Истина као што су два и два четири

***др Миодраг Рашковић*, Београд**

Врло често се може чути фраза: „то је тачно, као што су два и два четири“ или „то је истина као што је један плус један једнако два“ или „то је *математички тачно*“ и слично. За обичног човека (тј. нематематичара), као и за већину математичара (неоптерећених филозофским питањима) математика је узор науке која барата са „вечним“ и „непролазним“ истинама. А у ствари веома је спорно и сложено питање колико се у математици уопште бавимо питањима као што су *истинито* и *тачно*? (Ти појмови су у доброј мери данас замењени појмом *доказивости*.)

Наравно, то да је „$1 + 1 = 2$“ или „$2 + 2 = 4$“ (а зачудо не и да је „$2 + 1 = 3$“) највише користе они који треба да убеде неког у исправност својих (најчешће неубедљивих) ставова а то су у првом реду политичари. Али ту се манипулише и са једном много дубљом људском потребом, а то је потреба за **поузданом истином**, **извесношћу** и **сигурним знањем**. (Ту спада и оно познато Декартово: „Мислим, дакле постојим.“.) Тражи се такозвана „тачка ослонца“, нешто поуздано од чега може да се крене. По многима је то математика, која даје извесност нашег знања, пре свега, у односима између узрока и последица.

Ми желимо да полемишемо о овој „неприкосновености математичких истина“ и укажемо на то да ни у математици није све баш „тачно као што је $2 + 2 = 4$“.

Наравно, у математици чак не мора бити ни $2 + 2 = 4$, већ на пример: $2 + 2 = 0$. Али то је из тривијалног разлога, јер је у питању једно друго сабирање (по модулу 4, често означено са $+_4$). [Бројеви m и n се сабирају тако што се прво обично саберу, па се затим збир $m + n$ подели са 4 и за резултат новог сабирања (по модулу 4) узме остатак при том дељењу.] Али ако се изузме то ново сабирање по модулу неког броја (на пример 4) које само донекле има везе са обичним сабирањем, а које је узгред буди речено и само примењено у пракси (рецимо сати се сабирају по модулу 12 или 24) остаје као ч и њ е н и ц а да је $2 + 2 = 4$.

Међутим, велики Лајбниц је ипак имао потребу да то докаже!!!

Нема никакве сумње да је прва математичка операција било бројање; да је сабирање проистекло из бројања, па самим тим и $2 + 2 = 4$. Шта је па то Лајбниц уопште урадио? Па управо је формализовао тај поступак и истинитост трансформисао у доказивост!?!

Он је пошао од бројања (и његовог одговарајућег записивања) и утврдио (у облику аксиома) да је $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, \ldots$. Тада је из особина једнакости (схваћене као конгруенције) и додатне аксиоме (о сабирању из бројања) $x + (y + 1) = (x + y) + 1$ доказ извео на следећи начин:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

И читалац може на сличан начин, додуше преко мало компликованијег низа, доказати и да је $5 + 7 = 12$. Али, одакле нама знање да је $2 + 2 = 4$ предмет је расправе (најкасније) од Канта па до данас и у ту расправу нећемо се превише упуштати.

Навешћемо само, примера ради, два супротстављена мишљења. Прво је логичара-индуктивисте (у основи емпиричара) Џона Стјуарта Мила* који каже да ни аритметичке истине „не могу, нити смеју, по својим начелима, бити другачије од општих ставова искуства. Настале су из емпиријске генерализације, па морају стално бити сводљиве на одређена физичка чињеничка стања. Сви аритметички искази су искази о односима материјалног света који нас окружује, па су, према томе, у истом смислу случајни и променљиви као и ти односи. Неко друго окружење, у којем би човек растао, не би му донело само неку другу физику или геометрију него и неку другу аритметику. Стога, не само да није немогуће него је и вероватно да би на неком другом небеском телу, рецимо на Сиријусу, важили другачији закони бројева него на нашој Земљи - да ту 2×2 не би било једнако четири, него би било једнако пет."

На овакво мишљење „окомио се" велики немачки филозоф (и један од оснивача математичке логике) Фреге. По њему, схватања какво је Милово, које у броју не види строг **појам** него само „представу" људског духа, и који га, стога, срозава у круг пуког субјективнога, никада не може да доведе до истинског изграђивања учења о бројевима: такво схватање мора да остане при „аритметици медењака и облутака"....

„Искази о броју и искази о ствари су, по свом смислу, међусобно раздвојени; онај ко мишљење једних помеша са мишљењем других није образложио аритметику, него њено постојање није спознао, и кривотворио га је."

