УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ" – СКОПЈЕ

А. Самарџиски Н. Целакоски

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ
по
АЛГЕБРА I

петто неизменето издание

Издание на Универзитетот „Св. Кирил и Методиј" – Скопје

Скопје, 1996

Одобрено со решение на ректорот бр. 11-399/9 од 11-III-96 година како учебно помагало, V издание

Рецензент
Проф. д-р Ѓорѓи Чупона

Лектура
Голупка Угринова

CIP – Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека
„Климент Охридски", Скопје

512(076)(075.8)

САМАРЏИСКИ, Александар
Решени задачи по алгебра I : [учебно помагало] А. [Александар] Самарџиски, Н. [Наум] Целакоски. – 5. неизменето изд. – Скопје : Универзитет „Св. Кирил и Методиј" 1996. – VII, 143 стр. : графички прикази ; 20 cм

1. изд. 1968. – Тираж 250.
ISBN 9989-43-047-0
I. ЦЕЛАКОСКИ, Наум а) Алгебра – Вежби

Според Мислењето на Министерството за култура бр. 08-95.420-420 од 22-II-1996 за книгата „Решени задачи по алгебра -I" се плаќа повластена даночна стапка

Печати: Универзитетска печатница „Св. Кирил и Методиј" Скопје
Тираж: 250 примероци

У В О Д

1. Оваа збирка е работена според наставната програма за предметот елементарна алгебра на Природно-математичкиот факултет во Скопје, но сметаме дека неа ќе можат да ја користат и студентите на техничките факултети и педагошките академии, како и учениците од средните училишта што пројавуваат поголем интерес за математиката.

Скоро сите задачи се решени. (Во збиркава се нумерирани 371 задача, но во суштина има многу повеќе, бидејќи обично под еден број се даваат повеќе задачи од ист вид.) Се разбира, читателот ќе треба секогаш да се обиде сам да ги решава задачите, а решенијата дадени овде да се искористат само за проверка. Сепак, авторите сметаа дека е подобро решенијата да се изнесат во поконцизна форма, така што и при нивното читање од читателот се бара извесна самостојност.

2. Поимите со кои се оперира во збиркава не се дефинирани, бидејќи таа, во суштина, е составен дел на учебникот "ПРЕДАВАЊА ПО АЛГЕБРА"-книга I од Проф.д-р Ѓорѓи Чупона, па истите поими што се сретнуваат овде се објаснети во таа книга. (Да спомнеме дека околу 50% од задачите што се решавани овде се формулирани како вежби и во наведената книга.) Сепак сметаме дека читателот, ако има извесни предзнаења, би можел да работи по оваа збирка и без да ја прочитал спомнатата книга, бидејќи се користат вообичаените поими и ознаки.

Да наведеме некои од нив. Тоа се, пред сè, поимите за множество, елемент, подмножество и пресликување. Множествата, обично, се означуваат со големите букви на латиницата, а елементите со малите букви од истата азбука. Со "$\in$" се означува релацијата за припадност, а со "$\subset$" и "$\subseteq$"-релацијата инклузија; притоа $A \subset B$, означува дека A е вистинско подмножество од B, т.е. дека секој елемент од A припаѓа на B, а барем еден елемент од B не е во A. Празното множество $\emptyset$ се смета за подмножество од секое множество. Со $\notin$, $\not\subset$, $\not\subseteq$ и $\neq$ се означуваат негациите на $\in$, $\subset$, $\subseteq$ и $=$. Логичките ознаки "$\wedge$", "$\vee$", "$\forall$", "$\exists$", "$\Rightarrow$" и "$\Leftrightarrow$", се пишуваат, поред ,наместо "и", "или", "за секој", "постои некој", "следува" и "ако и само ако".

Операциите пресек, унија и разлика се означуваат на вообичаениот начин, т.е. со: "$\cap$", "$\cup$" и "$\setminus$"; ако А е подмножество од М, тогаш $A = M\setminus A$ е комплементот на А во М. Ако $A\cap B = \emptyset$ велиме дека А и В се дисјунктни множества. Со Р(М) се означува партитивното множество на М, т.е. множеството чии елементи се подмножествата од М. Ако А и В се две множества, тогаш $A\times B$ е нивниот директен производ, т.е. множеството од сите подредени парови (a,b), каде што $a\in A$, а $b\in B$; во иста смисла се употребува и ознаката $A_1\times\ldots\times A_n$ за директен производ на n множества.

Ако X и Y се две непразни множества и ако, според некое правило, на секој елемент $x\in X$ му одговара единствен елемент $y\in Y$, тогаш велиме дека е определено пресликување f од X во Y и пишуваме $y = f(x)$; за x велиме дека е објект, а y –слика на x. Изразот "f е пресликување од А на В" значи дека секој елемент од В е слика на барем еден елемент од А; поимот за обратноеднозначно пресликување се употребува во обичната смисла, т.е. различни објекти да имаат и различни слики. Две множества имаат ист кардинален број (т.е. се еквивалентни) ако едното од нив може обратноеднозначно да се преслика на другото.

За множествата од природните, целите, рационалните, реалните и комплексните броеви употребуваме специјални ознаки, а тоа се: N, Z, Q, R и C соодветно. Со N^0 се означува множеството од ненегативните цели броеви; ако X е некое од множествата Z, Q и R, тогаш X^+ е множеството од сите позитивни, а X^- –множеството од сите негативни елементи на X. Реалните броеви се дефинираат со помош на класи во множеството на рационалните броеви. Имено, за непразното вистинско подмножество А од Q се вели дека е долна класа во Q ако: $x\in Q, a\in A, x\leqslant a \Rightarrow x\in A$. Комплементот на А, во тој случај, е горна класа во Q. Ако во долната класа А нема најголем, а во А' нема најмал елемент, тогаш таа се вика ирационална, а реалниот број определен со неа –ирационален број. Равенките и неравенките што се сретнуваат во IV се решаваат во множеството на реалните броеви; тоа се однесува посебно за поимот еквивалентност меѓу равенките. За корените се употребуваат две различни ознаки. Имено, аритметичката вредност на коренот кај реалните броеви се означува со $\sqrt{}$, додека кај комплексните броеви (за множеството од n вредности на коренот) се употребува $\sqrt[n]{}$.

Секое подмножество од $M\times M$ се наречува релација во M. Релациите, обично, ги означуваме со мали грчки букви и наместо $(x,y)\in\alpha$ пишуваме $x\alpha y$. Релацијата α ја викаме а) рефлексивна; б) симетрична; в) нерефлексивна; г) антисиметрична; д) транзитивна, ако: а) $(\forall x\in M)x\alpha x$; б) $x\alpha y \to y\alpha x$; в) $(\forall x\in M)x\,\bar{\alpha}\,x$ (при што со $\bar{\alpha}$ ја означуваме негацијата на α); г) $x\alpha y, y\alpha x \to x=y$; д) $x\alpha y, y\alpha z \to x\alpha z$. Ако една релација е рефлексивна, симетрична и транзитивна, тогаш таа се наречува релација за еквивалентност. Подредување во M е секоја релација, што е нерефлексивна, антисиметрична и транзитивна. За оваа релација употребуваме специјална ознака "$<$". Ако α е релација за еквивалентност во M, тогаш множеството M може да се подели на фамилија $\{A_i \mid i\in I\}$ дисјунктни подмножества, такви што $x\alpha y \to x,y\in A_i$ за некое $i\in I$. Релацијата за деливост кај целите броеви ја означуваме со "$|$", т.е. $a|b$ значи дека a е делител на b.

Секое пресликување f од $G\times G$ во G се наречува операција во G; наместо $c = f(a,b)$, обично пишуваме $c=ab$, $a+b$, $a\circ b$, $a*b$,.... . Множеството G заедно со операцијата "$\cdot$" се вика групоид и се означува со $G(\cdot)$. Групоидот е а) комутативен; б) асоцијативен (или полугрупа), ако а) $xy = yx$; б) $x(yz) = (xy)z$, за секои $x,y,z\in G$. Елементот $e\in G$ се наречува неутрален ако $ex = xe = x$, за секој $x\in G$; во тој случај, ако е $xy = yx = e$ велиме дека y е инверзен за x и го означуваме со x^{-1}.

Полугрупа со неутрален елемент кај која секој елемент има инверзен се наречува група. Подмножеството H од групата G се вика подгрупа од G ако и само ако е група во однос на операцијата што е дефинирана во G. Операцијата кај комутативните групи често се означува адитивно, т.е. со знакот "+"; во тој случај, неутралниот елемент се наречува нула и се означува со 0.

Ако во множеството P се определат операциите "+" (собирање) и "$\cdot$" (множење), така што 1) $P(+)$ е комутативна група, 2) $P(\cdot)$ е полугрупа и 3) операцијата множење е дистрибутивна спрема операцијата собирање, тогаш $P(+,\cdot)$ се наречува прстен. Прстенот P е прстен со единица, ако полугрупата $P(\cdot)$ има неутрален елемент, а комутативен, ако $xy = yx$ за секои $x,y\in P$. Ако $P^* = P\setminus\{0\}$ и ако $P^*(\cdot)$ е група, тогаш за $P(+,\cdot)$ велиме дека е тело, а секое комутативно тело се вика поле. За еден прстен P велиме дека е прстен без вистински делители на нулата, ако од $ab = 0$ следува $a = 0$ или $b = 0$. Прстен со единица и без вистински делители на нулата се наречува интегрален домен. За еден прстен велиме дека е подреден, ако постои подмножество P^+ со следниве особини: 1) $x,y \in P^+ \to x+y, xy \in P^+$; 2) $x \in P, x \neq 0 \to x \in P^+$ или $-x \in P^+$; 3) $0 \notin P^+$.

Групоидите $G(\cdot)$ и $G'(\cdot)$ велиме дека се изоморфни, ако постои обратноеднозначно пресликување $f: x \to x'$ од G на G', такво што $f(xy) = f(x)f(y)$; слично се воведува поимот за изоморфизам и кај прстените.

Нека P е поле и $V(+)$ комутативна група. За V велиме дека е векторски простор над P ако е дефинирано пресликување $(x,\vec{v}) \to x\vec{v}$ од $P \times V$ во V, така што 1) $x(\vec{u}+\vec{v}) = x\vec{u}+x\vec{v}$, 2) $(x+y)\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v}$, 3) $(xy)\vec{v} = x(y\vec{v})$ и 4) $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$, за секои $x,y \in P$ и $\vec{u},\vec{v} \in V$.

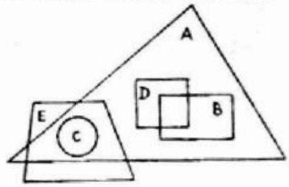
Векторскиот простор A над полето P се наречува векторска алгебра, ако, освен собирањето, во A е дефинирано и множење, така што $A(+,\cdot)$ е прстен и $x(\vec{a}\vec{b}) = (x\vec{a})\vec{b}$ за секои $x \in P$ и $\vec{a},\vec{b} \in A$.

3. На крајот, најтопло се заблагодаруваме на рецензентот на оваа збирка за несебичната помош во текот на припремањето на ракописот, како и при конечната редакција.

Скопје, јуни 1968 год. Авторите

I. <u>МНОЖЕСТВА И ПРИРОДНИ БРОЕВИ</u>

1. Да се определи односот меѓу множествата A, B, C, D и E, каде што а) $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{x,y,a\}$, $D=\{a,c,x,y\}$ и $E=\{a,b,c,x,y\}$; б) A, B, C, D и E се множествата точки од триаголникот, правоаголникот, кругот, квадратот и трапезот, распоредени како што е назначено на приложената слика.



2. Да се покаже дека:

а) $A \subseteq B,\ B \subset C \rightarrow A \subset C$;

б) $A \subset B,\ B \subseteq C \rightarrow A \subset C$;

в) $(x \notin A \rightarrow x \notin B) \leftrightarrow B \subseteq A$.

3. Да се објасни значењето на изразите:

а) $x \notin A \leftrightarrow x \notin B$; б) $x \in A \rightarrow x \notin B$; в) $x \in A \leftrightarrow x \in B$;

г) $(\exists x \in M)\, x \in S$; д) $(\forall x \in M)\, x \notin S$.

4. Нека $A=\{u,v,w\}$ и $B=\{a,u,v\}$. Да се определат множествата: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$ и $P(A)$.

5. Да се покаже дека:

а) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A \leftrightarrow A \cup B = B$; б) $A, B \subseteq C \rightarrow A \cup B \subseteq C$;

в) $A \subseteq B,\ A \subseteq C \rightarrow A \subseteq B \cap C$; г) $A \subseteq C,\ B \subseteq D \rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D, A \cup B \subseteq C \cup D$.

6. Да се докажат равенствата:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

7. Да се докаже дека

$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$.

8. Да се докаже дека:

а) $A \cap ((A \cap B) \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

в) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; г) $P(X \cap Y) = P(X) \cap P(Y)$;

д) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

9. Ако A и B се подмножества од X, да се покаже дека:

а) $(A \setminus B)' = A' \cup B$; б) $((A \cup B)' \cap (A' \cup B'))' = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap B') \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$;

г) $((A \cup B)' \cup (A \cup B'))' = B \setminus A$; д) $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$.

10. Ако A и B се множества, тогаш множеството $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ се вика симетрична разлика на A и B. Да се покаже дека:

а) $A \triangle A = \emptyset$; б) $A \triangle B = B \triangle A$; в) $A \triangle B = A \leftrightarrow B = \emptyset$; г) $A \triangle B = \emptyset \rightarrow A = B$;

д) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$; ѓ) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

11. Да се провери дали се точни равенствата:

а) $A\cup(B\setminus C) = (A\cup B)\setminus C$; б) $(A\times B)\cup(C\times D) = (A\cup C)\times(B\cup D)$;

в) $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$.

12. Нека X е множеството луѓе од Скопје, а Y множеството на нивните имиња. Со изразот "y е име на x" е определено пресликување од X во Y. Дали тоа пресликување е од облик на и дали е обратноеднозначно?

13. Ако $f:X\to Y$, да се објасни што означува секој од изразите:

а) $f(X)=Y$; б) $f(X)\subset Y$; в) $(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\, f(x)=y$.

14. Нека X и Y се непразни множества и нека F е подмножество на $X\times Y$ со следниве особини:

1^0 $(\forall x\in X)(\exists y\in Y)(x,y)\in F$;

2^0 $(\forall x\in X)(\exists y_1, y_2\in Y)[(x,y_1),(x,y_2)\in F \Rightarrow y_1=y_2]$.

Потоа, нека ставиме $y=f(x) \Leftrightarrow (x,y)\in F$. Да се покаже дека f е пресликување од X во Y. Какви особини треба да има множеството F за да биде f: а) пресликување од облик на; б) обратноеднозначно?

15. Дадени се обратноеднозначните пресликувања:

α: $a\to b$, $b\to c$, $c\to d$, $d\to a$; β: $a\to d$, $b\to a$, $c\to b$, $d\to c$;

γ: $a\to c$, $b\to d$, $c\to a$, $d\to b$; δ: $a\to a$, $b\to d$, $c\to c$, $d\to b$,

од $X=\{a,b,c,d\}$ во себе. Да се покаже дека :

а) $\alpha\beta=\beta\alpha=e_X$; б) $\alpha\gamma=\gamma\alpha=\beta$; в) $\alpha\delta\neq\delta\alpha$; г) $\alpha^2=\alpha\alpha=\gamma$;

д) $\gamma^2=e_X$; ѓ) $\alpha^4=e_X$; е) $(\alpha^2)^{-1}=(\alpha^{-1})^2$.

16. Да се покаже дека:

а) $x\to x+2$ е пресликување од N во, но не на, N ;

б) $x\to 3x-2$ е обратноеднозначно пресликување од Q на Q;

в) $x\to x^3-3x^2-x$ е пресликување од R на R, но не е обратноеднозначно.

17. Нека c е фиксен природен број и f- пресликување од N во себе, дефинирано со

$$f(n)=\begin{cases} c-n, & \text{ако } n<c \\ c+n, & \text{ако } n\geq c. \end{cases}$$

а) Да се покаже дека f е обратноеднозначно пресликување.

б) Што претставува сликата $f(N)$?

в) Да се најде $f^{-1}: f(N)\to N$.

18. Ако X е непразно множество, тогаш со e_X го означуваме пресликувањето од X во X определено со $(\forall x\in X)e_X(x)=x$. За ова пресликување велиме дека е идентичното пресликување на множеството X.

Да се покаже дека:

а) ако $f:X\to Y$, т.е. f е пресликување од X во Y, тогаш

$$fe_X = f = e_Y f;$$

б) ако f е обратноеднозначно пресликување од X на Y, тогаш

$$ff^{-1} = e_Y,\ f^{-1}f = e_X.$$

19. Да се даде пример на пресликување $f:X\to Y$, такво што:

а) $A\subset B$, $f(A)=f(B)$; б) $f(B\cap C)\subset f(B)\cap f(C)$,

за некои подмножества A,B,C од X.

20. Нека f е обратноеднозначно пресликување од множеството X во Y. Да се покаже дека:

а) $A\subset B \Rightarrow f(A)\subset f(B)$; б) $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.

21. Да се провери каков однос постои меѓу множествата: 1) $f(A\setminus B)$ и $f(A)\setminus f(B)$; 2) $f(A')$ и $(f(A))'$ ако:

а) f е пресликување од X во Y;

б) f е обратноеднозначно пресликување од X во Y.

22. Нека f е пресликување од X во Y и нека C е подмножество од Y. Со $f^{-1}(C)$ ќе го означиме множеството на сите елементи од X, чии слики му припаѓаат на C, т.е. $x\in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x)\in C$. Да се покаже:

а) $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$;

б) $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;

в) $f^{-1}(A\setminus B) = f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$.

23. Нека $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ и нека

$$(\forall x\in X)\ g(f(x))=x,\ (\forall y\in Y)\ f(g(y))=y.$$

Да се покаже дека f е обратноеднозначно пресликување од X на Y, а g обратноеднозначно пресликување од Y на X и дека $g=f^{-1}$, $f=g^{-1}$.

24. Нека a е фиксен природен број и нека g е дадено пресликување од N во N. Да се покаже дека со равенствата:

$$h(1)=a,\ h(x+1)=g(h(x))$$

е определено пресликување од N во N. (За h велиме дека е определено рекурзивно со помош на a и g.)

25. Нека f_1 и f_2 се дадени пресликувања од N во N и нека ставиме $h(x,1)=f_1(x)$, $h(x,y+1)=f_2(h(x,y))$. Да се покаже дека h е пресликување од $N\times N$ во N. Што претставува $h(x,y)$ ако $f_1(x)=f_2(x)=x+1$?

26. Нека f е дадено пресликување од N во N, а g од $N\times N$ во N. Да се покаже дека со: $h(x,1)=f(x)$, $h(x,y+1)=g(h(x,y),x)$ е определено пресликување од $N\times N$ во N. Што претставува h ако $f(x)=x$, $g(x,y)=xy$?

27. Нека $M \subseteq N$. Ако постои природен број n, таков што $x \leqslant n$, за секое $x \in M$, велиме дека M е ограничено оддесно. Да се покаже дека во M има најголем елемент ако, и само ако, M е ограничено оддесно.

28. Нека A и B се дисјунктни конечни множества; тогаш $A \cup B$ е конечно и притоа имаме

$$\kappa(A \cup B) = \kappa A + \kappa B.$$

29. Ако A и B се конечни множества, да се покаже дека:

а) $\kappa(A \cap B) + \kappa(A \cup B) = \kappa A + \kappa B$; б) ако $A \subseteq B$, тогаш $k(B \setminus A) = kB - kA$.

30. Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се n множества, со $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ се означува множеството n-торки $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in A_i$. Да се покаже дека ако факторите A_i се конечни, тогаш и множеството A е конечно и дека $\kappa A = (\kappa A_1)(\kappa A_2) \ldots (\kappa A_n)$.

31. Дадено е множеството M со m елементи. Да се покаже дека:

а) во M има $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ подмножества со по k елементи;

б) $P(M)$ има 2^m елементи.

32. Нека A е конечно множество со m, а B исто така конечно множество со n елементи, и притоа $1 \leqslant m \leqslant n$. Да се покаже дека бројот од сите обратноеднозначни пресликувања од A во B изнесува $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

33. Еден до друг се наредени m црвени, n модри и p бели моливи. На колку различни начини може да се изврши тоа распоредување, ако притоа моливите со иста боја не ги сметаме за различни.

34. Да се докаже точноста на равенствата:

а) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$; б) $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$.

35. Да се докажат равенствата:

а) $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$; б) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^{n-1}$.

36. Да се пресметаат сумите:

а) $S_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$; б) $S_3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$; в) $\sum_{i=1}^{n} (2i)^2$; г) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2$.

37. Да се докаже дека, ако $\kappa A = \kappa B$, $\kappa C = \kappa D$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, тогаш $\kappa(A \cup C) = \kappa(B \cup D)$.

38. Да се докаже или оповргне дека, ако $A \subseteq B$, $C \subseteq D$, $\kappa A = \kappa C$, $\kappa B = \kappa D$, тогаш $\kappa(B \setminus A) = \kappa(D \setminus C)$.

39. Да се покаже дека множеството Z од целите броеви е преброиво.

40. Ако A е бесконечно, а B преброиво множество, тогаш $\kappa(A\cup B)=\kappa A$. Специјално, унија од две преброиви множества е преброиво множество.

41. Множеството Q од рационалните броеви е преброиво.

42. Нека A_1, A_2 се множествата точки од две кружни линии, B_1, B_2 множествата точки од две отсечки, а C множеството точки од една права. Да се покаже дека: $\kappa A_1=\kappa A_2=\kappa B_1=\kappa B_2=\kappa C$.

43. Нека f е пресликување од множеството S на T. Ако S е преброиво, тогаш и T е преброиво, или пак конечно. Поопшто, во секој случај е $\kappa T\leqslant\kappa S$.

44. Множеството R од реалните броеви е непреброиво.

45. Множествата $I=(0,1)$ и $I\times I$ имаат ист кардинален број.

46. Множеството C од комплексните броеви има ист кардинален број со множеството R од реалните броеви, т.е. $\kappa C=\kappa R$.

47. Кардиналниот број на множеството A од сите низи, чии членови се 0 или 1, е еднаков со кардиналниот број од R.

48. Ако A е непреброиво множество, а B преброиво множество, тогаш $\kappa(A\setminus B)=\kappa A$.

49. Множеството ирационални броеви има ист кардинален број со множеството R од реалните броеви.

50. Степените со природни експоненти можат да се воведат и кај кардиналните броеви на вообичаениот начин, т.е. да се стави $\alpha^1=\alpha$, $\alpha^{n+1}=\alpha^n\alpha$, за секој кардинален број α и природен број n. Да се покаже дека оваа дефиниција е во согласност со општата дефиниција на степен за кардиналните броеви $(\kappa X)^{\kappa Y}=\kappa(X^Y)$, каде X^Y е множеството од сите пресликувања од Y во X.

II. ДЕЛИВОСТ ВО МНОЖЕСТВОТО НА ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

51. Да се покаже дека:

а) $m|n \Rightarrow am\,|\,an \wedge m^k|n^k$; б) $m|n \wedge m|k \Rightarrow m|n+k \wedge m|n-k$;

в) $m|n+k \wedge m|k \Rightarrow m|n$; г) $m\,|\,(n+1)(n+2)\ldots(n+m)$.

52. Да се провери дали се точни релациите:

а) $3\,|\,ab(a+b)(a-b)$; б) $5\,|\,ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$;

в) $6\,|\,n(n^2+5)$; г) $6\,|\,n(2n+1)(7n+1)$,

каде што a, b, n се природни броеви.

53. Да се покаже дека:

а) $(a,b) = (b,a)$, $[a,b] = [b,a]$;

б) $(a,(b,c)) = ((a,b),c)$, $[a,[b,c]] = [[a,b],c]$;

в) $(a,[b,c]) = [(a,b),(a,c)]$, $[a,(b,c)] = ([a,b],[a,c])$,

каде што (a,b), $[a,b]$ се најголемиот заеднички делител и најмалиот заеднички содржател соодветно.

54. Да се покаже дека:

а) $(ab,ac)=a(b,c)$; б) $(a,b)=(a,b+ac)=(a+kb,b)$;

в) $(a,b)=1 \wedge (a,c)=1 \Rightarrow (a,bc)=1$; г) $(a,b)=1 \Rightarrow (a^n,b^n)=1$.

55. Да се определат броевите x и y ако се знае дека

а) $(x,y)=15$, $[x,y]=150$;

б) $(x,y)=120$, $[x,y]=1320$;

в) $(x,y)=100$, $[x,y]=990$.

56. Нека p,q,r и s се различни прости броеви. Да се определат броевите m и n така што:

а) $(m,n)=pq$, $[m,n]=p^2qs$; б) $(m,n)=pq$, $[m,n]=qrs^2$.

57. Ако a и b се позитивни броеви, покажи дека постојат позитивни броеви x,y, за кои $(x,y)=a$, $[x,y]=b$, ако, и само ако, $a|b$. Ако $a|b$, покажи дека бројот на подредените парови природни броеви x,y, за кои $(x,y)=a$ и $[x,y]=b$, е 2^r, каде што r е бројот на простите фактори на b/a.

58. Нека $a<b<c$ се прости броеви поголеми од 3 и нека $a+c=2b$. Да се покаже дека $b-a$ се дели со 6. Дали претпоставката дека тие броеви се прости е битна?

59. Да се определи простиот број p така што и бројот $8p^2+1$ е прост.

60. Да се определи простиот број p така што и броевите $4p^2+1$, $6p^2+1$ се прости.

61. Нека броевите $s=2^a+1$, $r=2^b-1$ се прости. Да се покаже дека b е прост број и дека a има облик 2^k.

62. Да се покаже дека, ако a е сложен природен број, тогаш постои прост делител p на a, таков што $p^2 \leqslant a$.

63. Броевите на Фибоначи (Fibonacci) се

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

каде што секој број, освен првите два, е збир на претходните два броја. Да се покаже дека:

а) збирот од осум произволни последователни броеви од низата, не е член на таа низа;

б) било кои два последователни броеви се заемно прости.

64. Да се покаже дека постојат бесконечно многу прости броеви од облик 4к-1.

65. Ако n е природен број, тогаш со $\tau(n)$ се означува бројот на сите делители на n, а со $\sigma(n)$ збирот од сите делители на n (притоа се мисли на позитивни делители). Да се покаже дека:

$$\tau(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k), \quad \sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1},$$

каде што $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ се различни прости броеви.

66. Бројот од сите природни броеви помали или еднакви на $m\in N$, кои се заемно прости со m, се означува со $\phi(m)$ и се вика Ојлерова функција. Да се докаже дека:

а) ако $(m,n)=1$, тогаш $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$;

б) ако p е прост број и $\alpha\geqslant 1$ е природен број, тогаш

$$\phi(p^\alpha) = p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right);$$

в) ако $n>1$ и $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$, тогаш

$$\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right).$$

67. Да се најде природниот број n за кој е:

а) $\phi(n) = \frac{n}{2}$; б) $\phi(n) = \phi(2n)$; в) $\phi(3n)=\phi(4n)=\phi(6n)$; г) $\phi(n)=12$.

68. Да се покаже дека:

а) $x\equiv y \pmod m \wedge a_i \equiv b_i \pmod m \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i y^i \pmod m$;

б) $(a,m)=d \wedge ab\equiv ac \pmod m \Rightarrow b\equiv c \pmod{\frac{m}{d}}$;

в) $a\equiv b \pmod r \wedge a\equiv b \pmod s \Rightarrow a\equiv b \pmod{[r,s]}$.

69. Со помош на конгруенции, да се изведат критериуми за деливост на повеќецифрени броеви со 2,3,4,5,6,7,8,9,11 и 12 во декадниот систем.

70. Да се определи остатокот што се добива при делењето на:

а) 19^{1024} со 5; б) 2^{37} со 223; в) 3^{36} со 77.

71. Ако a е непарен број, да се покаже дека $a^2\equiv 1 \pmod 8$ и оттука да се изведе заклучок дека $a^{2^n}\equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$ за секој $n\in N$.

72. Ако p е непарен прост број, тогаш од $a^p+b^p\equiv 0 \pmod p$ следува $a^p+b^p\equiv 0 \pmod{p^2}$. Дали овој резултат е точен и за $p=2$?

73. (Теорема на Ферма.) Ако простиот број p не е делител на природниот број a, да се докаже дека $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

74. Да се докаже теоремата на Вилсон: Ако p е прост број, тогаш

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Обратно, ако $(n-1)! \equiv -1 \pmod n$ $(n>1)$, тогаш n е прост број.

75. Да се решат во цели броеви равенките:

а) $8x-13y=63$; б) $39x-22y=10$;

в) $122x+129y=2$; г) $258x-172y=56$.

