време, следователно $G'(0) < 0$ и, ако ставиме $\lambda = -G'(0)$, $\lambda > 0$ добиваме

$$G'(t) = -\lambda\, G(t).$$

Општото решение на диференцијалната равенка е

$$G(t) = ce^{-\lambda t}$$

Користејќи го условот $G(0)=1$ наоѓаме дека $c=1$ и така конечно

$$G(t) = e^{-\lambda t} \qquad (6.5.4)$$

Функцијата на распределба за T е

$$F(t)=P(T \le t) \quad \text{и затоа} \quad G(t)= P(T > t)=1-P(T \le t)=1-F(t),$$

како $G(0)=1$ имаме $F(0)=0$ и $F(t)=0$ за $t < 0$, можеме да напишеме

$F(t)=1-G(t)=1-e^{-\lambda t}$ за $t > 0$ и $F(t)=0$ за $t \le 0$. Со диференцирање на $F(t)$ ја добиваме функцијата на густина

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{за } t > 0 \\ 0 & \text{за } t < 0 \end{cases} \qquad (6.5.5)$$

Случајна променлива T со густина (6.5.5) велиме дека има експоненцијална распределба со параметар λ.

Нека го определиме математичкато очекување за T

$$E(T)=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt=\lambda\int_{0}^{\infty} te^{-\lambda t}\,dt=-te^{-\lambda t}\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}dt=$$

$$=0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

Според тоа, добивме дека реципрочната вредност на λ е еднаква на средната вредност на случајната променлива Т.

Пример 6.5.1. Во една библиотека времето на читање на еден весник е 30 минути. Ако сте дошле во библиотеката во 9^h и весникот е издаден, колкава е веројатноста дека ќе чекате помалку од 15 минути. Земаме, дека времето Т на читање на весникот има експоненцијална распределба со $\lambda=\frac{1}{30}$ и затоа

$$P(T\le 15)=F(15)=1-e^{-\frac{1}{30}\cdot 15}=1-e^{-\frac{1}{2}}=0{,}3935.$$

6.6. Густината на функцијата од случајна променлива

Намерата е тука, пред сѐ, на примери да се даде начин за определување на функцијата на густина за случајна променлива Y која е функција од случајната променлива X т.е. $Y=g(X)$, каде g е функција од една променлива.

Пример 6.6.1. Нека U има рамномерна распределба на [0,2]. Да се определи густината за $Z=U^2$.

Решение: Бидејќи U вредностите ги прима во интервалот [0,2] тогаш U^2 прима вредности во интервалот [0,4]. За $z\in[0,4]$ имаме :

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(U^2\le z)=P(U\le\sqrt{z})=\frac{\sqrt{z}}{2}.$$

Со диференцирање ја добиваме густината

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{z}}, & 0<z<4\\ 0, & z>4\end{cases}.$$

Пример 6.6.2. Нека U има рамномерна распределба на [0,1]. Да се најде густината за $Z=3U+5$.

Решение : Од тоа што U прима вредности во интервалот [0,1] Z ќе прима од интервалот [5,8]. За $z\in[5,8]$

$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(3U+5 \le z) = P\left(U \le \frac{z-5}{3}\right)$, од каде со диференцирање добиваме

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<5 \\ \frac{1}{3}, & 5<z<8 \\ 0, & z>8 \end{cases}$$

Од дадениве два примери можеме да извлечеме правило за определување на густината за случајната променлива $Y=g(X)$:

1. Се определува множеството вредности за Y т.е. $Y(s)$
2. За $y\in Y(S)$ $\quad F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$
3. Се диференцира функцијата $F_Y(y)$. За 2. Во суштина ја определуваме веројатноста на настанот $A=(\ s;s\in S$ и $g(X(s))\le y\ ) = X^{-1}[\ g^{-1}(-\infty,y]\ ]$.

Задачи за вежба

а. Нека U е рамномерно распределена на [0,1]. Да се определи густината на следните случајни променливи :

а) $X=\ln U$, б) $y=U^3+2$, в) $Z=\frac{1}{U}$

а) $-\infty < X \le 0$ и затоа за $x\in(-\infty,0]$ $\quad F_X(x) = P(\ln U \le x) = P(U \le e^x) = \frac{e^x}{1}$.

Со диференцирање имаме

$$f_X(x) = \begin{cases} e^x, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

б) $f_Y(y) = (y-2)^{\frac{2}{3}} \quad 2<y<3$

в) $Z=\frac{1}{U}$, $Z(s)\in[1,\infty)$ следователно

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\tfrac{1}{U}\le z)=P(U>\tfrac{1}{z})=1-P(\tfrac{1}{U}\le z)=1-\tfrac{1}{z} \quad \text{за } 0\ \tfrac{1}{z}<1$$

$$F_Z{}'(z)=\frac{1}{z^2} \quad \text{за } z\in(1,\infty).$$

2. Нека T има експоненцијална распределба со параметар λ. Да се определи густината на следните променливи :

а) $X=T^2$ б) $Y=\dfrac{1}{T}$ в) $Z=lnT.$

б) Ако $0\le T<\infty$ исто и T^2

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(T^2\le x)=P(T\le\sqrt{x})=1-e^{-\lambda\sqrt{x}} \quad \text{за } x\ge 0$$

$$F_X{}'(x)=\begin{cases}\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}e^{-\lambda\sqrt{x}} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

б) $$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{y^2}e^{-\frac{\lambda}{y}} & y>0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

в) $f_Z(z)=\lambda e^z e^{-\lambda e^z}$.

3. Нека времетраењето T на една машина има експоненцијална распределба со средно времетраење од 200 саати. Претпоставуваме, дека цената на работата опаѓа со времето; попрецизно, ако машината е исправна во моментот t цената по единица време е $\frac{3}{t+1}$.

Тоа ќе рече, дека одма по купувањето на машината цената е $\frac{3}{0+1}=3$, по 2 саати работење е $\frac{3}{2+1}$ и.т.н. Нека Y е целокупната сума на машината додека се расипе. Тогаш со интегрирање на $\frac{3}{t+1}$ од 0 до t добиваме

$$Y_{(t)} = \int_0^t \frac{3}{n+1} du = 3\ln t.$$

Како времетраењето t е случајна променлива T затоа имаме $Y=3ln(T+1)$ и тоа е случајната променлива за целокупната цена на машината. Да се определи функцијата на густина за Y (параметарот λ за T е 1/200).

4. а) Да се определи функцијата на густина за променливата X , ако X^2 има рамномерна распределба на [0,1]. б) За фиксно n да се определи функцијата на густина за X, ако X^n има рамномерна распределба на [0,1].

Решение: а) Ако ставиме $X^2=U$ $X=\sqrt{U}$, U има рамномерна распределба на [0,1].

$F_X(x)=P(X\leq x) =P(\sqrt{U} \leq x)=P(U\leq x^2)= x^2$;

Од тука

$$F_X'(x) = \begin{cases} 2x \ , & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & \text{надвор од } (0,1) \end{cases}.$$

6.7. Непрекинати случајни променливи и условна веројатност

Претпоставуваме, дека веројатноста на настанот А зависи од вредноста на случајната променлива X. Во суштина, претпоставуваме, дека е полесно да се определуваат веројатностите $P(A\,/\,X=x)$ отколку да се најде $P(A)$ директно. Ако X е дискретна, од формулата за потполна веројатност добиваме

$$P(A) = \sum_x P(A\,/\,X = x)P(X = x)$$

каде сумирањето се прави по сите вредности x на променливат X. За да утврдиме слична формула кога X е непрекината случајна променлива постапуваме како при определување на математичкото очекување. Така $P(\ X=x\ )$ ја заменуваме со $P(\ x<X<x+\Delta x)\approx f(x)\ \Delta x$, каде $f(x)$ е густина за X. Па при дадена поделба на соодветниот интервал

$$P(A) \approx \sum_{i=1}^{n} P(A / X = x_i) \cdot f(x_i) \Delta x_i ,$$

Бидејќи сумата од десна страна е Риманова сума за функцијата

$P(A / X{=}x) f(x)$ природно ставаме $P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A / X = x) f(x) dx$ (6.7.1)

Формулата (6.7.1) ја дава потполната веројатност во континуираниот случај на променливите.

Пример 6.7.1. Фрламе пара два пати, но веројатноста p за глава е исто случаен број од интервалот [0,1]. Колкава е веројатноста за

а) 0 глави?, б) глава?, в) 2 глави?

Решение: Нека X е еднаква на веројатноста за глава. X е рамномерно распределена на (0,1).

$P($ 0 глави $/X{=}x) = (1-x)^2$,

$P($ 1 глава $/X{=}x) = x(1-x)$,

$P($ 2 глави $/X{=}x) = x^2$

x е веројатност за добивање глава. Затоа

$$P(\text{ 0 глави}) = \int_0^1 (1-x)^2 \cdot 1 dx = \tfrac{1}{3}$$

$$P(\text{ 1 глава}) = \int_0^1 x(1-x) \ \cdot 1 dx = \tfrac{1}{3}$$

$$P(\text{ 2 глави}) = \int_0^1 x^2 \cdot dx = \tfrac{1}{3} .$$

Пример 6.7.2. Задача на Буфон. Во рамнината се повлечени паралелни прави на растојание еднакво на 1. Фрламе игла со должина 1. Да се определи веројатноста, дека иглата ќе пресече некоја од правите ?

Решение: Нека X е еднаква на растојанието од понискиот крај на иглата до правата од лево: слика 6.7.1. Со Ф го означуваме аголот што иглата го прави со позитивниот дел од хоризонтот, слика 6.7.1.

X и Ф се случајни променливи со $0 \leq X < 1$, $0 \leq \Phi \,_{"} \pi$

X има рамномерна распределба на $[0,1]$, а Φ има рамномерна распределба на $[0, \pi]$. Следователно функциите на густина се

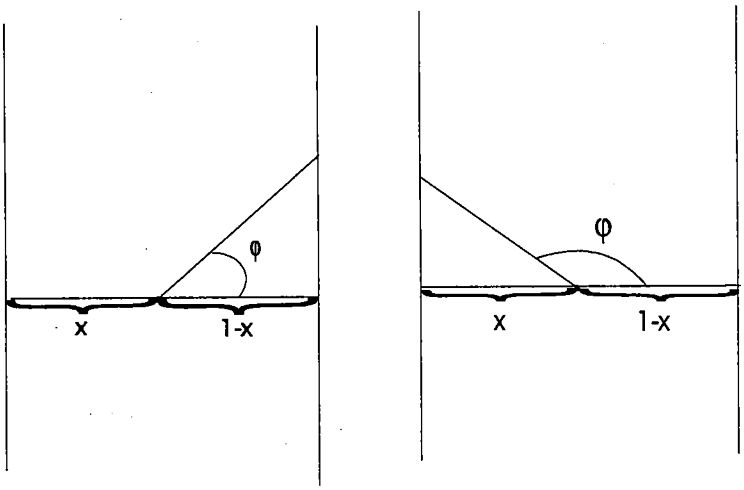
$$f_X(x) = 1, \ \ 0 < x < 1; \qquad f_\Phi(\varphi) = \frac{1}{\pi}, \ \ 0 < \varphi < \pi.$$

Правилото за тотална веројатност го применуваме под услов на вредностите на Φ: ако $\Phi=\varphi$, колкава е веројатноста дека иглата ќе пресече права? Тука ги земаме во обзир двете можности : а) $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ б) $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$. За да иглата сече права треба а) $\cos\varphi > 1-x$ и под б) $\cos(\pi-\varphi) > x$ или $-\cos\varphi > x$ каде

$$P(\text{пресек}\ /\Phi=\varphi) = \frac{1-(1-\cos\varphi)}{1} = \cos\varphi$$

$$P(\text{пресек}\ /\Phi=\varphi) = \frac{-\cos\varphi}{1} = \cos\varphi$$

$$P(\text{ пресек}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos\varphi)\, d\varphi = \frac{2}{\pi}.$$



слика 6.7.1.

Пример 6.7.3. Нека го повторуваме обидот до првиот успех, при што веројатноста p за успех е рамномерно распределена на интервалот $[0,1]$. Да се определи веројатноста, дека прв неуспех ќе има во n-тиот обид.

Решение. Случајната променлива X е еднаква на веројатноста за успех има рамномерна распределба на $[0,1]$. Ако А е настанот за прв неуспех во n-тиот обид, тогаш $P(A/X=x)=x^{n-1}(1-x)$ (тука $p=x$, $q=1-x$) и следователно по формулата за потполна веројатност имаме:

$$P(A)=\int_0^1 P(A/X=x)\cdot f(x)dx=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\cdot 1dx=\frac{1}{n(n+1)}.$$

Ако случајната променлива T е еднаква на бројот на повторувања на обидот во оние серии во кои буквата H е на крајот, тогаш $T:1,2,\ldots,n,\ldots$,и како што видовме $P(T=n)=\dfrac{1}{n(1+n)}$. Средната вредност $E(T)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)}=\infty$, тоа значи, T нема средна вредност.

Пример 6.7.4. Нека времето T на задржување на муштерија во некоја продавница има експоненцијална распределба со параметар λ. А параметрот λ од разно разни причини е рамномерно распределен на $[0,1;1]$ тогаш $\dfrac{1}{\lambda}\in[1,10]$. Да се определи веројатноста $P(T\leq 5)$.

Решение: Ако $\lambda\in[0,1;1]$ тогаш $\dfrac{1}{\lambda}\in[1,10]$ каде, знаеме $\dfrac{1}{\lambda}$ е средното време на задржување и како што гледаме тоа е експоненцијално од 1 до 10 минути.

$P(T\leq 5/X=x)=1-e^{-5x}$,зашто $F_T(t)=1-e^{-\lambda t}$,

$$P(T\leq 5)=\int_0^{0,9}(1-e^{-5x})\cdot\frac{1}{0,9}dx=1+\frac{1}{4,5}e^{-5x}\Big|_0^{0,9}=\frac{7}{9}+\frac{e^{-4,5}}{4,5}.$$

6.8. Кошиева распределба

Случајна променлива X со функција на густина

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\qquad -\infty<x<\infty$$

велиме дека има Кошиева распределба. Кошиевата распределба може да служи за пример на континуирана распределба која нема средна вредност; затоа што $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$ не постои.

6.9. Повеќедимензионални непрекинати променливи

Нека X и Y се континуирани случајни променливи дефинирани на ист простор S. Со правилото

$$(X,Y)(s) = (X(s),Y(s)), \ s \in S \qquad (6.9.1)$$

е определено пресликување од S во R^2 кое се вика дводимензионална непрекината променлива составена од променливите X и Y. Ако се дадени три случајни променливи X, Y и Z тогаш подредената тројка $(X(s),Y(s),Z(s))$ $s \in S$ е тродимензионална случајна променлива и во општ случај, кога се дадени n случајни променливи: X_1, X_2,..., X_n, тогаш подредената n-торка (X_1(s), X_2(s),..., X_n(s)) претставува n-димензионална случајна променлива.

Нека, за случајните променливи X и Y постои функција $h(x,y)$ определена на R^2, $h(x,y) \geq 0$, која е интеграбилна по Риман на секој правоаголник P: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ т.е. постои $\iint\limits_P h(x,y)dxdy$ при што

$$\lim_{\substack{a \to -\infty, b \to \infty \\ c \to -\infty, d \to \infty}} \iint\limits_P h(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dxdy = 1$$ ако уште важи

$$\iint\limits_D h(x,y)dxdy = P(A) \qquad (6.9.2)$$

каде A е настан определен со $A = \{s\,;\, s \in S \ \text{ и } \ (X(s),Y(s)) \in D)$. Тогаш $h(x,y)$ се вика заедничка густина за X и Y или само густина за дводимензионалната распределба (6.9.1). Вообичаено е наместо обликот (6.9.2) да се пишува

$$P((X,Y) \in D) = \iint\limits_D h(x,y)dxdy \qquad (6.9.3)$$

Според тоа, ако $h(x,y)$ е густина таа мора да ги задоволува условите:

1. $h(x,y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dxdy = 1$.

Најчесто ќе претпоставуваме дека $h(x,y)$ е непрекината на R^2. Веројатноста (6.9.3) за $X \le x$ и $-\infty < Y < \infty$ т.е.

$$P(X \le x,\ -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x} dt\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)d\tau\right)$$

се вика маргинална функција на распределба за X и аналогно функцујата

$$P(Y \le y\ ,\ -\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{y} d\tau\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)dt\right)$$

е маргинална функција на распределба за Y.

Функциите

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx$$

претставуваат маргинални густини за X и Y соодветно.

Пример 6.9.1. Нека функцијата на густина $h(x,y)$ за X и Y е

$$h(x,y) = \begin{cases} 6xy^2 & 0 < x < 1 \text{ и } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$$

Да сеопределат веројатностите:

а) $P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4}, 0 < Y \le \frac{1}{3}\right)$ б) $P\left(\frac{1}{2} < X\ ,\ \frac{1}{3} < Y\right)$

в) $P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4}\right)$

а)

$$P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4}, 0 < Y \le \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 6xdx \int_{0}^{\frac{1}{3}} y^2 dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2xdx\, y^3\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27}\left(\frac{9}{16} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{27 \cdot 16}$$

б) Одг. $\frac{26 \cdot 3}{27 \cdot 4}$

в) $$P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 6xdx \int_{0}^{1} y^2 dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2xdx \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{16}$$

Пример 6.9.2. а) Да се покаже, дека

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x}{y^3} & 0<x<1 \text{ и } 1<y\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}$$

е функција на густина , б) Колку е $P(Y>5)$?

а) $h(x,y)\geq 0$, $\int\limits_0^4 4xdx\int\limits_1^{\infty}\frac{dy}{y^3}=\int\limits_0^4 4xdx\cdot\frac{y^{-2}}{2}\Big|_1^{\infty}=\int\limits_0^4 4xdx\cdot\frac{1}{2}=x^2\Big|_0^1=1$, значи е.

б) $P(Y>5)=\int\limits_0^1 4xdx\int\limits_5^{\infty}\frac{1}{y^3}dy=\int\limits_0^1 4xdx\cdot\frac{1}{50}=\frac{1}{25}$.

За истата густина да се определат маргиналните густини за X и Y: $f(x)=4x\int\limits_1^{\infty}\frac{dy}{y^3}=2x$ за $0<x<1$, надвор од интервалот е 0, аналогно

$g(y)=\frac{1}{y^3}\int\limits_0^1 4xdx=\frac{2}{y^3}$. За $y>1$ инку е 0 . Да се пресмета, исто така

$P(X<\frac{1}{2}/Y>6)$. Имаме по формулата за условна веројатност:

$$P\left(X<\frac{1}{2}/Y>6\right)=\frac{P\left(X<\frac{1}{2}\text{ и } Y>6\right)}{P(Y>6)}=\frac{\int\limits_0^{\frac{1}{2}}4xdx\int\limits_6^{\infty}\frac{dy}{y^3}}{P(Y>6)}=\frac{\frac{1}{144}}{\frac{1}{36}}=\frac{1}{4}.$$

6.10. Независност на континуирани случајни променливи

Нека X и Y се случајни променливи со густини $f(x)$ и $g(x)$ соодветно. Како $f(x)$ и $g(x)\geq 0$ следи и нивниот производ $f(x)g(x)\geq 0$ и

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)g(y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(y)dy=1\cdot 1=1$. Освен тоа

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = P(a < X \le b)P(c < Y \le d) =$$
$$= \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy = \iint_D f(x)g(y)dxdy$$

каде D: $a \le x \le b$, $c \le x \le d$. Следователо заедничка густина е $h(x,y)=f(x)g(y)$.

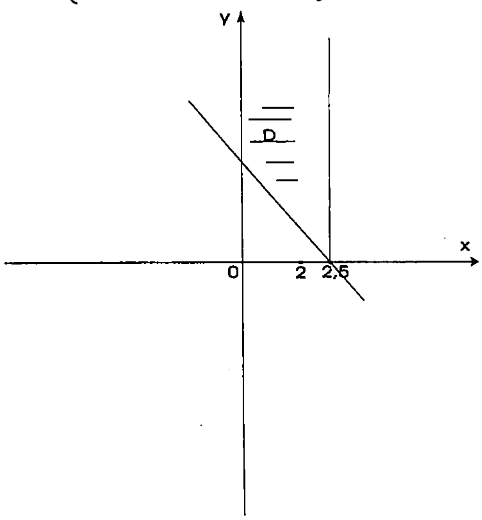
Пример 6.10.1. Нека T_1 и T_2 се времетраењата на две компоненти кои се употребуваат една по друга. Тоа значи по компонентата со време T_1 се заменува другата компонента со време T_2. Претпоставуваме дека T_1 и T_2 се независни. Исто така претпоставуваме, дека T_1 има рамномерна распределба на [0,2], а додека T_2 има експоненцијална распределба со параметар 3. Да се оперeдели веројатноста, дека втората компонента ќе работи најмалку 2,5 единици штом биде поставена по првата. Значи треба да се определи веројатноста $P(T_1+T_2 \ge 2{,}5)$.

Решение: Густините на T_1 и T_2 се

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Бидејќи T_1 и T_2 се независни заедничката густина е

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 3e^{-3y} & 0 < x < 2 \;\; y > 0 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$$



слика 6.10.1

$$P(T_1+T_2 \geq 2{,}5)=\iint\limits_D h(x,y)dxdy=\int_0^2 \frac{1}{2}dx \int_{2,5-x}^{\infty} 3e^{-3y}dy=$$

$$=\int_0^2 \frac{1}{2}dx[-e^{-3y}]_{2,5-x}^{\infty}=\frac{1}{6}e^{-7,5}(e^6-1)$$

Според тоа кај независните случајни променливи заедничката густина $h(x,y)$ е производ од густините $f(x)$ и $g(y)$ на X и Y соодветно и $f(x)$ и $g(y)$ се маргиналните густини.

Пример 6.10.2. X и Y се независни случајни променливи со густини f и g соодветно,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{8} & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases} \qquad g(y)=\begin{cases}y^{-2} & 1<y\\ 0 & y<1\end{cases}$$

Да се најде $P(XY>1)$.

Решение. Заедничката густина е

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{8y^2} & 0<x<2 \quad y>1\end{cases}$$

$$P(XY>1)=\int_1^{\infty} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{3x^2}{8y^2}dx=\frac{1}{8}\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^2}\cdot x^3\Big|_{\frac{1}{y}}^{2}=\frac{31}{32}.$$

Задачи

1. Нека случајните променливи X и Y имаат заедничка густина

$$h(x,y)=\begin{cases}c(x+y) & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}$$

а) Да се определи c,

б) Да се определат маргиналните густини,

в) Дали X и Y независни ?

г) Да се пресметаат веројатностите $P\left(X\leq\frac{1}{3}\right)$ и $P\left(Y\geq\frac{1}{2}\right)$.

а) Треба $c>0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(x+y)dxdy = c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+y)dxdy = 1$, од тука се добива $c=1$.

б) Маргиналната густина за X е

$$f(x) = \int\limits_0^1 (x+y)dy = xy\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad ,$$

за Y е $\quad g(y) = \int\limits_0^1 (x+y)dx = y + \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < y < 1.$

в) $h(x,y) = x + y \neq \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = f(x)g(y)$ т.е. не се независни.

г) $P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = \int\limits_0^{\frac{1}{3}}\int\limits_0^1 (x+y)dxdy = \frac{2}{9}$ $\qquad P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$

2. Нека X и Y имаат заедничка густина

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{(x+1)^2(y+1)^3} & x>0\,,\ y>0 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$$

а) Да се најде c. б) Дали се X и Y независни ? в) Да се најдат: $P(X>2)$ и $P(Y\leq 3)$.

б)

3. Нека променливите X и Y имаат функција на густина $h(x,y)=f(x)g(y)$ т.е. $h(x,y)$ може да се напише како производ на функција од x по функција од y. Да се определат густините за X и Y и да се заклучи, дека случајните променливи се независни.

Решение: Соодветните маргинални густини се

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)dy = f(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = af(x)\ ,\ a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)dy$$

и исто така $g_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)dx = bg(y)\ ,\ b = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$

Од условот $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1$ следи *ab=1.*

Понатаму знаеме од текстот, дека

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(y)dtdy = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = \int_{-\infty}^{x} af(t)dt$$

е функција на распределба за X и на ист начин добиваме, дека $\int_{-\infty}^{b} bg(t)dt$

е функција на распределба за Y и затоа со диференцирање добиваме, дека $af(x)$ и $bg(y)$ се густини за X и Y соодветно. Бидејќи $h(x,y)= af(x)\, bg(y)$ заклучуваме, дека X и Y се независни. Со помош на оваа задача да се реши следнава задача.

4. За X и Y со следниве заеднички густини да се провери дали се независни.

а) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2y^3} & x>1 \text{ и } y>0 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x}{y} & 0<x<1 \text{ и } 1<y<e \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$

в) $\begin{cases} c\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) & 1<x<2 \text{ и } 1<y<2 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x & 0<x<1 \text{ и } 0<y<1 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$

За сите да се определат индивидуалните густини

5. Нека X и Y се независни, секоја со експоненцијална распределба со параметар $\lambda=3$.

а) Да се определи заедничката густина.

б) Да се пресметаат следните веројатности:

$P(X+2Y \le 2)$, $P(X+Y \le 2)$, $P(X-Y \le 2)$, $P(XY<1)$.