По нашем мишљењу (а оно је доста распрострањено) знање (па и аритметичко) потиче из искуства. Али када се појмови, преко судова, једном дају они дефинишу и постају a priori. То се најбоље види на примеру $2 + 2 = 4$. Поуздано је да смо до ове чињенице дошли бројањем и сабирањем (у смислу скупљања) неких једнородних предмета, на пример штапића. Међутим, ми затим можемо да изградимо „формалну" аритметику (што је, као што смо видели, први учинио Лајбниц) где у односу неких унапред, a priori задатих правила доказујемо да је $2 + 2 = 4$. Даље развијање формалне аритметике доводи нас до такозваних нестандардних модела и богаћења нашег знања о могућим облицима бесконачности, што надилази наша непосредно могућа искуства. Ипак, значајно је и одлучујуће овде истаћи да је могућа непротивречна „аритметика" у којој би важило да је $2 + 2 = 5$, али она није од интереса зато што нема „модел" који колико-толико има везе са неким нашим нетривијалним искуством. Наравно, у модерној фази развоја математичких теорија инспирација за увођење нових дефиниција и аксиома често се црпе из првобитних, мање апстрактних, математичких теорија, а не из непосредне и нематематичке праксе, што је често у стању да завара и неке савремене филозофе да забораве на емпиријско порекло математике.

Занимљиво је још навести Раселово мишељење да је наше знање о $2 + 2 = 4$ **вербално**. Другим речима „два и два су четири" научили смо као песмицу, још давно код учитељице. Слично је и са оним фразама типа: „испред заграде минус у загради настаје мењање". Вербално знање, постаје шаблонско и онда из неког (вероватно психлошког) разлога *делује* као аполутно и непроменљиво.

Математичари су, развијајући своју науку, пошто су, на овај или онај начин, утврдили да је $2 + 2 = 4$ и $3 \cdot 3 = 9$, отишли корак напред и утврдили понешто о **свим** (шта год то значило) природним бројевима!

---

* Преводио га је, између осталих, и Петар I Карађорђевић.

Једно од првих тврђења је било да је $a + b = b + a$, где су a и b природни бројеви. Поставља се питање, одакле нама то знање и како да убедимо себе и друге да нисмо можда погрешили? Наравно, када су у питању мали бројеви (као што су на пример $1, 5, 7, 12, 17$ и сл.) онда се срачунавањем збирова, са леве и десне стране једнакости, лако утврђује идентитет. Применом рачунара, у даље важење тврђења се још више убеђујемо. Али ми врло добро знамо да постоје „супер велики бројеви" чије збирове никако (и никада?) не можемо да нађемо.

Даљи развој аритметике, а у циљу потврђивања важења (између осталих и) закона комутативности довео нас је до принципа (а касније и аксиоме) индукције. Али важење индукције, као што смо видели, није ништа мање проблематично и претпоставља бар на почетку могућност достиживости (израчунљивости) сваког природног броја.

Међутим, методичари, у жељи да нас убеде да је стварно $a + b = b + a$, користе један „оглед" који желимо да доведемо у питање. Наиме, по њима, ако станемо између две кутије тако да у левој буде m а у десној n куглица њихов укупан збир биће $m + n$. Ако се пак окренемо за $180°$ онда ће кутије да измене места, лева ће постати десна и обратно, те ће укупан збир бити $n + m$. Како се са кутијама (и куглицама у њима) ништа посебно није десило, то закључујемо да је $m + n = n + m$. Шта овде не ваља?

Па показаћемо да постоји једна врста бројева за коју ова прича не важи. То су такозвани ординални бројеви. Они, поред кардиналних бројева (који се узгред буди речено у савременој теорији скупова сматрају (и посматрају) као посебан случај ординалних), представљају „природно проширење" природних бројева на бесконачност. Тако иза $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$, дође $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; први бесконачан ординал. Величина ординалних бројева одређена је поред „скупа носача" и релацијом поретка на њему која, мора бити добро уређење (тј. да сваки непразан подскуп носача има најмањи елемент).

Два ординала $(\alpha, \leqslant)$ и $(\beta, \preccurlyeq)$ су једнака, ако постоји $f : \alpha \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} \beta$, тако да је $(\forall x, y \in \alpha)(x < y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y))$. Приметимо да нам оваква дефиниција једнакости ординала омогућава да неки ординал посматрамо над различитим скуповима носачима. Тако, на пример, ординал $(\alpha, \leqslant)$ је једнак ординалу $(\alpha \times \{\star\} \lesssim)$, при чему је уређење $\lesssim$ дато са

$$(a, \star) \lesssim (b, \star) \text{ акко } a \leqslant b \, (a \in \alpha, b \in \beta).$$

Збир два ординала $(\gamma, \leqslant)$ и $(\delta, \preccurlyeq)$ једнак је ординалу $(\gamma \times \{0\} \cup \delta \times \{1\}, \lhd)$, при чему се поредак $\lhd$ покалапа са $\lesssim$ на $\gamma \times \{0\}$, поклапа са $\precsim$ на $\delta \times \{1\}$ и сваки елемент из $\gamma \times \{0\}$ је $\lhd$-мањи од сваког елемента из $\delta \times \{1\}$.