76. За превоз на жито има вреќи од 60 и 80 кг. По колку вреќи од едниот и другиот вид треба да се наполнат за да се пренесе 440 кг. жито?

77. Колку марки по 30 и 50 пари можат да се купат со 14 динари и 90 пари?

78. Да се определат сите Питагорини тројки (x,y,z) со особината:

а) $z\leqslant 80$; б) $z-y=2$; г) $z-x=5$.

79. Да се решат во цели броеви равенките:

а) $xy=x+y$; б) $2xy+3y^2=24$; в) $x^2-y^2=2xyz$;

г) $3^x-2^y=1$; д) $2x^2+y^2=z^2$; ѓ) $x^2+y^2=3z^2$.

80. Да се покаже дека равенките:

а) $x^2+1974=y^2$; б) $2x^2-5y^2=7$; в) $x^4+y^4=5z^2$;

г) $x^2-3y^2=17$; д) $x^2+x=y^2$; ѓ) $x^2+y^2=4^n$,

се нерешливи во множеството N од природните броеви.

81. Равенката

$$x^5-x^3=y^3z$$

да се реши во множеството на целите броеви, ако y и z се прости броеви.

82. Нека p и q се прости броеви, а x и y природни. Да се покаже дека од $p^x=q^y+1$ следува: 1) $p=2$, $y=1$, $x=2^k$; 2) $q=2$, $x=1$, y е прост; или 3) $y=p=3$, $x=q=2$.

83. Користејќи ги резултатите од претходната задача, да се определат простите броеви p, q_1 и q_2, и природните броеви x, y и z, така што

$$p^{2x}=q_1^y q_2^z+1.$$

84. При декадниот (т.е. десетичниот) систем операциите ги изведуваме многу полесно, бидејќи ние и мислиме во тој систем. Притоа

многу ни помогнува фактот што ги знаеме резултатите кои се добиваат при собирање и множење на едноцифрени броеви, т.е. ги знаеме "малите таблици" за собирање и мнижење кај дестичниот систем. Да се состават аналогни таблици за собирање и множење на едноцифрени броеви во системи со основа: два, четири, девет и дванаесет. (Во последниот случај, покрај 0,1,2,3,4,5,6,7,8 и 9, како цифри треба да се изберат уште два знака за броевите десет и единаесет.)

85. Да се извршат означените операции:

а) $1001_2 + 1011_2$; б) $1001_2 \cdot 10101_2$; в) $100111_2 - 111101_2$;

г) $3421_5 \cdot 3412_5$; д) $2381_9 + 312_8$.

86. Бројот 1296 (даден во десетичен систем) да се претстави во системите со основа: два, четири, пет и дванаесет.

87. Да се определи најголемиот заеднички делител (a,b) ако:

а) $a=280_9$; $b=48_9$; б) $a=24682$, $b=426$;

в) $a=1111101_2$, $b=100101110_2$. $b^2y^2 + b_0(2\cdot by\cdot b_0)$

88. Користејќи го идентитетот $(ab+c)^2 = a^2b^2 + c(2ab+c)$ да се формулира правилото за квадрирање на повеќецифрени броеви. Користејќи го добиеното правило, да се извршат следните квадрирања: 11011_2^2, 246_8^2, 24126_7^2.

89. Да се даде правило за множење на броеви кои имаат последни цифри чиј збир е десет, а сите други цифри им се исти. Овој резултат да се искористи "усно" да се извршат следните множења: $26\cdot24$, $46\cdot44$, $98\cdot92$, $101\cdot109$, $123\cdot127$, $146\cdot144$, $85\cdot85$ и $115\cdot115$.

Дали е битно што се работи во десетичен систем?

90. Да се определи во каков броен систем е точно равенството:

а) $4\cdot13 = 100$; б) $3\cdot35 = 141$;

в) $5\cdot36 = 114$; г) $12!-11!-101 = 100^2 + 10^2$.

91. Да се определи основата на системот ако $722_b - 554_b = 133$, каде што 133 е во десетичен систем. 9

92. Да се изведат критериуми за деливост на повеќецифрени броеви со 3,4,5,6 и 7 во систем со основа 8.

93. Ако x е рационален број, тогаш со $[x]$ го означуваме најголемиот цел број што не е поголем од x. Да се покаже дека за секој рационален број x и природен број m е точно равенството

$$\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{m}\right]$$

94. Да се докаже равенството:

а) $[x]+[x+\frac{1}{2}] = [2x]$; б) $[x]+[x+\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}] = [3x]$.

95. Нека α е реален позитивен, а d цел позитивен број. Бројот од позитивни броеви, кои се помали или еднакви на α и се делат со d, е еднаков на $[\frac{\alpha}{d}]$.

96. Ако p е прост број, да се покаже дека

$$\alpha = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \ldots + [\frac{n}{p^k}] + \ldots$$

е најголемиот цел број за кој p^{α} е делител на $n!$.

97. Да се најде најголемиот број α, за кој $1000!$ се дели со 3^{α}.

III. РЕАЛНИ БРОЕВИ

98. Нека A и B се две непразни подмножества од Q со следниве особини:

$$(i)\ Q = A \cup B;\quad (ii)\ a \in A,\ b \in B \rightarrow a < b.$$

Да се покаже дека A е долна класа, а B нејзината комплементарна горна класа. Да се покаже дека е точно и обратното тврдење.

99. Нека A_1 и A_2 се две долни класи во Q. Да се покаже дека $A_1 \subseteq A_2$ или $A_2 \subseteq A_1$.

100. Нека A се состои од сите рационални броеви x, такви што $x^3 \leqslant 2$. Да се покаже дека A е ирационална долна класа во Q.

101. Ако B е ирационална долна класа во Q и $r \in Q$, тогаш $D = \{r+a \mid a \in B\}$ исто така е ирационална долна класа, а $D' = \{r+a' \mid a' \in B'\}$ е нејзината комплементарна горна класа.

102. Ако $r, s \in Q$, каде што $r < s$, тогаш постои ирационален број α, таков што $r < \alpha < s$.

103. Ако $\alpha, \beta \in R$, такви што $\alpha < \beta$, тогаш постои барем еден рационален број r, и еден ирационален број γ, такви што $\alpha < r, \gamma < \beta$.

104. Ако $\alpha, \beta \in R^+$, тогаш постои природен број n, таков што $n\alpha > \beta$.

105. Претставувајќи ги реалните броеви $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{6}$ со соодветни горни или долни класи, да се покажат равенствата:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$;

в) $\sqrt{2}\,\sqrt{8} = \sqrt{4}$; г) $\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$.

106. Да се покаже дека збир на рационален и ирационален број е

ирационален. Во кој случај производ на рационален и ирационален број е рационален?

107. Да се покаже дека:

а) $\inf(-S) = -\sup S$; б) $\sup(-S) = -\inf S$;

в) $\sup(S+T) = \sup S+\sup T$; г) $\inf(S+T) = \inf S+\inf T$.

Притоа претпоставуваме дека $\inf S$, $\sup S$, $\inf T$ и $\sup T$ постојат.

108. Ако S и T се ограничени множества и ако сите нивни елементи се позитивни, да се покаже дека и ST е ограничено множество; притоа:

а) $\inf ST = (\inf S)(\inf T)$; б) $\sup ST = (\sup S)(\sup T)$.

109. Да се покаже дека множеството

$$M = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in N,\ m<n\}$$

нема најголем ни најмал елемент. Да се најде $\sup M$ и $\inf M$.

110. За едно множество U од реални броеви велиме дека е отворено, ако за секое $x \in U$ постои отворен интервал (a,b) така што $x \in (a,b) \subseteq U$.

Да се покаже дека:

а) секој отворен интервал е отворено множество;

б) R и $\emptyset$ се отворени множества;

в) пресек на две отворени множества е пак отворено множество;

г) произволна унија на отворени множества пак е отворено множество;

д) множеството V е отворено, ако, и само ако, тоа е унија на отворени интервали.

111. Множеството F велиме дека е затворено, ако комплементот $U = R \setminus F$ е отворено. Да се покаже дека:

а) $\emptyset$ и R се затворени множества;

б) унија од две затворени множества е затворено множество;

в) пресек на произволен број затворени множества пак е затворено множество.

112. Нека затворениот интервал $[a,b]$ се содржи во унијата на отворените интервали (a_i,b_i). Да се покаже дека постојат конечно многу од тие интервали $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_n,b_n)$, такви што

$$[a,b] \subseteq (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup \ldots \cup (a_n,b_n).$$

113. Ако за секое позитивно ε во интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ постојат бесконечно многу членови на низата a_n, тогаш велиме дека a е точка на натрупување на дадената низа. Да се покаже дека секоја ограничена низа има барем една точка на натрупување, и дека една ограни-

чена низа е конвергентна ако, и само ако, има точно една точка на натрупување.

114. Да се покаже дека низата a_n е конвергентна ако, и само ако, е исполнет следниов услов:

$$(\forall \epsilon \in R^+)(\exists n_0 \in N)[n \geqslant n_0, k \geqslant 1 \Rightarrow |a_{n+k} - a_n| < \epsilon].$$

115. За една бескрајна десетична дропка велиме дека е чисто периодична ако сите децимали се повторуваат периодично;таквите дропки имаат облик: $m,(a_1 a_2 \ldots a_k)$. Приодичните дропки, кај кои некои децимали не се повторуваат, се нарекуваат нечисто периодични. Ако a и b се заемно прости природни броеви, да се одговори на прашањето во кој случај a/b е чисто периодична дропка, а кога нечисто периодична.

116. Дропките $\frac{239}{15}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{27}{32}$, $\frac{83}{112}$ да се претворат во периодични десетични дропки.

117. Десетичните дропки $8,(24)$, $0,23(45)$, $3,11(23)$ да се претворат во обични дропки, т.е. во облик a/b.

118. Да се покаже дека секој позитивен реален број x може да се претстави како граница на низа од облик

$$x_n = m + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \ldots + \frac{a_n}{b^n},$$

каде што m, a_n и b се цели броеви, при што $m \geqslant 0$, $0 \leqslant a_n < b$ и $b > 1$. Според тоа, секој реален број x може да се претстави како бесконечна b-адична дропка.

119. Да се покаже дека при претворањето на дропката a/c во десетична не е потребно ца се извршат побеќе од c постапки.

120. Дропките $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{14}$, да се изразат во бинарен систем, а потоа и како бескрајни периодични бинарни дропки. Бесконечните бинарни дропки $0,11011(101)$, $0,0101(1001)$, $0,(011)$ да се претворат во обични дропки.

121. Ако a, b и c се реални броеви различни од нула, да се одговори на прашањето: во кој случај е точно некое од равенствата:

а) $a^{-1} + b^{-1} = (a+b)^{-1}$; б) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = (a+b+c)^{-1}$?

122. Да се упростат изразите:

а) $\sqrt{75-12\cdot\sqrt{21}}$; б) $\sqrt{17-4\cdot\sqrt{9+4\cdot\sqrt{5}}}$; в) $\sqrt{5-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

123. Да се докаже дека

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

124. Да се упрости изразот:

а) $P(x)=\sqrt{x+2\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\cdot\sqrt{x-1}},\ x\geqslant 1;$

б) $P(x)=\sqrt{x+2\cdot\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\cdot\sqrt{2x-4}},\ x\in[2,4].$

125. Да се рационализира именителот во изразот:

а) $\frac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

126. Дали бројот $\sqrt[3]{4}$ може да се напише во облик $a+b\sqrt[3]{2}$, каде што $a,b\in Q$?

127. Да се докаже дека за секој природен број n се точни неравенствата:

а) $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}>2$; б) $n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}$; в) $1>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}$;

г) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n}$; д) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

128. Да се покаже дека за секој природен број n и секоја n-торка позитивни реални броеви е точно неравенството

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ .$$

129. Користејќи го резултатот од претходната задача, или директно, да се докаже точноста на следните неравенства:

а) $(a+b)\sqrt{ab}\geqslant 2ab$; б) $a+nb\geqslant(n+1)\sqrt[n+1]{ab^n}$;

в) $a+b+\alpha+\beta\geqslant 2\sqrt{(a+\alpha)(b+\beta)}$; г) $\sqrt{(a+\alpha)(b+\beta)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{\alpha\beta}$;

д) $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$; ѓ) $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$;

е) $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$; ж) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$;

з) $a^3+b^3+c^3\geqslant a^2b+b^2c+c^2a$,

каде што a, b, c, α, β се позитивни реални броеви, а n е природен број.

130. Да се определи поголемиот од броевите $\sqrt[n]{n}$ и $\sqrt[n+1]{n+1}$, а потоа да се најде најголемиот број во низата

$$\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\ldots,\sqrt[n]{n},\ldots\ .$$

131. Ако a_i, b_i $(i=1,2,\ldots,n)$ се било кои реални броеви, тогаш важи неравенството

$$|a_1b_1|+|a_2b_2|+\ldots+|a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}\ ,$$

познато како неравенство на Коши.

132. Ако r е рационален број поголем од 1 и $h \geqslant 0$, тогаш важи неравенството

$$(1+h)^r \geqslant 1 + rh\,,$$

познато како неравенство на Бернули.

133. Да се докаже неравенството

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}\,.$$

134. Да се покаже дека:

$$\log_a b > 0 \leftrightarrow [(a<1,\ b>1) \vee (0<a<1,\ 0<b<1)]\,.$$

135. Да се покаже дека:

а) $a>1 \rightarrow [x<y \leftrightarrow \log_a x < \log_a y]$;

б) $0<a<1 \rightarrow [x<y \leftrightarrow \log_a y < \log_a x]$.

136. Да се пресмета:

а) $3^{1+\log_3 6}$; б) $a^{1+\log_a b}$; в) $a^{2\log_a b}$; г) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$

137. Да се покаже дека:

а) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

б) $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \ \cdots\ \cdot \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} a_1 = 1$;

в) $\log_b a \cdot \log_c a = (\log_b a + \log_c a)\cdot \log_{bc} a$;

г) $\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \dfrac{1}{\log_{a^3} b} + \dfrac{1}{\log_{a^4} b} = 10 \log_b a$.

IV. РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

138. Да се провери дали се еквивалентни приложените парови равенки:

а) $x=2$, $x+\log(1-x^2) = 2+\log(1-x^2)$;

б) $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-3}{x-1}$, $(x-1)^2 = (x-2)(x-3)$;

в) $\log x^2 = 0$, $2\log x = 0$.

139. Да се одговори на прашањето, во кои случаи дадените парови равенки се еквивалентни:

а) $f(x)=0$, $f(x)\,g(x)=0$;

б) $f(x)=g(x)$, $f^2(x)=g^2(x)$;

в) $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)} = 0$, $\sqrt{f(x)\,g(x)} = 0$;

г) $\log[f(x)\cdot g(x)]=0$, $\log f(x)+\log g(x)=0$.

140. Нека a, b, c и d се четири реални броеви, такви што $ad-bc \neq 0$.

Да се покаже дека системот равенки $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ е еквивалентен со системот $af(x,y)+bg(x,y) = 0$, $cf(x,y)+dg(x,y) = 0$.

141. Нека K_f е множеството решенија на системот равенки

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0,\dots,f_k(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0,$$

а K_g на системот

$$g_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0,\dots, g_s(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0.$$

Да се определи со помош на K_f и K_g множеството решенија на системот

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0,\dots,f_k(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0,$$
$$g_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0,\dots,g_s(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0.$$

142. Нека a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} се дадени реални броеви , при што $a_{ii}\neq 0$. Да се покаже дека системот равенки

$$f_1(x_1,\dots,x_n) = 0, f_2(x_1,\dots,x_n) = 0, f_3(x_1,\dots,x_n) = 0$$

е еквивалентен со системот

$$a_{11}f_1(x_1,\dots,x_n) = 0, a_{12}f_1(x_1,\dots,x_n)+a_{22}f_2(x_1,\dots,x_n) = 0,$$
$$a_{13}f_1(x_1,\dots,x_n)+a_{23}f_2(x_1,\dots,x_n)+a_{33}f_3(x_1,\dots,x_n) = 0.$$

Да се обопшти овој резултат за случај на систем од m равенки со n непознати.

143. Со помош на Гаусовата метода, да се решат системите:

а) $\begin{cases} x+y+z+u=2 \\ 2x+y+z-u=0 \\ y+z+3u=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z+u=1 \\ x+y+2z+u=0 \\ x+y-z+u=3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x-y-z=-1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ѓ) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3+7x_4=1 \\ 2x_1+6x_2-3x_3+4x_4=2 \\ 4x_1+2x_2+13x_3+10x_4=0 \\ 5x_1+21x_3+13x_4=3 \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+x_4+4x_5=0 \\ 3x_1+x_2+4x_3+5x_4-x_5=0 \\ 5x_1-x_2+4x_3+11x_4+7x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+9x_3-2x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+11x_3-2x_4+13x_5=0 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n = 1 \\ (a+1)x_1+ax_2+\dots+ax_{n-1}+ax_n = 1 \\ ax_1+(a+1)x_2+\dots+ax_{n-1}+ax_n = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_1+ax_2+\dots+(a+1)x_{n-1}+ax_n = 1 . \end{cases}$

144. Да се решат системите:

а) $\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}+x_n=a_{n-1} \\ x_n+x_1=a_n \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=1 \\ x_1+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=n-1 \\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}=n \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}+x_n+x_1=0 \\ x_n+x_1+x_2=0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=1 \\ bx_1+ax_2+ax_3+\ldots+ax_{n-1}+ax_n=c_2 \\ bx_1+bx_2+ax_3+\ldots+ax_{n-1}+ax_n=c_3 \quad (a\neq b) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\ldots+bx_{n-1}+ax_n=c_n \end{cases}$

д) $\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\ldots+bx_n=c_1 \\ bx_1+ax_2+bx_3+\ldots+bx_n=c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\ldots+ax_n=c_n \end{cases}$
$(a\neq b$ и $a\neq(1-n)b)$

ѓ) $\begin{cases} x_1/2+1/x_1=x_2 \\ x_2/2+1/x_2=x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}/2+1/x_{n-1}=x_n \\ x_n/2+1/x_n=x_1 \end{cases}$.

145. Да се покаже дека, ако во системот

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

имаме $m<n$, тогаш тој систем има безброј многу решенија, или нема ниедно.

146. Да се покаже дека:

а) равенката $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$ има реални решенија за било кои дадени реални броеви a, b и c;

б) ако r и s се рационални броеви, тогаш равенката $x^2+(r+s/r)x+s=0$ има рационални решенија.

147. Ако α и β се решенија на равенката $x^2+px+q=0$ да се пресметаат: а) $1/\alpha^2+1/\beta^2$; б) $\alpha^7\beta^4+\beta^7\alpha^4$; в) $1/(2\alpha+\beta)^2+1/(2\beta+\alpha)^2$.

148. Да се определат страните на еден правоаголен триаголник, ако збирот на хипотенузата и едната катета е m, а збирот на хипотенузата и другата катета n. Да се изврши дискусија.

149. Два броја a и b земени во систем со основа x, имаат облик $a=504_x$, $b=304_x$. Да се определи бројот x, ако се знае дека

$$ab=106100_9.$$

150. Да се решат равенките:

а) $\sqrt{x^2+11}+x^2+11=42$; б) $x^4+1=2(1+x)^4$;

в) $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$; г) $12x^5+18x^4-45x^3-45x^2+18x+12=0$;

д) $x/a+b/x+b^2/x^2=1+b/a+b^2/a^2$; ѓ) $|x-1|+|x-3|+|2x-8|=9$;

е) $|||x-1|+1|+1|=2$; ж) $|x-1|+|x-2|=1$.

151. Да се решат неравенките:

а) $1/(x+1)+2/(x+3)-3/(x+2)<0$; б) $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}>0$;

в) $\left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|<1$; г) $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3$.

152. Да се определат најголемата и најмалата вредност на функцијата $f(x)=x/(x^2+1)$.

153. Да се решат равенките:

а) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$; б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$;

в) $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$; г) $\sqrt{a+x}-\sqrt{a/(a+x)}=\sqrt{2a+x}$;

д) $(\sqrt[4]{x}+\sqrt{1+x})(\sqrt[5]{x+32}+x)=1$; ѓ) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=a$;

е) $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=2$; ж) $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$,

каде што a и b се реални броеви.

154. Да се решат неравенките:

а) $\sqrt{(3x-1)/(2-x)}\geqslant 1$; б) $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{6x-x^2}>3$;

в) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}>a+b$; г) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}>\sqrt{a+b}$;

д) $(2+\sqrt[4]{x})(3+\sqrt[4]{x})\leqslant 6$ (a и b се реални броеви).

155. Да се решат равенките:

а) $10^x-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950$; б) $27^x+12^x=2\cdot 8^x$;

в) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$;

г) $5^{2+4+\cdots+2x}=0{,}04^{-28}$, при $x\in N$.

156. Да се решат равенките:

а) $\log_a x\cdot\log_b x=\log_a b\ (a,b\in R^+)$; б) $\log_2(x+1)^2+\log_2|x+1|=6$;

в) $\log 10+\frac{1}{3}\log(271+3^{\sqrt{2x}})=2$; г) $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=1$.

157. Да се решат системите:

а) $x+y=6,\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440$; б) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\ xy=8$;

в) $y^z=x^{z/3},\ x^z=y^{z/3},\ z=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}$;

г) $\log_a x-\log_{a^2} y=m,\ \log_{a^2} x-\log_{a^3} y=n$.

158. Да се решат графички системите равенки и неравенки:

а) $y=x^2-x-1,\ xy=2$; б) $x^2-2x+y^2=0,\ y=x-2$;

в) $2y-3x>4,\ 2x-y>8$; г) $y<1/x,\ y<x,\ y>1/2$;

д) $|3x-2y|\leqslant 2,\ |2x-3y|\leqslant 2,\ |x|=1$; ѓ) $y>2^x,\ y<\log_2 x$.

159. Да се решат графички равенките:

а) $\sqrt{x}=2x^2-1$; б) $2^x-x=0$; в) $\sqrt{x+2}=\sqrt{8-x^2}$;

г) $x^3+2x^2+x=20$; д) $x^4-2x^2+6x+8=0$.

V. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ И ПОЛИНОМИ

160. Да се пресмета: i^n, $(1+i)^n$, $(1+i)^9/(1-i)^7$.

161. Да се пресметаат изразите:

а) $(az+bz^2)(az^2+bz)$; б) $(a+b+c)(a+bz+cz^2)(a+bz^2+cz)$,

каде што $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

162. Да се докаже равенството $3(1+i)^{100}=4i(1+i)^{98}-4(1-i)^{96}$.

163. Да се решат следните равенки и системи од равенки:

а) $(1+i)x=(2-i)x+3i$; б) $\frac{1}{i+x}+i=\frac{2+i}{i}$;

в) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$ г) $\begin{cases}x+iy-2z=10\\x-y+3iz=30\\ix+3iy-(1+i)z=30.\end{cases}$

164. Да се определи комплексниот број x така што:

а) $\overline{x}=1/x$; б) $\overline{x}=x^2$; в) $\overline{x}=x^3$; г) $\overline{x}=x^{n-1}$.

165. Броевите $1+i$, $3-i$, $-1/2-i\sqrt{3}/2$ да се претставаат во тригонометриска форма и, користејќи го тоа, да се пресметаат степените: $(1+i)^n$, $(3-i)^n$, $(-1/2-i\sqrt{3}/2)^n$.

166. Да се покаже дека $\left(\frac{1+i\,tg\phi}{1-i\,tg\phi}\right)^n=\frac{1+i\,tgn\phi}{1-i\,tgn\phi}$.

167. Да се пресмета $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

168. Ако $z=\cos x+i\sin x$, да се изразат $\sin x$, $\cos x$, $tg x$ и $ctg\,x$ со помош на z.

169. Ако $z+1/z=2\cos\phi$, тогаш $z^n+1/z^n=2\cos n\phi$.

170. Да се изразат: а) $\sin^3 x$; б) $\sin^4 x$; в) $\sin^5 x$; г) $\sin^6 x$, со помош на $\sin mx$, $\cos mx$.

171. Користејќи ја формулата на Моавр, да се изразат $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$ (и воопшто, $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$) со помош на $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

172. Ако $z=x+iy$ (x и y се реални броеви), тогаш e^z се дефинира со: $e^z = e^x(\cos y+i\sin y)$. Да се покаже дека e^z ги има следните особини:

а) $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; б) $e^{-z} = 1/e^z$; в) $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$;

г) $\cos\alpha = (e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})/2$; д) $\sin\alpha = (e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})/2i$.

173. Користејќи ги резултатите од претходната задача, да се упростат изразите:

а) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+ \dots +\cos n\alpha$; б) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+ \dots +\sin n\alpha$.

174. Да се најдат сумите:

а) $1+a\cos x+a\cos 2x+ \dots +a^n\cos nx$; a=2

б) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\dots+\sin^2 nx$;

в) $\sin^2 x+\sin^2 3x+\dots+\sin^2(2n-1)x$.

175. Да се пресметаат сите вредности на корените:

а) $\sqrt[3]{2-2i}$; б) $\sqrt[3]{1+i}$; в) $\sqrt[6]{(1-i)/(1+i\sqrt{3})}$.

176. Да се определи грешката во следното расудување:

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}=i\cdot i=-1.$$

177. Да се покаже дека:

а) $\sqrt[n]{z_1}\,\sqrt[n]{z_2}=\sqrt[n]{z_1 z_2}$; б) $\sqrt[n]{z}\subset\sqrt[kn]{z^k}$, $z\neq 0$.

178. Да се пресмета сумата

$$1+\epsilon+\epsilon^2+\dots+\epsilon^{n-1},$$

каде што ϵ е примитивен корен на единицата од степен $2n$, т.е. $\epsilon^{2n}=1$, но $\epsilon^m\neq 1$ за $0<m<2n$.

179. Нека

$$S_m=\sum_{k=1}^{n} z_k^m,$$

каде што $m\in N$, а z_k, $k=1,2,\dots,$, се корени на равенката $z^n=1$. Да се докаже дека

$$S_m=\begin{cases} n, & \text{ako } n\mid m\\ 0, & \text{ako } n\nmid m.\end{cases}$$

180. Да се докаже дека сите корени на равенката

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = a+ib, \qquad a^2+b^2=1,$$

се реални.

181. Да се решат равенките:

а) $(1+i)x^6+(1/2-i\sqrt{3}/2)=0$; б) $x^8-2x^4-1=0$;

в) $x^2-(3+2i)x+1+3i=0$; г) $x^4+(1-i)x^2-i=0$.

182. Да се решат равенките:

а) $(x+1)^n-(x-1)^n = 0$; б) $x^{2n}-x^{2n-1}- \dots -x+1 = 0$;

в) $x^n-\binom{n}{1}ax^{n-1}-\binom{n}{2}a^2x^{n-2}- \dots -a^n = 0$.

183. Да се докаже дека, ако $\cos\alpha+i\sin\alpha$ е решение на равенката

$$x^n+a_1x^{n-1}+ \dots +a_n = 0$$

и $a_1,a_2,\dots,a_n\in R$, тогаш

$$a_1\sin\alpha+a_2\sin 2\alpha+\dots+a_n\sin n\alpha = 0.$$

184. Да се решат равенките:

а) $x^3+12x+63 = 0$; б) $x^3+3x-i = 0$;

в) $x^3-3abx+a^3+b^3 = 0$; г) $x^3+3ix^2-3(1+2i)x+10-5i = 0$.

185. Да се решат равенките:

а) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8 = 0$; б) $x^4-2x^3+3x^2-2x-2 = 0$;

в) $x^4+2x^3-2x^2+6x-15= 0$; г) $x^4+bx^3+cx^2+(1-c)x+(b+c) = 0$.

186. Да се определат броевите a и b, така што полиномот $x^3+3ax+b$ да се дели без остаток со полиномот x^2+x+a.

187. Да се покаже дека остатокот што се добива при делењето на полиномот $f(x)$ со $x-x_0$ е еднаков со $f(x_0)$. (Овој резултат е познат под името теорема на Безу.)

188. За кои вредности на a и b полиномот $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ се дели со полиномот x^2-3x+2?

189. Даден е полиномот

$$f(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+ \dots +a_1x+a_0.$$

а) Да се покаже дека, ако $f(x)$ е неразложлив, тогаш и полиномот

$$g(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \dots +a_{n-1}x+a_n$$

е неразложлив.

б) Ако остатоците при делењето на $f(x)$ со $x-a$, $x-b$, $x-c$ се: A, B, C, да се определи остатокот на $f(x)$ со $(x-a)(x-b)(x-c)$.

