

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на
ДМ на Србија во 1999/00 година**

ДВА УОПШТЕЊА ПТОЛЕМЕЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ

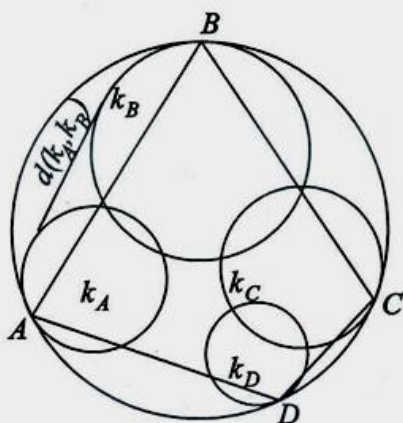
Боривој Суботић
Гимназија "Ј. Ј. Змај", Нови Сад

Теорема Птолемеја о конвексном четвороуглу уписаном у кружницу добро је позната средњошколцима који се припремају за разна математичка такмичења. Па ипак, и већини од њих је непозната чињеница да је та теорема само специјалан случај посебне врсте ставова, ставова типа Кејзија или Бретшнајдера. То управо желимо да разматрамо у наредном тексту.

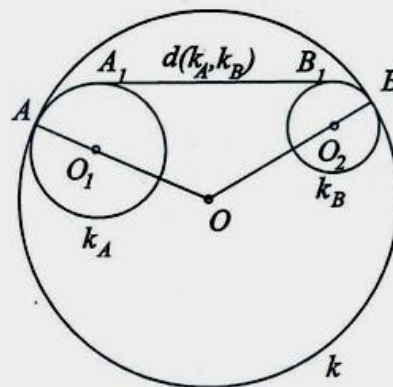
Птолемејева теорема гласи:

У сваком тетивном четвороуглу, производ дијагонала једнак је збиру производа наспрамних страница.

Размотримо теорему која представља уопштење Птолемејеве теореме. У њој се говори о четири кружнице, које изнутра (споља) додирују дату кружницу у теменима конвексног четвороугла уписаног у ту кружницу. Улогу растојања између два темена A и B игра сада тангентно растојање $d(k_A, k_B)$ двеју одговарајућих кружница k_A, k_B , тј. растојање између две тачке додира њихове заједничке тангенте са кружницама (види сл. 1).



Сл. 1



Сл. 2

Теорема. Ако кружнице k_A, k_B, k_C, k_D додирују кружницу k изнутра (споља) у тачкама A, B, C, D конвексног четвороугла $ABCD$ уписаног у k , онда су тангентна растојања кружница повезана следећом релацијом

$$d(k_A, k_B)d(k_C, k_D) + d(k_B, k_C)d(k_D, k_A) = d(k_A, k_C)d(k_B, k_D). \quad (1)$$

Приметимо да у овој теореми све или неке од кружница k_A, k_B, k_C, k_D могу бити радијуса нула, тј. тачке. Другим речима, тачка која припада k посматра се као “нула кружница” која додирује k у тој тачки.

Наведена теорема се назива *Кејзијева*. Општију формулацију Кејзијеве теореме повезану са оријентисаним кружницама нећемо разматрати у овом чланку.

Да бисмо доказали Кејзијеву теорему, решимо најпре следећи задатак.

Задатак. Дата је кружница $k(O, R)$ и две кружнице $k_A(O_1, r_1)$ и $k_B(O_2, r_2)$ које изнутра додирују кружницу $k(O, R)$ редом у тачкама A и B . Изразити тангентно растојање $d(k_A, k_B)$ помоћу дужине дужи AB и полупречника R, r_1, r_2 .

Решење. Нека заједничка спољашња тангента додирује k_A у A_1 , а k_B у тачки B_1 (види сл. 2).

Тада је $d^2(k_A, k_B) = A_1B_1^2 = O_1O_2^2 - (r_1 - r_2)^2$. На основу косинусне теореме је

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \cos \varphi, \\ AB^2 &= 2R^2 - 2R^2 \cos \varphi, \end{aligned}$$

где је $\varphi = \angle AOB$. После елиминације O_1O_2 и $\cos \varphi$ из наведених једнакости следи

$$A_1B_1^2 = -(r_1 - r_2)^2 + (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \left(1 - \frac{AB^2}{2R^2}\right),$$

одакле након једноставних елиминација добијамо:

$$d(k_A, k_B) = \frac{AB}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}, \quad (2)$$