а) Густините за X и Y се

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & y>0 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$$

соодветно. Бидејќи X и Y се независни заедничката густина $h(x,y)$ е

$$h(x,y)=\begin{cases}9e^{-3x}\cdot e^{-3y} & x,y>0\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}$$

б) Нека X и Y се дефинирани на просторот S, ставаме

$A=\{s;\ s\in S$ и $X(s)+2Y(s)\leq 2\}$. Ние треба да ја определиме веројатноста $P(A)$. Ако D: $\{(x,y);\ (x,y)\in R^2$ и $x+2s\leq 2\}$ е област во рамнината слика 6.10.3 тогаш $A=\{s;\ (X(s),\ 2Y(s)\in D\}$ и на основа дефиницијата за заедничката густина имаме

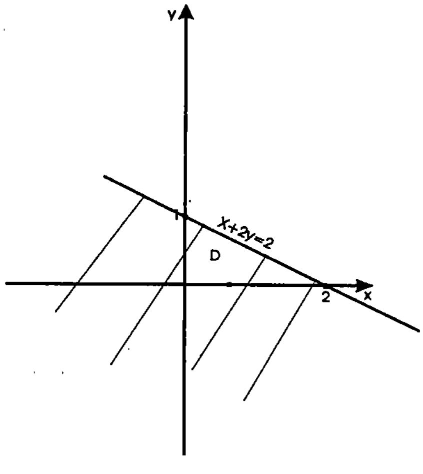
$$P(A)=P(X+2Y\leq 2)=\iint\limits_D h(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}}9e^{-3x}\cdot e^{-3y}dy=$$

$$=\int_0^2 3e^{-3x}dx(-e^{-3y})\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}=\int_0^2 3e^{-3x}dx(1-e^{-3+\frac{3}{2}x})=\int_0^2 3e^{-3x}dx-3\int_0^2 e^{-3-\frac{3}{2}x}dx=$$

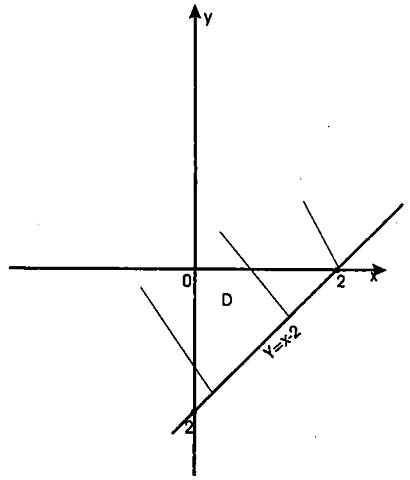
$$=e^{-3x}\Big|_0^2+2e^{-3}\cdot e^{-\frac{3}{2}x}\Big|_0^2=1-e^{-6}+2e^{-6}-2e^{-3}=1+e^{-6}-2e^{-3}\ ,$$

$$P(X-Y\leq 2)=\iint\limits_D h(x,y)dxdy,\quad D=\{(x,y);\ (x,y)\in R^2\ ,\ x-y\leq 2\},$$

слика 6.10.3



сл.6.10.2



слика 6.10.3

$$P(X-Y\le 2)=\int_0^2 dx\int_0^\infty 9e^{-3x}\cdot e^{-3y}dy+\int_0^2 dx\int_{x-2}^\infty 9e^{-3x}\cdot e^{-3y}dy=$$

$$=-e^{-3x}\Big|_0^2\cdot -e^{-3y}\Big|_0^\infty+\int_2^\infty dx\cdot 3e^{-3x}\cdot(-e^{-3y})\Big|_{x-2}^\infty=$$

$$=1-e^{-6}\cdot 1+\int_2^\infty 3e^{-3x}\cdot e^{-3x}e^{6}dx=1-e^{-6}+e^{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-6x}\right)\Bigg|_2^\infty=$$

$$=1-e^{-6}+e^{6}\cdot\frac{1}{2}e^{-12}=1-\frac{1}{2}e^{-6}.$$

6. Нека X и Y се независни; X има рамномерна распределба на [0,1],Y има рамномерна распределба на [0,2]. а) Да се определи заедничката густина,

б) $P(X+Y\le 2)$, в) $P(X-Y\ge 0{,}5)$, г) $P(XY<1)$

Решение. а) Индивидуалните густини се :

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{инаку}\end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<y<2\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}$$

Заедничката густина е

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<1 \qquad 0<y<2\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}$$

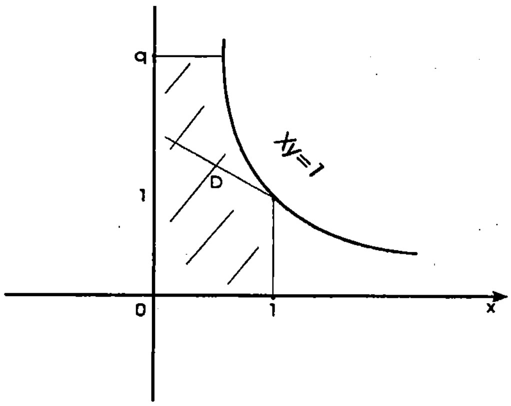
б) $$P(X+Y\le 2)=\iint_D \frac{1}{2}dxdy,\quad D=\{(x,y),(x,y)\in R^2 \quad x+y\le 2\}$$

$$P(X+Y\le 2)=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{2-x}dy=\frac{1}{2}\int_0^1(2-x)dx=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

г) $$P(XY\le 1)=\iint_D \frac{1}{2}dxdy\quad,\ D=\{(x,y),(x,y)\in R^2 \quad xy\le 1\}$$; слика 6.10.4

$$P(X+Y\le 2)=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{2-x}dy=\frac{1}{2}\int_0^1(2-x)dx=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\iint_D \frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 dy\int_0^1 dx+\frac{1}{2}\int_1^2 dy\int_0^{\frac{1}{y}}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{y}dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln y\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{2}$$



слика 6.10.4

7. Нека X и Y се независни. X има експоненцијална распределба со параметар 5, а Y има густина

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2} & y>1\\ 0 & y<1\end{cases}$$

Да се најде а) *P(XY > 1)* б) *P(Mak(X,Y)<2)*

а) Густината за *X* е $f(x)=\begin{cases}5e^{-5x} & ,x>0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$ затоа заедничката густина е

$$h(x,y)=\begin{cases}5e^{-5x}\cdot\dfrac{1}{y^2} & x>0 \quad y>1\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}$$

$$P(XY>1)=\int_0^1 5e^{-5x}dx\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{dy}{y^2}+\int_1^{\infty}5e^{-5x}dx\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^2}=$$

$$=\int_0^1 5e^{-5x}\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\infty}+\int_1^{\infty}5e^{-5x}dx\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_1^{\infty}=$$

$$=\int_0^1 5e^{-5x}\cdot xdx+\int_1^{\infty}5e^{-5x}dx=x(-e^{-5x})\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-5x}dx-e^{-5x}\Big|_1^{\infty}=$$

$$=-e^{-5}-\frac{1}{5}e^{-5}$$

б)

$$P(Mak(X,Y)<2)=P(X<2 \quad , \quad Y<2)=\int_0^2 5e^{-5x}dx\cdot\int_1^2\frac{dy}{y^2}=$$

$$=-e^{-5x}\Big|_0^2\cdot-\frac{1}{y}\Big|_1^2=\frac{(1-e^{-10})}{2}.$$

6.11. Збир на непрекинати случајни променливи

Нека X и Y се случајни променливи еднакви на времетраењето на двете компоненти употребени една по друга: кога првата ќе престане да работи се инсталира втората. Под претпоставка, дека X и Y се случајно независни, сакаме да ја определиме распределбата на времето на системот составен од двете компоненти, со други зборови сакаме да ја определиме густината на Z=X+Y.

Како и досега, нека f и g се функции на густина на X и Y соодветно. Заради независноста заедничката густина е

$$h(x,y)=f(x)g(y)$$

За да ја определиме густината на Z, прво ќе ја определиме функцијата на распределба и потоа ќе диференцираме.

Нека z е фиксен реален број, тогаш вредноста на функцијата на распределба $F_Z(z)$ е

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z).$$

Тука, се разбира, проблемот е како да се пресмета бараната веројатност. Нека уште еднаш, во интерес на читателот, малку подетално го објасниме пресметувањето на бараната веројатност. Ако S е случајниот простор на кој се определени случајните променливи X и Y, тогаш нам ни треба веројатноста на случајниот настан A

$$A=\{s;s\in S\quad X(s)+Y(s)\leq z\}.$$

Од фактот што $A=\{s;\,(X(s),Y(s))\in R^2,\ s\in S\quad X(s)+Y(s)\leq z\}$ произлегува, дека веројатноста на A т.е. P(A) е еднаква на:

$P(A)=\iint\limits_D h(x,y)dxdy$ каде $D:\{(x,y)\in R^2$ при што $x+y\leq z\}$ сега имаме

$$F_Z(z)=P(X+Y\leq z)=\iint\limits_D h(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\int_{-\infty}^{z-x}g(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot G(z-x)dx$$

каде G е функција на распределба за Y, зашто да се потсетиме $G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(t)dt$. Со диференцирање на функцијата $F_Z(z)$ добиваме

$F_Z'(z) = f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx$. Сега можеме да резимираме :

Нека X и Y се независни со функции на густини *f(x)* и *g(y)* соодветно. Тогаш функцијата на густината за збирот Z=X+Y е дадена со конволуцијата на *f* и *g:*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(z-y)dy$$

Пример 6.11.1. Претпоставуваме, дека радиото користи една батерија. Оригиналната батерија ќе работи извесно време X кое има експоненцијална распределба со средно времетраење од една недела. Ставен е резервен дел од повисок квалитет кој ќе работи време Y кое исто така има експоненцијална распределба со средно време на траење 2 недели. Наша цел е да ја определиме распределбата на времето од двете батерии т.е. од збирот Z=X+Y

и да се најде веројатноста P (радиото ќе работи најмалку 4 недели).

Решение: Бидејќи параметарот кај експоненцијалната распределба е реципрочна вредност на средната вредност, густините на X и Y се

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Функцијата на густина за X+Y ќе биде

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx = \int_{0}^{z} f(x)g(z-x)dx = \int_{0}^{z} e^{-x} \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(z-x)}dx =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}z} \int_{0}^{z} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}} \cdot (-2e^{-\frac{x}{2}})\Big|_{0}^{Z} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \cdot (-2e^{-\frac{x}{2}}) = e^{-\frac{z}{2}} - e^{-Z}$$

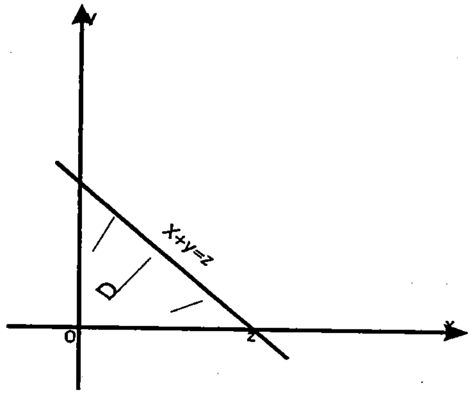
Тоа е функцијата на густина за Z=X+Y.

P (радиото ќе работи барем 4 недели)=

$$= P(X+Y \geq 4) = \int_4^{\infty} (e^{-\frac{z}{2}} - e^{-z})dz = 0{,}2524.$$

Ако X и Y се независни и двете со вредности на интервалот $(0,\infty)$ со густини f и g соодветно, тогаш функцијата густина за Z=X+Y е дадена со формулата

$$f_Z(z) = \int_0^z f(x)g(z-x)dx\,.$$



слика 6.11.1

Задачи за вежба

1. Нека X и Y се независни, експоненцијално распределени со ист параметар λ. Да се определи функцијата на густина за Z=X+Y.

Одг. $\lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad z > 0$.

2. X и Y се независни експоненцијално распределени X со параметар α, Y со параметар β. Нека $\alpha \neq \beta$. Да се пресмета густината на X+Y.

3. Нека U и V се независни и рамномерно распределени на [0,1]. Нека W=U+V. Да се определи нејзината густина.

Решение: Според формулата имаме $h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx \quad z > 0$

Треба да разгледаме два случаи

а) $0<z\leq 1$ тогаш z-$x>0$ т.е. $0<x<z$ и затоа $h=\int_0^z dx=z,$

б) $1<z<2,\quad z-x<1,\quad x>z-1\quad h(z)=\int_{z-1}^{1} dx=2-z$

За $z>2$ треба $0<x<1$ и z-$x<1$ не е можно, затоа $h(z)=0$. Што значи густината

$$\text{е}: h(z)=\begin{cases} z, & 0<z\leq 1 \\ 2-z, & 1<z<2 \end{cases}$$

4. Да се определат веројатностите $P(X+Y<1),\quad P(X+Y\geq 1{,}5)$

$$P(X+Y<1)=\int_0^1 h(z)dz=\int_0^1 zdz=\frac{1}{2}.$$

$$P(X+Y\geq 1{,}5)=\int_{1,5}^{2} h(z)dz=\int_{1,5}^{2}(2-z)dz.$$

5. Нека X има експоненцијална распределба со параметар λ=2 и Y има рамномерна распределба на [0,1]. а)Да се определи заедничката распределба. б) Да се определи густината на X+Y.

а) Заедничката густина е

$$h(x,y)=\begin{cases} 2e^{-2x} & x>0\ ,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{инаку} \end{cases}$$

б)
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx=\int_0^z 2e^{-2x}dx=1-e^{-2z}\qquad 0<z<1$$

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} 2e^{-2x}dx=e^{-2z}(e^z-1)\qquad z>1$$

6.12. Условна густина

Нека X и Y се случајни променливи кои не мора да бидат независни. Тогаш некоја вредност на Y, може да помогне во определување на вредностите на Y.

Променливите X и Y имаат заедничка густина $h(x,y)$, $f(x)$ и $g(y)$ се нивните маргинални густини. За да ја определиме густината за X ако е дадено Y=y, пресметуваме

$$P(x < X \le x+\Delta x \,/\, y < Y \le y+\Delta y) =$$

$$\frac{P(x < X \le x+\Delta x \text{ и } y < Y \le y+\Delta y)}{P(y < Y \le y+\Delta y)} = \frac{\int_x^{x+\Delta x}\int_y^{y+\Delta y} h(s,t)dsdt}{\int_y^{y+\Delta y} g(t)dt} \approx$$

$$\approx \frac{h(x,y)\Delta x\Delta y}{g(y)\Delta y} = \frac{h(x,y)}{g(y)}\Delta x$$

каде апроксимацијата е можна, ако Δx и Δy се мали, а функциите, на пример, непрекинати. Кога Δy→0 можеме да ја дефинираме веројатноста, дека

$X \in (x, x+\Delta x \,/ Y = y)$ апроксимативно е

$$P(x < X \le x+\Delta x \,/ Y = y) \approx \frac{h(x,y)}{g(y)}\Delta x$$

Како од друга страна пак, при претпоставка дека функцијата $\varphi = \frac{h(x,y)}{g(y)}$ е густина на случајната променлива U

$$P(x < U \le x+\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} \varphi(t)dt \approx \varphi(x)\Delta x = \frac{h(x,y)}{g(y)}\Delta x$$

имаме мотив за следната дефиниција.

Дефиниција. Условна густина за X при дадено Y=y е $f(x/y) = \frac{h(x,y)}{g(y)}$

определена за точките y во кои $g(y)\neq 0$. Аналогно, условна густина за Y при дадено $X=x$ е $g(y/x) = \frac{h(x,y)}{f(x)}$ определена за x за кое $f(x)\neq 0$.

Пример 6.12.1. Претпоставуваме, дека заедничката функција на густина за X и Y е

$$h(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8}(x+y^2) & 0<x<2 \quad \text{и} \quad 0<y<1\\ 0 & \text{инаку}\end{cases}$$

Да се најде условната густина за X при дадено $Y=y$ за $0<y<1$.

Решение: Прво треба да ја определиме маргиналната густина $g(y)$ за Y. Како што знаеме

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx=\int_0^2 \frac{3}{8}(x+y^2)dx=\frac{3}{4}(1+y^2) \qquad 0<y<1$$

Сега имаме $f(x/y)=\dfrac{h(x,y)}{g(y)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{x+y^2}{1+y^2} \qquad 0<x<2$

За x надвор од тој интервал $f(x/y)=0$. Функцијата $f(x/y)$ е дефинирана само за $0<y<1$. Нека забележиме, дека ако X и Y се независни, тогаш $h(x,y)=f(x)g(y)$ и следователно, во тој случај

$$f(x/y)=f(x) \quad \text{и } g(x/y)=g(y)$$

При дадена вредност на Y, условното очекување за X го определуваме со условната густина на X при дадено $Y=y$. Така, според дефиницијата имаме

$$E(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)dx \quad \text{сли ч но} \quad E(Y/X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} yg(y/x)dy$$

Пример 6.12.2. За $0<y<1$ од дадениот пример

$E(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x+y^2}{1+y^2}dx=\frac{4+3y^2}{3(1+y^2)}$. За истиот пример да се определи $E(Y/X=x)$.

6.13. Средна вредност на функции од повеќе случајни променливи

Нека прво се навратиме на дискретниот случај. Претпоставуваме, дека X и Y се дискретни случајни променливи на ист простор S со вредности

$$X:\ x_1, x_2 \ldots, x_n$$

$Y: y_1, y_2, \ldots y_m$

Дадена е, исто така, функцијата $F(x,y)$ од две променливи. Тогаш $Z = F(X(s), Y(s))$ $s \in S$ е случајна променлива која е функција од случајните променливи X и Y. Можни вредности за Z се :

$F(x_i, y_j)$, $i = 1,\ldots n$ $j = 1,\ldots,m$. При тоа соодветни веројатности се:

$P(Z = F(x_i, y_j)) = P(X = x_i, Y = y_i)$. Според дефиницијата за средна вредност имаме $E(F(X,Y)) = \sum_i \sum_j F(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$.

Ако X и Y се непрекинати случајни променливи такви што $a \le X \le b$ и $c \le Y \le d$ со $h(x,y)$ заедничка густина за X и Y постапуваме вака: Го делиме правоаголникот D: $a \le x \le b$; $c \le y \le d$ со делење на интервалите:

$a = x_0 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и $c = y_0 < y_2 < \ldots < y_m = d$.

Ја разгледуваме функцијата $F(x_i, y_j)$ со веројатност

$$P(x_{i-1} < X \le x_i,\ y_{j-1} < Y \le y_j) = \int_{x_i-1}^{x_i} \int_{y_j-1}^{y_j} h(x,y)\,dxdy \approx h(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Функцијата $F(x_i, y_j)$, $i = 1,\ldots n$ $j = 1,\ldots,m$. со веројатности:

$\mu_{ij} = P(x_{i-1} < X \le x_i\ ,\ \ y_{j-1} < Y \le y_j)$ за $F(x_i, y_j)$ соодветно е дискретна случајна променлива чија средна вредност е

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F(x_i, y_j)\mu_{ij} \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F(x_i, y_j) h(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_i$ како последната сума е Риманова сума за функцијата $F(x,y)h(x,y)$ имаме мотив да ставиме

$$E(F(X,Y)) = \iint_D F(x,y)h(x,y)\,dxdy$$

или ако $D = R^2$ имаме

$$E(F(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)h(x,y)\,dxdy \tag{6.13.1}$$

Пример 6.13.1. Нека заедничката густина за X и Y е концетрирана на квадратот со темиња (0,0), (0,1), (1,0) и (1,1), и е дадена со $h(x,y)=\frac{3}{2}(x^2+y^2)$. Да се определат *E(XY)*, *E(X+Y)* и *E(X)* со заедничката густина.

Решение: $E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^1\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}x^4y+\frac{1}{2}x^2y^3\right)\Big|_0^1 dy=$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{8}y+\frac{3}{4}y^3\right)dy=\frac{3}{8}.$$

$$E(X+Y)=\int_0^1\int_0^1(x+y)\frac{3}{2}(x^2+y^2)dxdy=\frac{5}{4}$$

$$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2)dxdy=\frac{5}{8}$$

Задачи

1. Нека X и Y имаат заедничка распределба

$$h(x,y)=\begin{cases} x+y \ , & 0<x<1\ ,\ 0<y<1 \\ 0\ , & \text{надвор од квадратот}\end{cases}$$

Да се најде а) *E(X)*, б) *E(Y)*, в) *E(XY)* г)*E(X+Y)* со помош на заедничките густини, д) Да се определат маргиналните густини за X и Y и со нив да се пресметаат *E(X)* и *E(Y)*.

2. Нека X и Y имаат заедничка густина

$$h(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{5}(xy+1)\ , & 0<x<1\ ,\ 0<y<1\\ 0\ , & \text{инаку}\end{cases}$$

Да се најде а) *E(X)*, б) *E(Y)*, в) *E (mak(X,Y))*

в) $mak(X,Y)=\dfrac{|Y-X|+Y+X}{2}$ и затоа

$$E(mak(X,Y)) = \int_0^1\int_0^1 \frac{4}{5}(xy+1)\frac{|y-x|+y+x}{2}dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx\int_x^1 \frac{4}{5}(xy+1)ydy + \int_0^1 dx\int_x^1 \frac{4}{5}(xy+1)xdy = \frac{52}{75}$$

3. Нека *h(x)* е функција "индикатор" за интервалот [*a*,*b*]:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & a \le x \le b \\ 0 & \text{надвор} \end{cases}$$

Ако случајната променлива *X* има густина *f(x)*. Да се определи *E(h(x))* и да се даде интерпретација од гледна точка на игрите на среќа.

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot f(x)dx = \int_a^b 1\cdot f(x)dx = P(a \le x \le b).$$

Ако играте игра на среќа добивате 1 со веројатност $P(a \le X \le b)$.

6.14.Средна вредност од збир на променливи

Нека X и Y се случајни променливи. Ако се дискретни, веќе покажавме, дека $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. Истото важи и кога се континуирани. Нека нивната заедничка густина е $h(x,y)$, тогаш од формулата за математичко очекување на функции од случајни променливи имаме

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)h(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xdx\,(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy) + \int_{-\infty}^{\infty} ydy\,\,(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy = E(X)+E(Y)$$

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy$ маргинална густина за X,

$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx$ маргинална густина за Y

Со едноставна индукција имаме $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

6.15. Средна вредност од производ на независни променливи

Ако X и Y се независни променливи со густини $f(x)$ и $g(y)$ соодветно, тогаш заедничката густина е $h(x,y)=f(x)g(y)$.

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy)h(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x)g(y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx(\int_{-\infty}^{\infty}yg(y)dy)=E(X)E(Y)$$

6.16. Дисперзија од збир на независни променливи

$$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-(E(X+Y))^2.$$

$$E[(X+Y)^2]=E(X^2+2XY+Y^2)=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)=$$

$$=E(X^2)+2E(X)E(Y)+E(Y^2),$$

$$E(X+Y)^2=(EX+EY)^2=(EX)^2+2EX\cdot EY+(EY)^2$$

Со заменување во формулата добиваме

$$D(X+Y)=E(X^2)-E(X)^2+E(Y^2)-E(Y)^2=D(X)+D(Y).$$

Обопштување, ако X_1, X_2,... X_n се независни случајни променливи, тогаш

$$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}DX_i.$$

ГЛАВА 7

7. НОРМАЛНА РАСПРЕДЕЛБА И ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

7.1. Вовед

Нормалната распределба со својата добро позната функција на густина е една од најупотребуваните распределби; таа е основа на голем дел од статистичката анализа. Основен фактор за тоа е централната гранична теорема, која покажува, дека многу распределби можат да се апроксимираат со нормалната распределба. Теоремата е прво докажана од Абрахам де Моавр (1667-1754) и проширена до општата биномна распределба од Пјер-Симон Лаплас (1749-1827). Во многу нешта Моавр и Лаплас биле спротивни; Моавр бил скромен со скромна материјална основа, неспособен да најде универзитетско место, живеел од својата заработувачка како учител, воспитувач; Лаплас бил високо поставен, монархист за време на француската револуција и голем снобист. Лаплас е на прво место со својот придонес во теоријата на веројатноста во тоа време.

7.2. Нормална распределба

Нормалната (Гаусова) распределба со средна вредност *0* и дисперзија *1* која кратко се обележува со $N_{0,1}$ има функција на густина $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (7.2.1) и функција на распределба

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad (7.2.2)$$

Функцијата $f(x)$ има максимум за $x=0$ $\quad f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, и очигледно $f(x)>0$ за секое $x\in R$ и $f(x)\to 0$ кога $x\to\infty$, слика 7.2.1.

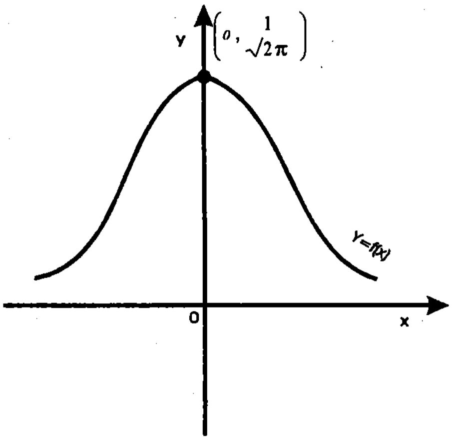
За да покажеме, дека $f(x)$ е функција на густина треба уште да провериме

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

Доказот ќе го изведеме со помош на двоен интеграл и со премин во поларни координати. Нека

$$J=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Треба да покажеме, дека $J=\sqrt{2\pi}$, или, еквивалентно, $J^2=2\pi$.



слика 7.2.1

$$J^2=J\cdot J=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\iint_D e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy, \qquad D: x^2+y^2\le R^2$$

Со премин во поларни координати

$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ dxdy=\rho d\rho\varphi$

добиваме

$$J^2=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi(-e^{-\frac{\rho^2}{2}}\Big|_0^R)=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi(-e^{-\frac{R^2}{2}})=$$

$$=\lim_{R\to\infty}2\pi(1-e^{-\frac{R^2}{2}})=2\pi \qquad \text{бидејќи } e^{-\frac{R^2}{2}}\to 0 \quad \text{кога } R\to 0.$$

Така конечно добиваме $J^2=2\pi,\ \ J=\sqrt{2\pi}$.

Со тоа докажавме, дека $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=1$. Нека, сега ги пресметуваме средната вредност *E(X)* и *D(X)* на случајната променлива со густина (7.2.1).

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=uv\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}vdv, \qquad u=x \qquad v=\int_{-\infty}^{\infty}x\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Понатаму имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi},$$

бидејќи $\lim_{x\to\pm\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}}=0$ со примена на Лопиталов правило. Според тоа, добиваме $D(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=1$.

Интегралот со кој е определена функцијата *F(X)*, за жал не може да се реши и затоа постојат табели во кои се дадени приближните вредности на интегралот за дадено *x*.

Пример 7.2.1. Нека Z е случајна променлива со $N_{0,1}$ распределба. Да се најде а) $P(Z>2,3)$, б) $P(Z<-1,7)$, в) $P(-0,8<Z<0,8)$, г) $P(-0,3<Z<0,7)$.

Решение: а)$P(Z>2,3)=1-P(Z\leq 2,3)=1$-F(2,3)=1-0,9893

(од таблица) $=0,0107$

б) $P(Z<-1,7)$ по симетрија $=P(Z>1,7)=1-F(1,7)=1=0,9554=0,0446.$

в) $P(-0,8<Z<0,8)=P(Z<0,8)-P(Z\leq -0,8)= P(Z<0,8)-P(Z>0,8)=$

$= P(Z<0,8)-(1-P(Z\leq 0,8))=2\,P(Z<0,8)-1=2F(0,8)-1=2\bullet 0,7881-1=0.5762.$

г)

$$P(-0,3<Z<0,7)=P(Z<0,7)-P(Z\leq -0,3)=P(Z<0,7)-P(Z>0,3)=$$
$$=P(Z<0,7)-[1-P(Z\leq 0,3)]=P(Z<0,7)-1+P(Z\leq 0,3)=$$
$$F(0,7)+F(0,3)-1=0,7580+0,6179-1=0,3759$$

Забелешка: При пресметување на веројатностите кај распределбата $N_{0,1}$ секогаш е од корист да се има во обзир графикот на густината (1).

Дефиниција. За случајната променлива X со средна вредност μ и дисперзија σ^2 ќе велиме дека има нормална распределба (кратко N_{μ,σ^2}), ако нормираната распределба

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

има $N_{0,1}$ распределба.