190. Нека $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ е даден полином, а x_0 даден комплексен број и нека ги определиме броевите $b_{n-1},b_{n-2},\dots,b_1,b_0,b$ на следниов начин: $b_{n-1}=a_n$, $b_{n-2}=x_0b_{n-1}+a_{n-1}$, $\dots$, $b_0=x_0b_1+a_1$, $b=x_0b_0+a_0$. Да се покаже дека $b=f(x_0)$ и дека $f(x)=(b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0)(x-x_0)+b$.

Определувањето на броевите b_ν се врши погодно со помош на следнава така наречена Хорнерова шема:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots a_1$	a_0
x_0	a_n	$x_0 b_{n-1}+a_{n-1}$	$\ldots x_0 b_1+a_1$	$x_0 b_0+a_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots b_0$	b

191. Со помош на Хорнеровата шема, да се определи остатокот и количникот што се добива при делењето на:

а) $x^6-2x^4+3x^3+x-1$ со $x+1$; б) $x^7+2x^6-3x+4x^4+3x^3-1$ со $x+2$.

192. Ако:

а) $f(x)=3x^5-25x^3+12x^2-14x+5$, да се пресметаат $f(3)$, $f(1,1)$ и $f(-2,5)$;

б) $f(x)=x^5+(1-2i)x^4-(3+i)x^2+7i$, да се пресмета $f(-1+2i)$.

193. Да се определи најголемиот заеднички делител на полиномите:

а) $f(x)=2x^5-3x^4-5x^3+x^2+3$, $g(x)=3x^4+2x^3-3x^2-5x-2$;

б) $f(x)=x^5-x^4+2x^3+1$, $g(x)=x^5+x^4+2x^2-1$;

в) $f(x)=x^4+6x^3+17x^2+24x+12$, $g(x)=x^3-2x^2-13x-10$.

194. Нека $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ се три дадени полиноми. Да се покаже дека постојат полиноми $f(x)$ и $g(x)$, такви што $a(x)f(x)+b(x)g(x)=c(x)$, ако, и само ако, најголемиот заеднички делител на $a(x)$ и $b(x)$ е делител и на $c(x)$.

195. Да се определат полиномите $f(x)$ и $g(x)$ во смисла на претходната задача, ако:

а) $a(x)=x^2-1$, $b(x)=x^3+2$, $c(x)=3-x^2$;

б) $a(x)=x^2+x-2$, $b(x)=x^3-1$, $c(x)=x^4+x$.

196. Каков услов треба да задоволуваат коефициентите на полиномот x^3+ax^2+bx+c за:

а) едниот корен да биде збир на другите два;

б) производот на два корени да биде еднаков на квадратот на третиот корен.

197. Во кој случај полиномот x^5+ax^3+b има двоен корен $\neq 0$?

198. Да се покаже дека полиномот $1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n!$ нема сложени корени.

199. Во кој случај полиномот $f(x)$ се дели со $f'(x)$?

200. Даден е полиномот $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Ако x_1, x_2, x_3 се нули на $f(x)$, да се определи полиномот $g(y)$, чии нули се $y_1=x_2+x_3$, $y_2=x_3+x_1$ и $y_3=x_1+x_2$.

201. Даден е полиномот $f(x)=x^3+px^2+qx+r$.

а) Да се определи условот при кој нулите на полиномот образуваат геометриска прогресија.

б) Да се примени овој резултат за наоѓање корените на равенката $8x^3-42x^2+63x-27=0$.

202. Какви треба да бидат p и q за да има равенката $x^2+px+q=0$ корени p и q?

203. Нка $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ се корените на равенката $x^n=1$, различни од единицата. Да се определи:

а) $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$;

б) $g(x)=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_{n-1}}$ и да се покаже дека $g(1)=\frac{n-1}{2}$;

в) $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1})$;

г) $(2-x_1)(2-x_2)\cdots(2-x_{n-1})$.

204. Ако $x_i, i=1,2,3,4,5,$ се корените на равенката

$$x^6+3x^5-12x^4-30x^3+21x^2+3x-2=0,$$

да се најде

$$S_4=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+x_5^4+x_6^4.$$

205. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се нулите на полиномот

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

да се пресметаат следните производи:

а) $(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_n+1)$;

б) $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\cdots(x_n^2-1)$;

в) $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_n^2+1)$.

206. Да се рационализира именителот на изразот:

а) $1/(1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4})$; б) $7/(1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2})$;

в) $(\alpha^2-3\alpha-1)/(\alpha^2+2\alpha-1)$, α е корен на полиномот x^3+x^2+3x+4;

г) $\alpha/(\alpha+1)$, ако α е корен на полиномот x^3-3x+1.

207. Да се најдат корените на равенката

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,\ n\geq 2,$$

ако тие образуваат аритметичка прогресија.

208. Даден е полиномот

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Да се најде:

а) сумата од квадратите на неговите корени;

б) сумата од кубовите на неговите корени.

209. Да се определат рационалните корени на полиномите:

а) $x^3-6x^2+15x-14$; б) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$.

210. Нека $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ се цели броеви. Да се покаже дека секој рационален корен на полиномот

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

е цел број.

211. Да се пресметаат приближно корените на полиномите:

а) x^3-x+1; б) x^3+3x^2-1; в) x^4-5x^2+8x-8.

212. Нека страните на еден триаголник се корени на полиномот x^3+ax^2+bx+c. Да се пресмета плоштината на тој триаголник.

VI. МАТРИЦИ И ДЕТЕРМИНАНТИ

213. Ако векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ се определени со: $\vec{a}=(2,5,1,3)$, $\vec{b}=(10,1,5,10)$ и $\vec{c}=(4,1,-1,1)$, да се определи векторот $\vec{d}$ што го задоволува равенството: $3(\vec{a}-\vec{d})+2(\vec{b}+\vec{d}) = 5(\vec{c}+\vec{d})$.

214. Да се провери дали дадените системи вектори се линеарно зависни:

а) $\vec{a}=(4,-2,6)$, $\vec{b}=(6,-3,9)$;

б) $\vec{a}=(5,4,3)$, $\vec{b}=(3,3,2)$, $\vec{c}=(8,1,3)$;

в) $\vec{a}=(1,0,0,2,5)$, $\vec{b}=(0,1,0,3,4)$, $\vec{c}=(0,0,1,4,7)$, $\vec{d}=(2,-3,4,11,12)$.

215. Да се покаже дека ако $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ се три некомпланарни вектори од тродимензионалниот простор, тогаш секој друг вектор може да се изрази на единствен начин како нивна линеарна комбинација.

216. Да се најде рангот на системот вектори:

а) $\vec{a}=(4,-1,3,-2)$, $\vec{b}=(8,-2,6,-4)$, $\vec{c}=(3,-1,4,-2)$, $\vec{d}=$([illegible],[illegible],8,-4);

б) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(2,3,4)$, $\vec{c}=(3,2,3)$, $\vec{d}=(4,3,4)$, $e=(1,1,1)$.

217. Дадени се векторите $(1,2,1)$, $(-1,1,2)$, $(2,1,1)$. Да се докаже дека тие образуваат база во R_3. Векторите:

а) $(-1,4,3)$; б) $(1,5,6)$; в) $(4,-1,-1)$,

да се изразат како линеарна комбинација од овие базни вектори.

218. Векторот $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ од R_n да се изрази како линеарна комбинација на векторите

$$\vec{a}_1=(1,0,\dots,0),\ \vec{a}_2=(1,1,0,\dots,0),\dots,\vec{a}_n=(1,1,\dots,1).$$

219. Нека $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_m$ е систем линеарно зависни n-димензионални вектори, и нека $\vec{b}$ е нивна линеарна комбинација. Да се покаже дека постојат безброј многу m-торки $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ (т.е. m-димензионални вектори), такви што $\vec{b}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\dots+x_m\vec{a}_m$.

220. Нека го разгледаме системот од n линеарни равенки со n непознати:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=b_i,\quad i=1,2,\dots,n$$

и нека ставиме $\vec{a}_j=(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{nj})$, $\vec{b}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$. Да се покаже дека ако системот вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ е независен, тогаш дадениот систем равенки има една, и само една, n-торка $(x_1,\dots,x_n)$ решение, и дека тој систем има безброј многу решенија или ниедно, ако системот вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ е зависен.

221. Нека $n<k$ и нека:

$$\vec{a}_1=(x_{11},x_{12},\dots,x_{1n},\dots,x_{1k}),\dots,\vec{a}_m=(x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mn},\dots,x_{mk})$$
$$\vec{b}_1=(x_{11},x_{12},\dots,x_{1n}),\ \dots\ ,\vec{b}_m=(x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mn}).$$

Да се покаже дека од независноста на $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_m$ следува независност на $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_m$, а од зависноста на $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_m$ следува зависноста и на $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_m$. На еден конкретен пример да се уочи дека може да се случи системот $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_m$ да е независен, а $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_m$ зависен.

222. Нека ги разгледаме следните пресликувања f, g, h и k од R_3 во R_3: $f(x,y,z)=(x,y,0)$, $g(x,y,z)=(0,0,z)$, $h(x,y,z)=(y,x,z)$ и $k(x,y,z)=(z,y,x)$. Да се покаже дека сите четири пресликувања се линеарни и да се определат матриците што кореспондираат на тие пресликувања, како и производите на тие матрици.

223. Матрицата на линеарното пресликување $f(x)$ спрема базата

$$\vec{e}_1=(1,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1),$$

е

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&-2\\-1&3&2\end{bmatrix}.$$

Во кои вектори се трансформираат векторите

$$\vec{a}_1=(2,2,3),\ \vec{a}_2=(-1,2,-2),\ \vec{a}_3=(3,1,2)$$

при пресликувањето $f(x)$?

224. При базата $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$ линеарното пресликување f ги пресликува векторите $(1,2,1)$, $(2,0,1)$, $(1,0,1)$ по ред во векторите $(4,2,5)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$. Да се најде матрицата на пресликувањето f.

225. Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да се најдат матриците:

а) $A + B$; б) $2A - 3B$.

226. Да се пресметаат производите AB и BA таму каде што тоа е можно, ако:

а) $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$; г) $A=\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

д) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; ѓ) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$.

227. Дадени се матриците:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека $AB = AC$.

228. Дадена е матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да се најдат матриците $f(A)$ и $g(A)$, каде што $f(x)=2x^2-5x+3$, $g(x) = x^3-6x-2$.

229. Да се докаже дека матрицата $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ја задоволува равенката

$$x^2-(a+d)x+ad-bc = 0.$$

230. Да се најдат сите матрици од втор ред, кои ја задоволуваат равенката $x^2-ax+b = 0$.

231. За една квадратна матрица $A=[a_{ij}]$ со ред n велиме дека е дијагонална, ако $a_{ij}=0$ за $i\neq j$. Ако B е произволна квадратна матрица со ред n, да се покаже дека $AB=[a_{ii}b_{ij}]$ и $BA=[b_{ij}a_{jj}]$.

232. Да се определат сите квадратни матрици $A=[a_{ij}]$ од трет ред кои ја имаат особината:

$$\text{а) } A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}A;\quad \text{б) } A\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}A.$$

233. Да се покаже дека сите матрици кои се комутативни со матрицата $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ се комутативни и меѓу себе.

234. Да се покаже дека секоја матрица комутативна со $D=\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}$ може да се напише во облик $aE+bD$.

235. Ако A е дијагонална матрица од ред $n\times n$, така што $a_{ii}\neq a_{jj}$ $(i\neq j)$, да се најде множеството од сите матрици од ред $n\times n$ кои се комутативни со A.

236. Каков облик треба да има квадратната матрица A од n-ти ред за да биде $AX=XA$ за секоја матрица X од n-ти ред.

237. Ако $A^2=A$, матрицата A се вика идемпотентна.

а) Да се покаже дека се идемпотентни следниве матрици:

$$\begin{bmatrix}2&1\\-2&-1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-3&-6\\2&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}.$$

б) Ако A и B се идемпотентни матрици од ист ред, да се покаже дека и A+B е идемпотентна ако, и само ако, $AB+BA=0$.

238. Да се најдат сите квадратни матрици A од втор ред, така што:

а) $A^2=0$; б) $A^2=E$.

239. Да се изврши степенувањето:

$$\text{а) } \begin{bmatrix}x&1\\0&x\end{bmatrix}^n;\quad \text{б) } \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^n;\quad \text{в) } \begin{bmatrix}\cos x&\sin x\\-\sin x&\cos x\end{bmatrix}^n;\quad \text{г) } \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^n.$$

240. Да се покаже дека за произволни матрици A и B од ред $n\times n$ е точно равенството $tr(AB)^m=tr(BA)^m$.

241. Да се покаже дека не постојат квадратни матрици A и B, такви што $AB-BA=E$.

242. За матрицата $A=[a_{ij}]$ велиме дека е симетрична, ако $a_{ij}=a_{ji}$, т.е. ако $A=\tilde{A}$, а $B=[b_{ij}]$ е кососиметрична ако $b_{ij}=-b_{ji}$, т.е. ако

$B = -\tilde{B}$. Да се покаже дека за секоја матрица A, матрицата $(A+\tilde{A})/2$ е симетрична, а $(A-\tilde{A})/2$ кососиметрична. Од овде да се извлече заклучок дека секоја квадратна матрица A е збир на една симетрична и една кососиметрична матрица.

243. Ако A и B се кососиметрични матрици од ист ред, тогаш:

а) AB е симетрична ако, и само ако, $AB = BA$;

б) AB е кососиметрична ако, и само ако, $AB = -BA$.

244. Сметајќи дека 1,2,3,4,5,6,7,8,9 е почетна положба, да се определат j и k, така што:

а) пермутацијата $1,2,7,4,j,5,6,k,9$ е парна;

б) пермутацијата $1,2,j,5,k,4,8,9,7$ е непарна.

245. Да се определи бројот на инверзиите во пермутацијата:

а) $1,2,7,8,9,10,3,4,6,5$;

б) $1,3,5,\ldots,2n-1,2,4,6,\ldots,2n$;

в) $3,6,\ldots,3n,1,4,\ldots,3n-2,2,5,\ldots,3n-1$.

246. Да се пресметаат детерминантите:

$$\begin{vmatrix} 1+\;2 & 2-\;3 \\ 2+\;3 & 1-\;2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 11 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & a & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

247. Да се покаже дека:

а) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ n & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} n!; \quad б) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

в) $\det A = (n-1)!$, каде што $A = [a_{ij}]$ е квадратна матрица од n-ти ред определена со $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 1$, за $i \neq j$.

г) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} = 12; \quad д) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 120;$$

ѓ) броевите $x=-a+b+c$, $x=a-b+c$, $x=a+b-c$, $x=-a-b-c$, се корени на равенката

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

248. Да се докаже точноста на равенствата:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(x-1)^{n-1}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & o & o & \dots & o & o & o \\ o & a & b & o & \dots & o & o & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o & o & o & \dots & o & a & b \\ b & o & o & o & \dots & o & o & a \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1}b^n$,

каде детерминантите се од n-ти ред.

249. Една детерминанта се вика триаголна, ако сите елементи над или под главната дијагонала се нули. Вредноста на таква детерминанта е еднаква на производот од елементите на главната дијагонала.

Сведувајки ги на триаголни, да се пресметаат следните детерминанти:

а) $D_n = \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a+x \\ a & a & \dots & a+x & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+x & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & \dots & x & 2 & x \\ x & x & \dots & 3 & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & n & \dots & x & x & x \\ x & x & \dots & x & x & x \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$

250. Да се пресметаат детерминантите:

а) $D_n = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{vmatrix}$; б) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}$;

в) $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & \dots & x^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \dots & x^n \end{vmatrix}$

251. Ако A е косо симетрична матрица од ред $(2n+1)\times(2n+1)$, тогаш $\det A = 0$.

252. За матриците

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

да се определат нивните адјунгирани матрици.

253. Да се провери дали дадените матрици се несингуларни и во потврден случај да се определат нивните инверзни матрици.

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{д) } A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{ѓ) } A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

254. Да се решат матричните равенки:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{д) } X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{ѓ) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

255. Матрицата A се вика ортогонална, ако $\tilde{A}A = E$. Да се покаже дека:

а) матрицата $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ е ортогонална;

б) производ на две ортогонални матрици е ортогонална матрица;

в) ако A е ортогонална матрица, тогаш $\det A = \pm 1$.

256. Да се покаже дека ако A е несингуларна матрица од ред n, а B произволна матрица од ред n, тогаш е точно равенството

$$(A^{-1}BA)^k = A^{-1}B^kA.$$

257. Да се покаже дека ако A е квадратна матрица со особината $A^k=0$, тогаш матрицата $E-A$ е инверзибилна, и дека

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\dots+A^{k-1}.$$

258. Ако A и B се инверзибилни квадратни матрици, да се покаже дека:
$$AB=BA \Leftrightarrow AB^{-1}=B^{-1}A \Leftrightarrow A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

259. Да се покаже дека потребен и доволен услов системот линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

да има барем едно нетривијално решение $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, т.е. решение каде што $x_\nu\neq 0$ барем за едно ν, е детерминантата на тој систем да е нула.

260. Да се реши равенката $AX=B$, ако:

$$\text{а) } A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-2&4\\0&2&-3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2\\-5\\2\end{bmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&-1&2&-1\\1&0&1&2\\2&1&-1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2\\5\\3\\-6\end{bmatrix}.$$

Во секој од овие два случаја да се објасни со кој систем линеарни равенки е еквивалентна дадената матрична равенка.

261. Да се определи равенката на: а) круг што минува низ три дадени точки (x_i,y_i), $i=1,2,3$; б) рамнина што минува низ три дадени точки (x_i,y_i,z_i), $i=1,2,3$.

262. Да се пресметаат ранговите на следниве матрици:

$$\text{а) }\begin{bmatrix}5&-4&4&2\\-2&0&-8&5\\-1&2&2&-3\end{bmatrix};\qquad \text{б) }\begin{bmatrix}1&3&-2\\1&5&-2\\1&1&6\end{bmatrix};$$

$$\text{в) }\begin{bmatrix}1&2&4&0&-2\\-2&-3&-1&1&0\\0&1&7&1&-4\\-2&-2&6&2&-4\end{bmatrix};\ \text{г) }\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}.$$

263. Да се решат системите:

$$\text{а) }\begin{cases}ax+y=1\\x+y=2;\\x-y=a\end{cases}\ \text{б) }\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=a;\\x+y+az=a^2\end{cases}\ \text{в) }\begin{cases}(a+b)(x+y)-cz=a-b\\(b+c)(y+z)-ax=b-c\\(c+a)(z+x)-by=c-a\end{cases}.$$

264. Да се решат системите равенки:

а) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 = 1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x = -1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x = 3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3 = 2 \end{cases}$

265. Во кој случај n прави линии: $a_ix+b_iy+c_i=0$, $i=1,2,\dots,n$, минуваат низ една точка. Да се одговори на анлогно прашање кога n рамнини минуваат низ: а) една точка, б) една права.

266. Со помош на теоремата на Хамилтон-Кели, да се определат матриците што се́ инверзни на матриците дадени во задачата 253.

267. Во кој случај минималниот полином на една матрица A има степен 1?

268. Нека A е квадратна матрица од втор ред и нека $A^k=0$ за некое $k\geqslant 1$. Да се покаже дека $A^2=0$.

269. Да се определат минималните полиноми на матриците:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

270. Нека C е несингуларна матрица, и нека $B=C^{-1}AC$. Да се докаже дека A и B имаат исти карактеристични полиноми.

271. Нека A е квадратна матрица од ред n и нека $A^k = 0$ за некој природен број k. Да се докаже дека $A^n = 0$.

VII. АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ

272. Во множеството $M=\{a,b,c,d\}$ се определени релациите α,β,γ и δ на следниов начин:

$\alpha=\{(a,b),(b,c),(b,a)\}$; $\beta=\{(a,b),(b,a)\}$;

$\gamma=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,c),(a,d),(b,d)\}$;

$\delta=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$.

Да се испитаат особините на дефинираните релации.

273. Нека S е множеството прави од една рамнина и нека $a\alpha b$ означува дека правите a и b немаат заеднички точки. Да се покаже дека α е нерефлексивна и симетрична релација, но дека таа релација не е транзитивна. Да се покаже дека релацијата β, определена со: $a\beta b \Leftrightarrow a\alpha b \vee a=b$, е еквивалентност во S.

274. Кои од следниве релации во N

а) $a\alpha b \leftrightarrow a+b$ е парен број;

б) $a\beta b \leftrightarrow ab=n^2$, за некој $n\in N$;

в) $a\gamma b \leftrightarrow a$ и b се потполни квадрати;

г) $a\delta b \leftrightarrow |a-b|=7k,\ k\in N^0$;

д) $a\rho b \leftrightarrow |a-b|\leqslant 3$,

се релации за еквивалентност? Да се определат класите од еквивалентни елементи.

275. Во множеството од сите реални низи е дефинирана релација ρ со:

$$(a_n)\,\rho\,(b_n) \leftrightarrow a_n-b_n \to 0,\quad n\to\infty.$$

Да се испитаат особините на оваа релација.

276. Нека f е пресликување од множеството X во Y и нека ставиме $x_1\,\alpha\,x_2 \leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$. Да се покаже дека α е еквивалентност во X.

277. Нека α е рефлексивна и транзитивна релација во S и нека ставиме $x\,\beta\,y \leftrightarrow x\,\alpha\,y \wedge y\,\alpha\,x$. Да се покаже дека β е релација за еквивалентност во S.

278. Во множеството на природните броеви определуваме релација $\textcircled{<}$ со: $x \textcircled{<} y \leftrightarrow x\neq y$ и $x\,|\,y$. Да се покаже дека $\textcircled{<}$ е делумно подредување во N. Дали релацијата $\textcircled{<}$ е делумно подредување и во Z?

279. Да се покаже дека ако и двете релации α и β ја имаат некоја од особините: а) рефлексивност; б) симетричност; в) транзитивност; г) нерефлексивност; д) антисиметричност, тогаш истата особина ја има и нивниот пресек. Со конкретен пример да се покаже дека унија на две транзитивни релации не мора да биде транзитивна.

280. Дадено е множеството $M=\{a,b,c\}$. Колку релации ρ можат да се дефинираат во M, такви што да се: а) рефлексивни; б) рефлексивни и симетрични; в) релации за еквивалентност; г) рефлексивни, антисиметрични и транзитивни?

281. Да се покаже дека постојат 2^{n^2-n} рефлексивни релации во едно множество со n елементи, и $2^{n(n+1)/2}$ симетрични релации.

282. Нека $f(n)$ е бројот на еквивалентностите во едно множество со n елементи. Да се докаже точноста на следното рекурзивно равенство:

$$f(n+1) = 1+nf(1)+\binom{n}{2}f(2)+\binom{n}{3}f(3)+\ \dots\ +\binom{n}{n}f(n).$$

283. Во множеството на природните броеви се определени операциите $\circ$, $\odot$, $\square$ и $\bullet$ со:

а) $x\bullet y=x+y+1$; б) $x\circ y=2xy$; в) $x\square y=2x+y$; г) $x\bullet y=x+y+xy$.
Да се испитаат особините на добиените групоиди $N(\bullet)$, $N(\circ)$, $N(\square)$ и $N(\bullet)$.

284. Во множеството Q од рационалните броеви се дефинирани операциите $\bullet$, $\circ$, Δ и $\square$ со:

а) $a\bullet b = (a+b)/2$; б) $a\circ b = a(a+1)/2 + b(b+1)/2$;

в) $a\Delta b = a^2-2ab+b^2$; г) $a\square b = a^3+b^3-3ab$.

Да се испитаат особините на групоидите $Q(\bullet)$, $Q(\circ)$, $Q(\Delta)$, $Q(\square)$.

285. Нека S е множеството ненегативни рационални броеви од облик m,a, каде што $m \geq 0$, $0 \leq a \leq 9$. Операцијата множење "$\bullet$" се определува на обичен начин, со тоа што ако се добие резултат s,ab за $b<5$ децималата b се изоставa, т.е. се зема бројот s,a, а за $b\geq 5$ наместо s,ab се зема бројот $s,a+0,1$. Да се испитаат особините на операцијата "$\bullet$".

286. Ако групоидот G е конечен, како може од неговата шема да се заклучи дека:

а) тој групоид е комутативен;

б) во G постои неутрален елемент?

Тоа да се илустрира на следниве примери:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	c	a	c
d	d	d	c	d

	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	c
c	c	c	b

,

	x	y	z	u
x	x	y	z	u
y	x	y	z	u
z	z	x	y	u
u	u	x	y	z

.

287. Нека $S=P(M)$ е партитивното множество на множеството M. Да се провери дали во групоидите $S(\cup)$, $S(\cap)$, $S(\setminus)$ постојат неутрални елементи.

288. Во непразното множество S се дефинирани операциите $\bullet$ и $\circ$ со: $x\bullet y=x$, $x\circ y=y$. Да се покаже дека групоидите $S(\bullet)$ и $S(\circ)$ се полугрупи, но дека ниеден од нив не е комутативен ако S има повеќе од еден елемент. Дали некоја од тие полугрупи има неутрален елемент?

289. Нека G е даден групоид и нека определиме нова операција $\bullet$ со: $x\bullet y=yx$. Да се покаже дека ако еден од групоидите $G(\bullet)$, $G(\cdot)$ е: а) комутативен; б) асоцијативен; в) групоид со неутрален елемент, тогаш истата особина ја има и другиот.

290. Нека G е групоид во кој е точно равенството

$$(xy)(uv) = (xu)(yv), \text{ за било кои } x,y,u,v\in G.$$

Да се покаже дека ако во G постои неутрален елемент, тогаш тој групоид е комутативна полугрупа.

291. Нека G_1 и G_2 се два групоида и нека во $G = G_1 \times G_2$ определиме операција со: $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$. Да се покаже дека групоидот G има некоја од особините а), б), в) од задачата 289, ако, и само ако, и двата групоида G_1, G_2 ја имаат таа особина.

292. Нека $G(*)$ е групоид и A, B непразни подмножества од G. Со $A * B$ ќе го означиме подмножеството од G што ги содржи сите производи од облик $a * b$, каде што $a \in A$, $b \in B$. На тој начин во партитивното множество $S = P(G)$ определуваме операција $*$. Да се покаже дека ако еден од групоидите $G(*)$, $S(*)$ има некоја од особините спомнати во задачата 289, тогаш истата особина ја има и другиот групоид.

293. Во множеството на сите парови (x,y) од реални броеви е дефинирана операцијата $\circ$ со:

$$(x,y) \circ (u,v) = (x,v).$$

Да се испитаат особините на операцијата $\circ$.

294. Во множеството

$$R_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in R\}$$

е дефинирана операција $\circ$ со:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \circ (b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$
$$= (a_1 + b_1, a_1 + a_2 + b_1 + b_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Да се испитаат особините на оваа операција.

295. Да се испита дали множеството M од сите подредени тројки од рационални броеви различни од $(0,0,0)$ е групоид по однос на операцијата $*$:

$$(a,b,c) * (x,y,z) = (ax + bz + cy,\ az + by + cx,\ ay + bx + cz).$$

296. Во множеството $T = P(M \times M)$ на сите релации во множеството M, е определена операција $\circ$ со:

$$x\, \alpha \circ \beta\, y \Leftrightarrow (\exists z \in M)\, x \alpha z \wedge z \beta y.$$

Да се покаже дека T е полугрупа со неутрален елемент по однос на операцијата $\circ$.

297. Да се провери дали се изоморфни групоидите определени со шемите:

$$\text{а)}\ \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & c \\ \hline a & a & c & b \\ b & a & c & c \\ c & b & a & b \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & x & y & z \\ \hline x & x & z & y \\ y & x & z & z \\ z & y & x & y \end{array}\ ;\quad \text{б)}\ \begin{array}{c|cc} \cdot & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c|cc} \cdot & x & y \\ \hline x & x & y \\ y & x & y \end{array}\ ;\quad \text{в)}\ \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array}\ .$$

298. Нека во множеството $G=\{e,a,b\}$ определиме операција со шемата 1). Да се покаже дека G е комутативна група.

299. Да се провери дали групоидот определен со шемата 2)е група.

1)

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

2)

	e	a	b	c
e	e	e	a	b
a	a	b	e	c
b	b	b	c	e
c	a	b	c	e

300. Да се определат сите пермутации на множеството $M=\{1,2,3\}$, а потоа и мултипликативната шема на групата $M!$.

301. Да се докаже дека множеството

$$G = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} \;\middle|\; m,n\in Z \right\}$$

е група по однос на операцијата множење на реалните броеви.

302. Нека во Z_m ги избереме оние членови што се заемно прости со m и нека множеството формирано од нив го означиме со R_m. Да се докаже дека R_m е група по однос на операцијата множење mod m.