чиме је задатак решен. $\square$

Докажимо сада Кејзијеву теорему. Упишимо у кружницу k четвороугао $ABCD$ и конструишимо 4 кружнице k_A, k_B, k_C, k_D које додирују k изнутра у тачкама A, B, C, D (сл. 1). Тада по формули (2) имамо да је

$$\begin{aligned} d(k_A, k_B) &= \frac{AB}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}, \\ d(k_B, k_C) &= \frac{BC}{R} \sqrt{(R - r_2)(R - r_3)}, \\ d(k_C, k_A) &= \frac{AC}{R} \sqrt{(R - r_3)(R - r_1)}, \\ d(k_D, k_A) &= \frac{DA}{R} \sqrt{(R - r_4)(R - r_1)}, \\ d(k_D, k_B) &= \frac{DB}{R} \sqrt{(R - r_4)(R - r_2)}, \\ d(k_D, k_C) &= \frac{DC}{R} \sqrt{(R - r_4)(R - r_3)}. \end{aligned} \quad (3)$$

За четвороугао $ABCD$ важи Птолемејева теорема:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD. \quad (4)$$

У израз $d(k_A, k_B)d(k_C, k_D) + d(k_B, k_C)d(k_D, k_A) - d(k_A, k_C)d(k_B, k_D)$ ставимо одговарајуће изразе из (3) и искористимо (4). После упрошћавања видимо да је тај израз једнак нули, чиме се завршава доказ једнакости (1).

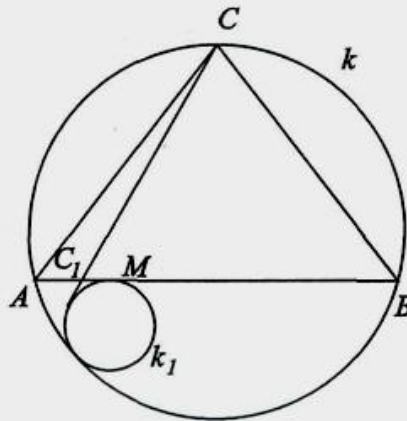
Ако две кружнице k_A и k_B споља додирују кружницу k , онда је

$$d(k_A, k_B) = \frac{AB}{R} \sqrt{(R + r_1)(R + r_2)},$$

па се једнакост (1) може доказати и у случају када све четири кружнице споља додирују кружницу k .

Применимо теорему Кејзија у решавању неких задатака.

Задатак 1. У кружницу k уписан је једнакократи троугао ABC ($AC = BC$). У одсечак AB који не садржи троугао, уписана је произвољна кружница k_1 . Доказати да је дужина t одсечка тангенте конструисане из темена C на кружницу k_1 таква да не зависи од избора кружнице k_1 . Наћи t .



Сл. 3

Решење. Посматрајмо четири кружнице A, B, C, k_1 , где темена A, B, C троугла сматрамо за дегенерисане кружнице полупречника 0 (сл. 3) и применимо на њих Кејзијеву теорему. Означимо са M тачку додира кружнице k_1 са AB . Добијамо

$$AB \cdot t = AC \cdot BM + BC \cdot MA = AC(BM + MA) = AC \cdot AB,$$

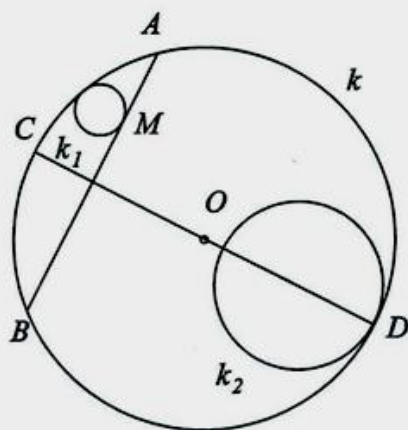
јер је

$$AC = BC,$$

одакле је $t = AC$. □

Задатак 2. У кружници k конструисана је тетива AB и на њу ортогоналан пречник CD . Нека кружница k_2 додирује изнутра кружницу k у

тачки D . У одсечак ABC уписана је произвољна кружница k_1 . Доказати да тангентно растојање кружница k_1 и k_2 не зависи од избора кружнице k_1 .



Сл. 4

Решење. Размотримо четири кружнице (две од њих су нула-кружнице) A , k_1 , B , k_2 . Нека k_1 додирује тетиву AB у тачки M . Тада по Кејзијевој теореме добијамо

$$AM \cdot d(B, k_2) + BM \cdot d(A, k_2) = AB \cdot d(k_1, k_2).$$

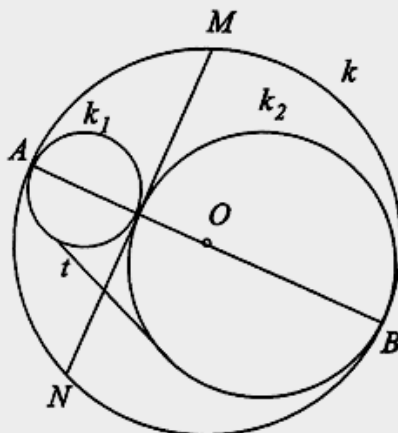
Али, $d(B, k_2) = d(A, k_2)$, па је

$$(AM + BM)d(A, k_2) = AB \cdot d(k_1, k_2),$$

одакле је $d(k_1, k_2) = d(A, k_2)$. □

Задатак 3. Дата је кружница k са пречником AB и тачка $C \in AB$. Конструисане су две кружнице k_1 и k_2 с пречницима AC и CB и њихова заједничка унутрашња тангента која сече кружницу k у тачкама M и N . Чему