Пример 7.2.2. Бројот на колите кои влегуваат во текот на денот е случајна променлива X која има нормална распределба со средна вредност μ=200 и дисперзија σ^2=900. Да се определат $P(X\leq 220)$, $P(X>195)$, $P(190<X<210)$

Решение:

$$P(X\leq 220)=P(X-\mu<220-\mu)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{220-\mu}{\sigma}\right)=$$

$=P\left(Z\leq\frac{220-200}{30}\right)$ каде $Z=\frac{X-200}{30}$ има $N_{0,1}$ распределба и затоа

$$P(X \le 220) = P\left(Z \le \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}7486$$

$$P(X > 195) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{195-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{195-200}{30}\right) = P\left(Z > \frac{-5}{30}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{-5}{30}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{-1}{6}\right) = 1 - \left[1 - P\left(Z \ge \frac{1}{6}\right)\right] = P\left(Z \ge \frac{1}{6}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{1}{6}\right) = 0.5675$$

$$P(190 < X < 210) = P\left(\frac{190-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{210-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(\frac{190-200}{30} < Z < \frac{10}{30}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F\left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= F\left(\frac{1}{3}\right) - \left(1 - F\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 2F(0{,}3333) - 1 = 2 \cdot 0{,}6293 - 1 = 0{,}2586.$$

Гледаме дека определувањето на веројатноста на случајна променлива X со нормална распределба сосема едноставно се сведува на определувањето на веројатност на распределбата $N_{0,1}$ со помош на нормирање.

Пример 7.2.3. Искуството покажало, дека некоја организација го користи телефонот време T секој месец при што T има нормална распределба со просек 300 саати и дисперзија 80. Да се најде интервал со центар во 300, така што 90% да сме сигурни, дека времето T ќе биде во тој интервал следниот месец.

Решение: Треба $P(300\text{-}c < T < 300 + c) = 0{,}9$ или еквивалентно

$$P(-c < T - 300 < c) = 0{,}9 \quad \text{или} \quad P\left(-\frac{c}{\sqrt{80}} < \frac{T-300}{\sigma} < \frac{c}{\sqrt{80}}\right) = 0{,}9$$

$$2F\left(\frac{c}{\sqrt{80}}\right) = 1{,}9 \quad \text{т.е.} \quad F\left(\frac{c}{\sqrt{80}}\right) = 0{,}950. \text{Од таблица добиваме } \frac{c}{\sqrt{80}} = 1{,}645$$

$$c = 1{,}645 \cdot \sqrt{80}\ , \quad c = 14{,}71.$$

Заклучок : 90% е сигурно, дека $T \in (285{,}3,\ \ 314{,}7)$.

Нека ги определиме функцијата на распределба и функцијата на густина за случајната променлива X со нормална распределба N_{μ,σ^2}:

$\Phi(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Со диференцирање

добиваме $\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma}F'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

што значи функцијата на густина за случајна променлива X со нормална распределба N_{μ,σ^2} е

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Карактеристична особина за нормалната распределба е тоа што збир од независни случајни променливи со нормална распределба е пак случајна променлива со нормална распределба. (нека се потсетиме, дека таа особина ја има и Пуасоновата распределба)

Според тоа важи:

Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$, се независни нормално распределени N_{μ_i,σ_i^2}. Тогаш

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

е нормална распределелена случајна променлива со средна вредност $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ и дисперзија $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$.

Доказ: Нека прво претпоставиме, дека, X и Y се независни променливи, нормално распределени N_{0,σ^2} и N_{0,ρ^2} соодветно. Тогаш X +Y е нормално распределена $N_{0,\sigma^2+\rho^2}$. Значи, густината за X е

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (7.2.1)$$

густината за Y е

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\rho^2}} \qquad (7.2.2)$$

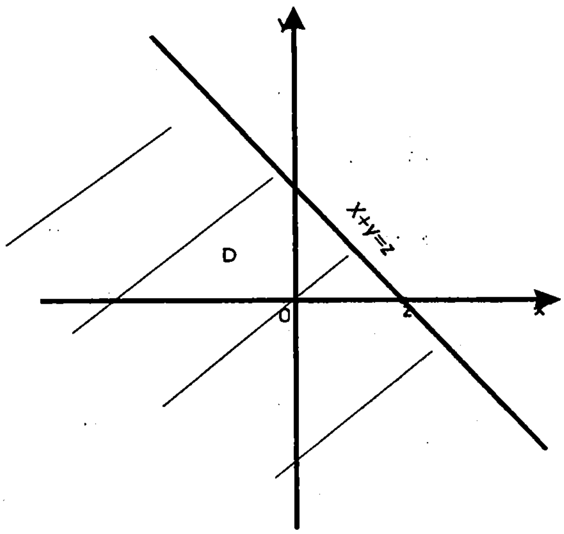
Заради независноста на X и Y заедничката густина е

$$h(x,y)=f_Y(y)f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma\rho}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Сега со помош на *h(x,y)* ќе ја определиме густината на случајната променлива X +Y. Тргнуваме од функцијата на распределба за X+Y :

$$F_{X+Y}(z)=P(X+Y\le z)=\iint_D h(x,y)dxdy \text{ , каде}$$

$$D:\{(x,y);\ (x,y)\in R^2\quad x+y\le z\}$$



слика 7.2.2

$$F_{X+Y}(z)=\frac{1}{2\pi\sigma\rho}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\int_{-\infty}^{z-x}e^{-\frac{y^2}{2\rho^2}}dy$$

$$F'_{X+Y}(z)=\frac{1}{2\pi\sigma\rho}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\rho^2}}dx$$

$$F'_{X+Y}(z)=\frac{1}{2\pi\sigma\rho}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{x^2+z^2-2xz}{2\rho^2}\right)}dx$$

Со мало средување добиваме

$$F'_{X+Y}(z)=\frac{1}{2\pi\sigma\rho}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{\sigma^2+\rho^2}}{\sigma\rho}-\frac{\sigma z}{\rho\sqrt{\sigma^2+\rho^2}}\right)^2}\cdot e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+\rho^2)}}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma\rho}\cdot e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+\rho^2)}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{\sigma^2+\rho^2}}{\sigma\rho}-\frac{\sigma z}{\rho\sqrt{\sigma^2+\rho^2}}\right)^2}dx$$

Со смена во интегралот: $\frac{x\sqrt{\sigma^2+\rho^2}}{\sigma\rho}-\frac{\sigma z}{\rho\sqrt{\sigma^2+\rho^2}}=t$, $dx=\frac{\sigma\rho}{\sqrt{\sigma^2+\rho^2}}dt$ следи

$$F'_{X+Y}(z)=\frac{1}{2\pi\sigma\rho}\cdot\frac{\sigma\rho}{\sqrt{\sigma^2+\rho^2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+\rho^2)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot dt.$$

Како $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$ конечно

$$F'_{X+Y}(z)=f_{X+Y}(z)=\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\rho^2}\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+\rho^2)}}.$$

Со што покажавме, дека X+Y имаат нормална распределба $N_{0,\sigma^2+\rho^2}$.

Нека X е N_{μ,σ^2} и Y е N_{ν,ρ^2} се распределени. Ги разгледуваме променливите X-μ и Y-ν . Непосредно се проверува, дека X-μ има N_{0,σ^2} распределба , а Y-ν има N_{0,ρ^2} распределба. На основа докажаното X-μ + Y-ν има $N_{0,\sigma^2+\rho^2}$ распределба, а $X+Y$ има $N_{\mu+\nu,\sigma^2+\rho^2}$ распределба. Со што го докажавме тврдењето за збир на две случајни независни променливи. Со индукција се убедуваме, дека важи и за n случајни променливи.

Нека разгледуваме случајни променливи $X_1, X_2,\ldots, X_n$ меѓу себе независни и нормално распределени при што

$$E(X_i)=\mu,\quad D(X_i)=\sigma^2.$$

На пример X_i можат да бидат еднакви на резултатите при мерењето на дадена големина; X_i може да биде еднаква на температурата во i-тиот ден од неделата, или тежината на уловената риба и т.н. Колекцијата $\{X\}_{i=1}^{n}$ се вика случаен примерок.

Средна вредност на $\{X\}_{i=1}^{n}$ е случајната променлива

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n).$$

$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}(E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n))=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu$$

$$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}(D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n))=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Тоа значи аритметичката средина $\overline{X}$ има:

$$E(\overline{X})=\mu,\quad D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Со други зборови, средната вредност на примерокот еднаква е на средната вредност на популацијата (т.е. на големината што се мери, а додека дисперзијата опаѓа со фактор $\frac{1}{n}$. Тоа ја потврдува интуицијата: Ако една големина се мери, подобро е да се направат повеќе мерења и да се земе аритметичката средина. Зошто ? Затоа што дисперзијата се намалува. Оваа особина е многу битна; таа објаснува зошто примерочната средина нашироко се користи во статистичките проценки.

Сега, нека претпоставиме дека секоја X_i нормална распределба со средна вредност μ и стандардна девијација σ. Тогаш, аритметичката средина $\overline{X}$ има исто така средна вредност μ, но дисперзијата $D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$. Но збирот $X_1+X_2+\ldots+X_n$ има нормална распределба; затоа и збирот поделен со n, т.е. $\overline{X_i}$ има нормална распределба. Можеме да резимираме; Ако $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ е случаен примерок во кој секоја X_i има нормална распределба N_{μ,σ^2}, тогаш аритметичката средина $\overline{X}$ има нормална распределба $N_{\mu,\frac{\sigma^2}{n}}$.

Задачи

1. Нека X е случајна променлива со нормална распределба $N_{0,1}$. Да се најдат а) $P(0 \le X \le 1{,}42)$ б) $P(-0{,}73 \le X \le 0)$ в) $P(-1{,}37 \le X \le 2{,}01)$.

г) $P(X \ge 1{,}13)$ д) $P(|X| \le 0{,}5)$

а) $P(0 \le X \le 1{,}42) = P(X \le 1{,}42) - P(X \le 0) = F(1{,}42) - F(0) =$
$= 0{,}9222 - 0{,}5 = 0{,}4222$.

б) Одг. 0,2673 в) Одг. 0,8925

г) $P(X \ge 1{,}13) = 1 - P(X < 1{,}13) = 1 - 0{,}8708 = 0{,}1292.$

д) $P(|X| \le 0{,}5) = P(-0{,}5 \le X \le 0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) =$
$= F(0{,}5) - [1 - F(0{,}5)] = 2F(0{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}6915 - 1 = 0{,}3830$

2. Нека X е случајна променлива со распределба $N_{0,1}$. Да се определи t така што :

а) $P(0 \le X \le t) = 0.4236$, б) $P(X \le t) = 0{,}7969$, в) $P(t \le X \le 2) = 0{,}1000.$

Решение:

а) $P(0 \le X \le t) = P(X \le t) - P(X < 0) = 0{,}4236$, $P(X \le t) = 0{,}5 + 0{,}4236 = 0{,}9236$. Од таблицата гледаме, дека за оваа вредност $t = 1{,}43$.

б) $t = 0{,}83$ в) $P(t \le X \le 2) = P(X \le 2) - P(X < t) = 0{,}1000$,

$P(X < t) = P(X \le 2) - 0{,}1000 = 0{,}9772 - 0{,}1000 = 0{,}8771$, $t = 1{,}16$

3. Претпоставуваме, дека температурата во текот на јуни има нормална распределба со просек (средна вредност) 20^0 и стандардно отстапување $3{,}33^0$. Да се определи веројатноста p, дека температурата е меѓу $21{,}11^0$ и $26{,}66^0$.

$$P(21{,}11^0 < T < 26{,}66^0) = P\left(\frac{21{,}11 - 10}{3{,}33} < T < \frac{26{,}66 - 20}{3{,}33}\right) =$$
$$= P(0{,}33 < T < 2) = F(2) - F(0{,}33) = 0{,}9772 - 0{,}6293 = 0{,}3479$$

4. X има $N_{-10,16}$ распределба. Да се најде а) $P(X > -12)$, б) $P(-11 < X \le -8)$

в) $P(|X + 10|) < 2$, г) $P(|X + 11|) > 1{,}5$

Решение: в)

$$P(|X+10|<2)=P(-2<X+10<2)=P\left(-\frac{2}{4}<\frac{X+10}{4}<\frac{2}{4}\right)=$$
$$=F(0{,}50=F(-0{,}5)=2F(0{,}5)-1=2\cdot 0{,}6915-1=0{,}3830$$

5. Нека X има N_{μ,σ^2} распределба. Да се најде : а) $P(\ |X-\mu|<\frac{\sigma}{2}\ )$,

б) $P(\ |X-\mu|<\sigma\ )$ в) $P(\ |X-\mu|<1{,}5\sigma)$, г)Нека $g(t)=P(\ |X-\mu|<t\sigma)$. Покажи, дека $g(t)=2F(t)-1$ и да се определи $g'(0)$.

Решение: б)$P(|X-\mu|<\sigma)=P(-\sigma<X-\mu<\sigma)=P\left(-1<\dfrac{X-\mu}{\sigma}<1\right)=$

$=F(1)-F(-1)=2F(1)-1=2\cdot 0{,}8413-1=0{,}6826.$

в) Одг. 0,8664

г) $g(t)=P(|X-\mu|<t\sigma)=P(-t\sigma<X-\mu<t\sigma)=P\left(-t<\dfrac{X-\mu}{\sigma}<t\right)=$

$=2F(t)-1$, од каде $g'(t)=2F'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$, $g'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

7.3. Теорема на Моавр-Лаплас

При доказот на оваа фамозна теорема во теоријата на веројатност ќе ја користиме Стирлинговата формула, која гласи:

$$n!\approx\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n} \tag{7.3.1}$$

Според тоа Стирлинговата формула служи за приближно пресметување на факториелите .

Теорема 7.3.1 . Нека $0<p<1$, ставаме $q=1-p$, и

$$x_k=\frac{k-np}{\sqrt{npq}},\quad 0\le k\le n \tag{7.3.2}$$

Нека А е фиксен позитивен број. Тогаш за $|\ x_k\ |\le A$, ја имаме приближната формула

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \qquad (7.3.3)$$

Доказ:

Од (7.3.2) имаме

$$k = np + \sqrt{npq} \cdot x_k, \quad n-k = nq - \sqrt{npq} \cdot x_k.$$

$$|k - np| = \sqrt{npq}\,|x_k| \quad \text{или} \quad \left|\frac{k}{n} - p\right| = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}|x_k| \le \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} A, \text{ за } |x_k| \le A$$

Тоа значи за големо n $|k\text{-}np| \to 0$ и ќе пишуваме $k \sim np$ и на ист начин се добива $n\text{-}k \sim nq$. Користејќи ја Стирлинговата формула (7.3.1)

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{\sqrt{2\pi} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-n+k}} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{n^k \cdot n^{n-k} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi} \cdot k^k \cdot (n-k)^{n-k} \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot (n-k)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi \cdot k \cdot (n-k)}} \cdot \varphi(n,k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \varphi(n,k),$$

За да го добиеме последниот израз ставивме наместо k np и наместо n-k nq, а

$$\varphi(n,k) = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \qquad \ln\varphi(n,k) = k\ln\frac{np}{k} + (n-k)\ln\frac{nq}{n-k}.$$

Како $np = k - \sqrt{npq} \cdot x_k$ и $nq = n - k + \sqrt{npq} \cdot x_k$

имаме $\ln\frac{np}{k} = \ln(1 - \frac{\sqrt{npq} \cdot x_k}{k})$ и $\ln\frac{np}{n-k} = \ln(1 + \frac{\sqrt{npq} \cdot x_k}{n-k})$.

Имајќи во обзир $k \sim np$ и $n\text{-}k \sim nq$. За $|x_k| \le A$ јасно е дека

$\frac{\sqrt{npq}\cdot x_k}{k} \approx \frac{\sqrt{npq}\cdot x_k}{np} = \frac{\sqrt{q}\cdot x_k}{\sqrt{np}}$ за доволно големо n по апсолутна

вредност ќе бидат помали од 1: $\frac{\sqrt{npq}\cdot x_k}{k}$ и $\frac{\sqrt{npq}\cdot x_k}{n-k}$.

Сега со помош на Тајлоровиот развој за функцијата

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

за $|x|<1$ добиваме:

$$k\ln\left(1 - \frac{\sqrt{npq}\cdot x_k}{k}\right) = k\left(-\frac{\sqrt{npq}\cdot x_k}{k} - \frac{npq\cdot x_k{}^2}{2k^2} - \ldots\right)$$

$$(n-k)\ln\left(1 + \frac{\sqrt{npq}\cdot x_k}{n-k}\right) = (n-k)\left(\frac{\sqrt{npq}\cdot x_k}{n-k} - \frac{npq\cdot x_k{}^2}{2(n-k)^2} - \ldots\right)$$

Со собирање на левите и десните страни и задржувајќи се до членовите со x_k^2

имаме $\ln\varphi(n,k) \approx -\frac{npq\cdot x_k{}^2}{2k} - \frac{npq\cdot x_k{}^2}{2(n-k)} = -\frac{n^2pq\cdot x_k{}^2}{2k(n-k)}$

и пак заради $k \sim np$ и $n\text{-}k\sim nq$

$$\ln\varphi(n,k) \approx -\frac{n^2pq\cdot x_k{}^2}{2npnq} = -\frac{x_k{}^2}{2} \quad \text{или} \quad \varphi(n,k) = e^{-\frac{x_k{}^2}{2}}$$

Враќајќи се назад на

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\varphi(n,k)$$

покажавме, дека

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{за } |x_k| \leq A.$$

Во суштина, добивме формула за приближно пресметување на биномните веројатности.

Теорема 7.3.2 (Моавр-Лаплас). За било кои константи $a \leq b$, имаме

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

или, ако S_n е еднакво на k (бројот на успесите) во шемата на Бернули т.е. S_n е биномна распределба, можеме да напишеме

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n-np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (7.3.4)$$

Доказ: $\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}} = x_k$ од (7.3.2)

Веројатноста $P\left(a < \dfrac{S_n-np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) = \sum\limits_{a<x_k\leq b} P(S_n = k) = \sum\limits_{a<x_k\leq b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Од (3) и од $x_{k+1} - x_k = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$ добиваме

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a<x_k\leq b} e^{-\frac{x_k^2}{2}} (x_{k+1} - x_k) \qquad (7.3.5)$$

Кореспонденцијата меѓу k и x_k е обартноеднозначна и кога k се менува од *0* до n, x_k се менува во интервалот $\left[-\sqrt{\dfrac{np}{q}}, \sqrt{\dfrac{np}{q}} \right]$. Гледаме, дека интервалот кога n расте тој станува неограничено голем и затоа од некое n ќе го содржи интервалот $[a,b]$. Точките x_k кои влегуваат во интервалот $[a,b]$ го делат на подинтервали со должина $\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$ (или евентуално помала на првиот и последниот). Според тоа сумата (7.3.5) е Риманова сума за функцијата $f(x) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ на интервалот $[a,b]$ и следователно

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx .$$

Со тоа теоремата е докажана. Теоремата на Моавр-Лаплас е прв партикуларен случај на централната гранична теорема.

7.4. Централна гранична теорема

Нека за една големина сме направиле n мерења при што резултатот X_i во секое i-то мерење е случајна променлива со дадена средна вредност a и стандардно отстапување σ. Множеството или фамилијата од случајните променливи $\{X\}_{i=1}^{n}$ се вика случаен примерок при што јасно секоја X_i има иста распределба која се вика распределба на популацијата. Имавме, дека, ако X_i имаат нормална распределба тогаш и аритметичката средина $\overline{X}$ има нормална распределба. Централната гранична теорема покажува, дека распределбата на популацијата може да биде далеку од нормалната распределба, но сепак за големи n, распределбата на аритметичката средина $\overline{X}$ тежи кон нормалната распределба кога $n\to\infty$.. Централната гранична теорема е навистина централна: таа ни овозможува да пресметуваме веројатности воведувајќи ја $\overline{X}$ дури и кога индивидуалните X_i имаат многу комплицирана и непозната распределба. Само средната вредност a и стандардната девијација на популацијата σ треба да бидат од граничната распределба на $\overline{X}$. Централната гранична теорема ќе ја разгледуваме посебно за сумите, посебно за аритметичката средина.

Нека X_1, X_2,… X_n се независни случајни променливи, со иста распределба и иста средна вредност a и стандардна девијација σ.

Тогаш збирот

$$S= X_1+X_2+\ldots +X_n$$

има средна вредност и дисперзија

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = na$$
$$D(S_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = n\sigma^2$$

Според тоа

$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ е нормирана променлива за S_n.

7.5. Централната гранична теорема за збир

X_1, X_2,... X_n се независни случајни променливи, со иста распределба со средна вредност a и стандардна девијација σ.

Нека

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Тогаш распределбата за $Z = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ конвергира кон $N_{0,1}$ распределба кога $n \to \infty$..

Со други зборови случајната променлива $Z = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ има распределба која приближно е еднаква со $N_{0,1}$ распределбата за големо n. Колку големо n е потребно ? Тоа зависи од индивидуалната распределба на X_i, како и од точноста која се бара. Во колку распределбата на X_i е поблиска до нормалната распределба, до толку помало n ќе биде доволно за добра апроксимација. Низ неколку примери ќе определуваме вредности на n, но во општ случај, неочекувано мали ($n \geq 20$) вредности на n обезбедуваат доста широка примена.

Пример 7.5.1. Електрични светилки се инсталираат сукцесивно на еден приклучок. Прво претпоставуваме, дека средната издржливост на секоја е 2 месеца со стандардно отстапување $\sigma = \frac{1}{4}$ од месецот. Да се определи веројатноста P (40 светилки ќе траат повеќе од 7 години).

Решение: Нека X_i е еднаква на времетраењето на i-тата светилка инсталирана по ред. Тогаш n светилки ќе траат време еднакво на

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

За $n=40$, $a=2$ и $\sigma = \frac{1}{4}$, $\frac{S_{40} - 40 \cdot 2}{\sqrt{40 \cdot 0{,}25}}$ има приближно $N_{0,1}$ распределба, ако земеме, дека $n=40$ е голем број,

$$P(S_{40} \geq 7{,}12) = P\left(\frac{S_{40}-80}{\sqrt{40}\cdot 0{,}25} \geq \frac{84-80}{\sqrt{40}\cdot 0{,}25}\right) \approx P(Z > 2{,}530) =$$

$$= 1 - F(2{,}530) = 1 - 0{,}9943 = 0{,}0057$$

Колку светилки n треба да се купат за да бидеме 95%сигурни, дека ќе траат најмалку 5 години ?

Решение: 30 светилки имаат очекувано време на траење

30·2=60 месеци=5 години.

$$0{,}95 = P(S_n \geq 60) = P\left(\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}\cdot 0{,}25} \geq \frac{60-2n}{\sqrt{n}\cdot 0{,}25}\right)$$

од таблицата имаме $\frac{60-2n}{\sqrt{n}\cdot 0{,}25} = -1{,}645$ $\quad n = 31{,}15$ што значи треба да се купат 32 светилки.

7.6. Централна гранична теорема за аритметичка средина

$\overline{X} = \frac{S_n}{n}$ можеме да ја запишеме поаѓајќи од $\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{S_n}{n} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ и гласи:

Ако $X_1, X_2, \ldots X_n$ се независни случајни променливи, со иста распределба со средна вредност a и стандардно отстапување σ тогаш распределбата на променливата

$$Z = \frac{\overline{X} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

тежи кон $N_{0,1}$ распределбата кога $n \to \infty$.

Пример 7.6.1: Нека $\overline{S}$ е аритметичката средина на времетраењата на 25 светилки од дадениот пример. а) Да се најде

$P(\overline{S}$,1,9). б)Да се најде интервал (2-c, 2+c) околу a=2 така што 95% сме сигурни дека средното времетраење на $\overline{S}$ ќе биде во тој интервал.

Решение: Со примена на централната гранична теорема за случајната променлива $\frac{\overline{S}-2}{\frac{0,25}{5}}$ добиваме

$$P(\overline{S}>1,9)=P\left(\frac{\overline{S}-2}{\frac{0,25}{5}}>\frac{1,9-2}{\frac{0,25}{5}}\right)=P(Z>-2)=$$

$$=1-P(Z\le -2)=P(Z<2)=0,9772$$

$$\text{б)}\,P(-c<\overline{S}-2<c)=P\left(\frac{-c}{\frac{0,25}{5}}<\frac{\overline{S}-2}{\frac{0,25}{5}}<\frac{c}{\frac{0,25}{5}}\right)=2F\left(\frac{c}{\frac{0,25}{5}}\right)-1=0,95$$

$$2F\left(\frac{c}{\frac{0,25}{5}}\right)=1,95,\quad 2F\left(\frac{5c}{0,25}\right)=1,95\ ,F(20\cdot c)=0,9750\quad 20\cdot c=1,96,\ c=0,098$$

Задача: Батерија има просечно (средно) времетраење од 2 месеци со стандардно отстапување од 10 дена (месецот претпоставуваме да има 30 дена). Купени се 25 батерии. Да се најде: а) $P(\overline{X}_{25}>60\text{дена})$

б) $P(|\overline{X}_{25}-60|>3)$, в) Колку батерии n треба да се купат за да средното време на сите n е 2 месеци плус или минус 1 ден со веројатност 0,95.

Решение: в)

$$P(|\overline{X}_n-60|\le 1)=P(-1\le \overline{X}_n-60\le 1)=P\left(-\frac{1}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}_n-60}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le\frac{1}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=$$

$$=2F\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right)-1=0,95,\quad F\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0,9750\quad \text{од таблицата}\ \frac{\sqrt{n}}{10}=1,960$$

$$\sqrt{n}=19,60\qquad n=19,60^2$$

Централната гранична теорема применета на биномната распределба е теоремата на Моавр-Лаплас.

Пример 7.6.2: Ако метална пара се фрла $n=100$ пати, да се најде $P(45\leq S_{100}\leq 55)$, каде S_{100} е еднаква на бројот на главите во сите сто фрлања.

Решение 1. Секое фрлање X_i има средна вредност p и дисперзија pq. Тука $p=q=1/2$. Затоа S_{100} има средна вредност $100\cdot p=100\cdot 1/2=50$ и дисперзија $n\cdot pq=100\cdot 1/4=25$

$$P(45\leq S_{100}\leq 55)=P\left(\frac{45-55}{\sigma\cdot\sqrt{100}}\leq\frac{S_{100}-55}{\sigma\cdot\sqrt{100}}\leq\frac{55-50}{\sigma\cdot\sqrt{100}}\right)\approx P(-1\leq Z\leq 1)$$

$$(\sigma=\frac{1}{2}\text{ ,каде } Z \text{ има } N_{0,1} \text{ распределба }) = 2F(1)-1=2\cdot 0{,}8413-1=0{,}6826$$

Решение 2. Бидејќи не е можно да се добие не цел број глави,

$$P(44<S_{100}<56)=P\left(-\frac{5}{6}<\frac{S_{100}-50}{5}<\frac{5}{6}\right)=P(-1{,}2<Z<1{,}2)=2F(1{,}2)\_1=0{,}769$$

Решение 3.

$$P\left(44\tfrac{1}{2}\leq S_{100}\leq 55\tfrac{1}{2}\right)=P\left(-\frac{5\frac{1}{2}}{5}\leq\frac{S-50}{5}\leq\frac{5\frac{1}{2}}{5}\right)=P(-1{,}1\leq Z\leq 1{,}1)=0{,}7286\ .$$

Интуицијата ни сугерира, дека решението 3 е најточно. Точната веројатност е

$$P(45\leq S\leq 55)=\sum_{j=45}^{55}\binom{100}{j}\frac{1}{2^{100}}=0{,}78281$$

Во врска со биномната распределба, централната гранична теорема ќе ја применуваме како во решението 3. Тоа значи наместо $P(j\leq S_n\leq k)$ ќе определуваме $P\left(j-\frac{1}{2}\leq S_n\leq k+\frac{1}{2}\right)$.