Када је јасно о ком поретку је реч, онда уместо $(\alpha, \leqslant)$ пишемо само α. Тако, под ординалом ω подразумевамо да је на њему „природан" поредак $0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$ Такође, $\omega + 1$ означава ординал, за који је $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{*\}$ и $0 < 1 < 2 < \cdots < *$. Јасно је да је $1 + \omega = \omega$ (довољно је пресликати $* \mapsto 0, 0 \mapsto 1, \ldots, n \mapsto n + 1$), а **није** $\omega + 1 = \omega$ (зато што $\omega + 1$ има највећи елемент, а ω га нема). [Тачније, али то за нас није битно, $\omega \lneq \omega + 1$.]

Наравно, неко може ставити примедбу на ово наше разматрање и рећи да у кутији не може бити бесконачно куглица. Други, нешто озбиљнији, рећи ће да пошто је у питању и поредак, променом нашег положаја мењамо и њега, те се не може очекивати исти резултат.

Међутим, иако су ове примедбе врло озбиљне оне иду, генерално, само нама у прилог пошто ми и хоћемо да доведемо у питање наше математичке генерализације као што су на пример ординални и кардинални бројеви! (У смислу да су истините као што је „2+2=4“.) Са друге стране, овај методички оглед, ипак би требало да буде довољно општи и да нас a priori (или нужно) доведе до оног што му је намера, тј. комутативности, а што он („на жалост“ оних који га пропагирају) не постиже.

Значи ли то да ми сумњамо да је $a + b = b + a$? Наравно **не**. Ми само желимо да кажемо да то није „истина као што су два и два четири“.

Али наше удаљавање од истине тек почиње! Видели смо да један пут од природних бројева води до ординалних и кардиналних бројева. Други, пак, води преко целих и рационалних бројева до реалних бројева.

Као што је познато целе бројеве $((\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1))$ уводимо да бисмо решили једначину $x + 3 = 2$, а рационалне $((\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1))$ да бисмо решили једначину $3 \cdot x = 2$ (која је у вези са поделом јабуке на три детета). Ипак, у односу на аритметику (природних бројева) са $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ не долази до нових, сазнајних проблема. Међутим, ствар се радикално мења са појавом скупа реалних бројева $\mathbb{R}$. Видели смо, како је већ појава $\sqrt{2}$ (тј. решења „сасвим природне“ једначине $x^2 = 2 = 1^2 + 1^2$ везане, преко Пигарине теореме, за једнакокрако правоугли троугао) изазвала буру у грчкој математици. Али то и није чудно, ако се зна да је у њему (тј. $\sqrt{2}$) као појединачном броју (а не као до сада везано за скуп $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$) већ садржана (пребројива) бесконачност!?! Наиме у децималном развоју броја $\sqrt{2} = 1,41\ldots$ хаотично (тј. не периодично) се појављује пребројив низ цифара. Геометријски речено он се никако не може самерити (без остатка) са јединицом или неким њеним (n-тим) делом.

Ипак, главни проблем настаје увођењем свих реалних бројева. Његова сврха би била да се на елегантан и што мање компликован начин реше многи проблеми од Зенонових парадокса до проблема везаних са летом у космос. [Други пут води преко инфинитезимала, о чему смо писали.] Они су постали прави рај за људе који се баве математичком анализом. Многи су посебно поносни на јединственост, до на изоморфизам, реалних бројева. [О томе да су реални бројеви јединствени до на јединственост природних, а да се јединственост ових последњих може довести у питање, већ смо писали.] То повећава веру у њихову „реалност“, иако су препуни безличних и беспредметних (тј. који не говоре ни о чему) „трансцендентних“ бројева.

Крај XIX века био је веома интензиван и пун контраверзи у развоју математике и посебно у односу на питања везана за основе математике. Појава величанствене Канторове теорије скупова, у том периоду, по доста раширеном мишљењу међу математичарима, представља најзначајнији допринос у том периоду. Кантор је успео да створи један „нови свет“, свет коначних и бесконачних скупова, оквир (додуше прилично преширок) за изградњу скоро читаве математике. Најинтересантнија новина, у односу на сву дотадашњу математику, представља његово „откриће“ да постоје „веће“ и „мање“ бесконачности!!? То се већ појављује у односу „пребројиве бесконачности“ скупа природних бројева $\mathbb{N}$ и континуума реалних бројева $\mathbb{R}$.