је једнако тангентно растојање t кружница k_1 и k_2 ?



Сл. 5

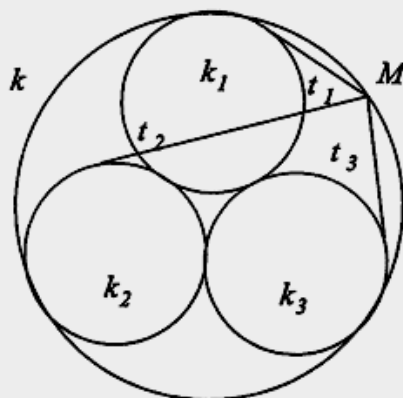
Решење. Посматрајмо четири кружнице k_1, M, k_2, N (сл. 5) и на њих применимо Кејзијеву теорему. Добијамо:

$$\begin{aligned} MC \cdot NC + MC \cdot NC &= t \cdot MN, \\ 2MC^2 &= t \cdot 2MC, \end{aligned}$$

одакле је $t = MC$.

□

Задатак 4. Три једнаке кружнице k_1, k_2, k_3 додирују се две по две међусобно и изнутра додирују кружницу k (сл. 6). Из произвољне тачке M , конструисане су тангенте на све три кружнице. Доказати да је збир два одсечка тангенти од тачке M до тачака додира једнака трећем одсечку.



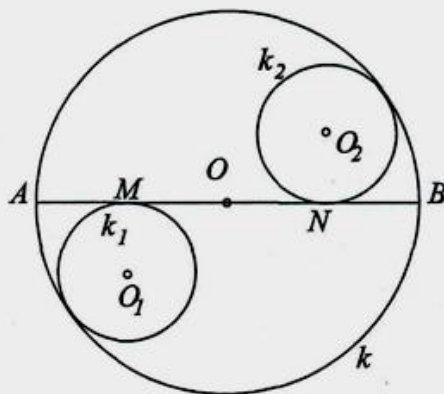
Сл. 6

Решење. Означимо тангентна растојања $d(k_i, k_j)$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$) са t , а и тачку M сматрамо као нула-кружницу. При том положају тачке M налазимо:

$$t \cdot t_1 + t \cdot t_3 = t \cdot t_2,$$

где је $t_i = d(k_i, M)$ за $i \in \{1, 2, 3\}$, тј. $t_1 + t_3 = t_2$. $\square$

Задатак 5. У кружници k полупречника R конструисан је пречник AB , који је подељен на три једнака дела тачкама M и N . Кружнице k_1 и k_2 уписане су у формиране полукружнице и додирују пречник у тачкама M и N . Израчунати тангентно растојање кружница k_1 и k_2 .



Сл. 7

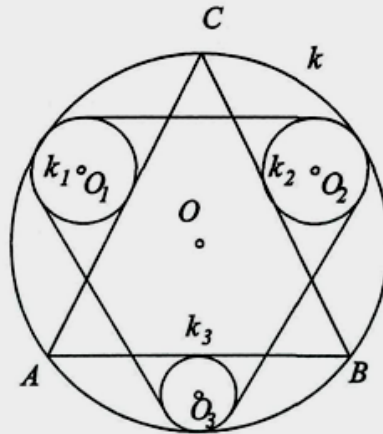
Решење. Посматрајмо четири кружнице k_1, A, k_2, B (сл. 7). По Кејзијевој теореме је

$$\left(\frac{2R}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 2R\right)^2 = d(k_1, k_2) \cdot 2R.$$

Одавде налазимо да је

$$d(k_1, k_2) \frac{10}{9} R. \quad \square$$

Задатак 6. У кружницу k уписан је једнакокраки троугао ABC ($CA = CB$). У формиране сегменте са основама CA, BC, AB који леже ван троугла ABC , уписане су кружнице k_1, k_2, k_3 које додирују основе сегмената у њиховим срединама. Доказати да је тангентно растојање кружница k_1 и k_2 једнако тангентном растојању кружница k_1 и k_3 .