√303. Да се покаже дека множеството $G=\{x \mid x\in(-1,1)\}$ е група по однос на операцијата o дефинирана со:

$$xoy = \frac{x+y}{1+xy}.$$

304. Дадено е множеството

$$G = \{a+b\sqrt{p} \mid a,b\in Q, a^2+b^2\neq 0, p\text{-даден прост број}\}.$$

Да се испита дали G е група по однос на операцијата множење на реалните броеви.

305. Да се покаже дека множеството

$$G = \{a+bi \mid a^2+b^2=1\}$$

е група по однос на операцијата множење на комплексните броеви.

√306. Ако n е природен број, да се покаже дека множеството од сите n-ти корени на единицата е група во однос на операцијата множење на комплексните броеви.

√ 307. Нека p е даден прост број и нека $G_n(p)$ е подмножество од множеството на комплексните броеви определено со:

$$z\in G_n(p) \Leftrightarrow z^{p^n}=1.$$

Да се покаже дека $G = G_0(p)\cup G_1(p)\cup \dots \cup G_n(p)\cup \dots$ е група по однос на операцијата множење на комплексните броеви.

308. Нека S се состои од сите корени на единицата, т.е. $x \in S$ ако, и само ако, $x \in C$ и $x^n=1$, за некој природен број n. Да се покаже дека S е група во однос на операцијата множење на комплексните броеви.

309. Да се покаже дека множеството G од трансформации

$$f: x \to y = \frac{ax+b}{cx+d},\ a,b,c,d \in R \text{ и } ad-bc=1,$$

е група по однос на операцијата состав на пресликувања.

310. Да се покаже дека множеството G од сите обратноеднозначни пресликувања f од множеството A на A, кои го оставаат фиксно зададеното подмножество $S \subset A$, т.е. $s \in S \Rightarrow f(s) \in S$, е група по однос на операцијата множење на пресликувања.

311. Нека матриците E, A, B, C, D, F се:

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

Да се покаже дека множеството $\{E,A,B,C,D,F\}$ е група по однос на операцијата множење на матрици.

312. Да се покаже дека сите несингуларни квадратни матрици од ред n образува група по однос на операцијата множење на матрици.

313. Да се покаже дека множеството G од сите матрици X од ред 2×2, за кои $X^2=E$, е група по однос на операцијата множење на матрици.

314. Нека $G(+)$ е комутативна група и нека G_n е множеството од сите n-торки $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x_i \in G$, т.е. $G_n=G\times G\times\dots\times G$. Во G_n определуваме операција "+" со:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n).$$

Да се покаже дека $G_n(+)$ исто така е комутативна група.

315. Нека $G_1,G_2,\dots,G_k$ се к групи и нека $G=G_1\times G_2\times\dots\times G_k$. Во G определуваме операција "·" со:

$$(x_1,x_2,\dots,x_k)(y_1,y_2,\dots,y_k) = (x_1y_1,x_2y_2,\dots,x_ky_k) .$$

Да се покаже дека G е група, и дека таа група е комутативна, ако, и само ако, сите групи $G_1,G_2,\dots,G_k$ се комутативни.

316. Каква врска постои меѓу задачите 314 и 315.

317. Да се покаже дека множеството:

а) $\{1,-1\}$ е подгрупа од групоидот $Z(\cdot)$;

б) $\{1,-1,i,-i\}$ е подгрупа од групоидот $M(\cdot)$, каде

$$M = \{m+in \mid m,n \in Z\}$$

318. Да се определат сите подгрупи на групата од пермутации на множеството $\{1,2,3\}$.

319. Да се покаже дека секоја подгрупа од една комутативна група е комутативна.

320. Центар на групата G е подмножеството C што се состои од сите елементи c, такви што $(\forall x\in G)cx=xc$. Да се покаже дека C е подгрупа од G. Во кој случај е $C=G$?

321. Нека a е даден елемент од групата G, а $C_a=\{x \mid ax=xa, x\in G\}$. Да се покаже дека C_a е подгрупа од G. Во кој случај C_a се совпаѓа со единичната подгрупа, а во кој счучај со целата група G? Да се најде C_a ако $G=M!$, $M=\{1,2,3\}$, а $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$.

322. Да се покаже дека пресек од две подгрупи е пак подгрупа. Во кој случај унија од две подгрупи е подгрупа?

323. Да се покаже дека групата G е комутативна, ако, и само ако, е исполнет некој од следните услови:

а) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$; б) $x(yz) = (yx)z$;

в) $(xy)(xy) = xxyy$; г) $(xy)(uv) = (xu)(yv)$.

324. Нека G е група со особината секој елемент x да е инверзен сам на себе, т.е. $x^{-1}=x$. Да се покаже дека таа група е комутативна. Да се наведат барем три групи со таа особина.

325. Нека G е множеството

$$G = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-n}, \dots, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots, b_{-1}, b_{-2}, \dots, b_{-n}, \dots\}.$$

Во G определуваме операција o со:

$$a_m o a_n = a_{m+n},\ a_m o b_n = b_{m+n},\ b_m o b_n = a_{m-n},\ b_m o a_n = b_{m-n}.$$

Да се покаже дека G(o) е некомутативна група.

326. Користејќи ја, на пример, групата од претходната задача, да се покаже дека во случај на некомутативна група може и да не биде точно равенството $(xy)^n=x^ny^n$.

327. Да се покаже дека мултипликативната група од позитивните реални броеви е изоморфна со адитивната група од реалните броеви.

328. Во групата $G(\cdot)$ определуваме две операции $*$ и o со:

$$x*y = yx,\ xoy = xay,$$

каде што a е фиксен елемент од G. Да се покаже дека групоидите $G(*)$, $G(o)$ се групи изоморфни со групата $G(\cdot)$.

√ 329. Нека G е група, B подгрупа од G и a фиксен елемент од G. Да се покаже дека множеството

$$H_a = \{a^{-1}xa \mid x \in B\}$$

е подгрупа од G изоморфна со B.

330. Да се покаже дека структурата определена со шемите

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

е поле.

331. Ако P_1 и P_2 се полиња и ако во множеството $P = P_1 \times P_2$ определиме две операции со:

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$,
добиваме прстен со делители на нулата. Да се докаже тврдењето.

332. Ако во претходната задача ставиме $P_1 = P_2 = \{0,1\}$, добиваме $P = P_1 \times P_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Да се определат шемите на операциите собирање и множење на добиениот прстен P.

333. Исто како и во 332., со тоа што $P_1 = \{0,1\}$, а P_2 е прстенот од задачата 330.

334. Да се определат вистинските делители на нулата во прстените добиени во 332. и 333.

√ 335. Нека P_∞ е множеството од сите бесконечни низи

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots),$$

каде што a_n припаѓа на даден прстен P, и нека определиме операции собирање и множење со:

$$(a_1, \dots, a_n, \dots) + (b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots),$$
$$(a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot (b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n, \dots).$$

Да се покаже дека $P_\infty(+,\cdot)$ е прстен со делители на нулата. Во кој случај P_∞ е комутативен? Ако P е интегрален домен, да се определат вистинските делители на нулата во P_∞.

336. Да се покаже дека ако еден прстен P е: а) без вистински делители на нулата; б) комутативен, тогаш истата особина ја има и секој негов потпрстен.

337. Нека во прстенот P е точно равенството $xx = x$, за секој елемент $x \in P$. Да се покаже дека е точно равенството $x = -x$, за секое $x \in P$, а и дека прстенот е комутативен.

338. Нека P е партитивното множество од дадено множество M и

нека во P определиме две операции "+" и "·" со:

$$X+Y = (X\cup Y)\setminus(X\cap Y), \quad X\cdot Y = X\cap Y.$$

Да се покаже дека $P(+,\cdot)$ е прстен. Во кој случај овој прстен е поле?

339. Да се провери дали следниве множества:

а) множеството од сите непарни броеви;

б) множеството од сите парни броеви;

в) множеството од сите правилни дропки;

г) множеството од ирационалните броеви;

д) $\{a+b\sqrt[3]{3} \mid a,b\in Q\}$,

образуваат прстен по однос на операциите собирање и множење на реалните броеви.

340. Нека a е фиксен цел број и нека P е множеството од сите цели броеви од облик ax, т.е.

$$P = \{0,\pm a,\pm 2a,\dots\}.$$

Да се покаже дека P е потпрстен од Z, а и обратно - дека секој потпрстен од Z е од тој облик. Во кој случај P е и интегрален домен?

341. Да се покаже дека еден прстен P е комутативен, ако, и само ако, е точно некое од следниве равенства:

а) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$; б) $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$.

342. Нека P е прстен и нека во P определиме две нови операции $\oplus$ и $\odot$ со:

$$x\oplus y = x+y+1, \quad x\odot y = x+y+xy.$$

Да се покаже дека $P(\oplus,\odot)$ е прстен изоморфен со $P(+,\cdot)$.

343. Нека P е прстен и $S = P\times P$. Во S определуваме операции собирање и множење со:

$$(x,y)+(u,v) = (x+u,y+v), \quad (x,y)(u,v) = (xu-yv,xv+yu).$$

а) Да се покаже дека S е прстен.

б) Ако P=Z, да се покаже дека S е интегрален домен, но не и поле.

в) Ако P е поле, во кој случај и прстенот S е поле?

г) Да се покаже дека пресликувањето $f: P\to S$, дефинирано со $f(x) = (x,0)$ е изоморфно вметнување на P во S.

344. Нека S е множеството од сите бесконечни низи

$$(a_0,a_1,\dots,a_n,\dots)$$

од комплексни броеви, каде што само конечно многу членови се различни од нула. Во S определуваме собирање на вообичаениот начин, а множење со:

$$(a_0,a_1,\dots,a_n,\dots)(b_0,b_1,\dots,b_n,\dots) = (c_0,c_1,\dots,c_n,\dots),$$
каде што $c_n = a_0b_n+a_1b_{n-1}+ \dots +a_nb_0$. Да се покаже дека $S(+,\cdot)$ е прстен изоморфен со прстенот $C[x]$ од полиноми.

345. Секоја матрица од обликот aE, каде што a е даден реален број, а E единичната матрица од ред n, се вика скаларна матрица. Да се покаже дека множеството од сите скаларни матрици е поле изоморфно со полето на реалните броеви.

346. Нека P е било кој прстен и нека ρ е конгруенција во тој прстен, т.е. ρ е еквивалентност во P која е во согласност со операциите собирање и множење во прстенот. Да се покаже дека и факторструктурата P/ρ е прстен.

347. Да се покаже дека во едно поле P има само две конгруенции. Едната е еднаквоста, а другата е одредена со $x\rho y$ за секои $x,y\in P$.

348. Да се определат релациите за еквивалентност во Z согласни со операциите собирање и множење.

349. Нека S е потпрстен од полето на реалните броеви и нека T се состои од сите комплексни броеви од облик $x+iy$, каде што $x,y\in S$. Да се покаже дека и T е потпрстен од полето на комплексните броеви. Во кој случај T е и потполе?

350. Да се покаже дека секој подреден прстен е:

а) прстен без вистински делители на нулата;

б) бесконечен.

351. Ако P е подреден прстен, да се покаже дека $x^2 \geqslant 0$, за секое $x\in P$. Специјално, да се покаже дека единицата на секој подреден интегрален домен е позитивна.

352. Да се покаже дека кај секој подреден прстен се точни неравенствата:

а) $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|$; б) $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$.

Дали е точно и неравенството $|a-b| \leqslant |a+b|$?

353. Ако P е подредено поле, да се покаже дека:

а) $0<a<b \Rightarrow 0<b^{-1}<a^{-1}$; б) $b<a<0 \Rightarrow a^{-1}<b^{-1}<0$;

в) во P не постои најмал позитивен ниту пак најголем негативен елемент.

354. Нека K е поле и нека во K постои потпрстен изоморфен со прстенот на целите броеви. Да се покаже дека постои потпрстен во K изоморфен со полето на рационалните броеви.

355. Да се покаже дека во секој подреден интегрален домен постои потпрстен изоморфен со прстенот на целите броеви, и дека во секое подредено поле постои потпрстен изоморфен со полето на рационалните броеви.

356. Да се покаже дека полето на комплексните броеви не е подредено.

357. Да се покаже дека множеството на реалните броеви е векторски простор, а и алгебра, над полето од рационалните броеви. Каква е димензијата на овој простор?

358. Нека $V(+)$ е комутативна група, а P поле и нека за секој елемент $x \in P$ и $\vec{a} \in V$ ставиме $x\vec{a}=\vec{o}$ ($\vec{o}$ е нулата на $V(+)$). Дали V е векторски простор над P?

359. Нека во R_2 собирањето на вектори се дефинира на вообичаениот начин, т.е. со $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, а множењето на скалар со вектор со $x(y,z)=(xy,z)$. Да се провери дали V е векторски простор над P.

360. Нека $P=\{0,1\}$ е полето со два елементи и нека $G(+)$ е комутативна група. Да се покаже дека G може да се смета за векторски простор над P, ако, и само ако, во G е точно равенството $\vec{x}+\vec{x}=0$, за секое $\vec{x} \in G$.

361. Нека V_1 и V_2 се векторски простори над исто поле P и нека во множеството $V=V_1 \times V_2$ од сите парови $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, каде што $\vec{a}_1 \in V_1$ и $\vec{a}_2 \in V_2$, определиме собирање со $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)+(\vec{b}_1,\vec{b}_2)=(\vec{a}_1+\vec{b}_1,\vec{a}_2+\vec{b}_2)$ и множење на скалар со вектор со $x(\vec{a},\vec{b})=(x\vec{a},x\vec{b})$. Да се покаже дека V е векторски простор над P. Како зависи димензијата на V од димензиите на V_1 и V_2?

362. Да се покаже дека ако V_1 и V_2 се потпростори од векторскиот простор V, тогаш и $V_1 \cap V_2$ е потпростор од V.

363. Нека U и V се векторски простори над исто поле P и нека f е линеарно пресликување од U во V, а U_f множеството од сите вектори $\vec{a} \in U$, такви што $f(\vec{a})=0$. Да се покаже дека U_f е потпростор од U. За U_f велиме дека е јадро на пресликувањето f.

364. Да се покаже дека во еден бесконечно димензионален векторски простор за секое природно n постои n-димензионален потпростор.

365. Нека R_∞ е множеството од сите бесконечни низи од реални броеви и нека собирање на низи, како и множење на низа со број, се

дефинира на вообичаениот начин, а множење на две низи со:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)(b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots) =$$
$$= (a_1b_1, a_1b_2+a_2b_1,\ldots,a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1,\ldots).$$

Да се покаже дека R_∞ е векторска алгебра над R. Потоа нека со S го означиме множеството од сите низи што имаат само конечно многу членови различни од нула. Да се покаже дека S е подалгебра од R_∞, и дека таа подалгебра е изоморфна со алгебрата на сите полиноми со реални коефициенти.

366. Да се покаже дека две векторски алгебри со иста димензија можат и да не бидат изоморфни.

367. Ако $A=R_3$ е множеството тродимензионални вектори, да се провери дали $A(x,+)$ е векторска алгебра над R, каде "x" е операцијата векторско множење.

368. Нека A е алгебрата на сите полиноми со реални коефициенти, и нека B се состои од парните, а C од непарните полиноми, т.е.

$$f\in B \leftrightarrow f(-x)=f(x), \quad g\in C \leftrightarrow g(-x)=-g(x).$$

Да се покаже дека B е подалгебра од A. Дали и C е подалгебра?

369. Нека S е множеството на сите пресликувања од R во R и нека во S ги определиме операциите собирање, множење и множење со скалар со:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (fg)(x)=f(x)g(x), \quad (af)(x)=af(x).$$

Да се покаже дека добиената структура е векторска алгебра.

370. Во множеството S од претходната задача, ако се дефинира операцијата множење со

$$(fg)(x) = f(g(x)),$$

да се провери дали се добива векторска алгебра.

371. Нека K е множеството матрици од облик

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}$$

Да се покаже дека:

а) K е некомутативно тело по однос на операциите собирање и множење на матрици;

б) K е векторска алгебра над полето од реалните броеви по однос на обичното множење на матрица со број;

в) K не е векторска алгебра над полето од комлексните броеви.

(Елементите од K се викаат кватерниони.)

Р Е Ш Е Н И Ј А

I. МНОЖЕСТВА И ПРИРОДНИ БРОЕВИ

1. а) $A\subset B\subset E$, $C\subset D\subset E$, а другите се неспоредливи;

б) $B\subset A$, $C\subset A$, $D\subset A$, $C\subset E$, а дугите се неспоредливи.

2. а) Нека $x\in A$; од $A\subseteq B$ следува $x\in B$, а од $B\subset C$ следува $x\in C$; од условот $B\subset C$ следува дека постои барем еден елемент $x\in C$ и $x\notin B$, а од $A\subseteq B$, следува дека $x\notin A$, т.е. $A\subset C$.

б) Исто како под а).

в) Нека $y\in B$; тогаш $y\in A$ (зашто $y\notin A$ би повлекувало $y\notin B$),па значи $B\subset A$. Обратно, ако $z\notin A$, од $B\subseteq A$ следува дека $z\notin B$.

3. а) $A=B$. б) A и B немаат заеднички алементи. в) $A=B$. г) M и S имаат заеднички елементи. д) M и S немаат заеднички елементи.

4. $A\cap B=\{u,v\}$; $A\cup B=\{a,u,v,w\}$; $A\setminus B=\{w\}$; $B\setminus A=\{a\}$;

$A\times A = \{(u,u),(u,v),(u,w),(v,u),(v,v),(v,w),(w,u),(w,v),(w,w)\}$;

$A\times B = \{(u,a),(u,u),(u,v),(v,a),(v,u),(v,v),(w,a),(w,u),(w,v)\}$;

$B\times A = \{(a,u),(a,v),(a,w),(u,u),(u,v),(u,w),(v,u),(v,v),(v,w)\}$;

$P(A)= \{\emptyset,\{u\},\{v\},\{w\},\{u,v\},\{u,w\},\{v,w\},\{u,v,w\}\}$.

5. а) Нека $A\subseteq B$ и нека $x\in A$; тогаш $x\in B$, па $x\in A\cap B$, т.е. $A\subseteq A\cap B$, а бидејќи секогаш важи $A\cap B\subseteq A$, добиваме $A\cap B=A$. Ако, пак, $A\cap B=A$ и $y\in A$, ќе следува $y\in A\cap B$, т.е. $y\in B$, од каде што $A\subseteq B$.

Слично се покажува и $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$.

б) Нека $x\in A\cup B$; тогаш $x\in A$ или $x\in B$, па од $A,B\subseteq C$, следува $x\in C$, т.е. $A\cup B\subseteq C$.

в) Аналогно како во б).

г) Од $A\subseteq C$ и $B\subseteq D$ следува $A\cap B\subseteq C$ и $A\cap B\subseteq D$, па според в), $A\cap B\subseteq C\cap D$. Од $A\subseteq C$ и $B\subseteq D$ следува $A\subseteq C\cup D$ и $B\subseteq C\cup D$, на според б) ќе биде $A\cup B\subseteq C\cup D$.

6. а) Бидејќи $A\subseteq A\cup B$ и $A\subseteq A\cup C$, имаме $A\subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$; исто така $B\cap C\subseteq B$, па $B\cap C\subseteq A\cup B$, како и $B\cap C\subseteq C$, па $B\cap C\subseteq A\cup C$; според тоа

$$A\cup(B\cap C)\subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C). \qquad (1)$$

Обратно, нека $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$; тогаш $x\in A\cup B$ и $x\in A\cup C$, па $x\in A$ или ($x\in B$ и $x\in C$), т.е. $x\in A$ или $x\in B\cap C$, што значи $x\in A\cup(B\cap C)$, т.е.

$$A\cup(B\cap C)\supseteq (A\cup B)\cap(A\cup C). \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува равенството.

б) Слично како под а).

7. Од $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ и $A\cap C\subseteq C$ добиваме $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq$ $\subseteq(A\cap B)\cup C$, т.е. $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C$. Равенство не важи, на пример, при $A\subset C$.

8. а) Упатство. На левата страна да се примени дистрибутивниот закон.

б) Ќе претпоставиме дека A,B,C се подмножества од некое множество S. Користејќи ја особината $X\setminus Y=X\cap Y'$, $X,Y\subseteq S$, имаме:

$$A\setminus(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$

в) Слично како под б)

г) Имаме: $A\in P(X\cap Y)\leftrightarrow A\subseteq X\cap Y\leftrightarrow A\subseteq X$ и $A\subseteq Y\leftrightarrow A\in P(X)$ и $A\in P(Y)$ $\leftrightarrow A\in P(X)\cap P(Y)$, со што равенството е докажано.

д) Имаме: $(x,y)\in A\times(B\cap C)\leftrightarrow x\in A,\ y\in B\cap C\leftrightarrow x\in A$, ($y\in B$ и $y\in C$) $\leftrightarrow$ ($x\in A$ и $y\in B$), ($x\in A$ и $y\in C$) $\leftrightarrow (x,y)\in A\times B,(x,y)\in A\times C\leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$.

9. а) $(A\setminus B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$.

б) $((A\cup B)'\cap(A'\cup B'))'=(A\cup B)\cup(A'\cup B')'=(A\cup B)\cup(A\cap B)=A\cup B$.

в) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=((A\cup B)\cap A')\cup$ $\cup((A\cup B)\cap B')=(A\cap A')\cup(B\cap A')\cup(A\cap B')\cup(B\cap B')=(A\cap B')\cup(B\cap A')$.

г) $((A\cup B)'\cup(A\cup B'))'=(A\cup B)\cap(A\cup B')'=(A\cup B)\cap(A'\cap B)=A'\cap B=B\setminus A$.

д) Од в) имаме: $(A\cap B')\cup(A'\cap B)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, а

$$(A\cap B)\cup(A\cap B')\cup(A'\cap B)=(A\cap B)\cup((A\cup B)\setminus(A\cap B))=A\cup B.$$

10. а) $A\triangle A=(A\cup A)\setminus(A\cap A)=A\setminus A=\emptyset$.

б) Следува од комутативноста на операциите $\cup$ и $\cap$.

в) Од $A\triangle B=(A\cap B')\cup(A'\cap B)=A$, следува $A\cap B'=A$ и $A'\cap B=\emptyset$. Од $A\cap B'=A$ имаме $A\subseteq B'$, т.е. $B\subseteq A'$, а од $A'\cap B=\emptyset$ имаме $B\subseteq A$, од каде што $B=\emptyset$. Обратно, ако $B=\emptyset$, тогаш $A\triangle\emptyset=(A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset)=A\cup\emptyset=A$.

г) $A\triangle B=(A\cap B')\cup(A'\cap B)=\emptyset\to A\cap B'=\emptyset$ и $A'\cap B=\emptyset\to A\subseteq B$ и $B\subseteq A$ $\to A=B$.

д) Имаме: $(A\triangle B)\triangle C=[(A\triangle B)\cap C']\cup[(A\triangle B)'\cap C]=$

$=\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cap C'\}\cup\{[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]'\cap C\}=$

$=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup\{[(A'\cup B)\cap(A\cup B')]\cap C\}=$

$=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup[(A'\cup B)\cap(A\cup B')\cap C]=$

$=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap A\cap C)\cup(A'\cap B'\cap C)\cup(B\cap A\cap C)\cup(B\cap B'\cap C)$,

т.е.

$$(A\triangle B)\triangle C=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)\cup(A\cap B\cap C). \tag{1}$$

Ако во (1) ставиме B,C,A по ред, наместо A,B,C, добиваме

$$(B\triangle C)\triangle A=(B\cap C'\cap A')\cup(B'\cap C\cap A')\cup(B'\cap C'\cap A)\cup(B\cap C\cap A). \tag{2}$$

Споредувајќи ги (1) и (2), гледаме дека тие се еднакви, па

$$(A\triangle B)\triangle C=(B\triangle C)\triangle A.$$

Бидејќи операцијата $\triangle$ е комутативна, го добиваме даденото равенство.

f) $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=((A\cap B)\cap(A\cap C)')\cup((A\cap B)'\cap(A\cap C))=$

$=((A\cap B)\cap(A'\cup C'))\cup((A'\cup B')\cap(A\cap C))=$

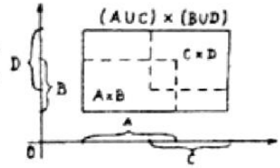
$=(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C')\cup(A'\cap A\cap C)\cup(B'\cap A\cap C)=$

$=(A\cap(B\cap C'))\cup(A\cap(B'\cap C))=A\cap((B\cap C')\cup(B'\cap C))=$

$=A\cap(B\Delta C)$.

11. а) Дека не важи равенство покажува следниов пример: за $A=B$, левата страна е A, а десната $A\setminus C$. Бидејќи $(A\cup B)\setminus C=(A\cup B)\cap C'=(A\cap C')\cup(B\cap C')=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\subseteq A\cup(B\setminus C)$, важи инклузијата

$$(A\cup B)\setminus C\subseteq A\cup(B\setminus C).$$



б) Дека не важи равенство, покажува примерот даден на сликата (десно), а важи инклузијата $(A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cup C)\times(B\cup D)$.

в) Равенството е точно.

12. Пресликувањето е од облик <u>на</u>, но не е обратноеднозначно.

13. а) f е од облик <u>на</u>, т.е. секој елемент од Y е слика на некој елемент од X.

б) f не е од облик <u>на</u>.

в) $f(X)=Y$, т.е. f е од облик <u>на</u>.

14. Од условот 1° следува дека f е дефинирано на целото множество X, а од условот 2° следува дека f е еднозначно, т.е. f е пресликување од X во Y.

а) За да биде f пресликување од облик <u>на</u>, потребен е условот: $(\forall y\in Y)(\exists x\in X)(x,y)\in F$.

б) За да биде f обратноеднозначно, потребен е условот:

$$(\forall x_1,x_2\in X)(\forall y\in Y)[(x_1,y),(x_2,y)\in F\Rightarrow x_1=x_2].$$

16. а) Јасно е дека $x+2\in N$ кога $x\in N$. Пресликувањето не е од облик <u>на</u>, бидејќи 2 не е слика од ниеден број.

б) Јасно е дека $3x-2\in Q$ кога $x\in Q$. Исто така, секој $q\in Q$ е слика од $x=\frac{1}{3}(q+2)\in Q$.

в) Јасно е дека $x^3-3x^2-x\in R$, кога $x\in R$. Исто така, кога $r\in R$ $x^3-3x^2-x=r$ секогаш има реален корен x, чија слика е r. Кога $r=-3$, $x^3-3x^2-x=r$ има три реални корени $x=-1,1,3$. Бидејќи секој од нив го има $r=-3$ за слика, пресликувањето не е обратноеднозначно.

17. а) Кога $n<c$, $c-n\in N$, а кога $n\geqslant c$, $c+n\in N$. Бидејќи може да важи само едно од неравенствата $n<c$, $n\geqslant c$, за секој $n\in N$, f е пресликување од N во N.

Нека $n\neq m$, на пример, $m<n$; ако: 1) $m,n<c$, тогаш $c-n<$

$< c-m$; 2) $m < c \leq n$, тогаш $c-m < c+n$; 3) $c \leq m < n$, тогаш $c+m < c+n$. Значи, во секој случај имаме $f(m) \neq f(n)$, т.е. пресликувањето f е обратноеднозначно.

б) $f(N) = N \setminus \{c, c+1, \dots, 2c-1\}$.

в) $f^{-1}(x) = \begin{cases} c-x, & x \leq c \\ x-c, & x \geq 2c \end{cases}$, $x \in f(N)$.

18. Нека $x \in X$ и $f(x) = y$; тогаш:

а) $(fe_X)(x) = f(e_X(x)) = f(x) = y = e_Y(y) = e_Y(f(x)) = (e_Y f)(x)$, што значи $fe_X = f = e_Y f$;

б) $(f^{-1}f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = e_X(x) \Rightarrow f^{-1}f = e_X$; исто така $(ff^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = e_Y(y) \Rightarrow ff^{-1} = e_Y$.

19. а) Ако $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ и $f(x_i) = y_i$ (за $i = 1,2,3$) $f(x_4) = y_1$, тогаш за $A = \{x_1\}$, $B = \{x_1, x_4\}$ имаме $f(A) = f(B)$.

б) При истите X и Y од а), ако ставиме $B = \{x_1, x_2\}$, $C = \{x_2, x_4\}$, добиваме $f(B \cap C) = f(\{x_1\}) = \{y_1\}$, додека $f(B) \cap f(C) = \{y_1, y_2\}$.

20. а) За било кое пресликување f важи: $A \subset B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Да покажеме дека овде важи стриктна инклузија. Нека $b \in B \setminus A$ и $f(b) = c$. Ако би било $c \in f(A)$, поради обратноеднозначноста на f, би следувало $f^{-1}(c) = b \in A$, но $b \notin A$, што значи $c \in f(B) \setminus f(A)$, односно $f(A) \subset f(B)$.