Задачи

1. Нека X има биномна распределба со $n=24$, $p=0{,}6$. Да се определи точната вредност $P(X=j)$ и да се спореди со приближната вредност пресметана со централната гранична теорема $P\ (j-0{,}5< X< j+0{,}5)$ за

а) *j=10* б) *j=15* в) *j=20*

Точната вредност е $B(n,j;0{,}6)=\binom{n}{j}0{,}6^{j}\cdot 0{,}4^{n-j}$. Со централната гранична теорема

$$P(j-0{,}5<X<j+0{,}5)=P\left(\frac{j-0{,}5-n\cdot 0{,}6}{\sqrt{n\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}<\frac{X-n\cdot 0{,}6}{\sqrt{n\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}<\frac{j+0{,}5-n\cdot 0{,}6}{\sqrt{n\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\right)=$$

$$=P\left(\frac{j-0{,}5-24\cdot 0{,}6}{\sqrt{5{,}76}}<Z<\frac{j+0{,}5-144}{\sqrt{5{,}76}}\right)$$ за *j=10* имаме

$\binom{24}{10}0{,}6^{10}\cdot 0{,}4^{14}=0{,}0318$ точна веројатност

$$P\left(\frac{10-14{,}9}{2{,}4}<X<\frac{10+0{,}5-14{,}4}{2{,}4}\right)=P\left(-\frac{4{,}9}{2{,}4}<X<-\frac{9{,}9}{2{,}4}\right)=$$

$=P(-2{,}0416<X<-1{,}6250)=0{,}0309$ приближна вредност

а) точна 0,1612 приближна 0,1612

б) точна 0,0099 приближна 0,0111

2. Од 100 луѓе 40 се повисоки од 180 *cm*. Нека *X* е еднаква на бројот со поголема висина од 180 *cm*. Со централна гранична теорема да се најдат

а) $P(38\le X\le 42)$; б) $P(37<X<43)$; в) $P(37{,}5\le X\le 42{,}5)$. Тука $p=0{,}4$

3. Нека X е еднаква на бројот на успесите во 10 000 повторувања по шемата на Бернули. Да се најде $P\ (10\ 000p-20<X<10\ 000p+20)$ за $p=$ а) 0,1; б)0,25;

в) 0,50

4. Нека се изведуваат *n* Бернулиеви обиди (Бернулиева шема) со $p=0{,}5$. Со централна гранична теорема да се најде интервал $\left(\frac{n}{2}-c,\frac{n}{2}+c\right)$ така што бројот на успесите X ќе биде во тој интервал со веројатност 0,90. Колкава е должината на интервалот ? Како зависи од *n* ? Одг. $c=0{,}8225\sqrt{n}$.

5. Една физичка големина се мери повеќе пати заради поголема точност. При секое мерење можна е грешка. Логично е да се претпостави дека грешките се рамномерно распределени на интервалот [-1,1]. Ако земеме аритметичка средина на n мерења, која е веројатноста, дека таа ќе се разликува од првата вредност за помалку од 5 ?

6. *Решение*: Нека точната вредност е m, а резултатот при j-то мерење е X_j; $j=1,2,...,n$. Тогаш од претпоставката имаме $X_j=m+U_j$,каде U_j случајна променлива со рамномерна распределба на [-1,1].

$$E(U_j)=\int_{-1}^{1}\frac{x}{2}dx=0\ ,\quad \sigma^2(U_j)=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{3}$$

$$E(X_j)=E(m)+E(U_j)=m\ ,$$

$D(X_j)=\sigma^2(X_j)=D(U_j)=\frac{1}{3}$. Ние треба да определиме

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|<S\right)=P(|S_n-nm|<\delta_n),\ S_n=X_1+X_2+...+X_n\ .$$

Како $E(S_n)=nm$, $D(S_n)=\frac{n}{3}$ имаме

$$P(|S_n-nm|<\delta_n)=P\left(\left|\frac{S_n-nm}{\sqrt{\frac{n}{3}}}\right|<\delta\sqrt{3n}\right)\approx 2F(\delta\sqrt{3n})-1$$

На пример, ако $n=25$ и $\delta=\frac{1}{5}$, тогаш резултатот е еднаков на

$2F(\sqrt{3})-1\approx 2F(1{,}73)-1\approx 0{,}92$ од таблицата. Според тоа, ако се направени 25 мерења тогаш 92% сме сигурни, дека средната вредност од тие мерења се разликува за 0,25 од правата вредност. Во истава задача прашањето може да се постави и вака: Колку мерења треба да се направат за да веројатноста биде поголема од α, за да средната вредност се разликува од правата вредност најмогу за δ ? Во тој случај прво определуваме вредност x_α така што

$2F(x_\alpha)-1=\alpha$, или $F(x_\alpha)=\dfrac{1+\alpha}{2}$; потоа го бираме n такво што $\delta\sqrt{3n}>x_\alpha$

На пример, ако $\alpha=0{,}95$ и $\delta=\dfrac{1}{5}$, од таблицата имаме $x_\alpha\approx 1{,}96$ и затоа

$n>\dfrac{x_\alpha^2}{3\delta^2}\approx 32$. Што значи, седум или осум мерења ја зголемуваат нашата сигурност од 92% на 95%.

7.7. Централната гранична теорема применета на Пуасонова распределба

Нормалната распределба ја апроксимира, исто така, и Пуасоновата распределба за големи вредности на параметарот λ. За да видеме како тоа се прави, нека X има Пуасонова распределба со параметар λ доволно голем. Бидејќи средната вредност и дисперзијата за X се двете еднакви на λ.

$$Z=\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

е нормирана случајна променлива.

Разгледуваме ваков модел: Бројот на повиците во текот на една минута е случајна променлива со параметар $\lambda=1$, во средно. Нека X_i =бројот (повици регистрирани во интервалот $[i-1,i]$).Тогаш бројот на повиците регистрирани во $(0,t]$ е $X=X_1+\ldots+X_t$.

Но

$$E(X_i)=\lambda=1 \qquad \sigma^2 D(X_i)=\lambda=1$$

зашто секоја X_i има Пуасонова распределба со параметар $\lambda=1$. Претпоставуваме, исто така, дека X_i се независни. Можеме да заклучиме:

1. X има Пуасонова распределба со параметар $t\lambda=t$

2. $\frac{X-t}{\sqrt{t}}=\frac{X-t\lambda}{\sqrt{t\lambda}}$ има приближно $N_{0,1}$ распределба за големо t според централната гранична теорема.

Нека, сега ставиме $\Lambda = t$ па можеме да речеме:

Ако X има Пуасонова распределба со параметар Λ, тогаш

$$Z=\frac{X-\Lambda}{\sqrt{\Lambda}}$$

има приближно $N_{0,1}$ распределба.

Пример 7.7.1: Повици пристигнуваат во просек 2 во минута. За 8 саати просекот ќе биде 2·60·8=960 повици. Нека X е бројот на регистрираните повици. Да се најде $P(X<1000)$ $P(X>900)$ и да се најде интервал [960-c, 960+c] таков што со веројатност 0,5 X ќе се наоѓа во тој интервал.

Решение: $\lambda=E(X)=960,$ $D(X)=\lambda=960.$ Затоа променливата $Z=\frac{X-960}{\sqrt{960}}$ има апроксимативно $N_{0,1}$ распределба. Заради целобројноста на X имаме

$$P(X<1000)=P(X\le 999{,}5)=P\left(\frac{X-960}{\sqrt{960}}\le\frac{999{,}5-960}{\sqrt{960}}\right)=P(Z\le 1{,}275)=0{,}8997$$

$$P(X>900)=P(X\ge 900{,}5)=P\left(\frac{X-960}{\sqrt{960}}\ge\frac{900{,}5-960}{\sqrt{960}}\right)=P(Z\ge -1{,}920)=0{,}9726$$

Бројот c го определуваме од

$$0{,}5=P(960-c\le X\le 960+c)=P\left(-\frac{c}{\sqrt{960}}\le Z\le\frac{c}{\sqrt{960}}\right)=2F\left(\frac{c}{\sqrt{960}}\right)-1$$

од каде $F\left(\frac{c}{\sqrt{960}}\right)=0{,}750$ од таблицата $\frac{c}{\sqrt{960}}=0{,}68$, $c=20{,}91$.

7.8. Неравенство на Чебишев и законот на големите броеви

Неравенството на Чебишев го дадовме кај дискретните случајни променливи. Тука даваме доказ на ова важно неравенство во континуираниот случај, а ќе се потсетиме, исто така, и на законот за големите броеви.

Нека X е случајна променлива со средна вреднодт $E(X)=0$. Иако очекувањето на X е 0, поедини вредности на X можат да бидат многу далеку од нулата. Со помош на неравенството на Чебишев при дадена дисперзија σ^2 оценуваме со каква веројатност се блиски вредностите на X околу средната вредност.

Нека е даден позитивен број ε,0. Сакаме да ја оцениме веројатноста P ($|X|\geq\varepsilon$).

$$P(|X|\geq\varepsilon)=\int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)dx$$

каде $f(x)$ е густина за X.

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)dx=\int_{x^2\geq\varepsilon^2}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2}f(x)dx\leq\int_{x^2\geq\varepsilon^2}\frac{x^2}{\varepsilon^2}f(x)dx\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \text{ т.е.}$$

$$P(|X|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (7.8.1)$$

нека сега претпоставиме, дека $E(X)=a$. Ја разгледуваме променливата X-a која има средна вредност $E(X\text{-}a)=E(X)\text{-}E(a)=a\text{-}a=0$. Од (7.8.1) ако наместо X, ставиме

X-a имаме

$$P(|X-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (7.8.2)$$

$$P(|X-a|<\varepsilon)=1-P(|X-a|\geq\varepsilon)\geq1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (7.8.3)$$

Неравенствата (2) и (3) заедно се викаат неравенство на Чебишев.

Пример 7.8.1. Во кутија со клинци има просечно (среден број) 100 парчиња, со стандардно отстапување од 3 клинци. Да се определи веројатноста, дека во купената кутија има 95 до 105.

Решение 1: Со неравенството наЧебишев. Нека X е бројот на клинците во кутијата. Тогаш $a=100$ $\sigma=3$.Затоа

$$P(95 < X < 10) = P(|X - 100| < 5) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{3^2}{5^2} = \frac{14}{25} = 0{,}56$$

Решение 2. Со централна гранична теорема .

$$P(95 < X < 10) = P(95{,}5 \leq X \leq 104{,}5) = P\left(\frac{95{,}5 - 100}{3} \leq Z \leq \frac{104{,}5 - 100}{3}\right) =$$

$$= P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}5) = 2F(1{,}5) - 1 = 0{,}8664$$

За поголеми примероци веројатноста определена со централната гранична теорема е поточна отколку со помош на неравенството на Чебишев. Тоа се должи на фактот што неравенството на Чебишев е општ резултат точен за секоја дистрибуција со иста средна вредност и дисперзија. Ако, меѓутоа распределбата е приближна на нормалната тогаш при централната гранична теорема се земаат во обзир специфичните особини на распределбата.

Со помош на неравенството на Чебишев многу лесно го добиваме законот на големите броеви.

Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се случајни променливи, независни, еднакво распределени со иста средна вредност а и дисперзија σ^2.

Нека $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ и $\overline{X} = \frac{S_n}{n}$

$$E(S_n) = E(X_1 + \ldots + X_n) = na$$

$$D(S_n) = D(X_1 + \ldots + X_n) = n\sigma^2$$

$$E(\overline{X}) = \frac{na}{n} = a \;,\; D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Применето неравенството на Чебишев на S_n дава

$P(|S_n - na| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ или на аритметичката средина

$P(|\overline{X} - a| \geq \varepsilon) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, од каде ако $n \to \infty$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-a\right|\geq\varepsilon\right)\to 0 \quad \text{или} \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)\to 1.$$

7.9. χ^2 распределба

Нека $Z_1, Z_2,\ldots, Z_n$ се независни случајни променливи сите со $N_{0,1}$ распределба. Тогаш по дефиниција, случајната променлива

$$Y_n = Z_1^2 + \ldots + Z_n^2$$

се вика χ_n-квадратна распределба со n степени на слобода (често обележувана „χ^2 распределба"). Y_n е континуирана случајна променлива со вредности на интервалот $[0,\infty)$.

Пример 7.9.1. Да се определи густината f_1 за χ^2 случајната променлива Y_1 со еден степен на слобода.

Решение: $f_1(y)=0$ за $y<0$. $Y_1=Z^2$, каде Z е $N_{0,1}$. Следователно функцијата на распределба за Y_1 е

$$P(Y_1 \leq y) = P(Z^2 \leq y) = P(|Z| \leq \sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Со диференцирање по y, имајќи во обзир, дека горната граница е функција од y добиваме

$$f_1(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$ за $y>0$ т.е. вкупно

$$f_1(y)=\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$$

Пример 7.9.2. Да се определи густината на Y_2.

Решение. Користејќи ја формулата за густина од збир на независни случајни променливи ; во случајов Z_1^2 и Z_2^2 со иста густина $f_1(y)$ имаме

$$f_2(y)=\int_0^y f_1(t)f_1(y-t)dt=\int_0^y \frac{1}{2\pi}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}(y-t)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{(y-t)}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\int_0^y t^{-\frac{1}{2}}\cdot(y-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

Сега со смената $t=n^2$

$$f_2(y)=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\int_0^{\sqrt{y}} n^{-1}(y-n^2)2ndn=\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\int_0^{\sqrt{y}}\frac{2dn}{\sqrt{y-n^2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot e^{-\frac{y}{2}}\arcsin\frac{n}{\sqrt{y}}\Big|_{n=0}^{n=\sqrt{y}}=\frac{1}{\pi}\cdot e^{-\frac{y}{2}}(\arcsin 1-\arcsin 0)=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

и така конечно

$$f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & ,\ y>0\\ 0\ , & y<0\end{cases}$$

Во општ случај функцијата на густина Y_n со n степени на слобода

$$f_n(y)=\begin{cases} C_n\cdot y^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{y}{2}} & ,\ y>0\\ 0 & ,\ y<0\end{cases}$$

каде C_n е константа.

ГЛАВА 8

8. ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ

8.1. Дефиниција и примери

Генераторните функции се од голема корист во теоријата на веројатноста, тие се јавуваат како моќно средство и во други области од математиката, како на пример, во теоријата на броевите, каде за прв пат биле користени од Ојлер, еден од најплодните математичари. Нека X е случајна променлива која прима само ненегативни цели броеви како вредности со веројатности

$$P(X=j)=a_j \quad j=0,1,2,... \tag{8.1.1}$$

Го разгледуваме степенскиот ред

$$g(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j \tag{8.1.2}$$

Функцијата $g(z)$ се вика генераторна функција асоцирана со бројната низа $\{a_j, j\geq 0\}$. Во нашиов случај ние ќе ја викаме генераторна функција на случајната променлива X со распределба на веројатностите (8.1.1). Според тоа $g(z)$ е функција од променливата z која земаме да биде реална, иако во примената, во општ случај, има предимство ако се земе да биде комплексна променлива.

Ако имаме во обзир, дека $\sum_{j=0}^{\infty}a_j=1$ и $a_j\geq 0$, на пример со критериумот на споредување, следи дека, редот (8.1.2) конвергира за $|z|\leq 1$ бидејќи $|a_jz^j|\leq a_j$. Уште повеќе функцијата $g(z)$ е непрекината на интервалот [-1,1] и има извод во тој интервал при што $g'(z)=\sum_{j=1}^{\infty} j\cdot a_j\cdot z^{j-1}$ или најопшто

$$g^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)a_n z^{n-k}=$$
$$=\sum_{n=k}^{\infty} k!a_n z^{n-k} \tag{8.1.3}$$

Ако ставиме $z=0$ во (8.1.3) добиваме $g^{(k)}(0)=k!a_k$, од каде

$$a_k=\frac{g^{(k)}_{(0)}}{k!} \tag{8.1.4}$$

Формулата (8.1.4) ни покажува, дека коефициентите a_k можат да се определат од функцијата $g(z)$. Следователно, не само што функцијата на распределба на веројатностите за X ја определува генераторната функција туку и обратно. Ако во првиот и вториот извод:

$$g'(z)=a_1+2a_2z+...+na_nz^{n-1}+...$$
$$g''(z)=2a_2+2\cdot 3a_3z+...+n(n-1)z^{n-2}+...$$

ставиме $z=1$ добиваме

$$g'(1)=\sum_{n=0}^{\infty} na_n=E(X)$$

$$g''(1)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-1)a_n=\sum_{n=0}^{\infty} n^2a_n-\sum_{n=0}^{\infty} na_n=E(X^2)-E(X)$$

при пертпоставка, дека редовите се конвергентни. Од горните релации можеме да напишеме

$$E(X)=g'(1),\quad E(X^2)=g'(1)+g''(1) \tag{8.1.5}$$

Нека Y е случајна променлива која има функција на распределба на веројатности $\{b_k\,,\,k\geq 0\}$ т.е. $P(Y=k)=b_k$ и нека нејзината генераторна функција е

$$h(z)=b_0+b_1z+...=\sum_{k=0}^{\infty} b_kz^k \tag{8.1.6}$$

Претпоставуваме, дека $g(z)=h(z)$ за $|z|<1$, тогаш од (4) имаме

$$a_k = \frac{g^{(k)}_{(0)}}{k!} = \frac{h^{(k)}_{(0)}}{k!} = b_k \quad , \quad k = 0,1,2,...$$

Следователно X и Y имаат иста распределба на веројатностите. Инаку еднаквоста на распределбата може едноставно, да се утврди на следниов начин: Во релацијата $a_0+a_1z+ a_2z^2+\ldots= b_0+b_1z+ b_2z^2+\ldots$ ставаме $z=0$ и добиваме $a_0= b_0$, и сега имаме $a_1z+ a_2z^2+\ldots= b_1z+ b_2z^2+\ldots$ По кратењето со $z\neq 0$ се добива $a_1= b_1$ и така во општ случај $a_k= b_k$.

Понатаму, за да добиеме други важни особини на генераторните функции ќе го разгледаме производот на две функции.

$$g(z)h(z) = (\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k).$$

Последниот производ, аналогно на производот на полиномите, го средуваме по степените на z, тоа средување се вика Кошиев производ на два степенски редови и изгледа вака :

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

каде $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_0 = \sum_{j+k=n} a_j b_k = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ (8.1.7)

Низата $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ се вика конволуција за низите $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$. Што во суштина претставуваат броевите c_n? Нека претпоставиме дека случајните променливи X и Y се независни, тогаш

$$P(X+Y=n) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j, Y=n-j) = \sum_{j=0}^{n} P(X=j)P(Y=n-j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = c_n$$

Добиената релација, логички, е добиена вака: Ги разгледуваме настаните: $(X=j, Y=n-j)$, за $j=0,1,\ldots,n$. Нивната унија го дава настанот $(X+Y=n)$, како настаните $(X=j, Y=n-j)$ меѓу себе се дисјунктни затоа

$P(X+Y=n)=\sum_{j=0}^{n} P(X=j, Y=n-j)$. Така, да запишеме уште еднаш, добивме дека $P(X+Y=n)=c_n$.

Што значи, генераторната функција за збирот $X+Y$ е Кошиев производ на генераторните функции за X и Y. Тука конвергенцијата на степенскиот ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ конвергира од веројатностните причини на c_n; меѓутоа и во општ случај Кошиевиот призвод постои кај што конвергираат двата степенски реда од кои што е добиен. Со една мала индукција, може да се утврди следниот резултат.

Теорема 8.1.1. Ако случајните променливи X_1, X_2,..., X_n се независни со генераторни функции $g_1(z)$,..., $g_n(z)$ соодветно, тогаш генераторна функција на збирот $X_1+\ldots+X_n$ е производот $g_1(z)\cdot\ldots\cdot g_n(z)$.

Оваа теорема е од голема важност зашто дава метод за проучување на суми од независни случајни променливи со генераторните функции. Во некои случаи, производот на генераторните функции има едноставен облик и од тука полесно е да се определува функцијата за распределба на веројатностите.

Пример 8.1.1. За Бернулиевите случајни променливи X_1, X_2,..., X_n при шемата на Бернули

$g(z)=q+pz$ за секоја X_i, зашто $a_0=P(X_i=0)=q$ и $a_1=P(X_i=1)=p$.

Од тука генераторната функција за $S_n= X_1+\ldots+X_n$ е n та степен од $g(z)$

$$g(z)^n=(q+pz)^n .$$

Со развивање на биномот имаме

$$g(z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}p^k z^k .$$

Од друга страна , од дефиницијата на генераторната функција имаме

$$g(z)^n=\sum_{k=0}^{n}P(S_n=k)z^k .$$

Со споредување на двата израза ја добиваме, веќе нам познатата биномна распределба

$$P(S_n=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\ ,\ k=0,1,2,...,n$$

Пример 8.1.2. За геометриската распределба $T \quad a_j=q^{j-1}p\ ,\ j\geq 1$

$$g(z)=\sum_{j=1}^{\infty}q^{j-1}pz^j=\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{\infty}(qz)^j=\frac{p}{q}\cdot\frac{qz}{1-qz}=\frac{pz}{1-qz} \qquad (8.1.8)$$

Нека $S_n=T_1+\ldots+T_n$, каде T_j се независни со генераторна функција (8.1.8), т.е. S_n е еднаква на времето на чекање до n-тиот успех. Генераторната функција за S_n е еднакава на

$$g^n(z)=\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^n=p^nz^n(1-qz)^{-n}=p^nz^n\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-n}{j}(-qz)^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-n)(-n-1)...(-n-j+1)}{j!}p^nz^n(-q)^jz^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n)(n+1)...(n+j-1)}{j!}p^nq^jz^{j+n}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n-1+j}{j}p^nq^jz^{j+n},$$

бидејќи $\binom{n-1+j}{j}=\binom{n-1+j}{n-1}$ последната сума ќе биде

$=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n-1+j}{n-1}p^nq^jz^{j+n}$, со смената $n+j=k$ добиваме

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n-1+j}{n-1}p^nq^jz^k.$$

Така за $j\geq 0$ имаме, $P(S_n=n+j)=\binom{n-1+j}{j}p^nq^j=\binom{-n}{j}p^n(-q)^j.$

На тој начин ја добивме негативната биномна распределба од ред n.

Нека ја разгледаме случајната променлива T_1-1, која ги прима вредностите: 0,1,2,…, при што $P(T_1-1=0)=P(T_1=1)=p$, и т.н.

$P(T_j-1=j)=P(T_1=j+1)=q^jp$.

Следователно генераторната функција е $p+pqz+...=\frac{g(z)}{z}$, каде $g(z)$ е генераторната функција на геометриската распределба $g(z)=pz+qpz^2+...$

Како случајната променлива T_1 е еднаква на бројот на обидите до првиот успех (или време на чекање) затоа случајната променлива T_1-1 е време на чекање до првиот неуспех $S_n-n= T_1+...+ T_n-n$ е времето на чекање за n-неуспеси, а тоа е негативната биномна распределба од ред n чија генераторна функција е

$$\left(\frac{g(z)}{z}\right)^n=\left(\frac{p}{1-qz}\right)^n$$

Нека е дадена случајната променлива X, во врска со неа ја разгледуваме функцијата

$$g(z)=E(z^X) \qquad (8.1.9)$$

имено математичкото очекување за случајната променлива z^X при дадено z. Кога X е еднаква на j z^X е еднаква на z^j и затоа

$$g(z)=\sum_{j=0}^{\infty}P(X=j)z^j \qquad (8.1.10)$$

што претставува генерирачка функција за X. Следователно генерирачката функција за збирот на случајните променливи X_1, X_2,..., X_n ќе биде

$$E(z^{X_1+...+X_n})=E(z^{X_1}\cdots z^{X_n})=E(z^{X_1})\cdots E(z^{X_n})=g_1(z)\cdots g_n(z)$$

каде $g_j(z)=E(z^{X_j})$. Потсетуваме, исто така, дека X_1, X_2,..., X_n се независни.

Друга предност на изразот $E(z^X)$ е што води кон проширувања. Ако X прима произволни вредности изразот $E(z^X)$ има смисол. За попросто земаме $0<z\leq1$. Секој таков број z може да се претстави во облик $z=e^{-\lambda}$, λ,0. Тоа е точно зошто функцијата $e^{-\lambda}$: $[0,\infty)\rightarrow(0,1]$ е обратно еднозначна. Сега во (9), ако наместо z ставиме $z=e^{-\lambda}$, добиваме $E(e^{-\lambda X})$, $0\leq\lambda<\infty$. Ако, на пример, случајната променлива X ги прима вредностите 0,1,...,j... соодветно со веројатности $P(X=j)=a_j$, тогаш

$E(e^{-\lambda X}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-\lambda j}$ која е $g(z)$ од (10) за $z=e^{-\lambda}$. Поопшто, нека X ги прима вредностите $\{x_j\}$ со веројатности $\{p_j\}$ т.е.

$P\ (X=x_j)=p$, тогаш $E(e^{-\lambda X}) = \sum_{j} p_j e^{-\lambda X_j}$ ако редот конвергира. Јасно, ако $x_j \geq 0$ тогаш редот е конвергентен. Нека X е континуирана случајна променлива со густина $f(n)$, тогаш

$$E(e^{-\lambda X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda n} f(n) dn \qquad (8.1.11)$$

ако конвергира интегралот. Тоа е случај, ако $f(n)=0$ за $n\leq 0$ т.е. кога X е сконцентрирана на интервалот $[0, \infty)$. На тој начин ја прошируваме дефиницијата на генераторната функција на една широка класа од случајни променливи. Формулата (8.1.11) ја дава Лапласовата трансформација за X.

Ако наместо $-\lambda$ во Лапласовата трансформација ставиме чисто имагинарна вредност $i=\sqrt{-1}$ ја добиваме Фурјевата трансформација $E(e^{itX})$ која што во теоријата на веројатност е позната и како карактеристична функција за X. Ако ја имаме во обзир Ојлеровата врска

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

од каде

$$| e^{it} |^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Тоа повлекува, дека за било која реална случајна променлива X, ќе биде $|e^{itX}|=1$, што значи

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) \qquad (8.1.12)$$

$-\infty < t < \infty$ е секогаш дефинирана, во суштност имаме

$$|\varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}|\,|f(x)|\, dx = \int_{=\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$ заштото $f(x)$ е функција на густина.