Сл. 8

Решење. Нека је $CA = BC = b$. Размотримо четири кружнице k_1, C, k_2, k_3 (сл. 8) и применимо на њих Кејзијеву теорему. Добијамо

$$\frac{b}{2} \cdot d(k_2, k_3) + \frac{b}{2} \cdot d(k_3, k_1) = d(k_1, k_2) \cdot b.$$

Али, $d(k_2, k_3) = d(k_3, k_1)$, па је $b \cdot d(k_2, k_3) = d(k_3, k_1) \cdot b$, тј. $d(k_1, k_2) = d(k_1, k_3)$.
□

Једно друго уопштење Птолемејеве теореме, не мање важно од Кејзијеве, је следећа

Теорема Бретшнајдера. Нека су a, b, c, d редом странице конвексног четвороугла, m и n његове дијагонале, а α и γ два његова супротна угла. Тада важи једнакост

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma)$$

(косинусна теорема за четвороугао).

Навешћемо два доказа ове теореме, један планиметријски и други помоћу комплексних бројева. Дакле, у овом другом доказу алгебра "помаже" геометрији.

Доказ 1. Нека је у конвексном четвороуглу $ABCD$ (сл. 9) $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = m$, $|BD| = n$.

Конструишимо на страни AB споља $\triangle AKB$ сличан $\triangle ACD$ тако да је

$$\angle BAK = \angle DCA, \angle ABK = \angle CAD$$

, а на страни AD конструишимо $\triangle AMD$ сличан $\triangle ABC$, тако да је $\angle DAM = \angle BCA$ и $\angle ADM = \angle CAB$. Из одговарајуће сличности добијамо:

$$|AK| = \frac{ac}{m}, \quad |AM| = \frac{bd}{m}, \quad |KB| = |DM| = \frac{ad}{m}.$$

Осим тога,

$$\angle KBD + \angle MDB = \angle CAD + \angle ABD + \angle BDA + \angle CAB = 180^\circ,$$

тј. четвороугао $KBDM$ је паралелограм. То значи да је $|KM| = |BD| = n$. Али, $\angle KAM = \alpha + \gamma$. По косинусној теореме за $\triangle KAM$ имамо:

$$n^2 = \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{ac}{m}\right)\left(\frac{bd}{m}\right)\cos(\alpha + \gamma),$$

одакле одмах добијамо тражену једнакост. $\square$

Уколико је $\alpha + \gamma = 180^\circ$, добијамо $m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2abcd$, или $m^2 n^2 = (ac + bd)^2$, а одавде $mn = ac + bd$, што и јесте Птолемејева теорема, јер је за $\alpha + \gamma = 180^\circ$ четвороугао $ABCD$ тетиван.

Доказ 2. Докажимо прво да ако су u, v, w, z комплексни бројеви такви да је $u + v + w + z = 0$, онда је $|uw - vz|^2 = |u + v|^2 |v + w|^2$. Заиста, имамо да је

$$|uw - vz| = |uw + v(u + v + w)| = |u + v| \cdot |v + w|.$$

Нека комплексни бројеви u, v, w, z редом одговарају векторима $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$. Тада је $|u + v|^2 |v + w|^2 = m^2 n^2$ и

$$|uw - vz|^2 = (uw - vz)(\overline{uw} - \overline{vz}) = |uw|^2 + |vz|^2 - (uw\overline{vz} + \overline{uw}vz).$$

Како је $|uw|^2 = a^2 c^2$ и $|vz|^2 = b^2 d^2$, треба доказати да је

$$uw\overline{vz} + \overline{uw}vz = 2abcd \cos(\alpha + \gamma).$$

Довољно је проверити да је аргумент броја $uw\overline{vz}$ једнак $\pm(\alpha + \gamma)$. Приметимо да је аргумент броја $u\overline{v}$ (односно $w\overline{z}$) једнак углу између вектора u, v (w, z), дакле α (односно γ), па тврђење следи. $\square$

Теорема Бретшнајдера се може користити у разним геометријским задацима. Наведимо један пример.

Задатак 7. (Теорема Помпеја) Нека је ABC једнакостраничан троугао, M произвољна тачка равни која не лежи на кружници описаној око троугла ABC . Доказати да постоји троугао чије су стране једнаке $|MA|, |MB|, |MC|$.

Решење. Ако је MB највећа од дужи MA, MB, MC , применимо теорему Бретшнајдера на четвороугао $ABCM$. Добијамо (после скраћивања) да је

$$|MB|^2 = |MA|^2 + |MC|^2 - 2|MA| \cdot |MC| \cos(\angle A + 60^\circ),$$

тј. $|MB| < |MA| + |MC|$, јер је $\angle ACM \neq 120^\circ$, пошто тачка M не лежи на кружници описаној око троугла ABC . $\square$