б) За било кое пресликување важи:

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B). \tag{1}$$

Нека $y \in f(A) \cap f(B)$; тогаш $y \in f(A)$ и $y \in f(B)$. Бидејќи f е обратноеднозначно, постои само едно $x \in X$, така што $y = f(x)$, па значи $x \in A$ и $x \in B$, т.е. $x \in A \cap B$. Одовде следува $f(x) = y \in f(A \cap B)$, што значи $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ што заедно со (1) го дава равенството.

21. 1) а) Важи $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$. Дека може да не важи равенство, покажува примерот од задачата 19 а) за B наместо A и A наместо B.

б) Важи равенство.

2) а) Во општ случај $f(A')$ и $(f(A))'$ се неспоредливи, што покажува следниов пример: Нека $A \subset X$ и $f(A) = f(X) \subset Y$. Тогаш $f(A') \subseteq f(A)$, па $f(A')$ и $(f(A))'$ немаат заеднички елементи.

б) Ако f е обратноеднозначно пресликување од X во Y, тогаш важи $f(A') \subseteq (f(A))'$, каде што равенство може да важи само ако f е од облик на.

22. б) Од $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow [f(x) \in A$ или $f(x) \in B] \Leftrightarrow$ $[x \in f^{-1}(A)$ или $x \in f^{-1}(B)] \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ следува равенството.

Равенствата под а) и в) се докажуваат на ист начин.

23. Нека $x_1, x_2 \in X$ и нека $f(x_1)=f(x_2)$; тогаш $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ т.е. $x_1=x_2$, што значи дека f е обратноеднозначно пресликување. Слично, ако $y_1, y_2 \in Y$ и $g(y_1)=g(y_2)$, тогаш $f(g(y_1))=f(g(y_2))$, т.е. $y_1=$ $=y_2$ што значи дека и g е обратноеднозначно.

Нека сега $y \in Y$ и нека ставиме $x=g(y)$. Тогаш $f(x)=f(g(y))=y$, т.е. секој елемент $y \in Y$ е слика на некој $x \in X$, што значи f е пресликување од облик на. Слично за g. Од $g(f(x))=x$ и $f(g(y))=y$ имаме $gf=e_X$ и $fg=e_Y$, т.е. $f^{-1}=g$ и $g^{-1}=f$.

24. Да покажеме дека h е дефинирано на целото N. Прво, h е дефинирано за $x=1$, бидејќи $h(1)=a$. Нека h е дефинирано за x; бидејќи $h(x) \in N$, $g(h(x))$ ќе припаѓа на N, односно $h(x+1) \in N$. Според принципот на математичката индукција, h е дефинирано на целото N.

Да покажеме дека h е еднозначно. За $x=1$, h е еднозначно. Ако е еднозначно за x, тогаш од $h(x+1)=g(h(x))$ следува дека е еднозначно и за $x+1$. Пак според принципот на математичката индукција, h е еднозначно за секој природен број.

Од сето тоа следува дека h е пресликување од N во N.

25. Упатство. Да се докаже вршејќи индукција по y.

За $f_1(x)=f_2(x)=x+1$ се добива $h(x,y)=x+y$.

26. Упатство. Да се докаже вршејќи индукција по y.

За $f(x)=x$, $g(x,y)=xy$, $h(x,y)$ претставува дефиниција на операцијата степенување во прродните броеви.

27. Нека M е ограничено оддесно; тоа значи дека постои $n \in N$, така што $x \leqslant n$ за секој $x \in M$. Нека со A го означиме множеството од сите броеви n со таа особина. Множеството A, како подмножество од N, има најмал елемент, да речеме a. Неговиот претходник припаѓа на M и е најголем во M.

Обратно, ако M има најголем елемент m, тогаш $x \leqslant m$ за секој $x \in M$, па M е ограничено оддесно.

28. Нека $\kappa A=m$, $\kappa B=n$ и $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. За $n=1$ имаме $A \cup B=\{a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}\}$, каде што $a_{m+1}=b$. Значи,

$$\kappa(A \cup B)=m+1=\kappa A+\kappa B.$$

Нека претпоставиме точност на тврдењето за $n=q$ и нека $n=q+1$. Тогаш имаме

$$A \cup B=\{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_q\} \{b_{q+1}\},$$

од што следува

$$\kappa(A \cup B)=(m+q)+1=m+(q+1)=m+n.$$

Според принципот на математичката индукција, тврдењето е точно за секое n.

29. а) Можеме да претпоставиме дека $A\cap B\neq\emptyset$, бидејќи за $A\cap B=\emptyset$, според задачата 28 и $k\emptyset=0$, тврдењето е точно. За $A\cap B\neq\emptyset$, множествата B и $A\setminus B$ се дисјунктни, како и $A\cap B$ и $A\setminus B$, па ќе имаме:

$$k(A\cup B) = k(B\cup(A\setminus B)) = kB + k(A\setminus B)$$

и

$$k(A) = k((A\cap B)\cup(A\setminus B)) = k(A\cap B) + k(A\setminus B).$$

Ако од првото равенство го одземеме второто, добиваме

$$k(A\cup B) - kA = kB - k(A\cap B),$$

т.е. даденото равенство.

б) За $A\subseteq B$ имаме: $kB = k((B\setminus A)\cup A) = k(B\setminus A) + kA$, од каде што

$$k(B\setminus A) = kB - kA.$$

30. Ќе покажеме, прво, дека тврдењето е точно за $n=2$. Нека $A_1=A$ и $A_2=B$ се конечни множества и нека $kA=m$, $kB=1$, т.е.

$$A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\};\ B=\{b\}.$$

Ако ставиме $(a_i,b)=c_i$, добиваме $A\times B=\{c_1,c_2,\dots,c_m\}$, т.е.

$$k(A\times B) = m = m\cdot 1 = kA\cdot kB.$$

Потоа, нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $s=q$ и нека земеме $s=q+1$, т.е. $B=\{b_1,b_2,\dots,b_{q+1}\}$. Имајќи го предвид равенството

$$A\times B = A\times\{b_1,b_2,\dots,b_q\}\cup A\times\{b_{q+1}\},$$

добиваме

$$k(A\times B) = k(A\times\{b_1,b_2,\dots,b_q\}) + k(A\times\{b_{q+1}\}) = mq+m = m(q+1) = kA\cdot kB,$$

т.е. тврдењето е точно за $n=2$.

Нека равенството е точно за $n=m$, т.е. нека

$$k(A_1\times\dots\times A_m) = k(A_1)\cdot\ldots\cdot k(A_m)$$

и нека ставиме $B=A_1\times\dots\times A_m$. Од равенството

$$A_1\times\dots\times A_m\times A_{m+1} = (A_1\times\dots\times A_m)\times A_{m+1}$$

добиваме

$$k(A_1\times\dots\times A_m\times A_{m+1}) = k(B\times A_{m+1}) = kB\cdot kA_{m+1} = kA_1\cdot\ldots\cdot kA_m\cdot kA_{m+1},$$

со што особината е докажана.

31. а) Јасно дека $k\leq m$. Бидејќи во M има само едно подмножество "со нула елементи", имено празното множество, и m едноелементни множества, а $\binom{m}{0}=1$ и $\binom{m}{1}=m$, формулата е точна за $k=0$ и $k=1$. Да претпоставиме дека таа е точна за $k=s<m$, т.е. во M има $\binom{m}{s}$ подмножества со s елементи. Ако кон едно од овие подмножества до-

даваме по еден елемент од преостанатите m-s елементи се добиваат m-s нови подмножества со по s+1 елемент или вкупно $(m-s)\binom{m}{s}$ подмножества, при што секое од новите подмножества се јавува s + 1 пат, па значи ќе добиеме

$$\frac{m-s}{s+1}\binom{m}{s} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-s+1)(m-s)}{s!(s+1)} = \binom{m}{s+1}.$$

Значи, формулата е точна и за $k=s+1\leqslant m$, па таа е точна за секое $k\leqslant m$.

б) Според а), во M има $\binom{m}{0}$ подмножества без елементи, $\binom{m}{1}$ едноелементни подмножества, $\binom{m}{2}$ двоелементни итн. Бројот на сите подмножества од M ќе биде

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\dots+\binom{m}{k}+\dots+\binom{m}{m} = (1+1)^m = 2^m,$$

при што е искористена биномната формула за a=b=1.

32. Нека фиксираме едно подмножество $M\subseteq B$ со m елементи. Тогаш бројот на обратноеднозначните пресликувања од A во M е $m!$. Од друга страна, бројот на подмножествата M е $\binom{n}{m}$, па бројот на сите обратноеднозначни пресликувања од A во B ќе биде

$$m!\binom{n}{m} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1),$$

што и требаше да се докаже.

33. $\dfrac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$.

34. б) Равенството ќе го докажеме вршејќи индукција по k. За k=1 имаме

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n} = n+2 = \binom{n+2}{n+1},$$

па значи за k=1 равенството е точно.

Нека е точно за k=m, т.е. е точно равенството

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

тогаш е

$$\sum_{i=0}^{m+1}\binom{n+i}{n} = \sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{n}+\binom{n+m+1}{n} =$$

$$= \binom{n+m+1}{n+1}+\binom{n+m+1}{n} = \binom{n+m+2}{n+1},$$

па значи, според принципот на математичката индукција, равенството е точно за било кој природен број k.

35. а) Користејќи го равенството

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

равенството од задачата 34.б) се сведува на даденото равенство.

б) Ако во биномната формула ставиме $a=1, b=1$, односно $a=1$, $b=-1$, ги добиваме равенствата:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

и

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

Ако овие равенства ги собереме, односно одземеме, ги добиваме дадените равенства.

36. а) и б) Треба да ја пресметаме сумата

$$S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k,$$

за $k=2$ и $k=3$.

Да го разгледаме идентичното равенство:

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \binom{k+1}{1}m^k + \binom{k+1}{2}m^{k-1} + \dots + 1.$$

Ставајќи последователно $m=0,1,2,\dots,n$, ги добиваме равенствата:

$$\begin{aligned}
1^{k+1} &= 1\\
2^{k+1} - 1^{k+1} &= \binom{k+1}{1}1^k + \binom{k+1}{2}1^{k-1} + \dots + 1\\
3^{k+1} - 2^{k+1} &= \binom{k+1}{1}2^k + \binom{k+1}{2}2^{k-1} + \dots + 1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= \binom{k+1}{1}n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1} + \dots + 1.
\end{aligned}$$

Собирајќи ги овие равенства, добиваме:

$$(n+1)^{k+1} = \binom{k+1}{1}S_k + \binom{k+1}{2}S_{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k}S_1 + (n+1).$$

За $k=2$ и $k=3$ добиваме:

$$S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1); \quad S_3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

в) Имаме:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 &= 4\cdot(1^2+2^2+\dots+n^2) = 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) =\\
&= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{2n}i^2 - \sum_{i=1}^{n}(2i)^2 =\\
&= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).
\end{aligned}$$

37. Од $\kappa A = \kappa B$ и $\kappa C = \kappa D$ следува дека постојат обратноеднозначните пресликувања $f: A \xrightarrow{на} B$ и $g: C \xrightarrow{на} D$. Пресликувањето

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ако } x\in A \\ g(x), & \text{ако } x\in B \end{cases}$$

е обратноеднозначно од $A\cup C$ на $B\cup D$. Значи, $\kappa(A\cup C) = \kappa(B\cup D)$.

38. Дека тврдењето не е точно покажува следниот пример. Нека $A = \{2n \mid n\in N\} = B$, $C = \{2n-1 \mid n\in N\}$, $D = N$; тогаш $B\setminus A = \emptyset$, $D\setminus C = A$, па $\kappa(B\setminus A) = 0 \neq \aleph_0 = \kappa(D\setminus C)$.

Во случај множествата A, B, C, D да се конечни, тврдењето е точно, а следува од 29.б).

39. Пресликувањето

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{ако } z > 0 \\ 1-2z, & \text{ако } z \leqslant 0 \end{cases}$$

е обратноеднозначно пресликување од Z во N, од каде што следува

$$\kappa Z = \kappa N = \aleph_0.$$

40. Нека A е произволно бесконечно множество, а $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ преброиво множество, така што $A\cap B = \emptyset$. Бидејќи секое бесконечно множество содржи преброиво подмножество, постои преброиво подмножество $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ од A. Ставајќи $D = A\setminus C$, добиваме:

$$A = D\cup C, \quad A\cup B = D\cup(C\cup B).$$

Пресликувањето $f: A\cup B \to A$, дефинирано со

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x\in D \\ c_{2k}, & \text{ако } x\in C \quad (x\in N), \\ c_{2k-1}, & \text{ако } x\in B \end{cases}$$

е обратноеднозначно од множеството $A\cup B$ на множеството A, од каде што и следува $\kappa(A\cup B) = \kappa A$.

41. Според задачата 40, доволно е да покажеме дека Q^+ е преброиво множество.

Од елементите на Q^+ ја формираме следнава шема:

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \dots, & \frac{1}{n}, & \dots \\
\frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \dots, & \frac{2}{n}, & \dots \\
\frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \frac{3}{4}, & \dots, & \frac{3}{n}, & \dots \\
\frac{4}{1}, & \frac{4}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{4}{4}, & \dots, & \frac{4}{n}, & \dots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Потоа, елементите од оваа шема ги подредуваме во една низа, како што покажуваат стрелките, т.е. во низата

$$\frac{1}{1};\ \frac{1}{2},\frac{2}{1};\ \frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1};\ \frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1};\ \dots ,$$

од каде што и следува $k(Q^+) = kN = \aleph_0$.

42. Нека A_1 и A_2 се множествата точки од две кружни линии; можеме да претпоставиме дека тие се концентрични. На секоја точка x од A_1 ѝ го придружуваме пресекот со A на полуправата, со почеток во центарот од A_1 и A_2, а минува низ x. Пресликувањето е обратноеднозначно од A_1 на A_2, па $kA_1 = kA_2$.

Нека сега B_1 и B_2 се две отсечки, на пример, $B_1 = [a,b]$, $B_2 = [c,d]$; тогаш пресликувањето

$$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

е обратноеднозначно од B_1 на B_2, од каде што $kB_1 = kB_2$.

Според тоа, наместо произволна отсечка, можеме да ја разгледуваме отсечката $[0,1]$. Ако $B_3 = (0,1)$, т.е. отсечката $[0,1]$ без своите крајни точки, ќе покажеме дека

$$k[0,1] = k(0,1).$$

За таа цел ефективно ќе конструираме обратноеднозначно пресликување меѓу тие множества. Ја избираме низата:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{3},\ \dots ,\ x_n = \frac{1}{n+1},\ \dots ,$$

која им припаѓа на двете множества. На точката $0\in[0,1]$ ѝ ја придружуваме точката x_1, а на $1\in[0,1]$ – точката x_2; потоа, на точката x_i од низата ѝ ја придружуваме точката x_{i+1} $(i=1,2,\dots)$. Сите други точки се пресликуваат сами во себе. Дефинираното пресликување е обратноеднозначно од $[0,1]$ на $B_3 = (0,1)$.

Нека C е множеството точки од една права, а $B=[a,b]$. Од претходното, B и $B\setminus\{a,b\}$ имаат ист кардинален број, а пресликувањето

$$g(x) = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{x}{1+|x|} + \frac{b+a}{2}$$

ја пресликува целата права на $B\setminus\{a,b\}$, од каде што следува

$$kB = k(B\setminus\{a,b\}) = kC.$$

Останува да се покаже уште дека $kA = kB$, каде што A е множеството точки од една кружна линија, а B од една отсечка. За поэгодно, нека A е множеството точки од една кружна линија со радиус единица, а $B=[0,2\pi)$. Фиксираме една точка $m\in A$ и на секоја точка $a\in A$ ѝ ја придружуваме бројната вредност на лакот, мерен од m. На тој начин множеството A го пресликавме обратноеднозначно на $B=[0,2\pi)$, што значи $\varkappa A=\varkappa B$.

43. Нека $f: S\to T$ е пресликување од S на T и нека t е даден елемент од T. Постои елемент $s\in S$, таков што $f(s)=t$. Такви елементи s можат да постојат повеќе, но во секој случај избираме еден од нив. Така, на секој елемент $t\in T$ му ставаме во коресподенција еден елемент $s\in S$, таков што $f(s)=t$. Ако t_1 и t_2 се различни елементи од T, тогаш и s_1, s_2 се различни, бидејќи за $s_1=s_2$, би имале $t_1=f(s_1)=f(s_2)=t_2$. Со тоа T го пресликавме обратноеднозначно на подмножество од S, па значи имаме $\varkappa T\leqslant\varkappa S$.

44. Според 42. доволно е да покажеме дека множеството (интервалот) $(0,1)$ е непреброиво, т.е. меѓу множествата $(0,1)$ и N не постои обратноеднозначно пресликување.

Нека претпоставиме дека може сите елементи од $(0,1)$ да ги подредиме во низа. Секој реален број може да се претстави во облик на бесконечна децимална дропка, која, евентуално, од некое место има само нули. Затоа би имале:

$$\begin{array}{l}
a_1=0,d_{11}d_{12}d_{13}\ldots d_{1n}\ldots\\
a_2=0,d_{21}d_{22}d_{23}\ldots d_{2n}\ldots\\
a_3=0,d_{31}d_{32}d_{33}\ldots d_{3n}\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n=0,d_{n1}d_{n2}d_{n3}\ldots d_{nn}\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

каде што d_{ik} е една од цифрите $0,1,\ldots,9$. Нека a е реалниот број $a=0,d_1d_2\ldots d_n\ldots$, каде што

$$d_n=\begin{cases}2 & \text{ако е } d_{nn}=1\\ 1 & \text{ако е } d_{nn}\neq 1\end{cases}\quad (n\in N).$$

Бројот a очигледно припаѓа на $(0,1)$, а се разликува од секој број $a_1,a_2,\ldots$ од горната низа, зашто од првиот се разликува во првата децимала, од вториот во втората децимала итн. Значи, низата $\{a_n\}$ не ги содржи сите реални броеви од интервалот $(0,1)$. Оваа противречност го докажува тврдењето.

45. Нека $I=(0,1)$. Очигледно е

$$\varkappa I\leqslant\varkappa(I\times I). \tag{1}$$

Обратно, нека $(x,y)\in I\times I$, каде што

$$x = 0,a_1a_2a_3\ldots$$
$$y = 0,b_1b_2b_3\ldots$$

Пресликувањето $f: I\times I \to I$, дефинирано со

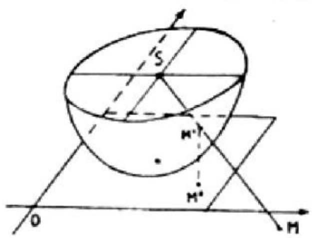
$$f((x,y)) = z = 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

е обратноеднозначно пресликување од $I\times I$ во I, од каде што следува (задача 43)

$$k(I\times I) \leqslant kI. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $k(I\times I)=kI$, што требаше да се докаже.

46. Пресликувањето $f: (x,y) \to x+iy$ е обратноеднозначно од $R^2 = R\times R$ на C, па $kR^2=kC$. Значи треба да покажеме дека $kR^2=kR$.



Во квадратот $I\times I=(0,1)\ (0,1)$ поставуваме полутопка со радиус $1/2$, така што да ја допира рамнината XOY во точката $(1/2,1/2)\in I\times I$. Секоја точка $M\in R$ ја сврзуваме со центарот S на полутопката, а прободот M' на полутопката со сврзницата MS го проектираме на $I\times I$ и ја добиваме точката M''. На тој начин се воспоставува обратноеднозначно пресликување од R^2 на дел од $I\times I$, што значи $kR^2 \leqslant k(I\times I)$. Но, обратното неравенство е очигледно, па

$$kR^2 = k(I\times I) = kR.$$

47. Ако претходно го исклучиме од A множеството B од сите оние низи кои од извесно место имаат само единици (а такви низи има преброиво многу), меѓу $A\setminus B$ и множеството I од сите двоични дропки-броеви од интервалот $[0,1]$-постои обратноеднозначно пресликување, кое на секоја низа $(a_1,a_2,a_3,\ldots)\in A\setminus B$ и го придружува бројот

$$0,a_1a_2a_3\ldots\in I,\ a_i=0 \text{ или } 1.$$

Значи, $k(A\setminus B)=kI=kR$. Според задачата 40 имаме:

$$kA = k((A\setminus B)\cup B) = k(A\setminus B) = kR$$

48. Тврдењето следува од задачата 40.

49. За $A=R$, $B=Q$ во 48. се добива

$$k(R\setminus Q) = kR,$$

што требаше да се докаже.

50. Нека A е дадено множество со особината $kA=\alpha$, и нека ги разгледаме множествата

$$A^{\{1,2,3,\ldots,n\}} = B \text{ и } C = A^n.$$

Значи, B е множеството од сите пресликувања од $\{1,2,\ldots,n\}$ во A, а C множеството од сите n-торки $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, каде што $a_i \in A$. Ако $f\in B$, ставајќи $f(i)=a_i$, ја добиваме n-торката $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Јасно е дека $f \to (f(1),f(2),\ldots,f(n)) = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ е обратно-еднозначно пресликување од B на C, па значи $kB = kC$.

II. ДЕЛИВОСТ ВО МНОЖЕСТВОТО НА ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

51. а) Ако $m|n$, тогаш $n=mx$, па $an=(am)x$, од каде што $am|an$. Исто така, од $m|n$ следува $n=mx$, од каде што $n^k=(mx)^k=m^kx^k$ за секој $k\in N$, т.е. $m^k|n^k$.

б) Од $m|n$ и $m|k$ имаме $n=mx$ и $k=my$, па $n+k=m(x+y)$ и $n-k=m(x-y)$, т.е. $m|n+k$ и $m|n-k$.

в) Од $m|n+k$ и $m|k$ имаме $k=my$ и $n+k=mx$, па $n+my=mx$, од каде што $n=m(x-y)$, т.е. $m|n$.

г) Нека $m=(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$. Ако $n\leq k$, тврдењето е точно, бидејќи постои s, $0\leq s<k$, така што $n+s=k$, па $k|m$. Ако $n>k$, тогаш $n=kq+r$, $0\leq r<k$, па $r=k-t$, $0<t\leq k$, од каде што $n=k(q+1)-t$, или $n+t=k(q+1)$, т.е. $k|n+t$ за некое t, $0\leq t<k$, што значи $k|m$.

52. а) Секој природен број може да се претстави во облик $3k$, или $3k+1$, или $3k+2$, каде $k\in N^0$. Можат да настапат следниве случаи:

1) ако барем еден од броевите a,b е од облик $3k$, тогаш $3|a$, или $3|b$, па $3|ab(a^2-b^2)$;

2) ако броевите a,b се од ист облик $3k+1$ или $3k+2$, тогаш $a-b=3(k_1-k_2)$, па $3|a-b$, од каде што $3|ab(a^2-b^2)$;

3) ако едниот од броевите a,b е од облик $3k+1$, а другиот од облик $3k+2$, тогаш $a+b=3(k'+k'')+3=3(k'+k''+1)$, па $3|a+b$, од каде што $3|ab(a^2-b^2)$.

б) Упатство: Бидејќи секој природен број може да се напише во облик $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$, каде што $k\in N^0$, треба да се разгледаат сите можни случаи, како под а).

в) Нека $f(n)=n(n^2+5)$. Бидејќи $f(1)=6$, следува $6|f(1)$. Нека е $6|f(n)$. Бидејќи $f(n+1)=f(n)+3(n^2+n+2)$, а $2|(n^2+n+2)$ за било кој n, следува $6|3(n^2+n+2)$. Од ова и индуктивната претпоставка следува $6|f(n+1)$, со што индуктивниот доказ е завршен.

г) Примени индукција по n.

53. Да го докажеме равенството $((a,b),c) = (a,(b,c))$. Нека е

$d_1=((a,b),c)$, а $d_2=(a,(b,c))$; тогаш имаме: $d_1|(a,b)$ и $d_1|c \to d_1|a$ и $d_1|b$ и $d_1|c \to d_1|a$ и $d_1|(b,c) \to d_1|(a,(b,c))$, т.е. $d_1|d_2$. На ист начин добиваме и $d_2|d_1$, па $d_1=d_2$ што тербаше да се докаже.

Аналогно се докажува и второто равенство.

в) Да го докажеме равенството

$$(a,[b,c]) = [(a,b),(a,c)].$$

Нека $(a,[b,c]) = x$ и $[(a,b),(a,c)] = y$. Да претпоставиме дека степенот p^r на простиот број p е делител на x. Тогаш имаме: $p^r|a$ и $p^r|[b,c]$. Од тоа следува дека $p^r|b$ или $p^r|c$. Значи, $p^r|(a,b)$ или $p^r|(a,c)$, па добоваме $p^r|y$, т.е. $x|y$.

Обратно, нека $q^s|y$, каде што q е прост број. Тогаш $q^s|(a,b)$ или $q^s|(a,c)$, т.е. $q^s|a$ и ($q^s|b$ или $q^s|c$). Конечно, $q^s|a$ и $q^s|[b,c]$, т.е. $q^s|x$. Со тоа докажавме дека $x=y$.

Слично се докажува и другото равенство.

54. а) Нека е $(ab,ac)=d$ и $(b,c)=d_1$. Постојат цели броеви s,t,s_1,t_1 такви што е $d=abs+act$ и $d_1=bs_1+ct_1$. Од $d_1|b$ и $d_1|c$ следува $d_1|(bs+ct)$, т.е. $ad_1|(abs+act)$ или

$$ad_1|d \tag{1}$$

Од $d|ab$ и $d|ac$ следува $d|(abs_1+act_1)$ или $d|a(bs_1+ct_1)$, т.е.

$$d|ad_1. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува $d=ad_1$.

б) Нека е $(a,b)=d_1$, $(a,b+ac)=d_2$ и $(a+kb,b)=d_3$. Од $d_1|a$ и $d_1|b$ следува $d_1|(b+ac)$ и $d_1|(a+kb)$, т.е.

$$d_1|d_2 \quad \text{и} \quad d_1|d_3 \tag{3}$$

Од $d_2|a$ и $d_2|(b+ac)$ следува и $d_2|b$, па

$$d_2|d_1 \tag{4}$$

Слично имаме и

$$d_3|d_1 \tag{5}$$

Од (3), (4) и (5) имаме $d_1=d_2=d_3$.

в) Бидејќи $a|ac$, тогаш е $(a,ac)=a$. Понатаму од $(a,b)=1$, следува $(ac,bc)=c$, па тогаш од равенството $((x,y),z)=(x,(y,z))$ имаме

$$(a,bc) = ((a,ac),bc) = (a,(ac,bc)) = (a,c) = 1.$$

г) Да се примени в).

55. а) $x=150$, $y=15$; $x=15$, $y=150$; $x=75$, $y=30$; $x=30$, $y=75$.

б) $x=120$, $y=1320$; $x=1320$, $y=120$.

в) Бидејќи $100 \nmid 990$, такви броеви x,y не постојат.

56. а) $m=p^2q$, $n=pqs$ или $m=pqs$, $n=p^2q$.

б) Бидејќи $pq \nmid qrs^2$, такви броеви m,n не постојат.

57. Нека постојат природни броеви x, y, такви што $(x,y)=a$ и $[x,y]=b$. Тогаш, од $a|x$ и $a|y$, следува $a|[x,y]$, т.е. $a|b$.

Обратно, ако $a|b$, тогаш, ставајќи $x=a$, $y=b$, имаме

$$(x,y)=(a,b)=a,\ [x,y]=[a,b]=b.$$

Нека $a|b$ и $b=ac$. За да биде $(x,y)=a$, $[x,y]=b$ треба да е $x=as$, $y=at$, каде $(s,t)=1$, $ast=b$, т.е. $st=c$. Нека c го претставиме како призвод на степени од прости броеви

$$c=c_1c_2\cdot\ldots\cdot c_r,$$

каде $c_i=p_i^{\alpha_i}$. Тогаш, $(s,t)=1$, $st=c$ повлекува $(c_i,s)=1$ или $c_i|s$. Според тоа, $s=c_{i_1}c_{i_2}\cdot\ldots\cdot c_{i_k}$, па значи постојат толку можни избори на s, колку што има подмножества во множеството $\{1,2,\ldots,r\}$, т.е. 2^r. Притоа, за празното множество е случајот $s=1$, $t=c$. Бидејќи за секој број s, постои само еден пар $x=as$, $y=b/s$, тоа и бројот на подредените парови x, y со особината $(x,y)=a$, $[x,y]=b$ е 2^r.