Во тоа е супериорноста на Фуриевата трансформација во однос на другите трансформации што ги дискутиравме. Но цената ја плаќаме со тоа што имаме работа со комплексна променлива.

Задачи

1. Нека A_1, A_2,…, A_n се независни настани со веројатност,P (A_j)=p_j , j=1,2,…,n. Нека случајната променлива X е еднаква на бројот на случените настани во обидот . Да се определи : а) генераторната функција за X и б) $E(X)$.

а) Нека $X_j = \begin{cases} 1 \text{ ,ако се случи } A_j \\ 0 \text{ , ако не се случи} \end{cases} \quad j=1,2,...,n$

Тогаш $q_j(z) = q_j + p_j z$ каде $q_j = 1 - p_j$; како $X=X_1+\ldots+X_n$ имаме

$$g(z) = g_1(z)\cdots g_n(z) = (q_1 + p_1 z)\cdots(q_n + p_n z) = \prod_{j=1}^{n}(q_j + p_j z)$$

б) $E(X) = \sum_{j=1}^{n} E(X_j)$ или $g'(1)$ што значи $E(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j$.

2. Можно е да се дефинира генераторна функција и за случајна променлива која има и позитивни и негативни вредности. Така, на пример , ако

$$P(X=k) = p_k \ , \quad k = \pm 0 \ , \pm 1, ..., \pm N$$

тогаш

$$g(z) = \sum_{-N}^{N} p_k z^k$$

е генераторна функција.

Да се определи g, ако $p_k = \dfrac{1}{2N+1}$, што претпоставува рамномерна распределба на целите броеви

$\{-N, -N+1, \ldots -1, 0, 1, \ldots, N\}$

$$g(z) = \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{k=-N}^{N} z^k = \frac{1}{2N+1}\left(1 + z + z^N + \frac{1}{z} + \ldots + \frac{1}{z^N}\right)$$

$$g'(z) = \frac{1}{2N+1}\left(1 + \ldots + z^{N-1} - \frac{1}{z^2} - \ldots - \frac{N}{z^{N+1}}\right)$$

$$g'(0) = 0.$$

3. Да се определи карактеристичната функција на Пуасоновата распределба.

ГЛАВА 9

9. СТОХАСТИЧКИ ПРОЦЕСИ

9.1. Пуасонов процес

Телефонски повици стигнуваат во една централа или доаѓаат купувачи во некоја продавница и слично. Секој телефонски повик претставува случаен настан. Нека N_t е случајна променлива еднаква на бројот на повиците, во интервалот [0,t]. За секое фиксно t случајната променлива N_t ги прима вредностите: 0,1,2,...Тоа значи може да нема повик, може да биде само 1, 2 и.т.н.

Гледаме на секое $t \in [0,\infty)$ одговара случајна променлива N_t. Така добиваме една фамилија од случајни променливи $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$. Ваквата фамилија претставува еден стохастички (случаен) процес, или бидејќи во овој случај t се менува континуирано на интервалот $[0,\infty)$, процесот се вика континуиран (непрекинат). Ќе направиме неколку претпоставки за случајниот процес $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$.

Пуасонови постулати:

1. Дисјунктни временски интервали се независни. Тоа значи, ако J_1, $J_2,\dots,J_n$ се интервали кои не се преклопуваат, тогаш веројатностите за бројот на повиците j_1, $j_2,\dots$, j_n во соодветните интервали се независни, т.е.

$$P\,(j_1 \text{ повици во } J_1,\ j_2 \text{ повици во } J_2,\dots j_n \text{ повици во } J_n)=$$

$$=P\,(j_1 \text{ повици во } J_1)P\,(j_2 \text{ повици во } J_2)\dots P\,(j_n \text{ повици во } J_n).$$

2. Фиксираме време t од интервалот $[0,\infty)$. За мал интервал со должина Δt веројатноста дека ќе има повик во интервалот $[t,t+\Delta t)$ е приближно (апроксимативно) пропорционална со должината Δt: постои константа λ,0 таква што

$$\frac{P\left(\text{точно 1 повик во } [t,t+\Delta t)\right)}{\Delta t} \to \lambda, \text{ каде } \Delta t \to 0.$$

3. Нека фиксираме време t од $[0,\infty)$. За мал интервал $[t,t+\Delta t)$ веројатноста за доаѓање на повеќе повици од 1 тежи кон нула кога $\Delta t \to 0$, тоа значи

$$\frac{P\left(\text{повеќе од 1 повик во } [t,t+\Delta t)\right)}{\Delta t} \to 0 \text{ кога } \Delta t \to 0.$$

Со овие три постулати е дефиниран Пуасоновиот процес.

Сега ќе се обидеме да ја определиме распределбата на случајната променлива N_t на основа трите претпоставки. Во суштина треба да ја определиме веројатноста $P(N_t=k)$, $k=0,1,2,\ldots$

Го делиме интервалот $[0,t]$ на помали подинтервали. Нека има n подинтервали со иста должина, тогаш должината Δt на секој од нив е еднаква на $\frac{t}{n}=\Delta t$, $t=n\Delta t$, $n=\frac{t}{\Delta t}$. Подинтервалите се:

$[0, \Delta t)$, $[\Delta t, 2\Delta t)$, ..., $[(n-1)\Delta t, n\Delta t]$.

Бројот на повиците во секој од подинтервалите се независни според 1. Тоа значи бројот на повиците во еден интервал не влијае на бројот на повиците во друг интервал. Нека

$P_{\Delta t} = P$ (точно еден повик во подинтервалот).

За мало Δt постулатот 3. вели, дека веројатноста за повеќе од еден повик е мала, може да се запостави. На тој начин n подинтервали прават Бернулиева шема т.е. повикот во секој нареден интервал одговара на успех во наредното повторување на обидот кај шемата на Бернули, при што веројатноста за повик, $p=p_{\Delta t}$ (за успех). Следователно бројот N_t на повици во интервалот $[0,t]$ има биномна распределба (приближно):

$$P\left(j \text{ повици во } [0,t]\right) \approx \binom{n}{j} p_{\Delta t}^{j}(1-p_{\Delta t})^{n-j}$$

каде, јасно, апроксимацијата ќе биде во толку подобра во колку подинтервалите се помали. Сега ја применуваме апроксимативната формула на Пуасоновата распределба за биномната распределба. Нека $\Delta t \to 0$. Тогаш

$$n = \frac{t}{\Delta t} \to \infty \quad \text{и} \quad nP_{\Delta t} = \frac{t}{\Delta t}P_{\Delta t} = t \cdot \frac{P(1 \text{ повик точно за } \Delta t)}{\Delta t} \to t \cdot \lambda = \lambda t$$

кога $\Delta t \to 0$, според постулатот 2. Сега апроксимативната формула на биномната веројатност со Пуасоновата ни дава

$$P(j \text{ повици во } [0,t]) \to \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t} \quad \text{кога } \Delta t \to 0.$$

Со тоа го оправдавме терминот Пуасонов процес и можеме да резимираме:

Нека важат трите Пуасонови постулати. Тогаш број N_t на настани во интервалот $[0,t]$ има Пуасонова распределба со параметар λt.

$$P(N_t = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t} \quad \text{и тогаш } E(N_t) = \lambda t.$$

Понекогаш Пуасоновиот процес се вика Пуасонов поток (река) за да се потенцира постојаното доаѓање т.е. бројот на јавувањата.

Забележуваме, дека интервалот $[0,t]$ може да биде заменет со $(0,t]$ или $[0,t)$ или со отворениот интервал $(0,t)$. Тоа е така зашто веројатноста за повик во даден момент е 0. Тоа, впрочем, следи од постулатите т.е. од формулата

$$P(N_t = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t},$$

зашто ако $t \to 0$ и $\lambda t \to 0$ што значи, истото е и за било кое t од независноста.

Нека забележиме, дека интервалот $[0,t]$ може да се замени со било кој интервал со должина t. Ако s, t се времиња, тогаш

$N_{s+t}-N_s$=бројот на повици во $[0,s+t]$- бројот на повиците во $[0,s]$=

= бројот на повици во $(s, s+t]$

ќе има иста веројатност како за бројот на повиците во $[0,t]$. Следователно разликата $N_{s+t}-N_s$ има Пуасонова распределба со параметар λt.

Пример 9.1.1. Повиците доаѓаат по 3 просечно на половина саат. Колкава е веројатноста

а) за ниту еден повик во саат б) 2 повици за 15 минути в) Повеќе од 2 повици од 11^h до 11^{45}.

Решение: λ=6 во еден саат. Затоа

а) P (без повик за 1 саат $) = \dfrac{6^0}{0!}e^{-6} = e^{-6} = 0{,}002479.$

б) $P($ 2 повици за $\dfrac{1}{4}$ саат$)\dfrac{\left(6\cdot\dfrac{1}{4}\right)^2}{2!}e^{-\frac{6}{4}} = \dfrac{9}{8}e^{-\frac{3}{2}} = 0{,}2510$

в) За 45 минути т.е. за $\dfrac{3}{4}$ саат:

P(повеќе од 2 за $\dfrac{3}{4}$ саат)=1-P(0 повици)-P(1 повик)-P(2 повици)=

$$=1-\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot 6\right)^0}{0!}e^{-\frac{6\cdot 3}{4}}-\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot 6\right)}{1!}e^{-\frac{6\cdot 3}{4}}-\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot 6\right)^2}{2!}e^{-\frac{6\cdot 3}{4}}\right]=0{,}8264$$

Задачи

1. Претоставуваме, дека слабите места по должината на еден кабел се Пуасонов процес со една слаба точка во просек на 20 m. Колкава е веројатноста за помалку од 3 слаби точки на 100m?

   На 1 метар $\lambda=\dfrac{1}{20}100=5$ $\quad P(\text{помалку од } 3) = e^{-5}\left(1+5+\dfrac{5^2}{2}\right) = 0{,}1247.$

2. Купувачи доаѓаат во некоја продавница во просек 3 на половина саат. Ако секој се задржува 5 минути да се најде: а) 0 купувачи за 15 минути, б) Нема купувачи во продавницата од 8^0 до 8^{15}. в) Нема купувачи до 8^{15} под услов во 8 нема купувач.

1. Како 3 е просек за 30 минути, за 15 минути просекот е 1,5. Следователно

$$P(\text{нема да дојде купувач за 15 минути}) = \frac{(1,5)^0}{0!}e^{-1,5} = 0,2231$$

P(нема купувач за 20 минути), зашто ако некој дошол од осум без пет минути тој ќе биде во продавницата. Ако за 30 минути просек е 3, за 5 минути е $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ и затоа $p = \dfrac{\left(4\cdot\frac{1}{2}\right)^0}{0!}e^{-\frac{4}{2}} = e^{-2} = 0,1353.$

в) P(нема купувач за 15 минути/во 8 нема)=0,2231

3. Нека имаме Пуасонов процес со параметар λ,0. Нека t е фиксно време. Да се пресмета а) P(j повици во $[t, t+\varepsilon)$)

б) P (,0 повици во t)=0.

а) $P(j \text{ повици во } [t, t+\varepsilon)) = \dfrac{(\lambda\varepsilon)^j}{j!}e^{-\lambda\varepsilon}$

б) $P(,0 \text{ повици во } t) \leq P(,0 \text{ повици во } [t, t+\varepsilon)) = \dfrac{(\lambda\varepsilon)^j}{j!}e^{-\lambda\varepsilon}$

Ако $\varepsilon\to 0$ $\lambda\,\varepsilon\to 0$ и затоа P (,0 повици во t)=0.

9.2. Врска меѓу Пуасоновата, експоненцијалната и рамномерната распределба

Овие три распределби ги изведуваме по различни модели, затоа неочекувано е што сите три можат да се посматраат како три аспекти на ист модел. Нека разгледуваме Пуасонов процес. Претпоставуваме дека повици пристигнуваат во една централа просечно λ во една минута. Тогаш знаеме бројот N_t на повиците во интервалот $[0,t]$ има Пуасонова распределба со параметар (средна вредност) λt. Времето од еден повик до друг е исто така случајна променлива. Тоа време ќе го викаме "меѓувреме". Ќе покажеме, дека случајната променлива Т што е еднаква на меѓувремето има експоненцијална распределба со параметар λ. Нека: T_1 е времето до првиот повик, T_2 меѓу првиот и вториот повик, ... Тогаш

$$P(T_1, t)=P(\text{нема повик во } [0,t])=P(N_t=0)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}$$

или што е сè исто

$$P(T_1 \le t)=1-P(T_1>t)=1-e^{-\lambda t},$$

што покажува, дека T_1 има експоненцијална распределба.

Нека претпоставиме, дека стигнал повик во $[0,t]$. Во кој момент од интервалот е регистриран повикот? Ако U е времето на пристигнување, тогаш U е концетрирана на $[0,t_0]$. За $t\in[0, t_0]$,

$$P(U\le t)=P(1 \text{ повик во } [0,t]/1 \text{ повик во } [0,t_0])=$$

$$=\frac{P(1 \text{ повик во } [0,t] \text{ и } 1 \text{ повик во } [0,t_0])}{P(1 \text{ повик во } [0,t_0])}=$$

$$=\frac{P(1 \text{ повик во } [0,t])P(\text{нема повик во } [t,t_0])}{P(1 \text{ повик во } [0,t_0])}=\frac{\lambda t e^{-\lambda t}\cdot e^{-\lambda(t_0-t)}}{\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}=\frac{t}{t_0},$$

што покажува, дека U има рамномерна распределба на $[0,t]$.

9.3. Пуасонов процес на обновување

За една машина имаме извесен број резервни делови. И, штом делот престане да работи го заменуваме со нов и така машината обновена почнува да работи. Претпоставуваме, дека времетраењето на секој дел има експоненцијална распределба со параметар λ; тоа значи средното времетраење е $\frac{1}{\lambda}$. Освен тоа деловите се независни еден од друг.

Нека S_n е целокупното времетраење на првите n делови. Тоа значи S_n е и времето кога се заменува n-от дел. Процесот на обновување дефинира стохастички процес $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$, каде N_t е случајна променлива, која е еднаква на бројот на заменетите делови во интервалот $[0,t]$.

Сега ќе покажеме: Ако времетраењето на секој дел има експоненцијална распределба со параметар λ, тогаш стохастичкиот процес $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$ е Пуасонов со параметар λ. Од каде следи, дека бројот N_t на заменетите делови во $[0,t]$ има Пуасонова распределба со параметар λt. Ќе покажеме, дека стохастичкиот процес $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$ ги задоволува трите постулати на Пуасоновиот процес. Тоа зависи од фактот што деловите имаат експоненцијална распределба на времетраењето, која распределба како што знаеме ја има особината на заборавност.

1. Бројот на заменетите делови во интервалот J_1, J_2 кои не се преклопуваат се независни. Тоа е така, зашто независно колку нови делови се ставени во интервалот J_1, заради особината на заборавност, делот кој работи на крајот од првиот интервал J_1 продолжува да работи во вториот J_2 како да е нов. Слично е за било кои два дисјунктни интервали.

2. Компонента (дел) која работи во моментот t ќе биде заменета во интервалот $[t,t+\Delta t]$ со веројатност:

$$\int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda \Delta t},$$

бидејќи времето на работење има експоненцијална распределба (забележуваме, дека особината на заборавност е земена во обзир, зашто ако компонентата работи во моментот t сметамекако да е тогаш инсталирана и времетраењето има експоненцијална распределба).

$$\frac{P(\geq 1 \text{ замена во}[t,t+\Delta t])}{\Delta t} = \frac{1-e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} \to 0, \text{ кога } \Delta t \to 0.$$

Тоа може да се покаже, на пример со Лопиталовото правило. Ако се направат две замени во интервалот $[t,t+\Delta t]$, тогаш веројатноста за тоа е помала од $(1-e^{-\lambda\Delta t})^2$. Следователно, имаме

$$\frac{P(\geq 2 \text{ замени во}[t,t+\Delta t])}{\Delta t} \leq \frac{(1-e^{-\lambda \Delta t})^2}{\Delta t} \to 0,$$

кога $\Delta t \to 0$, пак со Лопиталово правило. Како

$$P(\text{точно една замена во } [t,t+\Delta t]) = 1-e^{-\lambda\Delta t}$$

имаме

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(\text{точно 1 замена во}[t, t+\Delta t])}{\Delta t} = \lambda$$

што е постулатот 2.

1. Постулатот 3. веќе го добивме погоре.

На тој начин покажавме, дека стохастичкиот процес на обнова $\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$ е Пуасонов.

Пример 9.3.1. Ако електричните светилки имаат експоненцијална распределба на времетраењето со просечно времетраење од 2 месеци; да се определи веројатноста дека помалку од 5 ќе бидат заменети за 3 месеци.

Решение: За 3 месеци просечно се заменуваат 1,5 сијалици, затоа

$$P(<5 \text{ замени во 3 месеци }) = P(N_3 < 5) = \sum_{j=0}^{4} \frac{(1{,}5)^j}{j!} e^{-1{,}5} = 0{,}9814$$

Процесот на обновување со експоненцијално распределено времетраење на компонентите и Пуасоновиот процес на броењето (на бројот на замените) во суштина се ист модел.

Имено, нека S_n = времето на работење на првите n компоненти во процесот на обновата. На пример, ако првата компонента работела 13, втората 3, третата 8 и четвртата 3 дена, тогаш

S_4=13+4+8+3=28 дена.

Настанот

$\{S_n \leq t\}$

е, дека за време t ќе бидат заменети n-компоненти и тој е исто со настанот

$\{N_t \geq n\}$.

Тоа значи имаме:

За $t \geq 0$ и $n \geq 0$ $\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$

Пример 9.3.2. Книгите се враќаат во библиотеката во интервали кои имаат експоненцијална распределба со средна вредност од 5 минути. Која е веројатноста, дека третата книга ќе биде вратена по 19 минути од отворањето на библиотеката?

Решение: Како што знаеме, параметарот е реципрочен λ=1/5=0,2, λt=0,2·19=3,8. S_3 е времето до враќањето на третата книга.

$$P(S_3 \leq 19) = P(N_{19} \geq 3) = 1 - P(N_{19} = 0,1,2) = 1 - e^{-3,8}\left(1 + 3,8 + \frac{(3,8)^2}{2!}\right) = 0,7311$$

Задачи

1. Нека електричните светилки имаат експоненцијално времетраење просечно од 3 месеци. Колку се потребни за да сме 90% сигурни, дека за 1 година ќе бидат доволни?

Параметарот на експоненцијалната распределба е реципрочната вредност: $\lambda = \frac{1}{3}$ тоа значи на јазикот од Пуасоновата распределба една светилка за 3 месеци во просек, затоа $12\frac{1}{3}$ =4 просек во една година.

$$P(S_n > 12) = P(N_{12} < n) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-4}\frac{4^j}{j!} = e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \ldots + \frac{4n-1}{(n-1)!}\right)$$

Треба

$$e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \ldots + \frac{4n-1}{(n-1)!}\right) = 0,90$$

од каде со пробање се добива n=8.

2. Зошто е експоненцијалната распределба добар модел за меѓувремето на доаѓање на муштерии во една продавница? Ако доаѓаат по 10 муштерии во просек: а) Колкаво е λ? б) P(помалку од 4 муштерии за пола саат), в) P(барем една муштерија во следните 5 минути)

3. Претпоставуваме, дека батеријата трае во време кое има експоненцијална распределба со средно времетраење од 2 месеци. Ако апаратот работи со една батерија, а имаме 4 заедно со оригиналната, да се определи веројатноста

а) ќе траат најмалку 11 месеци; б) најмногу 6 месеци; в) колку батерии се потребни за да 70% сме сигурни за 8 месеци?

а) $P(S_4 > 11) = P(N_{11} < 4)$, како $\lambda = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \lambda t = 0{,}5 \cdot 11 = 5{,}5$

$$P(N_{11} < 4) = e^{-5,5}\left(1 + \frac{5{,}5}{1!} + \frac{5{,}5^2}{2!} + \frac{5{,}5^3}{3!}\right) = 0{,}2017$$

б) $P(S_4 < 6) = P(N_6 > 4) = 1 - e^{-3}\left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}\right) = 0{,}3528.$

в) $P(S_n > 8) = P(N_8 < n) = 0{,}7, \quad 8 \cdot 0{,}5 = 4$ и затоа

$$e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{(n-1)!}\right) = 0{,}7$$

9.4. Процеси на раѓање и умирање

Кај Пуасоновиот процес случајните променливи N_t се еднакви на бројот на повиците (посетителите,...) во текот на временскиот интервал $[0,t]$. N_t може само да расте со времето: $N_t \geq N_s$, за $t \geq s$. Има ситуации во кои што "состојбата на системот" може да се менува нагоре или надолу. Една од најважните апликации е теоријата на опашките, кај кои состојбата на системот во времето t е должината на редот на оние кои чекаат.

Доброто сфаќање на експоненцијалната распределба е неопходен предуслов во понатамошното излагање. Нека се потсетиме, ако T е времетраењето на некој апарат и има експоненцијална распределба со параметар α, тогаш густината на T е

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & t > 0 \\ o, & t < 0 \end{cases}$$

Математичкото очекување на T е реципрочната вредност на параметарот:

$$E(T) = \frac{1}{\alpha}$$

Нека се потсетиме, исто така, на најважната особина на експоненцијалната распределба, особината на заборавност или особината опишана накусо вака: ако апаратот работи во моментот t тој продолжува да работи како да е нов, како да е тогаш поставен, или со други зборови од тој момент неговото време на работење (траење) има иста експоненцијална распределба. И таа особина ја имаат само непрекинатите случајни променливи сконцентрирани на $(0,\infty)$ т.е. со вредности на интервалот $(0,\infty)$ и со експоненцијална распределба на веројатностите на тој интервал. Особината на одново работење (како ново) математички со помош на условната веројатност се пишува со $P(T > t+s / T > t) = P(T > s)$. Знаеме, дека

$$P(T > t) = 1 - P(T \le t) = e^{-\alpha t}.$$

9.5. Две особини на експоненцијалната распределба

Тука даваме две особини на експоненцијалната распределба неопходни за понатаму.

Нека, T_1, $T_2,\ldots$, T_n се независни случајни променливи, секоја има експоненцијална распределба, но не мора параметарот да им биде ист. Нека T_i има параметар α_i, i=1,2,...,n. Си замислуваме, дека сите n компоненти со времетраења T_1, $T_2,\ldots,T_n$ се инсталирани во моментот $t=0$. Нека со U го обележиме минимумот на T_i

$$U=min\{T_1, T_2,\ldots, T_n\}.$$

U е случајна променлива и е еднаква на времето додека откаже (се расипе) првата компонента. Ако $t \geq 0$, тогаш минимумот U е t, ако и само ако сите T_i,t, $i=1,2,\ldots,n$.

$$P(U > t) = P(\min\{T_1, T_2,\ldots,T_n\}) > t) = P(T_1 > t, T_2 > t,\ldots,T_n > t)$$

заради независноста

$$P(T_1 > t)P(T_2 > t)\cdots P(T_n > t) = e^{-\alpha_1 t}\cdot e^{-\alpha_2 t}\cdot\ldots\cdot e^{-\alpha_n t} = e^{-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)t}.$$

Последниот израз ни покажува, дека U има: експоненцијална распределба со параметар $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, и средна вредност

$$E(U) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Пример 9.5.1. Нека работењето на еден апарат е условено од три компоненти со експоненцијална распределба на времетраење со просек од 3 дена. Апаратот го добиваме со трите инсталирани компоненти плус една резервна компонента. Колкаво е очекуваното време до замената на резервната компонента? Кое е очекуваното време да престане со работа машината?

Решение: Овдека $U = \min\{T_1, T_2, T_3\}$ има експоненцијална распределба со параметар $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, а $E(U)=1$. Заради особината на заборавност новото очекувано време е исто така 1 ден или вкупно 2·1=2 дена.

Особината 1 е дека минимумот на независни случајни променливи со експоненцијална распределба и нивниот минимум има експоненцијална распределба со параметар еднаков на збирот од параметрите на дадените распределби.

Нека сега се обидеме да ја определиме веројатноста, дека, прва ќе откаже j-та компонента. Во тој случај треба да ја определиме веројатноста

$$P\left(T_j = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}\right).$$

Ќе покажеме дека таа веројатност е еднаква на

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Тоа е особината 2. што сакаме да ја дадеме.

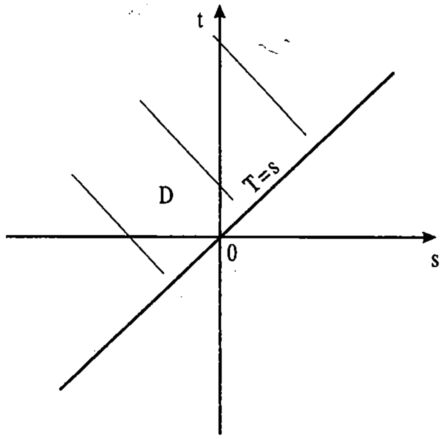
Доказ. Нека T_1 и T_2 се независни со експоненцијална распределба со параметри α и β соодветно. Заедничката густина е производ од густините на T_1 и T_2 т.е.

$$h(s,t) = \alpha e^{-\alpha s}\beta e^{-\beta s},\ s,t > 0$$

$$P(T_1 = \min\{T_1, T_2\}) = P(T_1 \le T_2) = \iint_D h(s,t)\,ds\,dt \quad D = \{(s,t); s \le t\}, \text{слика } 9.5.1.$$

$$\iint_D h(s,t)\,ds\,dt = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha s} ds \int_s^{\infty} \beta e^{-\beta t} dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} ds (-e^{-\beta s}) \Big|_s^{\infty} =$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} \cdot e^{-\beta s} ds = \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta)s} ds = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$



слика 9.5.1

Со што ја докажавме особината 2. за $n=2$. Општиот случај го добиваме вака: Нека претпоставиме, дека $T_1,\ldots,T_n$ се независни со експоненцијални распределби. Тогаш $U=min\{T_1,\ldots,T_n\}$ е случајна распределба со параметар $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, на основа особината 1. Од независноста на T_1 и U имаме

$$P(T_1 = U) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Ако наместо T_1 ја земеме случајната променлива T_j на истиот начин го добиваме резултатот

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Задачи

1. За една машина потребни се три делови. Секој дел има време на издржливост со експоненцијална распределба и тоа: првиот дел со просек 3 дена, вториот дел 4 дена и третиот дел 5 дена. Ако се

независни да се определи веројатноста а) Додека еден откаже б)Веројатноста дека прв ќе се расипе вториот дел.

а)одг. 47/60 б)одг. 15/47.

