Language: **Macedonian**

Day: **1**

EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Недела, Април 13, 2025

Задача 1. За позитивен цел број N, нека $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ се сите позитивни цели броеви помали од N што се заемно прости со N. Најди ги сите $N \geq 3$ такви што

$$\text{НЗД}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

за сите $1 \leq i \leq m - 1$.

Каде НЗД(a, b) е најголемиот позитивен цел делител и на a и на b. Целите броеви a и b се заемно прости ако НЗД$(a, b) = 1$.

Задача 2. Бесконечна растечка низа $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ од позитивни цели броеви се нарекува централна ако за секој позитивен цел број n, аритметичката средина на првите a_n членови на низата е еднаква на a_n.

Докажи дека постои бесконечна низа b_1, b_2, b_3, $\ldots$ од позитивни цели броеви таква што за секоја централна низа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, постојат бесконечно многу позитивни цели броеви n за кои важи $a_n = b_n$.

Задача 3. Нека ABC е остроаголен триаголник. Точките B, D, E и C лежат на иста права во тој редослед и важи $BD = DE = EC$. Нека M и N се средишни точки на AD и AE, соодветно. Нека H е ортоцентар за остроаголниот триаглник ADE. Нека P и Q се точки од правите BM и CN, соодветно, такви што D, H, M и P лежат на иста кружница и по парови се различни, и E, H, N и Q лежат на иста кружница и по парови се различни. Докажи дека P, Q, N и M лежат на иста кружница.

Точката во која се сечат висините на триаголникот се нарекува ортоцентар.

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача се вреднува со 7 поени

EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Macedonian**

Day: **2**

Понеделник, Април 14, 2025

Задача 4. Нека ABC е остроаголен триаголник со центар на впишана кружница I и $AB \neq AC$. Нека правите BI и CI ја сечат опишаната кружница околу триаголникот ABC во $P \neq B$ и $Q \neq C$, соодветно. Точките R и S се такви што $AQRB$ и $ACSP$ се паралелограми (со $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, и $AP \parallel CS$). Нека T е пресечната точка на правите RB и SC. Докажи дека R, S, T, и I лежат на иста кружница.

Задача 5. Нека $n > 1$ е природен број. Во конфигурација на табла со димензии $n \times n$, секое од n^2 полиња содржи стрелка, која покажува, горе, долу, лево, или десно. За дадената почетната конфигурација, полжавот Турно започнува во едно од полињата на таблата и се движи од поле во поле. Во секој потег, Турбо се поместува за едно поле во насока која ја покажува стрелката на полето во кое се наоѓа (притоа може и да излезе и надвор од таблата). После секој потег, стрелките во сите полиња се ротираат за 90° во обратна насока од стрелките на часовникот. Полето го нарекуваме добро ако, почнувајќи од тоа поле, Турбо поминал низ секое поле од таблата точно еднаш, без да ја напушти таблата, и се враќа во почетното поле. Одреди го, во однос на n, максималниот број од добри полиња во однос на сите можни почетни конфигурации.

Задача 6. Во секое поле од 2025×2025 табла, се запишува ненегативен реален број, на таков начин што збирот на броевите во секоја редица е еднаков на 1, и збирот на броевите во секоја колона е 1. Дефинираме r_i да биде најголемата вредност во i-тата редица, и нека $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Слично, дефинираме c_i да биде најголемата вредност во i-тата колона, и нека $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.
Која е најголемата можна вредност на $\frac{R}{C}$?

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача се вреднува со 7 поени