58. Бидејќи a,b се прости броеви поголеми од 3, $b-a$ е секогаш парен број, па $2|(b-a)$. Секој прост број, поголем од 3, е од облик $3k+1$ или $3k+2$. Од условот $a+c=2b$ се добива дека броевите a, b, c се од ист облик $3k+1$ или $3k+2$, зашто, на пример, ако b е од облик $3k+1$, а c од облик $3k+2$, тогаш a ќе биде од облик $3k$, па не би бил прост. Значи, a и b имаат ист облик $3k+1$ или $3k+2$. Но, тогаш $b-a=3(k_1-k_2)$, т.е. $3|(b-a)$, што заедно со $2|(b-a)$ значи $6|b-a$.

Претпоставката a,b, c да се прости е битна, зашто, напр., $a=10$, $b=18$ и $c=26$ не се прости, го задоволуваат условот $a+c=2$,но $6\nmid(b-a)$.

59. За $p=2$, $8p^2+1=33$ не е прост. За $p=3$, $8p^2+1=73$ е прост. Секој број поголем од 3 има еден од следниве облици $3k$, $3k+1$, $3k+2$. Единствен прост број од облик $3k$ се добива за $k=1$, а овој случај е испитан погоре. За $p=3k+1$ имаме

$$8p^2+1=3(24k^2+16k+3),$$

кој не е прост, а за $p=3k+2$ имаме

$$8p^2+1=3(24k^2+32k+11),$$

кој исто така не е прост.

Значи, единствениот прост број p, за кој и бројот $8p^2+1$ е прост, е бројот 3.

60. За $p=2$, $6p^2+1=25$ е сложен број; за $p=3$, $6p^2+1=55$ е сложен број; за $p=5$, и двата броја $4p^2+1=101$, $6p^2+1=151$ се прости. Секој прост број, поголем од 5, е од облик $5k\pm1$ или $5k\pm2$. Во случај p да има облик $5k\pm1$, бројот

$$4p^2+1 = 5(20k^2\pm8k+1)$$

е сложен, а за $p=5k\pm2$, бројот

$$6p^2+1 = 5(30k^2\pm24k+5)$$

е сложен.

Значи, единствениот прост број p, за кој $4p^2+1$ и $6p^2+1$ се прости броеви, е бројот 5.

61. Нека $s=2^a+1$ е прост број. Ќе покажеме дека a е од облик 2^k. Ако a не е од обли 2^k, тогаш $a=mn$, каде што барем едниот од броевите m, n е непарен, на пример, m. Тогаш имаме:

$$2^a+1 = 2^{mn}+1 = (2^n)^m+1 = (2^n+1)(2^{n(m-1)}-2^{n(m-2)}+\ldots+1),$$

што значи 2^a+1 се дели со $2^n+1\neq1$, спротивно на претпоставката. Значи, a мора да биде од облик 2^k.

Ако $r=2^b-1$ е прост, слично се покажува дека b мора да е прост.

62. Нека $a=mn$ и нека $m\leqslant n$. Ако $m=p$ е прост, тогаш имаме $m^2\leqslant a$. Ако m е сложен, тогаш за него постои прост број p така што $p|m$, а од $p<m$ следува $p^2<m^2\leqslant a$, со што тврдењето е докажано.

63. а) Ако x, y се било кои два последователни броеви на Фибоначи, тогаш осумте последователни броеви се:

$$a_1=x,\ a_2=y,\ a_3=x+y,\ a_4=x+2y,\ a_5=2x+3y,\ a_6=3x+5y,$$
$$a_7=5x+8y,\ a_8=8x+13y.$$

Нивниот збир е $n=21x+33y$, а $a_9=13x+21y$, $a_{10}=21x+34y$. Но, $a_9<n<a_{10}$, така што n не може да биде број на Фибоначи.

б) Нека x, y се било кои два последователни броја на Фибоначи. За $x=2$ имаме $(2,3)=1$. Да претпоставиме дека $(n,m)=1$; тогаш $(m,m+n)=(m,n)=1$, па според принципот на математичката индукција, имаме $(x,y)=1$ за било кои x и y.

64. Нека $p_1,p_2,\ldots,p_k$ се првите k прости броеви од облик $4n-1$, (т.е. $p_1=3$, $p_2=7$, $p_3=11$, $p_4=19,\ldots$). Го формираме бројот

$$x = 4p_1p_2\cdot\ldots\cdot p_k-1.$$

Јасно е дека ниеден од броевите $p_1,p_2,\ldots,p_k$ не е делител на x. Да претпоставиме дека бројот x е производ на прости броеви $q_1q_2\cdots q_s$;

притоа q_i има облик $4n_i+1$ или $4n_i-1$. Не може да биде $q_i=4n_i+1$ за секое i, оти тогаш x би имал облик $4m+1$. Според тоа, имаме $q_i=4n_i-1$ за некое i, од каде што следува дека постои прост број p различен од $p_1, p_2, \dots, p_k$, па значи бројот на простите броеви од облик $4n-1$ е бесконечен.

65. Ако $m,n\in N$ и $(m,n)=1$, ќе покажеме дека

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n). \qquad (1)$$

Секој делител на бројот mn е од облик ab, каде што $a|m$, а $b|n$. Ако a_1b_1 и a_2b_2 би биле исти делители, т.е. $a_1b_1=a_2b_2$, тогаш $a_1|a_2b_2$, а од $(m,n)=1$ следува $a_1|a_2$; исто така $a_2|a_1b_1$ повлекува $a_2|a_1$, па значи $a_1=a_2$. Слично, $b_1=b_2$. Значи сите производи ab од различни делители на m односно на n се различни, па бројот на сите делители од mn е $\tau(m)\tau(n)$.

Нека сега n е било кој природен број и нека

$$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}; \qquad (2)$$

од $(p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j})=1$, според (1), имаме

$$\tau(n) = \tau(p_1^{\alpha_1})\tau(p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot\tau(p_k^{\alpha_k}).$$

Од друга страна $\tau(p^{\alpha})=1+\alpha$, па

$$\tau(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_k).$$

За функцијата $\sigma(m)$ важи:

$$(m,n) = 1 \Rightarrow \sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

Имено, ако ab е делител на mn, тогаш $a|m$ и $b|n$, па

$$\sigma(mn) = \sum_{a|m,\, b|n} ab = \sum_{a|m} a \sum_{b|n} b = \sigma(m)\sigma(n).$$

Користејќи го ова равенство и разложувањето (2), имаме

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot\sigma(p_k^{\alpha_k});$$

но

$$\sigma(p_i^{\alpha_i}) = 1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1},$$

од каде што

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.$$

66. а) Бидејќи $\phi(1)=1$, резултатот е тривијален за $m=1$ или $n=1$. Затоа можеме да претпоставиме дека $m>1$ и $n>1$. Тогаш $\phi(mn)$ е бројот на сите броеви од множеството

$$1,2,\dots,mn-1, \qquad (1)$$

кои се заемно прости со mn.

Броевите од множеството (1) можат да се напишат во облик

$$mq+r, \text{ каде што } 0 \leqslant q \leqslant n-1 \text{ и } 0 \leqslant r \leqslant m-1.$$

Но, $(mq+r,m) = (r,m)$ така што $(mq+r,m)=1$ ако, и само ако, $(r,m)=1$. Според дефиницијата на $\phi(m)$, постојат $\phi(m)$ остатоци r такви што $(r,m)=1$. Нека нив ги означиме со $r_1, r_2, \ldots, r_{\phi(m)}$

Да ги разгледаме различните броеви

$$x_q = mq + r_1, \quad q=0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

кои се n на број и секој од нив е заемно прост со m. Било кои два од овие немаат ист остаток при делењето со n. Ако x_{q_1} и x_{q_2} $(q_1 \neq q_2)$ би имаде исти остатоци при делењето со n, тогаш $n|(x_{q_1}-x_{q_2})$, но од $x_{q_1}-x_{q_2}=m(q_1-q_2)$ и $(m,n)=1$ имаме $n|(q_1-q_2)$, што е спротивно на условот $0<|q_1-q_2|\leqslant n-1$.

Ова покажува дека секој број од (2) може да се претстави во облик

$$nk_s+s, \quad s=0,1,\ldots,n-1,$$

каде што $k_0,k_1,\ldots,k_{n-1}$ се ненегативни броеви. Но, $(nk_s+s,n) = 1$ ако, и само ако, $(s,n)=1$. Значи, постојат $\phi(n)$ броеви од множеството (2) кои се заемно прости со n. Одовде следува дека постојат $\phi(n)$ броеви од множеството (1) со остаток r_1 при делењето со m кои се заемно прости со m и n, па значи и со mn.

Применувајќи го истото расудување за секој од броевите $r_2, r_3, \ldots, r_{\phi(m)}$, заклучуваме дека постојат $\phi(m)\phi(n)$ броеви во (1), кои се заемно прости со mn. Според тоа,

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n).$$

б) Броевите во множеството

$$1,2,\ldots,p^{\alpha}, \tag{3}$$

кои се деливи со p, се

$$p,2p,\ldots,p^{\alpha-1}p.$$

Значи, постојат $p^{\alpha}-p^{\alpha-1}$ броеви во (3), кои се заемно прости со p^{α}. Според тоа,

$$\phi(p^{\alpha}) = p^{\alpha}-p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1).$$

в) Ако

$$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ \ldots\ p_r^{\alpha_r},$$

тогаш

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \phi(p_1^{\alpha_1})\phi(p_2^{\alpha_2})\ \ldots\ \phi(p_r^{\alpha_r}) = \\ &= p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ \ldots\ p_r^{\alpha_r-1}(p_r-1) = \\ &= p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ \ldots\ p_r^{\alpha_r}(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ \ldots\ (1-\frac{1}{p_r}) = \\ &= n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ \ldots\ (1-\frac{1}{p_r}).\end{aligned}$$

67. а) Јасно дека n мора да е парен број. Ако $n=2^{\alpha}m$, каде што m е непарен број, тогаш

$$\phi(n) = \phi(2^{\alpha}m) = \phi(2^{\alpha})\phi(m) = 2^{\alpha-1}\phi(m).$$

За да биде $\phi(n) = n/2$, треба да е $\phi(m)=1$, што е можно само за $m=1$, бидејќи за $m=2k+1$ барем 1 и 2 се заемно прости со m, па е $\phi(m) \geqslant 2$.

Значи, n е од облик 2^{α}.

б) Ако n е парен број, тогаш

$$\phi(n) = n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{p_1}) \dots (1-\frac{1}{p_r}) =$$
$$= \frac{1}{2}[2n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{p_1}) \dots (1-\frac{1}{p_r})] = \frac{1}{2}\phi(2n).$$

Ако n е непарен број, тогаш

$$\phi(2n) = \phi(2)\phi(n) = \phi(n),$$

што значи дека равенството е точно за било кој непарен број.

в) Тоа се сите броеви n, кои се заемно прости со 6.

г) $n = 13,\ 21,\ 26,\ 28,\ 36,\ 42.$

68. а) Од $x \equiv y \pmod m$ имаме $x^i \equiv y^i \pmod m$, кое заедно со $a_i \equiv b_i \pmod m$ дава $a_i x^i \equiv b_i y^i \pmod m$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i y^i \pmod m.$$

б) Од $(a,m)=d$ имаме $a=a_1 d$, $m=m_1 d$, каде што $(a_1,m_1)=1$. Бидејќи е $ab \equiv ac \pmod m$, имаме $m \mid (ab-ac)$ или $m_1 d \mid a_1 d(b-c)$, односно $m_1 \mid a_1(b-c)$. Поради $(a_1,m_1)=1$, следува $m_1 \mid (b-c)$, од каде што

$$b \equiv c \pmod{m_1}, \text{ т.е. } b \equiv c \pmod{\frac{m}{d}}.$$

в) Од $a \equiv b \pmod r$ и $a \equiv b \pmod s$ следува $r \mid (a-b)$ и $s \mid (a-b)$, па и $[r,s] \mid (a-b)$, т.е. $a \equiv b \pmod{[r,s]}$.

69. Даден број е делив со два ако последната цифра е делива со 2.

Број е делив со 3 ако збирот од неговите цифри е делив со 3.

Критериум за деливост со 4. Множејќи ја i-тата ($i=0,1,\dots n$) конгруенција од конгруенциите $10^0 \equiv 1 \pmod 4$, $10 \equiv 2 \pmod 4$, $10^2 \equiv 0 \pmod 4$, ..., $10^n \equiv 0 \pmod 4$ со a_i и собирајќи ги потоа, добиваме

$$m = 10^n a_n + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv 2a_1 + a_0 \pmod 4,$$

од каде што следува дека бројот m е делив со 4 ако $4 \mid (2a_1+a_0)$.

Број е делив со 5 ако последната цифра е 0 или 5.

Бројот $m=10^n a_n + \dots + 10a_1 + a_0$ е делив со 6 ако

$$6 \mid a_0 - 2(a_1 + \dots + a_n).$$

Критериум за деливост со 7. Имаме: $10^0\equiv 1 \pmod 7$, $10\equiv 3 \pmod 7$, $10^2\equiv 2 \pmod 7$, $10^3\equiv -1 \pmod 7$, $10^4\equiv -3 \pmod 7$, $10^5\equiv -2 \pmod 7$,... . Множејќи ги по ред со $a_0, a_1, \dots, a_n$ и собирајќи ги потоа, добиваме:

$$m = 10^n a_n + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv (a_0+3a_1+2a_2)-(a_3+3a_4+2a_5)+ \dots \pmod 7,$$

од каде што следува дека m е делив со 7 ако

$$7 \mid (a_0+3a_1+2a_2)-(a_3+3a_4+2a_5)+ \dots .$$

Критериум за деливост со 8. Имаме: $10^0\equiv 1 \pmod 8$, $10\equiv 2 \pmod 8$, $10^2\equiv 4 \pmod 8$, $10^3\equiv 0 \pmod 8$,..., $10^n\equiv 0 \pmod 8$. Множејќи ги по ред со $a_0, a_1, \dots, a_n$ и собирајќи ги потоа, добиваме:

$$m = 10^n a_n + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv 4a_2+2a_1+a_0 \pmod 8,$$

од каде што следува дека m е делив со 8 ако е $8 \mid (4a_2+2a_1+a_0)$.

Број е делив со 9 ако збирот од неговите цифри е делив со 9.

Критериум за деливост со 11. Имаме:

$$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}, \quad n=0,1,\dots .$$

Множејќи ги по ред со $a_0, a_1, \dots, a_n$ и собирајќи ги потоа, добиваме:

$$m = 10^n a_n + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n \pmod{11},$$

т.е. бројот m е делив со 11 ако е $11 \mid (a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n)$.

Бројот m е делив со 12 ако е

$$12 \mid [-3(a_0+2a_1)+4(a_0+a_1+\dots+a_n)],$$

т.е. ако m е делив со 3 и 4.

70. а) Бидејќи е $19\equiv -1 \pmod 5$, имаме $19^{1024}\equiv 1 \pmod 5$, па остатокот што се добива при делењето на бројот 19^{1024} со 5 е 1.

б) 1.

в) Имаме: $3^4\equiv 4 \pmod{77}$, $3^8\equiv 16 \pmod{77}$, $3^{16}\equiv 25 \pmod{77}$, $3^{32} \equiv 9 \pmod{77}$ и накрај $3^{36}\equiv 36 \pmod{77}$, па остатокот е 36.

71. Бидејќи е $a=2k+1$ непарен број имаме $a^2-1=(2k+1)^2-1=4k(k+1)$, а $2 \mid k(k+1)$, па $8 \mid (a^2-1)$, т.е. $a^2\equiv 1 \pmod 8$.

Нека претпоставиме дека

$$a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{2+n}};$$

тогаш

$$a^{2^{n+1}}-1 = a^{2^n \cdot 2}-1 = (a^{2^n})^2-1 = (a^{2^n}-1)(a^{2^n}+1).$$

Бидејќи $2 \mid (a^{2^n}+1)$, според индуктивната претпоставка имаме

$$2^{n+3} \mid (a^{2^n}-1)(a^{2^n}+1), \text{ т.е. } a^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{2^{n+3}}$$

со што тврдењето е докажано.

72. Нека $a^p+b^p\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ и нека $p>2$ е прост број. Од
$$(a+b)^p\equiv a^p+b^p(\mathrm{mod}\,p)$$
следува и
$$(a+b)^p\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),\ \text{т.е.}\ a+b\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),$$
од каде што $b=kp-a$. Од друга страна, поради $p>2$, имаме
$$\begin{aligned} a^p+b^p &= (a+b)(a^{p-1}-a^{p-2}b+\ \dots\ +b^{p-1}) = \\ &= pk(a^{p-1}-a^{p-2}(pk-a)+\ \dots\ +(pk-a)^{p-1}) = \\ &= pk(pa^{p-1}+pm) = p^2k(a^{p-1}+m), \end{aligned}$$
т.е.
$$p^2|(a^p+b^p),\quad a^p+b^p\equiv 0(\mathrm{mod}\,p^2).$$
За $p=2$, ставајќи $a=1$, $b=1$, имаме $2|(a^2+b^2)$, но $4\nmid(a^2+b^2)$, т.е. за $p=2$ резултатот не е точен.

73. Да покажеме прво дека $p|\binom{p}{1}$, за секој прост број p. Нека ставиме $x=\binom{p}{1}=\frac{p!}{1!(p-1)!}$, т.е. $p!=1!(p-1)!x$. Бидејќи p е фактор во левата страна и е прост, тој е фактор и во $x=\binom{p}{1}$.

Да докажеме дека е точно
$$a^p\equiv a(\mathrm{mod}\,p),$$
за било кој $a\in N$. Нека ова тврдење е точно за $a=n$, т.е.
$$n^p\equiv n(\mathrm{mod}\,p);$$
тогаш
$$(n+1)^p=n^p+\binom{p}{1}n^{p-1}+\ \dots\ +\binom{p}{p-1}n+1,$$
а бидејќи е $p|\binom{p}{1}$ за било кој прост број p, добиваме дека
$$(n+1)^p\equiv n^p+1(\mathrm{mod}\,p),$$
од каде што следува
$$(n+1)^p-(n+1)\equiv n^p-n(\mathrm{mod}\,p),$$
па користејќи ја индуктивната претпоставка, имаме
$$(n+1)^p-(n+1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p).$$
Бидејќи тврдењето е точно за $a=1$, според принципот на математичката индукција, тоа е точно за секој природен број.

Од $a^p\equiv a(\mathrm{mod}\,p)$, а поради $(a,p)=1$, се добива $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

74. Нека p е прост број и нека го разгледаме множеството
$$1,2,3,\dots,p-1. \tag{1}$$
Сите броеви од (1) се заемно прости со p, па равенката $ax\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ е решлива во множеството (1).

Да видиме кои се тие броеви од (1) за кои е $x=a$, т.е.

$aa=a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. Имаме: $a^2-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, $p\mid(a^2-1)$, $p\mid(a-1)(a+1)$, т.е. $p\mid(a-1)$ или $p\mid(a+1)$. Во првиот случај $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$, т.е. $a=1$, а во вториот $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$, т.е. $a=p-1$.

Ако од множеството (1) ги изоставиме броевите 1 и $p-1$, остануваат $p-3$ броеви, од кои се добиваат $(p-3)/2=s$ парови a_i, x_i, $a_i\neq x_i$, за кои е

$$a_i x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\,p),\ i=1,2,\dots,s.$$

Множејќи ги меѓусебно овие конгруенции, добиваме

$$2\cdot 3\ \dots\ (p-2)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p),$$

а множејќи ја оваа со $p-1$, добиваме

$$2\cdot 3\ \dots\ (p-2)(p-1)\equiv p-1(\mathrm{mod}\,p),$$

т.е.

$$(p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\,p).$$

Обратно, нека е

$$(n-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\,n)$$

и нека претпоставиме дека n е сложен број, т.е. $n=ab$, каде што $1<a,b<n$. Тогаш имаме $a\mid(n-1)!$, па следователно, $a\nmid(n-1)!+1$, а уште повеќе, $n\nmid(n-1)!+1$, спротивно на претпоставката. Значи, n мора да е прост.

75. а) Множејќи го равенството $1=8\cdot 5-13\cdot 3$ со 63, добиваме

$$63=8\cdot 315-13\cdot 189,$$

од каде што $x_0=315$, $y_0=189$, па општото решение е

$$x=315+13t,\ y=189+8t,\ t\in Z.$$

б) $x=-90+22t$, $y=-160+39t$, $t\in Z$.

в) $x=-74+129t$, $y=70-122t$, $t\in Z$.

г) Делејќи со 2, добиваме $129x-86y=28$. Бидејќи $(129,86)=43$, а $43\nmid 28$, заклучуваме дека дадената равенка нема решение.

76. Ако со x односно y го означиме бројот на вреќите од по 60 односно 80 килограми, ќе имаме: $60x+80y=440$ или $3x+4y=22$, од каде што $x=-22+4t$, $y=22-3t$, $t\in Z$. Од $-22+4t>0$ и $22-3t>0$ имаме $t=6$ и $t=7$, па значи $x=2$, $y=4$ или $x=6$, $y=1$.

77. Имаме: $30x+50y=1490$ или $3x+5y=149$, од каде што $x=298-5t$, $y=-149+3t$, $t\in Z$. Од $298-5t>0$ и $-149+3t>0$ имаме $50\leqslant t\leqslant 59$, $t\in Z$. Значи, можат да се купат следниве парови марки:

по 30р.	48	43	38	33	28	23	18	13	8	3
по 50р.	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28 .

78. а) Ќе ги определиме само примитивните Питагорини тројки, за кои е $z \leqslant 80$, каде што $x=2uv$, $y=v^2-u^2$, $z=u^2+v^2$, при што $v>u$, $(u,v)=1$ и едниот од броевите u и v е парен, а другиот непарен.

u	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5
v	2	4	6	8	3	5	7	4	8	5	7	6
x	4	8	12	16	12	20	28	24	48	40	56	60
y	3	15	35	63	5	21	45	7	55	9	33	11
z	5	17	37	65	13	29	53	25	73	41	65	61

Другите Питагорини тројки се добиваат множејќи ги со $k=1,2,3,\ldots$ оние примитивни тројки за кои е $kz \leqslant 80$.

б) Тоа се сите примитивни Питагорини тројки што се добиваат за $u=1$ и $v=2k$.

в) Не постојат Питагорини тројки со таа особина.

79. а) Од $x(y-1)=y$ следува $x|y$, бидејќи е $(y,y-1)=1$, а од $y(x-1)=x$ следува $y|x$, бидејќи е $(x,x-1)=1$. Од $x|y$ и $y|x$ следува $y=\pm x$, па заменувајќи ги добиваме паровите $(0,0)$ и $(2,2)$.

б) Бидејќи е $2xy+3y^2=2(xy+y^2)+y^2=24$, следува дека y треба да биде парен број. Ако ставиме $y=2n$, добиваме $4(xn+3n^2)=24$, т.е. $n(x+3n)=6$, од каде што следува дека $n|6$, а од тоа се добиваат следниве случаи:

$n=1$: $x=3$, $y=2$; $n=-1$: $x=-3$, $y=-2$;
$n=2$: $x=-3$, $y=4$; $n=-2$: $x=3$, $y=-4$;
$n=3$: $x=-7$, $y=6$; $n=-3$: $x=7$, $y=-6$;
$n=6$: $x=-17$, $y=12$; $n=-6$: $x=17$, $y=-12$.

в) Ако тројката $x=ku$, $y=kv$, z е решение, тогаш и $x=u$, $y=v$, z исто така е решение; затоа можеме да претпоставиме дека $(x,y)=1$, во кој случај x и y се непарни, зашто $(x-y)(x+y)$ е парен број. Од

$$xy|(x-y)(x+y)$$

имаме

$$x|(x-y) \text{ или } x|(x+y),$$

од каде што следува $x|y$; слично, и $y|x$, па одовде е $y=\pm x$. Но, тогаш е $2x^2z=0$, па значи единствени решенија се тројките $(x,x,0)$, $(x,-x,0)$, $(-x,x,0)$ и $(0,0,z)$.

г) Од $3^x=2^y+1$, следува дека $x,y\in N$. Нека е, прво, $x=2k$; тогаш имаме

$$(3^k-1)(3^k+1)=2^y.$$

Броевите 3^k-1 и 3^k+1 имаат за најголем заеднички делител 2. Од друга страна,

$$3^k-1=2^u,\ 3^k+1=2^v,$$

каде што $u<v$ и $u+v=y$, од каде што следува $u=1$, $v=2$, т.е. $x=2$, $y=3$.

Ако, пак, е $x=2k+1$, тогаш

$$2^u = 3^x - 1 = 2(3^{2k} + \dots + 1),$$

т.е. добиваме

$$2^{u-1} = 3^{2k} + \dots + 1.$$

Десната страна е непарен број, бидејќи е збир од $2k+1$ непарни броеви, а тоа е можно само ако е $y=1$, т.е. ја добиваме двојката $x=1$, $y=1$.

Значи, решенија се само паровите $(2,3)$ и $(1,1)$.

д) Ако x,y,z е решение на дадената равенка и x,y,z се заемно прости, тогаш тие се заемно прости попарно. Ако $(x,y)=p>2$, тогаш од равенството

$$2\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \left(\frac{y}{p}\right)^2 = \left(\frac{z}{p}\right)^2$$

следува $p\,|\,z$, зашто левата страна е цел број. Потоа, y мора да е непарен за да биде $(x,y,z)=1$, па и z мора да е непарен.

Пишувајќи ја равенката во обликот

$$2x^2 = (z+y)(z-y),$$

заклучуваме дека $z-y$ и $z+y$ имаат најголем заеднички делител 2. Според тоа, или $(z+y)/2$ или $(z-y)/2$ е непарно, т.е. или броевите $z+y$ и $(z-y)/2$ се заемно прости, или пак такви се $(z+y)/2$ и $z-y$.

Во првиот случај, од

$$\frac{(z+y)(z-y)}{2} = x^2,$$

следува

$$z+y=n^2,\ z-y=2m^2,$$

а во вториот случај

$$z+y=2m^2,\ z-y=n^2,$$

каде што m и n се природни броеви и m е непарен. Решавајќи ги овие равенки, добиваме

$$z = \frac{1}{2}(n^2+2m^2),\quad y = \frac{1}{2}(n^2-2m^2),\quad x = mn$$

или пак

$$z = \frac{1}{2}(n^2+2m^2),\quad y = \frac{1}{2}(2m^2-n^2),\quad x = mn.$$

Пишувајќи ги заедно овие равенства, имаме

$$x = mn,\quad y = \pm\frac{1}{2}(n^2-2m^2),\quad z = \frac{1}{2}(n^2+2m^2).$$

Но, за y и z да бидат цели броеви, мора n да биде парен број, па ставајќи $n=2v$, $m=u$, добиваме

$$x = 2uv,\ y = \pm(u^2-2v^2),\quad z = u^2+2v^2, \qquad (1)$$

каде што u и v се позитивни, заемно прости, а u непарен број. При овие услови, u и v се бираат произволно, но така што y да биде позитивен.

За да се најдат сите други решенија, треба да забележиме само дека, ако x,y и z се дадени со формулите (1), тогаш

$$2(kx)^2+(ky)^2=k^2(2x^2+y^2)=k^2z^2=(kz)^2$$

за произволно $k\in Z$.

ѓ) Нека p е прост заеднички делител на x и y. Тогаш $x=pu$, $y=pv$ и $p^2(u^2+v^2)=3z^2$. Одовде лесно се добива дека p е делител и на z. Затоа, ќе претпоставиме дека x и y се заемно прости. Нека $x=3m+r$, $y=3n+s$, $r,s=0,1,2$. Тогаш имаме

$$x^2+y^2\equiv s^2+r^2\equiv 0 \pmod 3.$$

Лесно се уочува дека од

$$s^2+r^2\equiv 0 \pmod 3$$

следува $s=r=0$, што значи x и y имаат заеднички делител 3.

Значи, равенката нема решение.

80. а) Ако x е парен, $x=2x_1$, тогаш и y мора да е парен, $y=2y_1$, па добиваме

$$2x_1^2+987=2y_1^2,$$

што не е можно.

Ако x е непарен, тогаш и y е непарен и $y-x=2k$, $y+x=2m$, па од $(y-x)(y+x)=1974$ добиваме $2km=987$, што не е можно.

б) Очигледно, y треба да е непарен. Ставајќи $y=2k-1$, добиваме $x^2-10k^2+10k=6$, па, значи, x е парен број. Нека ставиме $x=2m$; тогаш $4m^2-10k(k-1)=6$, т.е. $2m^2-5k(k-1)=3$, што не е можно, бидејќи $k(k-1)$ е парен број.