2. Пристигнувањето на автобусите е Пуасонов поток. Автобусот за улицата А доаѓа на секои 15 минути во средно, а автобусот за улицата В на секои 25 минути во средно. Нека Т е времето на чекање до даоѓањето на било кој автобус. а) Каква е распределбата за Т? б) Да се определи веројатноста дека следниот автобус ќе биде за улицата А.

а) Времето за чекање за автобусите T_1 и T_2 има експоненцијална распределба со параметар $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{25}$ соодветно. Затоа параметарот на T е $\frac{1}{15}+\frac{1}{25}=\frac{8}{75}$.

3. Нека еден систем се состои од две компоненти; првата има средно време на траење од 2 месеци, а другата 7 месеци. Ако тие работат независно со експоненцијална распределба, да се определи веројатноста, дека втората ќе откаже побрзо.

Од условот првата компонента има времетраење T_1 со параметар $\frac{1}{2}$, а втората има времетраење со параметар $\frac{1}{7}$, веројатноста $P(T_2<T_1)=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}=\frac{2}{9}$.

4. Доаѓањето на муштеријата во трговски дуќан е Пуасонов поток. Нека претпоставиме, дека правите муштерии ги има 1,5 просечно во минута, а другите 1 на половина саат. Да се определи веројатноста дека по 9 саатот ќе дојде од другите муштерии?

Времето T_1 на чекање на прав муштерија има експоненцијална распределба со параметар $\frac{1}{1,5}=\frac{2}{3}$, а на другите-$T_2$ е со параметарот $\frac{1}{30}$ и затоа веројатоста ќе биде $\frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{30}}=\frac{1}{46}$.

5. Нека T_1 и T_2 се рамномерно распределени на [0,1]. Да се покаже, дека променливата $Z=min\{T_1, T_2\}$ нема рамномерна распределба.

$$F_Z(t) = P(Z \le t) =$$
$$= P(T_1 \le t \text{ и } T_2 \le t) + P(T_1 \le t \text{ и } T_2 > t) + P(T_1 > t, T_2 \le t) = 2t - t^2$$
$$0 < t < 1, \quad F_Z'(t) = 2(1-t)$$

не е рамномерна распределба.

9.6. Процес на раѓање и умирање

Разгледуваме систем кој може да се наоѓа во определен број на состојби во секој момент t. Множеството од можните состојби, просторот S на состојби, ќе биде секогаш дискретен. За определеност, S ќе биде множеството $\{0,1,2,\dots,N\}$, иако $S=\{0,1,2,\dots\}$ во многу важни примери. Во моментот t состојбата на системот ја бележиме со X_t.

На пример X_t може да го означува бројот на жителите во еден град. Тука просторот S се состои од бројот на жителите во градот. Раѓањето, доаѓањето на нов жител го зголемува X_t за 1 во тој момент, а одењето од градот го намалува бројот за 1.

Стохастичкиот процес $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ е комплетен извештај за состојбите што ги завзема системот во текот на времето. Тука правиме претпоставки за процес на раѓање и умирање, непрекинат во текот на времето: Ако во моментот t системот е во состојба i, тој останува во таа состојба во едно случајно време кое има експоненцијална распределба со параметар α_i, па очекуваното време да остане во состојба i е еднакво на $\frac{1}{\alpha_i} \cdot \alpha_i$ зависи од сосојбата i, но не зависи од други фактори, на пример α_i не зависи од тоа во која состојба бил системот пред тоа. Состојбата i може да биде апсорциона: тоа значи штом системот еднаш попадне во таа состојба и во неа останува засекогаш. Во тој случај $\alpha_i=0$; тоа значи времето на останување ќе биде $\frac{1}{0} = \infty$, т.е. засекогаш.

Втората претпоставка за процесот на раѓање и умирање е кога системот се поместува од состојбата i тој преоѓа или во состојба $i-1$ или во состојба $i+1$ со веројатности што не зависат од тоа колку долго се наоѓал системот во состојбата i, или независно во кои состојби бил пред да се најде во состојба i. Ставаме

p_i=P(следната сосотјба е $i+1$ / последната i)

q_i=P(следната сосотјба е $i-1$ / последната i), $p_i+q_i=1$, $q_i=1-p_i$.

Овие две особини: експоненцијалната распределба на времето на системот во дадена состојба и начинот на определувањето на веројатностите p_i и q_i кои се викаат веројатности на премин овозможуваат едно обопштување на особината за заборавност. Моменталната состојба X_t на системот во моментот t, следните состојби не зависат од поранешните состојби. На пример, ако состојбата во моментот t е $X_t=i$, тогаш дали системот бил во таа состојба повеќе години или тогаш влегол во состојбата i е потполно ирелевантно за предвидувањето на следната состојба. Тоа е така, зашто времето на стоење во било која состојба има експоненцијална распределба, која заради особината на заборавност не е битно колку време стои во дадена состојба. Експоненцијалната распределба е единствената непрекината распределба сконцентрирана на $(0,\infty)$ за времето на чекање со особината на заборавност. Претпоставката, дека е системот во една состојба иднината на процесот да не зависи од поранешните состојби се вика Маркова претпоставка.

Забележуваме, ако $\alpha_i=0$, тогаш ведностите на p_i и q_i не се потребни да се определуваат, зашто штом системот се најде во состојба i тој во неа останува засекогаш.

Пример 9.6.1. Едноставен пример за процес на раѓање и умирање во непрекинато време е дефиниран со експоненцијалната распределба. Нека T е еднаква на времетраењето на една компонента кое има експоненцијална распределба со параметар α. Нека $S=\{0,1\}$. Машината е во состојба 1 се додека компонентата работи. Штом компонентата престане даработи машината влегува во состојба 0 и тука останува. Затоа

$$\alpha_0=0,\ \alpha_1=\alpha,\ p_1=0,\ q_1=1.$$

Забележуваме, дека состојбата 1 е абсорпциона, веројатноста $p_1=0$ зашто, ако $p_1>0$ треба да постои состојба 2 во која може да се најде машината.

Пример 9.6.2. Пуасоновиот процес може да се посматра како процес на раѓање и умирање. Нека X_t е еднаква на повиците на интервалот $[0,1]$. X_t има Пуасонова распределба со параметар λt а međuвремето до следниот повик има експоненцијална распределба со истиот параметар λ.

$$P(X_t = i) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

$$P(\text{меѓувремето } s) = e^{-\lambda s}$$

За "системот" се вели дека е во состојба i во времето t, ако $X_t = i$ т.е. ако во интервалот [0,t] пристигне нов повик системот се поместува во состојбата $i+1$. Според тоа времето на останување во состојбата i е времето на чекање кое има експоненцијална распределба со параметар λ. Поради тоа,

$$\alpha_i = \lambda,\ p_i = 1,\ q_i = 0.$$

За сите i во просторот на состојби $S=\{0,1,2,\ldots\}$. Овој процес е во суштност чист процес на раѓање, зашто системот никогаш не се враќа назад бидејќи се бројат повиците.

Пример 9.6.3. Шема на две состојби. Машината или е во состојба на работа (работи) со експоненцијална распределба со параметар α (средно време $\frac{1}{\alpha}$) или не работи во текот на време кое има експоненцијална распределба со параметар β(средно време $\frac{1}{\beta}$).

На пример, машината има потреба од некој дел чие времетраење има експоненцијална распределба, ако делот откаже тогаш времето додека се исталира нов има исто така експоненцијална распределба. Просторот од состојби $S=\{0,1\}$, 0 кога се поправа и 1 кога работи. Тогаш,

$$\alpha_0 = \beta,\ p_0 = 1,\ q_0 = 0.$$

$$\alpha_1 = \alpha,\ p_1 = 0,\ q_1 = 1.$$

9.7. Опашки

Опашките (редиците) е многу важна подкласа од процесите на раѓање и умирање. Кај овие процеси системот се состои од муштерии и сервисери. Може да биде еден или повеќе сервисери. Претпоставуваме, дека муштериите доаѓаат како Пуасонов поток со параметар λ. Тоа значи λ муштерии доаѓаат просечно во единица време. Времето на сервисот (услугата) е случајно, но ќе земеме, дека има експоненцијална распределба со параметар ν. Што значи средното време на сервисирање е $\frac{1}{\nu}$. Нека X_t ја обележува должината на опашката во моментот t; тоа е бројот на муштериите кои чекаат ред (се во опашката) и оние на кои се обавува сервисот. Тогаш стохастичкиот процес $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ е процес на раѓање и умирање. За да го видиме тоа си спомнуваме, дека и оние муштерии кои си одат кои го завршиле сервисот се покоруваат на особината на заборавност. Дали некој муштерија ќе дојде во опашката не зависи од бројот во опашката или од некои детали пред тоа; зашто времетраењето на услугата има експоненцијална распределба, дали некој муштерија го завршил сервисот во некое време е независно од историјата во опашката, вклучувајќи колку долго се обавувал сервисот.

Пример 9.7.1. Опашка со еден сервисер. Можеме да земеме, на пример, еден шалтер за определена услуга. Луѓето кои доаѓаат прават Пуасонов поток со параметар λ, а времето на услугата е случајно и има експоненцијална распределба со параметар ν. Просторот на состојби е $S=\{0,1,2,\ldots\}$, каде 0 значи нема муштерија на шалтерот, 1 е муштеријата кој ја добива услугата и т.н. Поместувањето на системот од состојбата 0 во состојбата 1 се случува во време на чекање што е експоненцијално распределено со параметар λ. Затоа $\alpha_0=\lambda$, $p_0=1$, $q_0=0$. Ако во моментот t состојбата е$X_t=i\geq 1$, тогаш можен е премин (поместување) во состојба $i-1$ или во состојба $i+1$. Нека T е времето на доаѓање на следниот муштерија и S е времето на обавување на сервисот на муштеријата на кој му се дава услугата.

T и S се независни случајни променливи секоја со експоненцијална распределба со параметар λ односно ν соодветно. Поместување од состојбата i ќе има случајно време еднакво на $min\{\mathrm{T}, \mathrm{S}\}$. Видовме случајната променлива $U=min\{\mathrm{T}, \mathrm{S}\}$ има исто така, експоненцијална распределба со параметар $\lambda+\nu$. Премин од i во $i+1$ ќе има, ако $\mathrm{T}=min\{\mathrm{T}, \mathrm{S}\}$, а веројатноста за тоа е $\frac{\lambda}{\lambda+\nu}$. Слично ќе има поместување (премин) од i во $i-1$, ако $S=min\{\mathrm{T}, \mathrm{S}\}$, а веројатоста за тоа е $\frac{\nu}{\lambda+\nu}$.

Сумирано е:

- За опашката со еден сервисер,

$$\alpha_0 = \lambda\,, \qquad p_0 = 1$$

$$\alpha_i = \nu + \lambda \qquad p_i = \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \quad q_i = \frac{\nu}{\lambda + \nu}$$

за $i \geq 1$.

Пример 9.7.2. Опашка со "∞" сервисери. Претпоставуваме, дека муштериите доаѓаат како Пуасонов поток со параметар λ како во последниот пример, но секој муштерија како пристигнува во истиот момент е прифатен за услуга, иако времетраењето на услугата е експоненцијално распределена со параметар ν. Како пример може да земеме доаѓањето на луѓето во едно излетничко место. Секој човек штом стигне завзема свое место, се разонодува (ја прима услугата) и си оди. Како и во примерот со еден сервисер времето на чекање до доаѓање на првиот посетител е експоненцијално распределено со параметар $\alpha_0=\lambda$. Ако има i посетители во моментот t, сите тие се на сервис кој трае случајно време S_1, S_2,..., S_i соодветно. Нека T е случајното време на доаѓање на следниот муштерија. Тогаш поместување од состојбата i во состојба i-1 или i+1 станува за случајно време еднакво на $min\{T, S_1, S_2,..., S_i\}$. Бидејќи секоја случајна променлива S_i има експоненцијална распределба со параметар ν, а T има експоненцијална распределба со параметар λ, времето за поместување (премин) од состојбата i има експоненцијална распределба со параметар $\nu+\ldots+\nu+\lambda=i\nu+\lambda$. Поместување ќе има од i во i+1, ако $T = min\{T, S_1, S_2,..., S_i\}$, а знаеме веројатноста за тоа е $\dfrac{\lambda}{i\nu+\lambda}$. Поместување ќе има од i во i-1, ако барем еден од муштериите си оди (го обави својот сервис) пред да дојде следен муштерија. Како веројатноста за секој посетител да оди пред пристигнување на следниот е еднаква на $\dfrac{\nu}{i\nu+\lambda}$ затоа веројатноста за премин во i-1 е збир од тие веројатности и еднаква на $\dfrac{i\nu}{i\nu+\lambda}$.

Сумирано е:

- За опашка со ∞ сервисери:

$$\alpha_0 = \lambda\,, \qquad p_0 = 1$$

$$\alpha_i = i\nu + \lambda \qquad p_i = \frac{\lambda}{\lambda + i\nu} \quad q_i = \frac{i\nu}{\lambda + i\nu} \qquad i \geq 1$$

Пример 9.7.3. Опашка со два сервисери. Муштериите доаѓаат како Пуасонов поток со параметар λ. Тие формираат една редица (опашка), но има два сервисери. Секое време на сервисирање е експоненцијално распределено со параметар ν. Кога еден муштерија го обави сервисот, друг доаѓа на сервис од редот, и опашката се намалува за 1. Треба да се определат α_i, p_i и q_i.

Решение: Просторот S на состојби е бројот на муштериите во опашката плус оние кои ја добиваат услугата. Следователно $S=\{0,1,2,\ldots\}$.

Нека $i\geq 2$, во тој случај двата сервисери се ангажирани и времето на чекање е $min\{T, S_1, S_2\}$, кое има експоненцијална распределба со параметар $\lambda+2\nu$. Така имаме:

$$\alpha_i=\lambda+2\nu,\ p_i=\frac{\lambda}{\lambda+2\nu},\ q_i=\frac{2\nu}{\lambda+2\nu}\qquad i\geq 2$$

Ако $i=1$ тогаш

$$\alpha_1=\lambda+\nu,\ p_1=\frac{\lambda}{\lambda+\nu},\ q_1=\frac{\nu}{\lambda+\nu}.$$

Крајно, времето на чекање во сотојбата 0 е времето на доаѓање T и затоа:

$$\alpha_0=\lambda,\quad p_0=1$$

Сосема на крај нека потенцираме, дека во опашката може да се случи поместување само за 1, тоа значи се исклучува можноста за истовремено доаѓање или истовремено одење на повеќе од 1.

Задачи

1. Радио користи една батерија. Претпоставуваме дека времетраењето на батеријата има експоненцијална распределба со параметар β (средно времетраење е $\frac{1}{\beta}$). Штом батеријата се потроши, друга е купена (има една резерва), но времето на купувањето има експоненцијална распределба со параметар α. Нека системот на состојби е $S=\{0,1\}$, 0 ако нема исправна батерија, 1 ако има добра батерија. Да се определат параметрите и веројатностите на состојбите.

а) Ако $i=0$ за да има поместување треба да се купи батерија и затоа

$\alpha_0=\alpha,\quad p_0=1,\quad q_0=0$

б) Ako $i=1$ тогаш

$\alpha_1=\beta,\quad p_1=0,\quad q_1=1.$

2. Има две машини и едно лице за поправка. Состојбите се еднакви на бројот на машините што работаат. Секоја машина работи време кое има експоненцијална распределба со средо времетраење $\frac{1}{\alpha}$. Штом машината се расипе оди во работилницата и времето на поправка има експоненцијална распределба со параметар β, но ако двете се во дефект втората машина чека додека не биде поправена првата. Со $S=\{0,1,2\}$, да се определат α_i, p_i, q_i?

$$\alpha_0=\beta,\qquad p_0=1,\qquad q_0=0$$
$$\alpha_1=\alpha+\beta,\qquad p_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta},\qquad q_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
$$\alpha_2=2\alpha,\qquad p_2=0,\qquad q_2=1.$$

3. Нека претпоставиме, дека во задачата 2. се две лица за поправка.

$$\alpha_0=2\beta,\qquad p_0=1,\qquad q_0=0$$
$$\alpha_1=\alpha+\beta,\qquad p_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta},\qquad q_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
$$\alpha_2=2\alpha,\qquad p_2=0,\qquad q_2=1.$$

4. Едно паркиралиште има N места. Возилата што доаѓаат прават Пуасонов поток со параметар α, но сé додека има места. Секоја кола остнува на местото едно случајно време експоненцијално распределено со параметар ν. Нека X_t е бројот на зафатените места. Да се определат S, α_i, p_i и q_i.

$$S=\{0,1,2,...N\},$$
$$\alpha_0=\lambda,\qquad p_0=1,\qquad q_0=0$$
$$\alpha_i=\lambda+i\nu,\qquad p_i=\frac{\lambda}{i\nu+\lambda},\qquad q_i=\frac{i\nu}{i\nu+\lambda}$$

За $1\le i\le N$

$$\alpha_N=N_\nu,\qquad p_N=0,\qquad q_N=1$$

5. Има N машини и секоја има случајно време на работење експоненцијално распределено со средно времетраење $\frac{1}{\alpha}$, и има само едно лице за поправка на машините. Да се опише процесот; т.е. да се определат α_i, p_i и q_i.

$$S=\{0,1,2,...N\},$$

$$\alpha_0=\beta, \qquad p_0=1, \qquad q_0=0$$

$$\alpha_i=\alpha i+\beta, \qquad p_i=\frac{\beta}{\alpha i+\beta}, \qquad q_i=\frac{\alpha i}{\alpha i+\beta}$$

$$\alpha_N=N_\alpha. \qquad p_N=0, \qquad q_N=1$$

9.8. Веројатносен вектор на стабилна состојба

Кај процесите на раѓање и умирање со текот на времето настапува една веројатносна стабилност кога пак има премин од една состојба во друга, но со добро дефинирани веројатности φ_i со кои што системот е во состојба i.

Тука претпоставуваме, дека просторот S на состојби е конечно множество $S=\{0,1,2,..N\}$. Во моментот 0 процесот на раѓање и умирање започнува од некоја состојба X_0. X_0 може да биде потполно определена или може да биде определена до некои веројатности. Нека $\rho_i=P\ (X_0=i)$ за сите $i\in$ S. Ако е извесно, дека системот е во состојбата k, тогаш $\rho_k=1$ и $\rho_i=0$ за $i\neq k$.

Веројатностен вектор $\rho=(\rho_0,\rho_1,...)$ по однос на состојбите во S задоволува

1. $0\leq \rho_i\leq 1$ за сите $i\in$ S.
2. $\sum_{i\in S}\rho_i=1$

Векторот ρ со $\rho_i=P\ (X_0=i)$ се вика вектор на почетната состојба или иницијален веројатностен вектор и тој мора да ги задоволува двата услова, зашто неговите координати ρ_i се веројатности за условот 1. И второ мора системот да биде во некоја од можните состојби, а тоа е условот 2.

Математички, стабилниот вектор на состојбите значи, точно, следното: Независно од почетниот веројатностен вектор ρ во времето t=0

$$P(X_t=i\ /\text{почетен вектор } \rho) \longrightarrow \varphi_i$$

кога $t \longrightarrow \infty$ за сите состојби $i \in S$. Со други зборови, системот ќе се наоѓа во било кој момент t во состојбите i со веројатности φ_i, т.е. веројатности кои го определуваат $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_N)$ кој се вика стабилен веројатностен вектор на состојбите.

Постојат процеси на раѓање и умирање кои немаат фиксен веројатностен вектор на стабилност. Но, нека ние претпоставиме, дека тој постои и нека ги изведеме формулите кои ги задоволува тој вектор.

Времето на престој во состојбата i има експоненцијална распределба со параметар α_i. Нека, $f_i(t) = \alpha_i e^{-\alpha_i t}$ за t>0 инаку 0, е функција на густина. Затоа системот ќе се помести од состојба i во некој временски интервал со должина Δt, со веројатност

P (излегува од i во [t, t+Δt] / е во i во t)=

=P (излегува од i во [0, Δt] / е во i во 0)=

$$= \int_0^{\Delta t} f_i(t)dt = 1 - e^{-\alpha_i \Delta t} = 1 - \left(1 - \alpha_i \Delta t + \frac{\alpha_i^2 \Delta t^2}{2!} - \ldots\right) \approx \alpha_i \Delta t\,,$$

за мало Δt.

Во заградата ја искористивме формулата

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

при што наместо x ставаме -$\alpha_i \Delta t$.

2. Нека разгледуваме голем број на системи секој од кои што се поместува од состојбите со ист параметар α_i и веројатности p_i, q_i за $i \in S$. Земаме, дека n_i системи од нив се во состојбата i. Тогаш приближно $n_i \alpha_i \Delta t$ ќе се поместат од состојбата i за време Δt. Еден дел од нив преоѓа во состојба i+1, а другиот дел $n_i \alpha_i \Delta t\ q_i$ преоѓа во состојба i-1. За да имаме рамнотежа треба

$$n_i \alpha_i \Delta t q_i \approx n_{i-1} \alpha_{i-1} \Delta t p_{i-1} \qquad (9.8.1)$$

каде што $n_{i-1}\alpha_{i-1}\Delta t p_{i-1}$ се системите кои од состојбата *i-1* за следното време Δt преминуваат во состојбата *i*.

Ако земеме, дека бројот *n* е голем тогаш веројатноста дека било кој од нив е во состојба *i* е приближно еднаква на $\frac{n_i}{n} = \varphi_i$. Со делење на (9.8.1) со *n* и кратење со Δt имаме

$$\varphi_i \alpha_i q_i = \varphi_{i-1}\alpha_{i-1} q_{i-1} \tag{9.8.2}$$

за $i=1,2,\ldots$

Равенките (9.8.2) служат за определување на веројатностите φ_i во стабилниот веројатностен вектор на системот.

Пример 9.8.1. Нека го разгледаме примерот во кој што машината работи во случајно време со параметар α, и не работи со параметар β. Тогаш знаеме

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = \beta, & p_0 = 1, & q_0 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha, & p_1 = 0, & q_1 = 1 \end{array}$$

На база на формулите (9.8.2) имаме

$$\varphi_1 \alpha_1 q_1 = \varphi_0 \alpha_0 p_0$$

$\varphi_1 \alpha \cdot 1 = \varphi_0 \beta \cdot 1$, од каде $\varphi_1 = \frac{\beta}{\alpha}\varphi_0$. Сега користејќи го условот $\varphi_0 + \varphi_1 = 1$, добиваме $\varphi_0 + \frac{\beta}{\alpha}\varphi_0 = 1, \varphi_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \varphi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

Според тоа во општ случај стабилниот веројатностен вектор, т.е. неговите координати φ_i ги определуваме на следниот начин

1. $\varphi_i = \frac{\alpha_{i-1} p_{i-1}}{\alpha_i q_i}\varphi_{i-1} \quad i = 1,2,\ldots$ и

2. $\sum_i \varphi_i = 1$ (услов на нормираност)

Пример 9.8.2. Го разгледуваме примерот за опашка со еден сервисер.

Имавме

$$\alpha_0 = \lambda,\ p_0 = 1,\ \alpha_i = \lambda + \nu,\ p_i = \frac{\lambda}{\nu+\lambda},\ q_i = \frac{\nu}{\nu+\lambda}$$

$$\alpha_{i-1} p_{i-1} = (\nu+\lambda)\frac{\lambda}{\nu+\lambda} = \lambda,\ \alpha_i q_i = \nu \quad \text{за } i \geq 0$$

и затоа

$$\varphi_i = \frac{\lambda}{\nu}\varphi_{i-1}$$

од каде

$$\varphi_i = \frac{\lambda}{\nu}\varphi_{i-1} = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 \varphi_{i-2} = \ldots = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i \varphi_0$$

Со замена во равенката (9.8.2).

$$\varphi_0 \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i = 1, \text{ т.е.} \quad \varphi_0 \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\nu}} = 1 \text{ за } \frac{\lambda}{\nu} < 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\nu-\lambda}{\nu} \qquad \varphi_i = \left(\frac{\nu-\lambda}{\nu}\right)^i\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i$$

За $\frac{\lambda}{\nu} \geq 1$ нема решение. Нека за λ „ν ја определуваме очекуваната должина на опашката во стабилизираната состојба. Должината L на веројатност φ_i $i=1,2,\ldots$

$$E(L) = \sum_{i=0}^{\infty} i\varphi_i = \sum_{i=0}^{\infty} i\varphi_i = \sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{\nu-\lambda}{\nu}\right)^i\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i = \frac{\lambda}{\nu-\lambda}$$

Пример 9.8.3. Нека го определиме стабилниот веројатностен вектор за опашката со ∞ сервисери.

$$\alpha_{i-1} p_{i-1} = \lambda,\ \alpha_i q_i = i\nu\,.$$

Од тука

$$\varphi_i = \frac{\lambda}{i\nu}\varphi_{i-1} \quad i = 1,2,\ldots.$$

Продолжувајќи во рекурзивната формула добиваме $\varphi_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i$. Со замена во равенката (9.8.2) $\varphi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i = \varphi_0 e^{\frac{\lambda}{\nu}} = 1$, $\varphi_0 = e^{-\frac{\lambda}{\nu}}$, следователно

$$\varphi_i = \frac{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i}{\lambda!} e^{-\frac{\lambda}{\nu}}, \qquad i = 0,1,...$$

Гледаме, дека веројатностиот вектор на стабилност, во овој случај, има Пуасонова распределба со параметар $\frac{\lambda}{\nu}$. Знаеме, дека очекуваната должина на опашката ќе биде $\frac{\lambda}{\nu}$.

9.9. Чисти процеси на умирање

Разгледуваме систем што се состои од N еднакви компоненти. Сите се инсталирани и почнуваат да работат во времето $t=0$. Нека T_i е случајна променлива еднаква на времетраењето на i та компонента. Претпоставуваме, дека T_1, T_2,..., T_n се независни, сите со експоненцијална распределба со параметар δ (средно време на траење $\frac{1}{\delta}$). Состојбата на системот во времето t е X_t=бројот на компонентитекои работат. Јасно во почетното време $X_0=N$ и X_t може само да се намалува со откажувањето на компонентите, на крај кога сите компоненти нема да работаат системот влегува во состојбата 0 која е апсорпциона.

Овој процес е чист процес на умирање, и е можно само поместување од состојба i во состојба i-1 со веројатност p_i=0, q_i=1, $i=1,2,...$Така, ако системот е во состојбата i т.е. функционираат i-компоненти, тогаш случајното време на премин во состојбата i-1 е дадено со случајната променлива $min\{T_1,T_2,...T_i\}$, која, како што знаеме, има исто така експоненцијална распределба со параметар $\alpha_i = \underbrace{\delta + \delta + ... + \delta}_{i \text{ пати}} = i\delta$ за $i \geq 1, \alpha_0=0$, зашто состојбата 0 е апсорбциона.