Кантор показује, својом чувеном, методом дијагонализације да се скуп реалних бројева не може поређати у низ (тј. не може пребројати; односно обострано једнозначно пресликати на $\mathbb{N}$).

Покушаћемо сада да размотримо шта Кантор претпоставља, како доказује и шта је то што закључује. Наравно, нас овде занима смисао свега тога. Једна од општих *метаматематичких* (и метафизичких) Канторових претпоставки је да се природни бројеви могу поређати у низ. Наравно, ни Кантору нити иком другом није пало на памет да то проба. Свакоме је јасно да процес ређања бројева не можемо неограничено убрзавати, а такође нисмо ни бесмртни. Зато је у питању, само једна од *мисаоних идеалоизација*, те ту „Канторову претпоставку не можемо сматрати истинитом као што су два и два једнако четири". Зато Канторово тврђење: *Реални бројеви се не могу поређати у низ*, неком може изгледати тривијално тачно, јер ионако мањи скуп природних бројева не можемо исписати.

Размотримо сада Канторов доказ који је изузетно једноставан (а генијалан) и леп.

Довољно је посматрати реалне бројеве из интервала $[0, 1]$ дате у децималном развоју, при чему искључујемо могућност да се у децималном развоју броја почев од неког места појављују само деветке.

Претпоставимо да их можемо поређати у низ:

$$\begin{array}{ll} 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 \ldots & a^1 \\ 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \ldots & a^2 \\ 0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \ldots & a^3 \\ \vdots & \end{array}$$

[У питању је бесконачна „матрица" код које је једино горњи леви угао коначан. Врсте представљају бесконачне децималне развоје реалних бројева из $[0, 1]$.]

Конструишимо сада нови број $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ из $[0, 1]$ који не припада овом низу. Бирамо b_1 тако да се разликује од a_1^1, b_2 тако да се разликује од a_2^2 итд. У питању је, данас већ чувени, процес дијагонализације, где се различитост постиже на елементима дијагонале $a_1^1, a_2^2, a_3^3, \ldots, a_n^n, \ldots$.

Како смо добили број који није у низу, претпоставка да реалне бројеве можемо поређати у низ пропада, те их не можемо поређати у низ. Отуда је закључак да је бесконачност реалних бројева већа од бесконачности природних бројева.

Овај кратак и елегантан Канторов доказ најјаче је место у тријади: претпоставка, доказ, последица (тврђење). Он није директан, у питању је свођење на противречност, али има „конструктиван део" који се састоји у „дијагоналном поступку" бирања новог елемента. Овај поступак у ствари представља нову методу која је нашла значајну примену и у другим деловима математике.

Закључак до кога долази Кантор је био шокантан за ондашњи математички свет! Вековима су највећи светски умови расправљали да ли постоји било каква бесконачност (о чему смо већ по нешто и ми писали раније). Наравно да и онима који су признавали бесконачност није падало на памет да их има различитих (а упоредивих). [Овде се наравно не мисли на бесконачности различитог типа као што су: Бог, Свемир и $\mathbb{N}$.]

Сама „Канторова дијагонална метода“ има за последицу два шокантна резултата у теорији скупова. Први је да различитих бесконачности има не само бесконачно, него чак толико много да не могу све заједно да формирају скуп!!! А други је да (ако претпоставимо да не важи континуум хипотеза, тј. да бесконачност од $\mathbb{R}$ није прва већа бесконачност од бесконачности од $\mathbb{N}$) онда бесконачност од $\mathbb{R}$ може да буде „скоро било која“ из горе поменутог „обиља“ бесконачности!!!!! Наравно, све зависи од „могућег света“ у коме се налазимо (тј. одговарајућег математичког модела).

Постоје и други начини (рецимо преко тзв. аксиоме избора; да не помињемо друге мање познате аксиоме) да се убедимо да о нама, наизглед, тако блиским реалним бројевима, знамо тако мало. Или тако много, ако хоћете!?! Неко, разочаран у оно што је управо чуо, би могао да ускликне (речима Хераклита-мрачног): „Знање многих ствари не доприноси истини“. [Узгред, Хераклитова поента је била друга: опањкавање Питагоре.]

Једно је сигурно. Расел је био у праву. Ми све мање истражујемо стварни свет, а све више могуће светове (међу којима, можда, у неком и живимо). Можда је сада читаоцима јасније, што се, вероватно почев од Лајбница, појам истине све више у математици замењује доказивошћу.

Дилеме више нема: Није све у математици „истина као два и два су четири“, осим наравно $2 + 2 = 4$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година