в) Четвртата степен од било кој природен број завршува со цифрата 0,1,5 или 6, а притоа 0 односно 5 се добива само во случај кога основата завршува со таа цифра. Од тоа следува дека x^4+y^4 се дели со 5 само кога и x и y се делат со 5. Ако $x=5u$, $y=5v$ ќе имаме

$$5^3(u^4+v^4)=z^2.$$

За да z^2 се дели со 5^3 потребно е z да се дели со 5^2, т.е. $z=5^2w$. Според тоа, ќе имаме

$$u^4+v^4=5w^2.$$

Продолжувајќи со истата дискусија ќе добиеме дека равенството не е можно.

г) Нека дадената равенка ја напишеме во обликот

$$x^2=3(5+y^2)+2.$$

Јасно дека x не се дели со 3, па значи $x=3k\pm 1$. Но, тогаш

$$x^2 = 3(3k^2 \pm 2k)+1$$

спротивно на (1).

ж) Од $x^2+x = y^2$ имаме $x(x+1) = y^2$, т.е. y^2 е производ од два заемно прости броја x и $x+1$. Но, тогаш мора да е $x=k^2$ и $x+1=m^2$, од каде што $m^2-k^2 = 1$; т.е. $(m-k)(m+k)=1$, кое не е можно, бидејќи $m+k>2$.

Аналогно се покажува дека при произволно $n>1$, равенката $x^2+x=y^n$ не е решлива во N.

ѓ) Нека x и y се непарни: $x=2k+1$, $y=2m+1$; тогаш

$$4(k^2+k+m^2+m)+2 = 4^n,$$

од каде што добиваме

$$2(k^2+k+m^2+m) = 2\cdot 4^{n-1}-1,$$

кое не е можно, бидејќи левата страна е парен, а десната непарен број.

Нека $x=2^r x_1$, $y=2^s y_1$, каде што $0<r<s\leqslant n$, а x_1 и y_1 се непарни броеви. Тогаш го добиваме равенството

$$x_1^2+ 4^{s-r}y_1^2= 4^{n-r},$$

кое што пак не е можно, бидејќи левата страна е непарен број, а десната парен број.

61. Равенката ја пишуваме во обликот

$$x^3(x^2-1) = y^3 z.$$

Лесно се гледа дека $(x^3, x^2-1)=1$. Во тој случај бројот y^3 (y е прост по услов) може да е фактор само во еден од броевите x^3 и x^2-1 и да биде заемно прост со другиот.

Ако $(x^3, y^3)=1$, тогаш $x^3 | z$, но тоа е невозможно, бидејќи z по услов е прост број, а x очигледно е различно од 1. Значи, имаме $(x^2-1, y^3)=1$. Во тој случај $x^2-1=(x-1)(x+1)$ треба да е фактор во z, а бидејќи z е прост, тоа е можно само во случај да е $x-1=1$. Така добиваме $x=2$, $z=x+1=3$ и $2^3\cdot 3=y^3\cdot 3$ од каде што $y=2$.

62. Јасно, дека треба да е: $p=2$, а q непарен број, или p непарен број а $q=2$.

1) Нека $p=2$, т.е. $2^x=q^y+1$. Ако y е непарно, ќе имаме

$$2^x = (q+1)(q^{y-1}- \dots +1),$$

од што следува $q=2^a-1$, т.е.

$$2^x = (2^a-1)^y+1 = 2^a(2k+y),$$

а тоа е можно само за $x=a$, $k=0$, $y=1$. Според тоа, добиваме $q=2^x-1$, а според задачата 61, x мора да е прост.

Нека $y=2z$ е парен број и $q=2a+1$. Тогаш

$$2^x = (2a+1)^{2z}+1 = 4b+2,$$

што не е можно.

2) Нека $q=2$, т.е. $p^x = 2^y+1$. За $p=3$, како што видовме во задачата 79.г), можни се само следните случаи: $x=2$, $y=3$ и $x=y=1$. Затоа ќе претпоставиме дека $p>3$. Тогаш имаме

$$(p-1)(p^{x-1}+\dots+1) = 2^y,$$

од што следува $p=2^a+1$, $a>1$. Ќе покажеме дека $a=y$, $x=1$. Навистина, равенката сега добива облик

$$(2^a+1)^x = 2^y+1.$$

За x непарно имаме:

$$(2^a+1)^x = 2^a(2u+x)+1,$$

од каде што добиваме $x=1$, $u=0$, $a=y$. Според задачата 61, во овој случај y треба да е од облик 2^z.

Нека $x=2t$ е парен број. Тогаш имаме

$$(p^t-1)(p^t+1) = 2^y,$$

кое е можно само за $p^t-1=2^u$, $p^t+1=2^v$, а од тоа следува $u=1$, $p=3$, $t=1$, спротивно на претпоставката $p>3$.

83. Ако се $p, q_1, q_2 > 2$ прости броеви, тогаш p^{2x} е непарен, а $q_1^y q_2^z+1$ е парен број. Значи, барем еден од p, q_1, q_2 мора да е еднаков на 2. Според тоа, можни се следните две равенки од овој облик:

$$1)\ 2^{2x} = q_1^y q_2^z + 1; \qquad 2)\ p^{2x} = 2^y q^z + 1.$$

1) Од $2^{2x} = q_1^y q_2^z + 1$ добиваме $(2^x-1)(2^x+1) = q_1^y q_2^z$, а бидејќи е $(2^x-1, 2^x+1)=1$, следува $2^x-1=q_1^y$, $2^x+1=q_2^z$. Според претходната задача ги имаме следните случаи:

$$y=z=1,\ x=2 \quad \text{и} \quad y=1,\ x=q_2=3,\ z=2,\ q_1=7.$$

2) Ако равенката ја напишеме во обликот

$$(p^x-1)(p^x+1) = 2^y q^z,$$

добиваме

$$p^x-1 = 2q^z, \quad p^x+1 = 2^{y-1} \tag{1}$$

или

$$p^x-1 = 2^{y-1}, \quad p^x+1 = 2q^z. \tag{2}$$

Од $p^x+1 = 2^{y-1}$ следува $x=1$, а $y-1$ е прост број, т.е. $p = 2^{y-1}-1 = 2q^z+1$ или $2^{y-2}=q^z+1$, од каде што $y-2$ е прост. а $z=1$. Единствениот број y кој го задоволува условот да $y-1$ е прост и $y-2$ е прост, е $y=4$, за кое добиваме $p=7$, $q=3$.

Од $p^x-1 = 2^{y-1}$ следува:

а) $p=3$, $x=2$, $y=4$, од каде што $q=5$, $z=1$;

б) $x=1$, $y-1=2^z$, т.е. $p=2^{y-1}+1=2q^z-1$, или $2^{y-2}+1=q^z$, од каде добиваме $q=3$, $z=2$, $y=5$, а $p=17$.

Со тоа ги определивме сите можни случаи, а тоа се: $2^4=3\cdot5+1$, $2^6=7\cdot3^2+1$, $7^2=2^4\cdot3+1$, $3^4=2^4\cdot5+1$, $17^2=2^5\cdot3^2+1$.

84. 1) Во системот со основа четири има четири едноцифрени броеви: 0,1,2,3; таблиците за собирање и множење се:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

2) Во системот со основа дванаесет a и b нека бидат цифрите за броевите што одговараат на 10 и 11 во декадниот систем. Таблиците за собирање и множење се:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	a	b	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	a	b	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	a	b	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	a	b	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	a	b	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	a	b	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	a	b	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	a	b	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
b	b	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b
2	0	2	4	6	8	a	10	12	14	16	18	1a
3	0	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	0	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	0	5	a	13	18	21	26	2b	34	39	42	47
6	0	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	0	7	12	19	24	2b	36	41	48	53	5a	65
8	0	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	0	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
a	0	a	18	26	34	42	50	5a	68	76	84	92
b	0	b	1a	29	38	47	56	65	74	83	92	a1

85. а) 10100_2; б) 10111101_2; в) -10110_2; г) 24444002_5;

д) 2635_9 или 3670_8.

86. 10100010000_2; 110100_4; 20141_5; 900_{12}.

87. а) 8_9; б) 2; в) 1_2.

88. Нека x е природен број, претставен во систем со основа b, и нека неговата последна цифра е b_0, а y бројот што се добива кога ќе се изостави таа цифра, т.е. $x=by+b_0$. Тогаш, за да се пресмета x^2 треба да се извршат следните работи:

1) да се пресмета y^2 и да се допишат оддесно две нули;

2) y да се помножи со 2, на резултатот да се допише оддесно b_0 и ова да се помножи со b_0;

3) збирот од броевите добиени во 1) и 2) е x^2.

При постапката 1) може да се спроведе истата работа.

1011011001_2; 64644_8; 651165541_7.

89. Два броја со дадената особина се: $10a+b$ и $10a+10-b$, па множејќи ги, добиваме

$$10^2a(a+1)+b(10-b),$$

што значи, два броја со дадената особина се множат, кога производот од последните цифри ке се допише оддесно на производот од бројот на преостанатите цифри и тој број наголемен за единица. На пример:

$46\cdot44=10^2\cdot4\cdot5+24=2024$; $146\cdot144=10^2\cdot14\cdot15+24=21024$; $115\cdot115=13225$.

Не е битно што се работи во десетичен систем, зашто

$$(a_pp+b)(a_pp+p-b) = [a(a+1)]_pp^2+[b(p-b)]_p,$$

каде што p е основата.

90. а) Ставајќи $13=x+3$, $100=x^2$, добиваме $x^2-4x-12=0$, од каде што $x=6$, т.е. равенството е точно во системот со основа 6.

б) 7.

в) Равенството не е точно во ниеден систем.

г) Ако основата на системот ја означиме со x, равенството се сведува на

$$(x+2)!-(x+1)!-x! = x^4+x^2,$$

т.е.

$$(x-1)!(x+2) = x^2+1,$$

од каде што добиваме $x=3$, што значи равенството е точно во системот со основа 3.

91. Пишувајќи го даденото равенство во облик

$$7b^2+2b+2-5b^2-5b-4 = 133,$$

т.е.

$$2b^2-3b-135 = 0,$$

добиваме $b=9$.

92. Слично како во задачата 69 можат да се изведат критериуми за деливост во систем со основа 8. На пример, множејќи ја i-тата конгруенција, $i=0,1,\dots,n$,

$$8^0\equiv 1 \pmod 7,\ 8\equiv 1 \pmod 7,\ 8^2\equiv 1 \pmod 7,\dots,8^n\equiv 1 \pmod 7,$$

со a_i и собирајќи ги добиваме:

$$m= 8^n a_n+ \dots +8a_1+a_0 \equiv a_n+ \dots +a_1+a_0 \pmod 7,$$

т.е. бројот m се дели со 7 ако $7|(a_n+ \dots +a_1+a_0)$.

93. За било кое x имаме $x=[x]+\alpha$, каде што $0\leqslant\alpha<1$. Нека

$$[x] = qm + r, \qquad 0\leqslant r< m.$$

Тогаш

$$x = qm+r+\alpha, \qquad 0\leqslant r+\alpha< m,$$

од каде што

$$\frac{[x]}{m} = q + \frac{r}{m}, \quad \frac{x}{m} = q + \frac{r+\alpha}{m}.$$

Поради $0\leqslant\frac{r}{m}< 1$ и $0\leqslant \frac{r+\alpha}{m} <1$, добиваме

$$\left[\frac{[x]}{m}\right]= q = \left[\frac{x}{m}\right].$$

94. а) Бидејќи е $[x]\leqslant x< [x]+1$, можат да настанат следниве случаи:

$$1)\ [x]\leqslant x <[x] + \frac{1}{2}, \qquad 2)\ [x] + \frac{1}{2}\leqslant x< [x] + 1.$$

Во случајот 1) имаме $[x] + 1/2\leqslant x + 1/2< [x] + 1$, па $[x]=[x+1/2]$, т.е. $[x] + [x+1/2] = 2[x] = [2x]$, бидејќи $2[x]\leqslant 2x<2[x]+1$.

Во случајот 2) имаме $[x]+1\leqslant x+1/2 < [x]+3/2$, па $[x+1/2] = [x]+1$, т.е. $[x]+[x+1/2] = 2[x]+1$. Од друга страна, бидејќи е $2[x]+1 \leqslant 2x< 2[x]+2$ имаме $[2x] = 2[x]+1$, па $[x]+[x+1/2] = [2x]$.

б) Да се направи истата дискусија како под а).

95. Да ги разгледаме позитивните броеви што се делат со d и се помали или рамни на α; нека најголемиот од нив биде sd; бројот од овие броеви

$$d, 2d, 3d, \dots, sd$$

е еднаков на s, каде $sd\leqslant\alpha<(s+1)d$, т.е. $s\leqslant\alpha/d <s+1$, од каде што $s = [\alpha/d]$.

96. За $n< p$, сите собирци во изразот

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^x}\right] + \dots \tag{1}$$

се нули, па $p^\alpha= 1$, што е и точно за такви p и n. Значи, за $n=1< p$ тврдењето е точно.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за сите n такви што $1\leqslant n< m$, каде што $m\geqslant 2, m\in N$. Можеме да претпоставиме дека $m\geqslant p$. Тогаш, меѓу множителите $1,2,\dots,m$ од $m!$ има $[m/p]$, кои се делат со p

(според 95.). Производот од сите останати множители што не се делат со p да го означиме со M. Тогаш,

$$m\,! = p\cdot 2p\cdot\ldots\cdot\left[\frac{m}{p}\right]pM = p^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left[\frac{m}{p}\right]!\,M, \qquad (2)$$

каде што $p\nmid M$.

Од $m\geqslant p$ следува $1\leqslant\left[\frac{m}{p}\right]<m$.

Според индуктивната претпоставка, показателот на највисокиот степен на p, кој е фактор во $[m/p]!$ е еднаков на

$$\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p}\right]+\left[\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{p^2}\right]+\ldots=\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\ldots$$

(според 93.). Од (2) добиваме дека најголемиот показател на степенот од p, кој е фактор во m! е

$$\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\ldots .$$

Значи, тврдењето е точно и за m. Бидејќи ова е една од формите на математичката индукција, тврдењето е точно за било кој $n\in N$.

97. Според 96., имаме:

$$=\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{9}\right]+\left[\frac{1000}{27}\right]+\left[\frac{1000}{81}\right]+\left[\frac{1000}{243}\right]+\left[\frac{1000}{729}\right]=498,$$

што значи $3^{498}\mid 1000!$, но $3^{499}\nmid 1000!$.

III. РЕАЛНИ БРОЕВИ

98. Бидејќи A и B по услов се непразни, A е вистинско подмножество од Q. Нека $a\in A$ и $x<a$; тогаш $x\notin B$, но $Q=A\cup B$, па $x\in A$, т.е. A е долна класа. Од (ii) се гледа дека $A\cap B=\emptyset$, па значи имаме $B=A'$.

Обратното следува од дефиницијата на класи.

99. Ако $A_1\nsubseteq A$, тогаш постои $a\in A_1$ така што $a\notin A_2$, т.е. $a\in B_2=A_2'$. За секое $x\in A_2$ точно е неравенството $x<a$, а бидејќи A_1 е долна класа и $a\in A_1$, имаме $x\in A_1$, т.е. $A_2\subseteq A_1$.

100. Јасно дека A е вистинско непразно подмножество од Q. Нека $x\in Q$, $a\in A$ и $x<a$; тогаш е $x^3<a^3\leqslant 2$, т.е. $x\in A$. Значи, A е долна класа во Q.

За да покажеме дека A е ирационална долна класа, треба да покажеме дека во A нема најголем елемент, а во $B=A'$-најмал елемент. Да уочиме прво дека не постои рационален број a, таков што $a^3=2$. Ако $(p/q)^3=2$ и $(p,q)=1$, тогаш од $p^3=2q^3$ следува $p=2m$, а потоа и

$q=2n$, спротивно на $(p,q)=1$.

Нека $0<a\in A$, а $n\in N$; тогаш е

$$(a+\frac{1}{n})^3 \leqslant a^3+\frac{1}{n}(3a^2+3a+1).$$

Од $a^3<2$, следува $x=2-a^3>0$. Ако го избереме природниот број n_0, таков што

$$x>\frac{1}{n_0}(3a^2+3a+1),$$

добиваме

$$(a+\frac{1}{n_0})^3<a^3+x=2,$$

од каде што следува дека во A нема најголем елемент.

Слично, користејќи го неравенството

$$(b-\frac{1}{n})^3>b^3-\frac{1}{n}(3b^2+1)$$

се покажува дека во $B=A'$ нема најмал елемент.

101. $D\neq\emptyset$, бидејќи $B\neq\emptyset$; Бидејќи, за било кој $b'\in B'$, $r+b'\notin D$, имаме $D\subset Q$. Значи, D е непразно подмножество од Q.

Нека $b\in B$. За било кој $s\in Q$, таков што $s<r+b$, имаме $s-r<b$, што значи $s-r\in B$, но тогаш $s=r+(s-r)\in D$. Значи, D е долна класа во Q. Исто така, за $b\in B$, постои елемент $c\in B$, таков што $c>b$; но, тогаш $r+b, r+c\in D$ и $r+c>r+b$, што значи во D нема најголем елемент, т.е. е ирационална долна класа.

Нека $b'\in B'$. Тогаш $r+b'\notin D$, бидејќи $b'\notin B$; значи $r+b'\in D'$. Од друга страна, ако $q'=r+p'\in D'$, тогаш $p'\notin B$, бидејќи во таков случај би имале $D\cap D'\neq\emptyset$. Значи, $D'=\{r+a' \mid a'\in B'\}$.

102. На пример, бројот $\alpha=r+(s-r)/\sqrt{2}$, го задоволува бараниот услов.

103. Нека α и β се определени со долните класи A и B. Бидејќи е $\alpha<\beta$, имаме $A\subset B$, па постојат рационални броеви r,s, такви што $s<r$ и $r,s\in B\setminus A$, а од ова следува $\alpha\leqslant s<r<\beta$.

Според 102. постои ирационален број γ, таков што $s<\gamma<r$, па тогаш е и $\alpha<\gamma<\beta$.

104. Нека претпоставиме дека $\alpha=\frac{a}{b}$, $\beta=\frac{c}{d}$, се рационални броеви, каде што $a,b,c,d\in N$. Во овој случај $n\alpha>\beta$ ако, и само ако, $nad>bc$. Бидејќи $ad\geqslant 1$ и $2ad>1$, ставајќи $n=2bc$, неравенството $n\alpha>\beta$ сигурно е задоволено.

Нека α и β се било кои реални броеви и нека $\alpha<\beta$, бидејќи за $\alpha>\beta$ резултатот е тривијален. Нека r,s се позитивни реални броеви, такви што $r\in A$, $s\in B'$, каде што A и B се соодветните долни класи за α и β; тогаш $r<\alpha$, $s>\beta$. Според претходното, постои природен број n, таков што $nr > s$. Но, тогаш $n\alpha \geqslant nr > s > \beta$, што требаше да се докаже.

105. б) Нека B_1, B_2, B_3 се соодветните горни класи за $\sqrt{2}, \sqrt{8}$ и $\sqrt{18}$, т.е.

$$B_1 = \{x \mid x \geqslant 0, x^2 > 2\}, \quad B_2 = \{x \mid x \geqslant 0, x^2 > 8\}, \quad B_3 = \{x \mid x \geqslant 0, x^2 > 18\}.$$

За да покажеме дека $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$, доволно е да покажеме дека

$$B_1 + B_2 = B_3. \qquad (1)$$

Ако $u \in B_1, v \in B_2$, т.е. $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и $u^2 > 2$, $v^2 > 8$, тогаш е јасно дека $uv > 4$. Според тоа имаме

$$(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv > 18,$$

т.е. $u+v \in B_3$. Докажавме, значи, дека $B_1 + B_2 \subseteq B_3$. Нека $w \in B$, т.е. $w \geqslant 0$ и $w^2 = 18 + k$, каде што $k > 0$. Сакаме да ги определиме $u \in B_1, v \in B_2$, така што $u + v \leqslant w$, од што ќе следува $w \in B_1 + B_2$, т.е. $B_3 \subseteq B_1 + B_2$, кое заедно со претходното ќе го даде равенството (1).

Нека $u^2 = 2 + r$, $v^2 = 8 + r$, т.е. $(u+v)^2 = 10 + 2r + 2uv$. Поради,

$$(uv)^2 = 16 + 10r + r^2 < (4 + 3r)^2,$$

добиваме $uv < 4 + 3r$. Според тоа, ќе имаме $(u+v)^2 < 18 + 5r$. Избирајќи го r така што $5r < k$, добиваме $(u+v)^2 < w^2$, т.е. $u+v < w$, што и сакавме да постигнеме.

г) Нека B_1, B_2, B_3 се соодветните горни класи за $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{6}$, т.е.

$$B_1 = \{x \mid x \geqslant 0, x^3 > 2\}, \quad B_2 = \{x \mid x \geqslant 0, x^3 > 3\}, \quad B_3 = \{x \mid x \geqslant 0, x^3 > 6\}.$$

За да покажеме дека $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$, доволно е да покажеме дека $B_1 B_2 = B_3$.

Нека $u \in B_1$, $v \in B_2$, т.е. $u^3 > 2$, $v^3 > 3$. Одовде имаме $(uv)^3 > 6$, т.е. $uv \in B_3$, од каде што

$$B_1 B_2 \subseteq B_3. \qquad (2)$$

Нека сега $z \in B_3$, т.е. $z^3 > 6$. Одовде следува $z^3 = 6 + k$, за некое k. Нека ставиме $u^3 = 3 + \alpha$, $v^3 = 2 + \beta$, што значи $u \in B_2$, $v \in B_1$. Одовде $(uv)^3 = 6 + 2\alpha + 3\beta + \beta\alpha$, па ги бараме α и β така што е $(uv)^3 < z^3$. Земајќи $\beta < 1$, имаме $2\alpha + 3\beta + \alpha\beta < 3(\alpha + \beta)$ и ставајќи $\alpha = \beta < k/6$, добиваме

$$(uv)^3 < 6 + k = z^3,$$

од каде што следува дека $z \in B_1 B_2$, т.е.

$$B_3 \subseteq B_1 B_2. \qquad (3)$$

Од (2) и (3) следува $B_1 B_2 = B_3$.

Да напоменеме дека равенствата под а) и б) се докажуваат слично како оние под б) односно г).

106. Нека r е рационален број, а α ирационален број. Збирот

$r+\alpha=s$ не може да биде рационален, зашто тогаш и $\alpha=s-r$ би бил рационален.

Производот на рационален број r и ирационален број α е рационален само во случај кога е $r=0$.

107. а) Нека $\sup S=m$. Ако a е мајоранта за S, тогаш од $x\leqslant a$, за секое $x\in S$, следува $-a\leqslant -x$, т.е. $-a$ е миноранта за $-S$. Одовде следува дека $-m$ е една миноранта за $-S$. Нека е $-n\leqslant -m$; тогаш $n\geqslant m$, па од $\sup S=m$, следува $n=m$, т.е. $\inf(-S)=-m=-\sup S$.

г) Нека $\inf S=s$, $\inf T=t$; тогаш имаме $x\geqslant s$ и $y\geqslant t$, за секое $x\in S$ и секое $y\in T$, па $z=x+y\geqslant s+t$, за секое $z\in S+T$, од каде што и

$$\inf(S+T)\geqslant s+t=\inf S+\inf T. \qquad (1)$$

Ако $a>s+t$, тогаш $a-s-t>0$, па $a=(s+h)+(t+h)$ за некое $h>0$. Бидејќи е $s+h>s$ и $t+h>t$, ќе имаме $s+h>x$ и $t+h>y$ за некои $x\in S$ и $y\in T$, од каде што $a>x+y$, па во (1) важи равенство.

108. Да го покажеме равенството

$$\sup ST=\sup S\cdot\sup T.$$

Нека $\sup S=s$, а $\sup T=t$; тоа значи дека $x\leqslant s$ и $y\leqslant t$ за било кои $x\in S$ и $y\in T$, а бидејќи е $x>0$ и $y>0$, следува $xy=z\leqslant st$, за било кое $z\in ST$, од каде што и

$$\sup ST\leqslant st=\sup S\cdot\sup T. \qquad (1)$$

Ако $a<st$, тогаш $a/st<1$, па можеме да ставиме $a/st=h^2$, каде што $h>1$, од каде што $a=(sh)(th)$. Но, $sh<s$ и $th<t$, па и $sh<x_1$ и $th<y_1$ за некои $x_1\in S$ и $y_1\in T$, т.е. $a<x_1y_1=z_1$ за некое $z_1\in ST$, а тоа значи дека ниту еден број помал од st не може да биде мајоранта, т.е. во (1) важи равенство.

Слично се покажува и другото равенство.

109. Ако a/b е било кој елемент од M, значи $a<b$ и $a,b\in N$, тогаш $a<b+1$, $a/(b+1)\in M$ и $a/(b+1)<a/b$, што значи во M нема најмал елемент.

Ако пак $c/d\in M$, тогаш од $c<d$, следува $cd+c<cd+d$, т.е. $c/d<(c+1)/(d+1)$, а јасно $c+1<d+1$, па $(c+1)/(d+1)\in M$. Значи, во M нема најголем елемент.

Бидејќи секој негативен број е миноранта за M, а ниту еден позитивен број не е миноранта за M, следува $\inf M=0$. Слично добиваме дека $\sup M=1$.

110. а) Следува непосредно од дефиницијата.

б) Јасно е дека R е отворено множество; празното множество е отворено бидејќи тоа не содржи ниедна точка.

в) Нека се U_1 и U_2 две отворени множества и $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Нека $x \in U_1 \cap U_2$; тогаш $x \in U_1$ и $x \in U_2$, па постојат отворени интервали (a,b) и (c,d), така што $x \in (a,b) \subseteq U_1$ и $x \in (c,d) \subseteq U_2$. Јасно дека $(a,b) \cap (c,d) \neq \emptyset$. Ставајќи $a_1 = \sup\{a,c\}$, $b_1 = \inf\{b,d\}$, ќе имаме $x \in (a_1, b_1) \subseteq U_1 \cap U_2$, од каде што следува дека $U = U_1 \cap U_2$ е отворено множество.

г) Нека $\{U_i \mid i \in I\}$ е произволна фамилија од отворени множества и нека ставиме $U = \bigcap_i U_i$. Ако $x \in U$, значи дека постои барем едно $i_0 \in I$, така што $x \in U_{i_0}$; од тоа што U_{i_0} е отворено множество, постои отворен интервал (a,b) така што $x \in (a,b) \subseteq U_{i_0}$, но $U_{i_0} \subseteq U$, па ќе имаме $x \in (a,b) \subseteq U$, а тоа значи дека $U = \bigcap_i U_i$ е отворено множество.

д) Нека V е отворено множество; тогаш за секое $x \in V$ постои отворен интервал I_x, така што $x \in I_x \subseteq V$; но, тогаш е $V = \bigcup_x I_x$.

Обратно, нека V е унија од отворени интервали I_i и нека x е било кој елемент од V. Тогаш, постои барем еден отворен интервал I_{i_0}, така што $x \in I_{i_0} \subseteq V$, што значи дека V е отворено множество.

111. а) $\emptyset = R'$, $R = \emptyset'$.

б) Ако F_1 и F_2 се затворени множества, тогаш F_1' и F_2' се отворени, па и $F_1' \cap F_2'$ е отворено множество, а бидејќи е $F_1' \cap F_2' = (F_1 \cup F_2)'$ следува дека $F_1 \cup F_2$ е затворено множество.

в) Нека $\{F_i \mid i \in I\}$ е произволна фамилија затворени множества и нека е $F = \bigcap_i F_i$. Бидејќи е $F' = \bigcup_i F_i'$, а F_i' се отворени множества, следува дека и F' е отворено, т.е. F е затворено множество.

112. Да ги разгледаме сите точки x^* од интервалот $[a,b]$, со особината интервалот $[a,x^*]$ да се покрива со конечен број интервали (a_i, b_i). Такви точки x^* постојат, бидејќи, на пример, точката a лежи во еден интервал, па и сите други, доволно блиски до a, лежат во тој инервал.

Задачата ќе биде решена ако утврдиме дека и точката b ја има истата особина. Бидејќи се сите $x^* \leqslant b$, следува дека постои точка $c \leqslant b$, така што $\sup\{x^*\} = c$. Како и секоја точка од $[a,b]$, така и точката c му припаѓа на некој интервал (a_{i_0}, b_{i_0}), $a_{i_0} < c < b_{i_0}$. Но, од особината на sup постои точка x_0^*, така што $a_{i_0} < x_0^* \leqslant c$. Интервалот $[a,x^*]$ се покрива со конечен број интервали, а ако кон тој број го додадеме и интервалот (a_{i_0}, b_{i_0}), тогаш се покрива и целиот интервал $[a,c]$. Значи, и c е една од точките x^*.