Нека U_i го обележува времето додека е системот во состојбата i за $i=N,N-1,\ldots 1$.Случајните променливи U_i имаат експоненцијална распределба со параметар α_i. Точно е, исто така, дека U_N, $U_{N-1},\ldots$, U_1 се независни. Тоа е така заради особината на заборавност на експоненцијалната распределба: Штом системот влезе во состојбата i, тогаш тие i компоненти кои се исправни продолжуваат да работаат како да се нови.

Нека S_N=времето додека не откаже и последната компонента. Јасно, дека

$$S_N=mak\{T_1, T_2,\ldots, T_N\}$$

Друг израз за S_N

$$S_N= U_1+U_2+\ldots+U_N.$$

Секоја случајна променлива U_i има експоненцијална распределба со средно времетраење еднакво на $\frac{1}{\alpha_i}=\frac{1}{i\delta}$ и дисперзија $\frac{1}{\alpha^2 i}=\frac{1}{i^2\delta^2}$. Како тие се независни и S_N е нивни збир затоа

$$E(S_N)=\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}\right)$$

$$D(S_N)=\frac{1}{\delta^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{N^2}\right)$$

Задачи

1. Нека X е непрекината случајна променлива концентрирана на интервалот $(0,\infty)$, тоа значи функцијата на густина $f(x)=0$ за $x\leq 0$.Нека $G(x)=P(X>1)=1-F(x)$, каде $F(x)=P(X\leq x)$. Ако $xG(x)\to 0$ кога $x\to\infty$ тогаш $E(X)=\int_0^\infty G(x)dx$.

Решение: Нека за интегралот $\int_0^\infty G(x)dx$ примениме парцијална интеграција ставајќи $u=G(x)$, $v'=1$ $\quad v=x$

$$\int_0^{\infty} G(x)dx = xG(x)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} xG'(x)dx = 0 + \int_0^{\infty} xf(x)dx = E(X).$$

На пример, ако X има експоненцијална распределба со параметар λ, $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, $G(x)=1-F(x)= e^{-\lambda x}$, како $x\, e^{-\lambda x}\to 0$ кога $x\to\infty$ (со Лопиталово правило), значи важи формулата.

2. Нека T_1, T_2,.., T_N се независни случајни променливи секоја со експоненцијална распределба со параметар δ.

а) Да се најде $P(S_N\leq t)$, каде $S_N= mak\{T_1, T_2,\ldots, T_N\}$. б) Да се најде функцијата на густината.

а) $$\begin{aligned} &P(S_N \leq t) = P(T_1 \leq t,\ldots,T_N \leq t) = P(T_1 \leq t)\ldots P(T_N \leq t) = \\ &= (1-e^{-\delta t})\ldots(1-e^{-\delta t}) = (1-e^{-\delta t})^N = F(x) \end{aligned}$$

б) функцијата на густина е $f(x) = F'(x) = N\delta e^{-\delta t}(1-e^{-\delta t})^{N-1}$

3. Да се определи средната вредност на случајната променлива S_N од задача 2.

Решение: Според првата задача $E(X) = \int_0^{\infty} G(x)dx$, каде $G(x)=1-F(x)$. Со заменување во интегралот добиваме

$$E(S_N) = \int_0^{\infty} [1-(1-e^{\delta t})^N]dt.$$

Аналогно

$$E(S_{N-1}) = \int_0^{\infty} [1-(1-e^{\delta t})^{N-1}]dt$$

и од тука

$$E(S_N) - E(S_{N-1}) = \frac{1}{N\delta}.$$

Бидејќи $E(S_1) = E(T_1) = \dfrac{1}{\delta}$ ги добиваме следните равенства

$$\begin{cases} E(S_N)-E(S_{N-1})=\dfrac{1}{N\delta} \\ E(S_{N-1})-E(S_{N-2})=\dfrac{1}{(N-1)\delta} \\ E(S_2)-E(S_1)=\dfrac{1}{2\delta} \end{cases}$$

Со собирање на левите и десните страни добиваме

$$E(S_N)=\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}\right)$$

4. Нека го разгледаме интегралот

$$\int_1^{N+1}\frac{dx}{x}=\int_1^2\frac{dx}{x}+\ldots+\int_N^{N+1}\frac{dx}{x}<\int_1^2\frac{dx}{1}+\ldots+\int_N^{N+1}\frac{dx}{N}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}.$$

Од друга страна

$$\int_1^{N+1}\frac{dx}{x}=\int_1^N\frac{dx}{x}+\int_N^{N+1}\frac{dx}{x}<\int_1^N\frac{dx}{x}+\int_N^{N+1}dx=1+\int_1^N\frac{dx}{x}=1+\ln x\Big|_1^N.=1+\ln N$$

или заедно

$$\ln(N+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N}<1+\ln N,$$

по делењето со δ следи

$$\frac{1}{\delta}\ln(N+1)<E(S_N)<\frac{1}{\delta}(1+\ln N).$$

ГЛАВА 10

10. МАРКОВИ ЛАНЦИ

10.1 Основни факти за матриците

Матрица е правоаголна шема составена од редици и колони:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{10.1.1}$$

Матрицата (10.1.1) има m редици и n колони и затоа се вели дека е од облик $m \times n$. Секој елемент во матрицата има два индекса: првиот ја означува редицата, а вториот ја означува колоната во кои се наоѓа елементот. Кратко матриците се обележуваат со $(a_{ij})_{m\times n}$. Матрица составена само од една редица и n колони се вика матрица ред или n-димензионален вектор: $U=(u_1,u_2,...,u_n)$ при тоа u_1, u_2,..., u_n се координати на векторот. Матрица составена од една колона и n редици се вика матрица колона. Ако во матрицата (10.1.1) бројот на редиците е еднаков со бројот на колоните m=n тогаш матрицата се вика квадратна.

Ако се дадени две матрици A=$(a_{ij})_{m\times n}$ и B=$(b_{ij})_{m\times n}$ значи од ист облик тогаш збирот нивни A+B е матрицата $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$, тоа значи елементите на матрицата збир се збирови на соодветните елементи од дадените матрици.

Множење на матрица A=$(a_{ij})_{m\times n}$ со број k станува така што се множи секој елемент a_{ij} со тој број т.е.

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

Потешка операција со матриците е множењето на две матрици. Нека се дадени матриците

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \text{ и } B=(b_{ij})_{n\times p}$$

тогаш нивниот производ AB е матрица C=AB при што елементите на C се определуваат со следната формула

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \qquad (10.1.2)$$

Според тоа можат да се множат матрици такви што: матрицата што е од лево во производот треба да има онолку колони колку што има редици матрицата што стои на десно во производот.

Имајќи го во обзир правилото за множење на две матрици A и B може да постои производот AB, но не мора да постои прозводот BA и уште повеќе може да постојат и AB и BA, но сепак AB≠BA. Очигледно секоја квадратна матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ може да се множи сама со себе $AA=A^2$ при што A^2 е пак од истиот облик па затоа постои производот $A^2A=A^3$ и т.н. A^n. A^n се вика n-ти степен на матрицата A. Квадратна матрица E од ред n се вика единична ако $E=(e_{ij})_{n\times n}$ при што $e_{11}=e_{22}=\ldots=e_{nn}=1$, но $e_{ij}=0$ за $i\neq j$. Секоја квадратна матрица A од ред n помножена со E е истата матрица A:

$$EA=AE=A.$$

Конечно, ако $u=(u_1, u_2,\ldots, u_n)$ е вектор со n координати и A е квадратна матрица од ред n, тогаш uA постои според (2) и се добива вектор $v=(v_1, v_2,\ldots, v_n)$ при што $v_j=\sum_{k=1}^{n}u_k a_{kj}$. Ако векторот u е таков што ќе важи

$$uA=u \qquad (10.1.3)$$

тогаш велиме, дека u е фиксен вектор за матрицата A. Директно се проверува, ако u е фиксен вектор за A тогаш и ku, $k\neq 0$ е фиксен, зашто

$$(ku)A=k(uA)=ku.$$

Пример 10.1.1. Да се определи фиксниот вектор за матрицата

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

нека $u=(u_1, u_2)$ за да биде фиксен треба

$$(u_1,u_2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=(u_1,u_2)$$

$$(2u_1+2u_2,u_1+3u_2)=(u_1,u_2)$$

(Два вектори се еднакви, ако им се еднакви соодветните координати). Следователно имаме

$$\begin{cases}2u_1+2u_2=u_1\\ u_1+3u_2=u_2\end{cases}$$

Со решавање на системот равенки добиваме, дека векторот $u=(2,-1)$ е фиксен. Како и секој вектор од облик $(k\cdot 2, -k)$.

10.2. Веројатностни вектори, Стохастички матрици

Векторот $u=(u_1, u_2,\ldots, u_n)$ се вика стохастички (случаен) вектор ако неговите координати се ненегативни броеви и $u\geq 0$ за $i=1,2,\ldots,n$ и уште треба $u_1+u_2+\ldots+u_n=1$.

Пример 10.2.1. Кој од следните вектори се стохастички

а) $u=\left(\frac{3}{4},0,-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ б) $u=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2},0\frac{1}{4}\right)$ в) $u=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,\frac{1}{2}\right)$

а) не е $-\frac{1}{4}<0$ б) не е $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}>1$ в) да

Пример 10.2.2. Од векторот $v=(2, 3, 5, 0, 1)$, кој е, патем, петдимензионален да се добие стохастички вектор.

Како 2+3+5+0+1=11 затоа v не е стохастички, но ако го помножиме со $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{11}v=\left(\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{5}{11},0,\frac{1}{11}\right)$ добиваме стохастички вектор.

Квадратната матрица

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdot & \cdot & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{pmatrix} = (p_{ij})_{n\times n}$$

се вика стохастичка матрица, ако секој нејзин ред претставува стохастички вектор, тоа значи сите $p_{ij} \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ за $i=1,2,\ldots,n$.

Пример 10.2.3. Провери, дека матрицата:

а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ не е стохастичка б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ е стохастичка

Во врска со стохастичките матрици точно е следното: Ако A и B се стохастички, тогаш и нивниот производ AB е стохастичка матрица.

Доказ. i-от ред на матрицата AB е $(c_{i1}, c_{i2},\ldots, c_{in})$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot 1 = 1$$

Освен тоа очигледно $c_{ij} \geq 0$.Како специјален случај имаме, дека A^2, $A^3,\ldots, A^n$ се стохастички матрици.

10.3. Регуларни Стохастички матрици

Една многу важна класа на стохастички матрици се регуларните стохастички матрици.

Дефиниција: Стохастичката матрица П се вика регуларна, ако сите елементи од некој нејзин степен Π^m се броеви поголеми од нула.

Пример 10.3.1. Стохастичката матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ е регуларна

зашто $A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

Пример 10.3.2. Стохастичката матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ не е регуларна, зашто во било кој степен A^k елемент во првиот ред и втората колона е 0.

10.4. Фиксни вектори и регуларни стохастички матрици

Основна особина на регуларните стохастички матрици е дадена со следнава теорема која ја даваме без доказ.

Теорема: Нека П е регуларна стохастичка матрица. Тогаш:

1. П има единствен фиксен вектор *u*, и координатите на векторот *u* се позитивни;

2. Низата П, $П^2$,... од степените на матрицата П тежи кон матрицата *U* на кој што секоја редица е векторот *u*;

3. Ако *v* е некој веројатностен вектор, тогаш низата вектори $vП$, $vП^2$, $vП^3$...се стреми кон фиксниот вектор (фиксна точка *u*).

Појаснување: $П^m$ да тежи кон *U* тоа значи елементите на *U*, исто така $vП^m$ се приближува кон *u* значи, дека координатите на векторот $vП^m$ се приближуваат кон соодветните координати на векторот *u*.

Пример 10.4.1. Да се определи фиксниот веројатностен вектор за регуларната стохастичка матрица:

$$П=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Решение: Според теоремата матрицата има фиксен вектор $u=(x, y, z)$ каде $x+y+z=1$, од тука $z=1-x-y$.

$$(x, y, 1-x-y)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (x, y, 1-x-y)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=x \ , \quad x+\frac{1}{2}-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=y \ , \quad y=1=x=y$$

Со решавањето на системот добиваме $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{2}{5}$, $z=\frac{2}{5}$. Фиксниот вектор е $u=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$.

10.5. Маркови ланци

Овде разгледуваме систем (машина) чии што можни состојби во текот на времето се дадени со множеството $S=\{0, 1, 2,\dots,n\}$ или $S=\{1, 2,\dots,n\}$ или со бесконечно преброиво множество $S=\{0, 1, 2,\dots\}$. Множеството S се вика простор на состојби на системот и тој во дадено време t се наоѓа во една од тие состојби; на пример, состојба 0,1,... и т.н. Можеме, едноставно, да разгледуваме точка која слободно скока од состојба во состојба на просторот S. Нејзина локација во дадено време t е случајна променлива X_t; тоа значи можни вредности за X_t се елементите на S. На тој начин имаме стохастички процес $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$. Локацијата X_t ќе ја определуваме само во дискретно време X_0, X_1,... така што имаме преброив стохастички процес. Посебно X_0 е стартната (почетната) состојба на системот, која може да биде наполно определена или определена со веројатности по однос на просторот S.

Стохастичкиот процес се вика Марков ланец, ако важат следните претпоставки:

1. Нека претпоставиме, дека системот (честичката, точката) е во состојба i во времето t. Тогаш независно од тоа во која состојба била честичката пред времето t, веројатноста дека ќе прејде во следниот момент во состојба j зависи само од i. Исто така не е важно колку време се наоѓала честичката во состојба i веројатноста

е иста како во тој момент да преминала во i. Математички сево ова можеме да го изразиме на следниот начин:

Нека $i, j, i_{t-1}, i_{t-2},\dots, i_0 \in S$. Тогаш во некое време t, веројатноста

$$P(X_{t+1}=j/X_t=i,\ X_{t-1}=i_{t-1},\dots,X_0=i_0)=P(X_{t+1}=j/X_t=i).$$

Тоа значи, да потенцираме, веројатноста за премин на честичката која во времето t е во состоја i во следниот момент $t+1$ да се најде во состојба j зависи само од i, но не зависи во кои состојби била честичката пред тоа.

2. Веројатностите на премин не само што се независни од минатите состојби на честичката до времето t туку не зависат и од t или попрецизно, ако s е друго време

$$P(X_{s+1}=j/X_s=i)=P(X_{t+1}=j/X_t=i)\,.$$

Претпоставката 2. се вика особина на хомогеност по однос на времето. Ќе ставиме

$$P(X_{t+1}=j/X_t=i)=p_{ij} \tag{10.5.1}$$

Нека резимираме:

Хомоген Марков ланец во дискретно време се состои од честичка (систем,...)која скока во секоја единица време во состојбите на просторот S. X_t ја означува состојбата што ја завзема честичката во време t за $t=0,1,2,..$Ако честичката е во состојба i во времето t, таа ќе биде во состојба j по единица време т.е. во $t+1$ со веројатност која не зависи од состојбите што ги завземала пред времето t:

$$P(X_{t+1}=j/X_t=i)=p_{ij}$$

Последнава формула, да се потсетиме, ја читаме: Веројатноста, дека $X_{t+1}=j$ под услов (ако) $X_t=i$ е p_{ij}.

Од веројатностите p_{ij} ја формираме матрицата

$$\Pi=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdot & \cdot & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{10.5.2}$$

Матрицата (10.5.2) се вика матрица на премин, зашто нејзините елементи p_{ij} се веројатности за премин од една состојба i во друга состојба j. За матрицата на премин важи:

1. $0 \le p_{ij} \le 1$

2. $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$

1. е точна зашто p_{ij} се веројатности. Особината 2. следи од фактот што, ако честичката во времето t е во состојбата i по единица време таа мора да премине во една од состојбите на просторот S, чии што елементи се во овој случај можни елементарни настани со веројатности p_{i0}, p_{i1},..., p_{in} и затоа нивниот збир p_{i0}+ p_{i1}+...+p_{in}= $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, значи П е стохастичката матрица.

Пример 10.5.1: Нека S={0,1,2}. Од состојбата 0 честичката скока во состојбите 1 или 2 со иста веројатност $\frac{1}{2}$. Од состојбата 2 во следниот момент мора да прејде во сосотјбата 1. Состојбата 1 е апсорпциона; тоа значи штом во неа се најде честичката и тука останува. Да се напише матрицата на премин.

$$p_{00} = P(X_{t+1} = 0 / X_t = 0) = 0 \qquad p_{01} = P(X_{t+1} = 1 / X_t = 0) = \frac{1}{2}$$

$$p_{02} = P(X_{t+1} = 2 / X_t = 0) = \frac{1}{2} \qquad p_{10} = P(X_{t+1} = 0 / X_t = 1) = 0$$

$$p_{11} = P(X_{t+1} = 1 / X_t = 1) = 1 \qquad p_{12} = P(X_{t+1} = 2 / X_t = 1) = 0$$

$$p_{20} = P(X_{t+1} = 0 / X_t = 2) = 0 \qquad p_{21} = P(X_{t+1} = 1 / X_t = 2) = 1$$

$$p_{22} = P(X_{t+1} = 2 / X_t = 2) = 0$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Состојбата i е апсорпциона, ако p_{ii}=1.

Пример 10.5.2. Некој оди на работа или со колата или со автобус. Нека претпоставиме, дека никогаш едно по друго во два дена не оди со автобус; но ако денес оди со кола утре може подеднакво да оди пак со кола или со втобус. Да се состави матрицата на премин. Нека $S=\{0,1\}$; 0- патува со автобус, 1 патува со кола.

$$p_{00}=0,\ p_{01}=1,\ p_{10}=\frac{1}{2},\ p_{11}=\frac{1}{2}\quad \Pi=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример 10.5.3. Три деца А, В и С ја додаваат топката сдно на друго на следниот начин: А секогаш му ја додава топката на В, а В секогаш на С; но С подеднакво може да му ја додаде на А или В. Во овој пример просторот на состојби е $S=\{А, В, С\}$ наместо со броеви: А=0, В=1, С=2.

$$p_{00}=0,\quad p_{01}=1,\quad p_{02}=0$$

$$p_{10}=0,\quad p_{11}=0,\quad p_{12}=1\qquad \Pi=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$p_{20}=\frac{1}{2},\quad p_{21}=\frac{1}{2},\quad p_{22}=0$$

Пример 10.5.4. Случајно лутање низ $S=\{0,1,\ldots,n\}$. За секоја внатрешна состојба 1, 2, …, n-1 честичката скока на десно од i во $i+1$ со веројатност p, а на лево од i во $i-1$ со веројатост q $(p+q=1)$. Значи, за $i=1,2,\ldots,n-1$ е:

$$p_{i\,i+1}=p,\ p_{i\,i-1}=q\ ,\quad p_{i\,j}=0\ \text{ за }\ j\neq i+1,\ \ i-1$$

Овој пример одговара на ваква игра: фрламе пара со веројатност p и веројатност q за писмо. Ако падне глава добиваме еден поен, ако падне писмо губиме еден поен. Следователно при секое фрлање од i поени ќе станат $i+1$ со веројатност p или ќе станат $i-1$ со веројатност q, ако во сегашниот момент се i поени. Различни претпоставки можат да се прават за однесувањето на точката во граничните состојби 0 и n.

Случај 1. Може двете крајни состојби да бидат апсорбциони, во тој случај $p_{00}=1$ и $p_{nn}=1$. Матрицата на премин е

$$\Pi = \begin{array}{c|cccccc|} & 0 & 1 & 2 & . & . & n \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & q & 0 & p & . & . & 0 \\ 2 & 0 & q & 0 & p & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ n-1 & 0 & 0 & . & q & 0 & p \\ n & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{array}$$

Случај 2. Крајните состојби 0 и n може да бидат одбивни:

$p_{01}=1$ и $p_{nn-1}=1$

Случај 3. Крајните состојби се делимично одбивни:

$p_{00}=r$ и $p_{nn}=s$

$p_{01}=1-r$ и $p_{nn-1}=1-s$.

Матрицата на премин е

$$\Pi = \begin{array}{c|cccccc|} & 0 & 1 & 2 & . & . & n \\ \hline 0 & r & 1-r & 0 & . & . & 0 \\ 1 & q & 0 & p & . & . & 0 \\ 2 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & 0 & . & q & 0 & p \\ n & 0 & 0 & . & 0 & 1-s & s \end{array}$$

Пример 10.5.5. Еден играч има x денари. Тој добива 1 денар со веројатност p и губи 1 денар со веријатност q по игра. Играта ја прекинува, ако ги изгуби своите пари т.е. во состојба 0 денари, или ако вкупно има n денари т.е. ако добие n-x денари.

Во овој случај $S=\{0,1,\ldots,n\}$. Крајните состојби се апсорпциони: $p_{00}=1$ и $p_{nn}=1$.

Пример 10.5.6. Разгледуваме компонента која може да работи 0 време, 1 единица време, 2, 3,...Нула време значи штом се инсталира и моментално откаже (на пример електрична светилка). Претпоставуваме, дека колку стара и да е компонентата таа може да откаже во следниот временски интервал со веројатност q или ќе продолжи да работи со веројатност $p=1-q$. Тоа значи, дека работењето на компонентата е случајно со експоненцијална распределба. Просторот од состојби $S=\{0,1,2,\ldots\}$. Преминот од нула во нула се случува, ако штом се инсталира компонентата одма откажува.

$$\Pi=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & . & . \\ q & 0 & p & 0 & . & . \\ q & 0 & 0 & p & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

За појаснување, ако компонентата е во состојба 5, на пример, во следниот интервал преминува во состојба 6 со веројатност p ли ќе биде заменета со веројатност q. Следователно множеството S е бесконечно преброиво.

Стохастичка матрица за која апсорпциона состојба, на пример, е состојбата i не може да биде регуларна, зашто при множењето на самата со себе i-от елемет од главната дијагонала е еднаков на $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = a_{ii}\cdot a_{ii} = 1$, но бидејќи производот е, исто така, стохастичка матрица затоа другите елементи во i-от ред на производот мора да се нула, истото важи за

$A^3, \ldots, A^n, \ldots$

10.6. Матрица на премин од повисок ред

Елементите p_{ij} во матрицата на премин П на Марков ланец се веројатности за премин на системот од состојбата i во состојбата j: $i \to j$. Прашање: каква е веројатноста на премин на системот од состојбата i во состојбата j но по извесен број поместувања на системот $i_1 \to i_2 \to \ldots \to j$, на пример нé интересира веројатноста $P(X_{t+3}=j/\ X_t=i)$ по три скока честичката од состојба i да се најде во состојба j. Општо нé интересираат веројатностите

$$P(X_{t+m}=j\,/\,X_t=i)=p_{ij}^{(m)} \qquad (10.6.1)$$

Стохастичката матрица чии што елементи се веројатностите $p_{ij}^{(m)}$ се вика матрица на премин од ред m. Специјално, матрица на премин од ред 1 е самата матрица на премин на Марковиот ланец. Сега ќе ги определиме веројатностите $p_{ij}^{(m)}$, поточно ќе покажеме, дека елементите на матрицата Π^m (m пати помножена матрицата Π сама со себе) се еднакви ссоодветно на $p_{ij}^{(m)}$. Од хомогеноста на Марковите ланци формулите (3) се еквивалентни со

$$P(X_m = j / X_0 = i) \tag{10.6.2}$$

Ги определуваме веројатностите $p_{ij}^{(m)}$ поаѓајќи од дефиницијата

$$p_{ij}^{(m+1)} = P(X_{m+1} = j / X_0 = i).$$

Како настаните: ($X_m=0$), ($X_m=1$),..., ($X_m=n$) се дисјунктни и нивната унија е целиот веројатностен простор затоа

$$P(X_{m+1} = j / X_0 = i) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{m+1} = j \text{ и } X_t = k / X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_{m+1} = j / X_m = k \text{ и } X_0 = i) P(X_m = k / X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_{m+1} = j / X_m = k) P(X_m = k / X_0 = i) = \sum_{k=0}^{n} p_{kj} p_{ik}^{(m)} = \sum_{k=0}^{n} p_{ik}^{(m)} p_{kj}$$

што значи $p_{ik}^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{n} p_{ik}^{(m)} p_{kj}$.

Од тука следи, со едноставна индукција, дека матрицата Π^m е матрица н апремин од ред m. При изведувањето на доказот ја искористивме формулата $P(A \cap B / C) = P(A / B \cap C) P(B / C)$ која се добива од дефиницијата на условната веројатност. Релацијата $\Pi^{m+1} = \Pi^m \Pi$ може да се обопшти:

$\Pi^{m+2} = \Pi^{m+1}\Pi = (\Pi^m\Pi)\Pi = \Pi^m\Pi^2$, или во општ случај ја имаме формулата

$$\Pi^{m+s} = \Pi^m \Pi^s \tag{10.6.3}$$

Нека сега претпоставиме, дека, во некое произволно време, веројатноста, дека системот е во состојба i е p_i $i=1,2,...,n$. Тие веројатности ќе ги обележиме со веројатностниот вектор $p=(p_1, p_2,..., p_n)$ кој се вика вектор на распределба на веројатноста на системот во тоа време. Специјално ќе ставиме

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, ..., p_n^{(0)})$$

кој ја дава почетната распределба на веројатноста на системот, т.е. распределба кога процесот почнува или моментот од кој го разгледуваме процесот. Векторот

$$p^{(m)} = (p_1^{(m)},..., p_n^{(m)})$$

ја дава распределбата на веројатноста на системот по m изминати временски единици.

Ако е даден почетниот вектор $p^{(0)}$ и матрицата на премин од ред m т.е. матрицата Π^m, тогаш векторот $p^{(m)}$ се определува со формулата

$$p^{(m)} = p^{(0)}\Pi^m \tag{10.6.4}$$

За да покажеме, дека (6) е точно, ги определуваме веројатностите

$$p_j^{(m)} = P(X_m = j).$$

Земајќи ги во обзир настаните: $(X_0=1)$, $(X_0=2)$,..., $(X_0=n)$ кои прават потполна фамилија од настани, можеме да напишеме, користејќи ја дефиницијата за условна веројатност

$$P(X_m = j) = P(X_m = j \text{ и } X_0 = 1) + P(X_m = j \text{ и } X_0 = 2) + .. + P(X_m = j \text{ и } X_0 = n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X_m = j \text{ и } X_0 = k) = \sum_{k=1}^{n} P(X_m = j / X_0 = k) P(X_0 = k),$$

Зашто $P(X_m = j \text{ и } X_0 = k) = P(X_m = j / X_0 = k)P(X_0 = k)$
понатаму, бидејќи

$P(X_m = j / X_0 = k) = p_{kj}^{(m)}$ добиваме $P(X_m = j) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}^{(m)} p_k^{(0)}$, т.е.

$p_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} p_k^{(0)} p_{kj}^{(m)}$ со што ја покажавме точноста на формулата (6).

Пример 10.6.1. Го разгледуваме Марковиот ланец за одењето на работа на некој човек со кола или автобус. Матрицата на премин е

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \Pi^4 = \Pi^2\Pi^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

Добиената матрица е матрица на премин од ред 4. Гледаме, дека по четири дена веројатноста, да оди човекот од автобус со кола е $\frac{5}{8}$ или појаснето, ако пред четири дена отишол на работа со автобус веројатноста, дека по 3 дена односно четвриот ден по ред ќе оди со кола е $\frac{5}{8}$. Или веројатноста, дека и во четвртиот ден ќе оди со автобус е $\frac{3}{8}$.

Нека претпоставиме, дека за првиот работен ден човекот тркала хомогена коцка и одлучил, ако падне бројот 6 ќе оди со кола. Со други зборови, веројатноста, дека ќе оди со автобус е $\frac{5}{6}$, а веројатноста дека ќе оди со кола е $\frac{1}{6}$. Што значи почетниот вектор на распределба на веројатноста на системот е $p^{(0)} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Тогаш

$$p^{(4)} = p^{(0)}\Pi^4 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} = \left(\frac{35}{96}, \frac{61}{96}\right)$$

е распределба на веројатностите по 4 дена, тоа значи, дека системот е во состојбата автобус веројатноста е $\frac{35}{96}$, а веројатноста дека системот е во состојба кола е $\frac{61}{96}$.

Пример 10.6.2. Нека го разгледаме примерот за играта со топка на трите деца. Матрицата на премин е

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Нека претпоставиме, дека во почетокот на играта, топката е кај детето C, т.е. почетниот вектор за состојбата на системот е наполно определен: $p^{(0)}=(0, 0, 1)$. Тогаш

$$p^{(1)} = p^{(0)}\Pi = (0,0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

$$p^{(2)} = p^{(0)}\Pi^2 = (p^{(0)}\Pi)\Pi = p^{(1)}\Pi = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$p^{(3)} = p^{(0)}\Pi^3 = (p^{(0)}\Pi^2)\Pi = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$$

Што значи по три додавања на топката, распределбата на веројатноста на системот (играта) е дека топката кај лицето A е со веројатност $\frac{1}{4}$, кај лицето B со $\frac{1}{4}$ и кај лицето C $\frac{1}{2}$.

10.7. Стационарна распределба на регуларни Маркови ланци

Претпоставуваме, дека Марковиот ланец е регуларен, т.е. неговата матрица на премин Π е регуларна. Во тој случај, знаеме, степените Π^m на матрицата на премин или што е исто матриците се приближуваат кон матрицата U чиј што секој ред е еднаков на фиксниот веројатностен вектор $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n)$ се разбира, ако просторот на состојби е $S=\{1,2,\ldots,n\}$ или $\varphi=(\varphi_0, \varphi_1,\ldots, \varphi_n)$, ако $S=\{0,1,2,\ldots,n\}$. Тука ќе земеме $S=\{1,2,\ldots,n\}$, но тоа не е битно. Сега тргнувајќи со почетниот вектор $p^{(0)}$, видовме

$$p^{(m)} = p^{(0)}\Pi^m \to p^{(0)}U = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{(0)}\cdot\varphi_1, \sum_{k=1}^{n} p_k^{(0)}\cdot\varphi_2,\ldots, \sum_{k=1}^{n} p_k^{(0)}\cdot\varphi_n\right) =$$

$=(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$, зашто $\sum_{k=1}^{n} p_k^{(0)} = 1$. Така го добивме следниот, многу важен, резултат : Ако матрицата на премин Π за Марковиот ланец е регуларна, тогаш по долго време системот се стабилизира, т.е.

веројатноста, дека тој се наоѓа во состојбата j е приближна на координатата φ_j од фиксниот веројатностен вектор.

Според тоа, ефектот од почетната состојба на системот или почетната распределба на веројатноста за состојбите на системот како минува времето се неважни, зашто распределбата на веројатноста се стреми кон една стационарна распределба, а тоа е фиксниот веројатностен вектор за матрицата П.

Ние тука даваме уште два, три примери за определување на фиксниот веројатностен вектор, при што уште еднаш потсетуваме, дека дали $S=\{0,1,2,\ldots,n\}$ или $S=\{1,2,\ldots,n\}$ не игра улога.

Пример 10.7.1. Разгледуваме цикличен процес опишан со графот1. Тука имаме $n+1$ состојби $0,1,2,\ldots,n$. Честичката останува во состојбата i со веројатност q_i. Инаку преминува во следната состојба $i+1$ со веројатност $p_i=1-q_i$. Ако $i=n$ тогаш следната состојба $i+1$ е 0. Да се определи фиксниот веројатностен вектор.

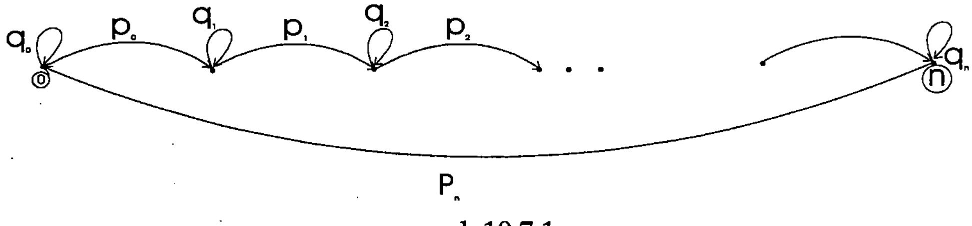
Решение. Матрицата на премин е

$$\Pi=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ . \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & . & . & . & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & q_1 & p_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & p_2 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ p_n & 0 & . & . & . & . & q_n \end{pmatrix}\end{array}$$

Ако $\varphi=(\varphi_0, \varphi_1,\ldots, \varphi_n)$ е фиксен вектор, тогаш

$$\varphi=\varphi\Pi \quad \text{или}$$

$$(\varphi_0, \varphi_1,\ldots, \varphi_n)= (\varphi_0, \varphi_1,\ldots, \varphi_n)\Pi$$



граф 10.7.1.

од каде ги добиваме равенките:

$$\varphi_0=\varphi_0 q_0+\varphi_n p_n \qquad\qquad \varphi_0 p_0=\varphi_n p_n$$

$$\varphi_1=\varphi_0 p_0+\varphi_1 q_1 \quad \text{или} \quad \varphi_1 p_1=\varphi_0 p_0$$

$$\varphi_2=\varphi_1 p_1+\varphi_2 q_2 \qquad \varphi_2 p_2=\varphi_1 p_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_1=\frac{p_0}{p_1}\varphi_0,\quad \varphi_2=\frac{p_1}{p_2}\varphi_1=\frac{p_0}{p_2}\varphi_0,\quad \varphi_3=\frac{p_0}{p_3}\varphi_0,\ldots,\varphi_n=\frac{p_0}{p_n}\varphi_0$$

од условот за нормираност

$$\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_n=1$$

имаме

$$\varphi_0\left(1+\frac{p_0}{p_1}+\frac{p_0}{p_2}+\ldots+\frac{p_0}{p_n}\right)=1$$

или

$$p_0\varphi_0\left(\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right)=1.$$

Нека

$$c=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_n}$$

тогаш од $c\, p_0\varphi_0=1$ го определуваме φ_0. Потоа, имаме

$$\varphi_i=\frac{1}{cp_i},\quad \text{каде } c=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{p_i}.$$

Пример 10.7.2. Нека го разгледаме случајното лутање низ целите броеви $S=\{0,1,2,\ldots\}$ во кои е можен премин само во десно, како што е покажано на графот 2.

Овдека $n=\infty$. Матрицата на премин е:

$$\Pi=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & q & p & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & q & p & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$\varphi=\varphi\Pi$, $\varphi=(\varphi_0, \varphi_1,\ldots)$ повлекува

$$q\varphi_0=\varphi_0$$

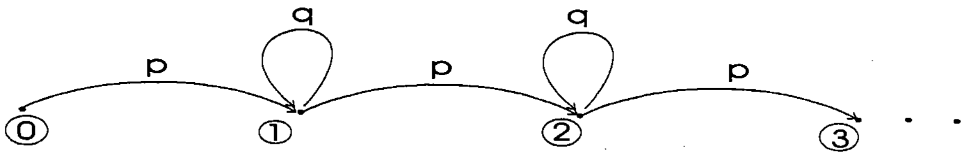
$$p\varphi_0+q\varphi_0=\varphi_1$$

$$p\varphi_1+q\varphi_2=\varphi_2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Бидејќи $0<p,\ q<1$, од првата па потоа од втората равенка и т.н. имаме

$$\varphi_0=0,\ \varphi_0=0,\ \varphi_2=0,\dots$$



граф 10.7.2.

Следователно, не постои фиксен вектор (вектор на стабилност). Од природата на процесот е логично да нема вектор на стабилност, зашто стално имаме поместување само во десно.

Пример 10.7.3. Матрицата

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

нема фиксен вектор, затоа што, ако честичката стартува во состојбата 0, таа мора да премине во $\{1,2\}$, зашто $p_{00}=0$. Потоа од $\{1,2\}$ мора да прејде во 0 и т.н. Во парни времиња таа е во состојбата 0, а во непарни времиња е во 1 или 2. Тука постои проблемот на периодичност. Инаку, сигурно е, дека матрицата Π не е регуларна.

10.7.1. Процеси на раѓање и умирање во дискретно време: случајни лутања

Ако просторот на состојбите е $S=\{0,1,2,\dots n\}$, тогаш векторската равенка $\varphi=\varphi\Pi$, каде $\varphi=(\varphi_0, \varphi_1,\dots \varphi_n)$ и Π е матрицата на премин, се состои од $n+1$ обични равенки по непознатите $\varphi_0, \varphi_1,\dots \varphi_n$. За n поголемо решавањето на равенките технички е тешко, треба време. За среќа во специјални случаи кои се од голема важност релативно брзо се определуваат координатите на векторот φ.

Една таква класа се процесите на раѓање и умирање во дискретно време. Тоа се Маркови процеси со следната особина: од состојба $i \in S$ четичката може да премине со едно скокање во i-1 или $i+1$, но не во друга состојба од S. Просторот на состојби S може да биде конечен или преброиво бесконечен.

За поедноставно пишување нека ставиме

$$b_i = p_{ii+1}, \quad r_i = p_{ii} \quad , \; d_i = p_{ii-1} .$$

За секое i

$$b_i + r_i + d_i = 1$$

Матрицата на премин е

$$\Pi = \begin{pmatrix} r_0 & b_0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ d_1 & r_1 & b_1 & 0 & . & . & . & . \\ 0 & d_2 & r_2 & b_2 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & d_n & r_n \end{pmatrix}$$

$d_0=0$ зашто нема состојба на лево од 0, и исто така $b_n=0$ зашто нема состојба на десно од n.

Нека претпоставиме дека има голем број N на честички, при што, секоја скока според веројатностите на процесот. Претпоставувајќи, дека целиот систем од N е во стабилна состојба, во тој случај треба $N\varphi_i$ четица да бидат во состојбата i во секој момент од времето. Бројот на оние честички кои во следното скокање ќе прејдат во состојбата $i+1$ ќе биде $(N\varphi_i)b_i$. Но заради стабилната состојба мора толкав број на честици да прејде во состојбата i од состојбата $i+1$. Тој број е $(N\varphi_{i+1})d_{i+1}$ зашто другите можности на компензација ќе предизвикаат натрупување на честици на лево или надесно од i, во текот на времето. Следователно,

$$N\varphi_i \cdot b_i = N\varphi_{i+1} \cdot d_{i+1}$$

или

$$\varphi_{i+1} \cdot d_{i+1} = \varphi_i \cdot b_i$$

од каде

$$\varphi_{i+1} = \frac{b_i}{d_{i+1}} \varphi_i \quad , \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Условот на нормираност

$$\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_n=1$$

ни овозможува определување на φ_0, φ_1,… φ_n.

Пример 10.7.4. Нека матрицата на премин е

$$\Pi=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1=\frac{b_0}{d_1}\varphi_0=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\varphi_0=\frac{3}{2}\varphi_0$$

$$\varphi_2=\frac{b_1}{d_2}\varphi_1=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{10}}\varphi_1=\frac{4}{3}\varphi_1=\frac{4}{3}\frac{3}{2}\varphi_0=2\varphi_0$$

$$\varphi_3=\frac{b_2}{d_3}\varphi_2=\frac{\frac{4}{10}}{\frac{1}{4}}\varphi_2=\frac{8}{5}\varphi_2=\frac{8}{5}2\varphi_0=\frac{16}{5}\varphi_0.$$

Од условот за нормираност $\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=1$ добиваме $\varphi\left(1+\frac{3}{2}+2+\frac{16}{5}\right)=1$ од тука $\varphi_0=\frac{10}{77}$, $\varphi_1=\frac{15}{77}$, $\varphi_2=\frac{20}{77}$, $\varphi_3=\frac{32}{77}$.

Пример 10.7.5. Случајно лутање во $\{0,1,\ldots,n\}$ со делимично одбивни граници. За $i=1,\ldots,n-1$, $b_i=b$, $r_i=r$ и $d_n=d$ се константи. $b_0=b$ и $d_n=d$.

Затоа

$$\varphi_{i+1}=\frac{b_i}{d_{i+1}}\varphi_i=\frac{b}{d}\varphi_i$$

Со продолжување на рекурзивната постапка

$$\varphi_{i+1}=\frac{b}{d}\varphi_i=\frac{b}{d}\frac{b}{d}\varphi_{i-1}=\ldots=\left(\frac{b}{d}\right)^{i+1}\varphi_0$$

Користејќи ја нормализацијата

$$\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_n=1$$

$$\varphi_0\left[1+\frac{b}{d}+\left(\frac{b}{d}\right)+\left(\frac{b}{d}\right)^2+\ldots+\left(\frac{b}{d}\right)^n\right]=1$$

Разгледуваме два случаи

Случај 1: Несиметрично случајно лутање, $b \neq d$

$$\varphi_0 = \frac{1-\dfrac{b}{d}}{1-\left(\dfrac{b}{d}\right)^{n+1}} = c \ , \quad \varphi_1 = \left(\frac{b}{d}\right)^i c \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Случај 2: Симетрично случајно лутање, $b=d$. Тогаш од условот за нормираност имаме

$$1 = (1+1+1^2+\ldots+1^n)\varphi_0 = (n+1)\varphi_0$$

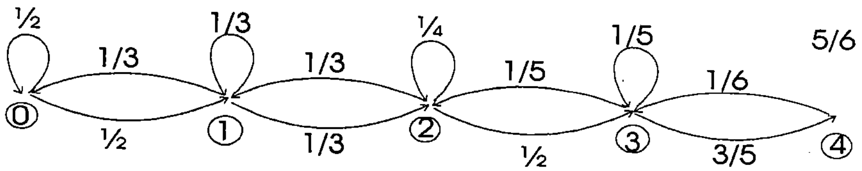
$$\varphi_0 = \frac{1}{n+1} \ , \quad \varphi_i = \left(\frac{b}{d}\right)^i \varphi_0 = 1^i \varphi_0 = \frac{1}{n+1} \qquad \text{за секое } i$$

Кај симетричното случајно лутање веројатноста да се најде честицата во било која состојба i е иста и е еднаква на $\dfrac{1}{n+1}$. Во несиметричниот случај веројатностите на стабилната состојба φ_i изгледаат доста комплицирани. Меѓутоа некаква квалитативна претстава можеме да имаме, зашто, на пример, ако $b>d$ тогаш $\dfrac{b}{d}>1$ и затоа $\varphi_i = \left(\dfrac{b}{d}\right)^i c$ растат како расте i. Тоа значи, дека честицата со се поголема веројатност ќе биде поблиску кон десната граница отколку кон левата.

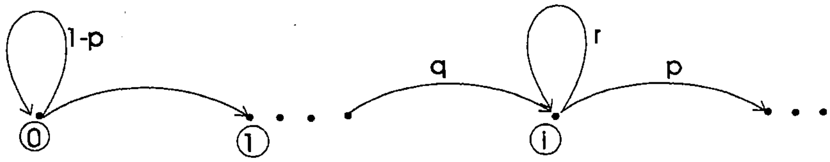
Задачи:

1. Да се определи векторот на стабилност на веројатностите за Марковиот ланец определен со графот1.
2. Да се разгледа случајното лутање низ $\{0,1,2,\ldots\}$ од графот:

$$\varphi_i = \left(\frac{b}{d}\right)^i \varphi_0 \qquad i=1,2,\ldots$$



граф 10.7.4.



Користејќи го условот за нормираност треба

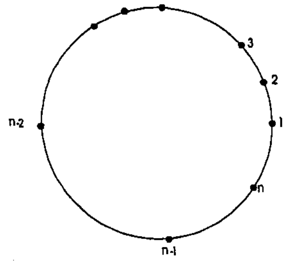
$$\varphi_0+\frac{b}{d}\varphi_0+\ldots+\left(\frac{b}{d}\right)^i\varphi_0+\ldots=1$$

$$\varphi_0\left(1+\frac{b}{d}+\ldots+\left(\frac{b}{d}\right)^i+\ldots\right)=1$$

За $\frac{b}{d}<1$ редот во заградата дивергира и следователно немаме решение; за $\frac{b}{d}<1$, во заградата е геометриска ред кој конвергира и во тој случај ќе биде

$$\varphi_0\cdot\frac{1}{1-\frac{b}{d}}=1 \text{ од каде } \varphi_0=\frac{d}{d-b}\ ,\ \varphi_i=\left(\frac{b}{d}\right)^i\frac{d}{d-b}\qquad i=1,2,\ldots$$

3. Нека на кружницата се дадени n точки обележени со 1,2,…,n во спротивна насока од стрелките на саатот. Една честица скока во точките спротивно од стрелките на саатот со веројатност p или во насока на саатот со веројатност $q=1-p$. Да се определи матрицата на премин. Просторот на состојби е $S=\{1,2,\ldots n\}$



$$\Pi = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ . \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & . & . & . & . & q \\ q & 0 & p & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & q & 0 & p \\ p & 0 & . & . & . & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

4. Во кутијата А има две бели топчиња и во кутијата В има четири црвени топчиња. При секоја постапка земаме случајно по едно топче од двете кутии и ги разменуваме во кутиите. Нека случајната променлива X_n е еднаква на бројот на црвените топчиња во А при n-та постапка. а) Да се определи матрицата на премини б) Да се определи веројатноста, дека по третата постапка во А ќе има две црвени топчиња. в) При долго повторување на постапката, која е веројатноста да има две црвени топчиња во А?

а) Во секој момент од времето при секоја постапка, во кутијата А има 0 црвени, 1 црвено или 2 црвени топчиња, тоа значи просторот $S=\{0, 1, 2\}$. Матрицата е

$$\Pi = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Упатство: Ако системот е во состојба 0 тоа значи во А нема црвено топче, туку двете се бели и со следната постапка земање на по едно топче јасно од А е бело, од В е црвено, па со размената во А ќе има едно црвено едно бело, а во В едно бело и три црвени, затоа $p_{00}=0$, $p_{01}=1$, $p_{02}=0$. Ако системот е во состојба 1, тоа значи во А има едно бело и едно црвено, а во В едно бело и три црвени. Со следната постапка од состојба 1 во состојба 0 се преоѓа, ако од А го земеме црвеното топче-веројатноста за тоа е $\frac{1}{2}$, а од В го земеме белото топче веројатноста за тоа е $\frac{1}{4}$ следователно за да се реализира и едниот избор и другиот

веројатноста е $\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ т.е. $p_{01}=\frac{1}{8}$, аналогно $p_{11}=\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}=\frac{4}{8}$ и т.н.

б) Почетниот веројатностен вектор на состојбите е: $p^{(0)}=(1,\ 0,\ 0)$, зошто системот е во состојба 0 (во А нема црвено топче). Треба да се определи производот $p^{(0)}\Pi^3$ па третата координата на производот е $\frac{3}{8}$.

в) Го определуваме фиксниот веројатностен вектор за П,

$t=(t_1,t_2,t_3) \qquad t_1+t_2+t_3=1 \qquad (t_1,t_2,t_3)=(t_1,t_2,t_3)\Pi$

$$(t_1,t_2,t_3)=\left(\frac{t_2}{8},\ t_1+\frac{4}{8}t_2+\frac{1}{2}t_3,\ \frac{3}{8}t_2+\frac{1}{2}t_3\right)$$

од тука $t_1=\frac{t_2}{8}$, $\quad t_2=t_1+\frac{4}{8}t_2+\frac{1}{2}t_3$, $\quad t_3=\frac{3}{8}t_2+\frac{1}{2}t_3$ или

$t_1=\frac{t_2}{8}$, $t_3=\frac{3}{4}t_2$, со замена во условот за нормираност

$\frac{t_2}{8}+t_2+\frac{3}{4}t_2=1$, $\quad 15t_2=8$, $t_2=\frac{15}{8}$, $t_1=\frac{1}{15}$, $t_3=\frac{3}{4}\frac{8}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

Векторот на веројатноста на стабилната состојба е $t=\left(\frac{1}{15},\frac{8}{15},\frac{2}{5}\right)$.

Одг е t_3=2/5.

5. Во задачата 4. да се земе случај кога во А има 3 бели топчиња и во В 3 црвени топчиња. Просторот $S=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, а матрицата на премин

$$\Pi=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

почетен вектор е $p^{(0)}=(1, 0, 0, 0)$.

6. Метална пара се фрла додека не се добијат три глави едно подруго. Нека X_n е должината на низата од глави при n-то фрлање. Да се определи веројатноста дека ќе бидат потребни најмалку 8 фрлања.

Одг. 81/128

7. Играч има 3 денари. Во секоја игра губи 1 денар со веројатност $\frac{3}{4}$ но добива 2 денари со веројатност $\frac{1}{4}$. Играта ја прекинува, ако нема пари или ако добие најмалку 3 денари.

а) Да се определи матрицата на премин.

б) Да се определи веројатноста дека ќе треба најмалку 4 пати да ја повторува играта.

а) Просторот на состојби е да има 0 денари, 1, 2, 3, 4, 5, и да има 6 или повеќе, но тоа е состојба 6, т.е. $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Матрицата

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) почетен веројатностен вектор на состојбите е потполно определен и е $p^{(0)}=(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Треба да се определи $p^{(0)}\Pi^4$, одг. 27/64.

8. Нека матрица на премин во Марковиот ланец е

$$\Pi = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Дали Марковиот ланец е регуларен? Гледаме дека, штом системот влезе во состојба 1 или состојба 2 тој тука и останува тоа значи веројатностите од било кој ред m: $p_{13}^{(m)}, p_{14}^{(m)}$ или $p_{23}^{(m)}, p_{24}^{(m)}$ се секогаш еднакви на 0, следователно матрицата П не може да биде регуларна, зашто $p_{13}^{(m)}, p_{14}^{(m)}$, $p_{23}^{(m)}, p_{24}^{(m)}$ се соодветни елементи од матрицата Π^m

9. Нека $\Pi=(p_{ij})$ е матрицата на премин на Марков ланец. Ако $p=(p_1, p_2,\ldots, p_n)$ е распределба на веројатноста на состојбите на системот во некое произволно време k, тогаш $p\Pi$ ја дава распределбата на веројатноста на системот за еден степен покасно, т.е. во времето $k+1$; тогаш $(p\Pi)\Pi$ е распределба на веројатноста на системот во $k+2$ и така $p\Pi^n$ ќе биде распределба на веројатноста на системот во времето $k+n$. Специјално $p^{(1)}= p^{(0)}\Pi$, $p^{(2)}= p^{(0)}\Pi^2,\ldots, p^{(n)}= p^{(0)}\Pi^n$, каде $p^{(0)}=(p_1^{(0)}, p_2^{(0)},\ldots, p_n^{(0)})$ е распределба на веројатноста во почетокот на процесот. Во текстот е даден доказ на овој резултат, но тука нудиме друг.

Доказ. Нека просторот од состојби е $S=\{1, 2, \ldots,n\}$. Веројатноста, дека елементот е во состојба a_j во времето k и дека ќе биде во состојба i по единица време т.е. во $k+1$, заради независноста на настаните е еднаква на p_jp_{ji}. Затоа веројатноста, дека системот ќе биде во состојбата i е

$$p_1p_{1i} + p_2p_{2i} + \ldots + p_np_{ni} = \sum_{j=1}^{n} p_jp_{ji}$$

Следователно распределбата на веројатноста на времето $k+1$ е $p\Pi$.

10. Нека П е матрицата на премин во Марковиот ланец. Тогаш матрицата на премин од степен m $\Pi^{(m)}=\Pi^m$.

Доказ. За овој добиен резултат во текстот тука даваме поинаков доказ: Нека системот е во состојбата i, да речеме во времето k. Ни треба веројатноста $p_{ij}^{(m)}$, дека системот ќе биде во состојбата j во времето $k+m$. Сега распределбата на веројатноста во времето k е $(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)=e_i$, единицата е на i-тото место, зашто потполно се знае положбата на системот. Од резултатот во задача 9. распределбата на веројатноста на системот во времето $k+m$ е $e_i\Pi^m$. Но $e_i\Pi^m$ е i-от ред од матрицата Π^m, следователно j-тата координата ќе биде веројатноста $p_{ij}^{(m)}$, со тоа докажавме дека $\Pi^{(m)}=\Pi^m$.

11. Нека ја тркаламе коцката. X_n нека е еднаква на максимумот кои се појавиле во првите n тркалања.

а) Да се определи матрицата на премин.

б) Да се најде $p^{(1)}$, распределбата на веројатноста по првото тркалање.

в) Да се определат $p^{(2)}$ и $p^{(3)}$.

а) Системот се состои од коцката и состојбите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 т.е. $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Матрицата на премин е

$$\Pi = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицата не е регуларна, зашто состојбата 6 е апсорбирачка.

б) По првото тркалање распределбата на веројатноста е

$$p^{(1)} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

в) $p^{(2)} = p^{(1)}\Pi = \left(\frac{1}{36}, \frac{3}{36}, \frac{5}{36}, \frac{7}{36}, \frac{9}{36}, \frac{11}{36}\right)$, $p^{(3)} = p^{(2)}\Pi$.

12. Нека матрицата на премин Π е таква што збирот на броевите и по колоните е 1. Таков Марков ланец се вика двојно стохастички. Нека $p^{(0)} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$(системот има n состојби). Да се докаже, дека распределбата $p^{(m)}$ на веројатноста на системот во било кое време m е $p^{(0)}$, т.е. $p^{(m)}$=

$$p^{(1)} = p^{(0)}\Pi = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{(0)} p_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^{n} p_k^{(0)} p_{kn}\right),\ \text{но}\ \sum_{k=1}^{n} p_k^{(0)} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot p_{kj} =$$

$$p^{(0)}. = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{kj} = \frac{1}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n} \quad \text{што значи} \quad p^{(1)} = p^{(0)},$$

понатаму $p^{(2)} = p^{(1)}\Pi = p^{(0)}\Pi = p^{(0)}, \dots, \ p^{(m)} = p^{(0)}\Pi = p^{(0)}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

СОДРЖИНА