Од сето тоа е јасно дека c не може да е помал од b, зашто инаку меѓу c и b_{l_0} би постоела точка x^*, спротивно на дефиницијата на c, па интервалот $[a,b]$ се покрива со конечен број отворени интервали.

113. Нека низата a_n е ограничена, т.е. сите нејзини членови лежат во еден интервал, на пример, во $[a,b]$. Ако $[a,b]$ го разделиме наполу, тогаш барем во едниот дел се наоѓаат бесконечно многу членови од низата. Нека тој дел е интервалот $[a_1,b_1]$. На ист начин,од интервалот $[a_1,b_1]$ ја земаме неговата половина $[a_2,b_2]$, во која се наоѓаат безброј многу членови од низата. Продолжувајќи така (до бесконечност), во к-тата постапка ќе избереме интервал $[a_k,b_k]$ кој исто така содржи бесконечно многу членови од низата a_n.

Секој од конструираните интервали, почнувајќи од вториот, се содржи во претходниот и преставува негова половина. Затоа должината на к-тиот интервал е

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a)$$

и тежи кон нула кога k расте. Значи, a_k и b_k тежат кон иста граница c, која претставува точка на натрупување за низата a_n.

Ако низата a_n е конвергентна, јасно е дека таа има само една точка на натрупување, имено нејзината граница.

Нека, сега, низата a_n е ограничена и има само една точка на натрупување, на пример a. Тогаш, во произволно мал интервал на точката a се наоѓаат бесконечно многу членови од низата, а надвор од него само конечно многу, зашто во спротивно, според претходното,би добиле и друга точка на натрупување. Значи,низата a_n е конвергентна.

114. Нека низата a_n има граница a. Тогаш постои $n_0 \in N$ за секое $\epsilon \in R^+$, така што

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \ , \ |a_{n+k} - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{за } n > n_0,$$

па и

$$|a_{n+k} - a_n| \leqslant |a_{n+k} - a| + |a_n - a| < \epsilon.$$

Обратно, нека е исполнет условот од задачата и нека ставиме $n+k=m$. Од $|a_{n+k} - a_n| < \epsilon$ имаме $a_n - \epsilon \leqslant a_m \leqslant a_n + \epsilon$. Нека избереме една опаднувачка "нулта" низа $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ на која одговара низата од природни броеви $N_1, N_2, \ldots$. Тогаш имаме

$$a_{n_l} - \epsilon_l < a_m < a_{n_l} + \epsilon_l \ , \quad l = 1,2,\ldots$$

секогаш кога е $m > n_l > N_l$. Потоа, ако x најголемиот од броевите

$$a_{n_1} - \epsilon_1 \ , a_{n_2} - \epsilon_2 \ , \ldots , a_{n_l} - \epsilon_l \ ,$$

а y_l најмалиот од броевите

$$a_{n_1}+\epsilon_1 \ , a_{n_2}+\epsilon_2 \ , \dots , a_{n_l}+\epsilon_l \ ,$$

тогаш имаме $x_l < a_m < y_l$, за секое m кое е поголемо од броевите N_1, N_2, ..., N_l. Бидејќи низата x_l е монотоно растечка, а низата y_l монотоно опаднувачка и $y_l - x_l \leqslant 2\epsilon_l$, следува дека низите x_l и y_l имаат иста граница a, па според тоа и a_n има граница a.

115. Дропката a/b, при $(a,b)=1$, е чисто периодична ако b не се дели ни со 2 ни со 5, а ќе биде нечисто периодична ако b е од облик 2^m5^nc, каде што $m,n \in N^0$ и барем еднинот од m и n е различен од нула, а c е природен број што не се дели со 2 или 5.

116. 15,9(3); 0,(142857); 0,075; 0,84375; 0,7410(714285).

117: $\frac{272}{33}$; $\frac{129}{550}$; $\frac{7703}{2475}$.

118. Нека x е позитивен реален број и нека $m \leqslant x < m+1$, каде што m е цел број. Го определуваме целиот број a_1 , $0 \leqslant a_1 < b$, $b > 1$, таков што

$$m + \frac{a_1}{b} \leqslant x < m + \frac{a_1}{b} + \frac{1}{b} \ .$$

Потоа го определуваме бројот a_2, $0 \leqslant a_2 < b$, таков што

$$m + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} \leqslant x < m + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{1}{b^3} \ .$$

На тој начин ги добиваме низите

$$x_n = m + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \dots + \frac{a_n}{b^n} \ , \ y_n = x_n + \frac{1}{b^n} \ ,$$

каде што $0 \leqslant a_n < b$, а притоа имаме $x_n \leqslant x < y_n$.

Низите x_n и y_n се монотони и ограничени, па значи, и конконвергентни. Бидејќи

$$y_n - x_n = \frac{1}{b^n} \to 0,$$

добиваме $\lim x_n = \lim y_n$, а тоа е можно само во случај да е

$$x = \lim x_n = \lim y_n .$$

Ако добиеме $x = x_n$, тогаш x ќе биде конечна b-адична дропка

$$x = m + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \dots + \frac{a_n}{b^n} = m,a_1a_2\dots a_n,$$

а и обратно, ако x е конечна b-адична дропка, тогаш ќе имаме $x=x_n$ за некое n.

Од конструкцијата на низата е јасно, дека не може да се случи сите членови a_{k+l} да се еднакви со $b-1$ за некое k и $l=1,2,\dots$

Според тоа x ќе го пишуваме во обликот

$$x = m,a_1a_2\dots a_n\dots$$

и ќе велиме дека тој е бескрајна b-адична дропка.

Да видиме каков облик има b-адичната дропка, ако x е рационален број a/c напишан во b-адичен систем. За да се претвори рационалниот број $x=a/c$ во b-адична дропка се постапува на следниот начин:

$$a = mc + r_0\,, \quad x = m + \frac{r_0}{c}\,,$$

$$br_0 = a_1c + r_1\,, \quad x = m + \frac{a_1}{b} + \frac{r_1}{bc}\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$br_{n-1} = a_nc + r_n\,, \quad x = m + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \dots + \frac{a_n}{b^n} + \frac{r_n}{b^nc}\,.$$

Бидејќи е $0 \leqslant r_{n-1} < c$, ќе имаме $0 \leqslant a_n < b$. Ако ставиме

$$x_n = m + \frac{a_1}{b} + \dots + \frac{a_n}{b^n}\,,$$

добиваме $0 \leqslant x - x_n < 1/b^n$, или $x_n \to x$. Според тоа ќе имаме

$$x = m,a_1a_2\dots a_n\dots\,.$$

Поради $0 \leqslant r_\nu < b$, постојат такви k и l, така што $r_k = r_{k+l}$ и нека k и l се најмалите броеви со таа особина. Од равенствата

$$br_k = a_{k+1}c + r_{k+1}\,, \quad br_{k+l} = a_{k+l+1}c + r_{k+l+1}\,,$$

следува $a_{k+1} = a_{k+l+1}$, $r_{k+1} = r_{k+l+1}$, а потоа и $a_{k+2} = a_{k+l+2}$, $a_{k+l} = a_{k+2l}$

Според тоа, во низата

$$a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+l}, \dots$$

членовите $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+l}$ се повторуваат периодично и затоа секој рационален број $x=a/c$ се претставува како бескрајна периодична b-адична дропка

$$x = m,a_1a_2\dots a_k(a_{k+1}a_{k+2}\dots a_{k+l})\,.$$

119. При претворањето на дропката a/c во бескрајна периодична дропка, како во 118. за $b=10$, се добиваат низа остатоци $0 \leqslant r_i < c$, при што постапката треба да се повторува се додека не се добијат два еднакви остатоци, а јасно е дека $r_c = r_i$, за некое $i < c$.

120. $1/11$ $(=0,(01))$; $1/101$ $(=0,(0011))$; $10/111$ $(=0,(010))$; $101/1110$ $(=0,01(001))$; $97/112$; $7/20$; $3/7$.

121. а) За да е точно равенството

$$a^{-1}+b^{-1}=(a+b)^{-1},$$

треба да е точно равенството

$$(a+b)^2=ab. \qquad (1)$$

Но, од $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab>2ab$, добиваме $(a+b)^2>ab$ за било кои $a,b\in Q$, $a,b\neq 0$. Значи, равенството (1) не е точно, па и даденото равенство не е точно за ниеден пар $a,b\in Q$, $a,b\neq 0$.

б) Ако равенството

$$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=(a+b+c)^{-1}$$

го напишеме во обликот

$$\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c},$$

се добива

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0,$$

кое е точно за: $b=-a$, или $c=-b$, или $a=-c$, па при било кој од овие услови точно е и даденото равенство.

122. а) $3\sqrt{7}-2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}-2$; в) 1.

123. Имаме:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}=1.$$

124. а) $\begin{cases}2, & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2\sqrt{x-1}, & \text{при } x\geqslant 2\end{cases}$; б) $2\sqrt{2}$.

125. а) $\frac{3}{2}(3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}-6)$;

б) $$\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}(1+\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27})}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{3^4}-1)}=\frac{3-\sqrt[4]{27}}{-6}.$$

в) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$.

126. Ако би било $\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2}$, тогаш е $2-ab=(a+b^2)\sqrt[3]{2}$. За $a\neq-b^2$, $2-ab$ е рационален, $a\cdot(a+b^2)\cdot\sqrt[3]{2}$ ирационален; за $a=-b^2$ имаме $2=-a^3$, кое не е можно. Значи, не може.

127. а) Имаме:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+\binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1}+\dots+\binom{n+1}{n}\frac{1}{(n+1)^n}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$= 1 + 1 + \frac{n}{2(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{n-1}} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 2.$$

б) За $n=1$ точноста на неравенството е јасна. Нека е

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Тогаш,

$$(n+1)! \leqslant n!(n+1) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1).$$

Треба да покажеме дека

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1) \leqslant \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1},$$

кое што се сведува на неравенството

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant 2,$$

а чија точност е докажана под а).

в) Имаме:

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1;$$

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

г) За $k \leqslant n$ е точно неравенството $1/\sqrt{k} \geqslant 1/\sqrt{n}$. Ставајќи во во ова неравенство за k: $1, 2, \ldots, n$ и собирајќи ги сите неравенства добиваме

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

д) Да се примени математичката индукција..

128. За $n=2$ имаме

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0, \quad a+b \geqslant 2\sqrt{ab},$$

па неравенството е точно за $n=2$. Нека сега $n=2^k=2r$; тогаш:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= (a_1 + \ldots + a_r) + (a_{r+1} + \ldots + a_n) \geqslant \\ &\geqslant 2((a_1 + \ldots + a_r)(a_{r+1} + \ldots + a_n))^{\frac{1}{2}} \geqslant \\ &\geqslant 2(r(a_1 a_2 \ldots a_r)^{\frac{1}{r}} r(a_{r+1} \ldots a_n)^{\frac{1}{r}})^{\frac{1}{2}} = \\ &= n(a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Значи, неравенството е точно кога n е од облик 2^k.

Да претпоставиме дека неравенството е точно за $n=m$. Ќе покажеме дека е точно и за $n=m-1$. Ако $x>0$, ќе имаме

$$(a_1 a_2 \ldots a_{m-1} x)^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + x)$$

и ставајќи

$$x = \frac{1}{m-1}(a_1 + \ldots + a_{m-1})$$

добиваме

$$\frac{1}{m-1}(a_1+\ldots+a_{m-1})\geqslant(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{m-1})^{\frac{1}{m}}\left(\frac{a_1+\ldots+a_{m-1}}{m-1}\right)^{\frac{1}{m}},$$

или

$$\left(\frac{a_1+\ldots+a_{m-1}}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}\geqslant(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{m-1})^{\frac{1}{m}},$$

па

$$a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}\geqslant(m-1)(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{m-1})^{\frac{1}{m-1}}.$$

Нека сега n е било кој природен број. Тогаш, постои некое $k\in N$, така што е $n\leqslant 2^k$. Неравенството е точно за $n=2^k$, па значи и за 2^k-1, $2^k-2,\ldots$, $2^k-(2^k-n)=n$.

129. а) Множејќи го неравенството $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ со $\sqrt{ab}$ добиваме

$$(a+b)\sqrt{ab}\geqslant 2ab.$$

б) Ако во неравенството

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{n+1})\geqslant(n+1)(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

ставиме $a_1=a$, $a_2=a_3=\ldots=a_{n+1}=b$, го добиваме даденото неравенство.

в) Ако во неравенството $a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2}$ ставиме $a_1=a+\alpha$, $a_2=b+\beta$ го добиваме даденото неравенство.

г) Ако во неравенството $a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2}$, ставиме $a_1=a\beta$, $a_2=b\alpha$, добиваме

$$a\beta+b\alpha\geqslant 2\sqrt{a\beta b\alpha},$$

или

$$ab+a\beta+b\alpha+\alpha\beta\geqslant ab+\alpha\beta+2\sqrt{a\beta b\alpha},$$

т.е.

$$(a+\alpha)(b+\beta)\geqslant(\sqrt{ab}+\sqrt{\alpha\beta})^2,$$

од каде што

$$\sqrt{(a+\alpha)(b+\beta)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{\alpha\beta}.$$

д) Имаме:

$$a+b+c=\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

ѓ) Ако a и b се позитивни реални броеви, тогаш е $a+b>0$, па и $(a-b)^2(a+b)\geqslant 0$, $a^3+b^3-a^2b-ab^2\geqslant 0$, $4a^3+4b^3-a^3-b^3-3a^2b-3ab^2\geqslant 0$, од каде што $4a^3+4b^3\geqslant(a+b)^3$, т.е.

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

е) Бидејќи е

$$a^2+ab+b^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a+b)^2,$$

следува

$$a^2+ab+b^2\geqslant 0,$$

за било кои $a,b\in R$. Множејќи го ова неравенство со $(a-b)^2$, добиваме

$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\geqslant 0 \quad \text{или} \quad a^4+b^4-a^3b-ab^3\geqslant 0,$$

од каде што имаме

$$a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3.$$

ж) Имаме:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\frac{(a+b)(a-b)^2+(a+c)(a-c)^2+(b+c)(b-c)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 0.$$

з) Можеме да претпоставиме дека $a\geqslant b\geqslant c>0$. Тогаш,

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a &= a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)=\\ &= a^2(a-b)+b^2[(a-c)-(a-b)]-c^2(a-c)=\\ &= (a^2-b^2)(a-b)+(b^2-c^2)(a-c)=\\ &= (a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)(a-c)\quad 0,\end{aligned}$$

од каде што следува даденото неравенство.

130. Бидејќи е

$$\sqrt[n]{n}=\sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}} \quad \text{и} \quad \sqrt[n+1]{n+1}=\sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n},$$

а од друга страна точно е неравенството

$$(n+1)^n<n^{n+1}$$

за секое $n>2$, добиваме

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}, \quad n=3,4,5,\ldots .$$

Од ова следи

$$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\ldots,$$

што значи, најголемиот број во дадената низа е $\sqrt[3]{3}$.

131. Ако во неравенството

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x}{2}+\frac{y}{2},$$

ставиме

$$x=\frac{a_i^2}{\sum_1^n a_i^2}, \quad y=\frac{b_i^2}{\sum_1^n b_i^2},$$

добиваме

$$\frac{|a_i|}{(\sum_1^n a_i^2)^{1/2}}\,\frac{|b_i|}{(\sum_1^n b_i^2)^{1/2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{\sum_1^n a_i^2}+\frac{b_i^2}{\sum_1^n b_i^2}\right), \quad i=1,2,\ldots, .$$

Сумирајќи ги овие неравенства од $i=1$ до $i=n$, добиваме

$$\frac{\sum_1^n|a_ib_i|}{(\sum_1^n a_i^2)^{1/2}\,(\sum_1^n b_i^2)^{1/2}}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_1^n a_i^2}{\sum_1^n a_i^2}+\frac{\sum_1^n b_i^2}{\sum_1^n b_i^2}\right)=1,$$

од каде што

$$\sum_1^n|a_ib_i|\leqslant(\sum_1^n a_i^2)^{1/2}\,(\sum_1^n b_i^2)^{1/2},$$

што требаше да се докаже.

132. Ако во неравенството

$$a_1+a_2+\dots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$$

ставиме $a_1=a_2=\dots=a_q=1+rh$, $a_{q+1}=\dots=a_p=1$, каде што $r=p/q$, $p>q$, добиваме

$$\frac{1}{p}(q(1+rh)+(p-q)) \geqslant \sqrt[p]{(1+rh)^q},$$

или

$$(1+h) \geqslant (1+rh)^{q/p},$$

од каде што

$$(1+h)^r \geqslant 1+rh, \qquad r=\frac{p}{q},$$

што требаше да се покаже.

133. Неравенството

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

е еквивалентно со

$$|a+b|(1+|a|)(1+|b|) \leqslant |a|(1+|b|)(1+|a+b|)+|b|(1+|a|)(1+|a+b|),$$

кое пак е еквивалентно со

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|+2|a||b|+|a||b||a+b|,$$

а поради

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

последното неравенство е точно.

134. Нека $\log_a b=x$, каде што $x>0$; тогаш $b=a^x$. Ако е $a>1$, јасно дека и $b>1$; ако пак $0<a<1$, тогаш $0<a^x<1$, т.е. $0<b<1$.

Обратно, нека е $a>1, b>1$ или $0<a<1$, $0<b<1$. Тогаш, постојат позитивни броеви x, y такви што $b=a^x$ или $b=a^y$, од каде што следува $\log_a b>0$ и во двата случаја.

135. а) Нека е $a>1$ и $x<y$; тогаш, според 134. имаме

$$x<y \leftarrow \frac{y}{x}>1 \leftarrow \log_a y/x>0 \leftarrow \log_a x<\log_a y .$$

б) Ако е $0<a<1$, тогаш пак според 134. имаме

$$x<y \leftarrow \frac{x}{y}<1 \leftarrow \log_a x/y>0 \leftarrow \log_a x>\log_a y .$$

136. а) 18; б) ab; в) b^2; г) 20.

137. а) Ако ставиме $\log_a b=x$, $\log_b a=y$, имаме $b=a^x$, $a=b^y$, од каде што $a=a^{xy}$, или $xy=1$, што требаше да се докаже.

б) Примени го равенството

$$\log_{a_{i-1}} a_i\cdot\log_{a_i} a_{i+1}=\log_{a_{i-1}} a_{i+1}.$$

в) Имаме:

$$\log_b a + \log_c a = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a c} = \frac{\log_a b + \log_a c}{\log_a b \cdot \log_a c} =$$

$$= \frac{\log_a bc}{\log_a b \log_a c} = \frac{\log_b a \log_c a}{\log_{bc} a},$$

од каде што

$$(\log_b a + \log_c a)\log_{bc} a = \log_b a \log_c a .$$

г) Имаме:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} = \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \log_b a^4 =$$

$$= \log_b a + 2\log_b a + 3\log_b a + 4\log_b a =$$

$$= 10\log_b a .$$

IV. РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

138. а) не; б) да; в) не.

139. а) Нека D_f е дефинициона област на $f(x)$, а D_g на $g(x)$. Ако K_f е множеството решенија на $f(x)=0$, а K_g множеството решенија на $g(x)=0$, тогаш равенките $f(x)=0$ и $f(x)g(x)=0$ се еквивалентни, само ако е $K_g \cap D_f \subseteq K_f$ и $K_f \subseteq D_g$.

б) Ако ставиме $h(x)=f(x)-g(x)$, $l(x)=f(x)+g(x)$, тогаш е $D_h = D_l$, па за да бидат равенките $h(x)=0$ и $h(x)l(x)=0$ еквивалентни, потребно е и доволно $K_l \subseteq K_h$.

в) Нека $S_f = \{x \mid x\in R, f(x)<0\}$ и $S_g = \{x \mid x\in R, g(x)<0\}$; тогаш равенките $\sqrt{f}\sqrt{g} = 0$ и $\sqrt{fg} = 0$ се еквивалентни, ако, и само ако, $(K_f \cap S_g)\cup(K_g \cap S_f) = \emptyset$.

г) Нека $h(x)=f(x)g(x)-1$. Равенката $\log[f(x)g(x)]=0$ е еквивалентна со равенката $h(x)=f(x)g(x)-1=0$, а за да биде оваа равенка еквивалентна со равенката $\log f(x) + \log g(x) = 0$, потребно е и доволно да биде исполнето равенството $K_h \cap S_f = \emptyset$. (Јасно е дека $K_h \cap S_f$ и $K_h \cap S_g$ се еднакви множества.)

140. Јасно е дека секое решение на системот

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0 \qquad (1)$$

е решение и на системот

$$af(x,y) + bg(x,) = 0, \quad cf(x,y) + dg(x,y) = 0. \qquad (2)$$

Обратно, нека $x=x_1$, $y=y_1$ е решение на системот (2). Множејќи ја првата равенка од (2) со $-c$, а втората со a, и собирајќи ги,

добиваме

$$(ad-bc)g(x_1,y_1) = 0,$$

од каде што, поради $ad-bc \neq 0$, имаме $g(x_1,y_1) = 0$. Слично, $f(x_1,y_1) = 0$, т.е. $x=x_1$, $y=y_1$ е решение и на системот (1).

141. $K_f \cap K_g$.

142. Јасно е дека секое решение на системот

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0 \tag{1}$$

е решение и на системот

$$a_{11}f_1 = 0, \quad a_{12}f_1 + a_{22}f_2 = 0, \quad a_{13}f_1 + a_{23}f_2 + a_{33}f_3 = 0. \tag{2}$$

Обратно, нека $x_i = x_i^0$ $(i=1,2,\ldots,)$ е решение на системот (2). Од

$$a_{11}f_1(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0$$

и $a_{11} \neq 0$ имаме

$$f_1(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0;$$

понатаму, од

$$a_{12}f_1(x_1^0,\ldots,x_n^0)+a_{22}f_2(x^0,\ldots,x^0)=a_{22}f_2(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0$$

и $a_{22} \neq 0$, добиваме

$$f_2(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0;$$

најпосле, од

$$a_{13}f_1(x_1^0,\ldots,x_n^0)+a_{23}f_2(x_1^0,\ldots,x_n^0)+a_{33}f_3(x_1^0,\ldots,x_n^0) = \\ = a_{33}f_3(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0$$

и $a_{33} \neq 0$, добиваме

$$f_3(x_1^0,\ldots,x_n^0) = 0,$$

т.е. $x_i = x_i^0$ $(i=1,2,\ldots,)$ е решение и на системот (1).

143. а) Од

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

следува дека системот нема решение.

б) Од

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

следува дека решенија на системот се четворките $(2-y-u, y, -1, u)$, каде што y и u се произволни реални броеви.

в) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. г) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

д) нема решение. ѓ) нема решение.

е) $x_1 = -x_3 = x_2$, $x_4 = 0 = x_5$.

ж) Од

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ a+1 & a & a & \ldots & a & a & 1 \\ a & a+1 & a & \ldots & a & a & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & & a+1 & a & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a+1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -a+1 \end{array}\right]$$

добуваме: $x_{n-1}=x_{n-2}=\ldots=x_2=1-a$; од втората $x_n=(a-1)(n-1)+1$, а од првата $x_1=1-a$.

144. а) Ако е $n=2k+1$ непарен број, тогаш множејќи ја секоја втора равенка од системот со -1 и собирајќи ги, добиваме

$$x_1=\frac{1}{2}(a_1+a_3+\ldots+a_{2k+1})-\frac{1}{2}(a_2+a_4+\ldots+a_{2k}),$$

па следствено и другите непознати.

За $n=2k$ системот ќе има безброј решенија во случај да е

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2k-1}-a_{2k}=0,$$

а во спротивен случај системот ќе нема решение.

б) Собирајќи ги сите равенки, добиваме

$$(n-1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\frac{1}{2}n(n+1),$$

од каде што

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}\ . \qquad (1)$$

Множејќи ја k-тата равенка со -1 и додавајќи ја на равенката (1), добиваме

$$x_k=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-k,$$

од каде што за $k=1,2,\ldots,n$ се добива решението на системот.

в) Ако се извади секоја равенка од наредната, се добива

$$x_1=x_4=x_7=\ldots,\quad x_2=x_5=\ldots,\quad x_3=x_6=\ldots\ .$$

Во последните две равенки се појавуваат x_1 и x_2 и тоа x_1 наместо x_{n+1}, а x_2 наместо x_{n+2}. Ако n има облик $3k+1$, тогаш ќе имаме

$$x_2=\ldots=x_{n+1}=x_1,\quad x_3=\ldots=x_{n+2}=x_2.$$

Според тоа, имаме $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Истиот резултат се добива и во случајот $n=3k+2$. Ако е $n=3k$, тогаш

$$x_1=\ldots=x_{n+1}=x_1,\quad x_2=\ldots=x_{n+2}=x_2,$$

па, значи, добиваме дека постојат безброј многу решенија, при што, на пример x_1 и x_2 можат да се изберат произволно, а другите се определуваат со

$$x_1=x_4=\ldots=x_{n-2},\ x_2=x_5=\ldots=x_{n-1},\ x_3=x_6=\ldots=x_n=-(x_1+x_2).$$

г) Ако првата ја помножиме со a, односно b, и ја одземеме од втората, односно последната, добиваме

$$x_1=\frac{a-c_2}{a-b} \quad \text{и} \quad x_n=\frac{c_n-b}{a-b}.$$

Потоа, ако i-тата ($i=2,\dots,n-1$) равенка ја помножиме со -1 и ја додадеме на $i+1$-та, добиваме:

$$x_i=\frac{c_i-c_{i+1}}{a-b}, \quad i=2,\dots,n-1.$$

д) Ако ги собереме сите равенки, поради $a\neq(1-n)b$, добиваме

$$x_1+x_2+\dots+x_n=\frac{c_1+c_2+\dots+c_n}{a+(n-1)b},$$

а ако оваа равенка, помножена со $-b$, ја додадеме на i-тата равенка, поради $a\neq b$, добиваме

$$x_i=\frac{c_i}{a-b}-\frac{b(c_1+\dots+c_n)}{(a-b)[a+(n-1)b]}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

ѓ) $x_i=\sqrt{2}$, $i=1,2,\dots,n$.

145. Нека во системот

$$a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1,2,\dots,m, \tag{1}$$

е $m<n$ и нека тој систем има решение. Тогаш, при примената на Гаусовата метода, можат да се направат најмногу $m-1$ постапки, па на крајот би се добила равенка во која ќе фигурираат најмногу $n-m+1$ непознати.

Ако во оваа равенка има барем две непознати, тогаш, избирајќи барем една од непознатите приозволно, се добиваат безброј безброј многу решенија на системот (1).

Ако се случи последната равенка да има само една непозната тогаш, враќајќи се назад, барем во една од преостанатите равенки ќе се појават повеќе од една непозната, па и во овој случај системот (1) има безброј решенија.

Ако се случи во последната равенка да нема ни една непозната, тогаш коефициентот од десната страна мора да е нула (зашто системот, по претпоставка, има решение), па тогаш ќе се разгледува систем со $m-1$ равенка, а n непознати на начинот опишан погоре.

146. а) Бидејќи е $D=b^2+c^2\geqslant 0$ за било кои $b,c\in R$, следува дека дадената равенка има реални решенија за било кои $a,b,c\in R$.

б) Имаме:

$$D=\left(r+\frac{s}{r}\right)^2-4s=\left(r-\frac{s}{r}\right)^2, \quad \sqrt{D}=\left|r-\frac{s}{r}\right|,$$

а бидејќи $\left|r-\frac{s}{r}\right|$ е рационален број, следува дека и решенијата на равенката се рационални броеви.

147. а) $(p^2-2q)/q^2$.

б) $\alpha^7\beta^4+\beta^7\alpha^4=\alpha^4\beta^4(\alpha^3+\beta^3)=(\alpha\beta)^4((\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta))=$

$$=pq^4(3q-p^2).$$

в) $(5p^2-2q)/(2p^2+q)^2$.

148. Ако хипотенузата е x, тогаш едната катета е $m-x$, а другата е $n-x$, па според Питагорината теорема, имаме

$$(m-x)^2+(n-x)^2=x^2,$$

т.е.

$$x^2-2(m+n)x+m^2+n^2=0,$$

од каде што, поради, $0<x<m$ и $0<x<n$, добиваме

$$x_1=m+n-\sqrt{2mn}.$$

Но, за да има проблемот решение, мора да е $\sqrt{2mn}>n$ и $\sqrt{2mn}>m$, т.е. $n/2<m<2n$.

149. Броевите a и b можат да се запишат во облик:

$$a=5x^2+4 \quad \text{и} \quad b=3x^2+4, \quad x\in N.$$

Од $ab=106100_9$ следува

$$(5x^2+4)(3x^2+4)=9+6\cdot 9^3+9^2,$$

т.е.

$$15x^4+32x^2-63488=0,$$

од каде $x=8$.

150. а) Ставајќи $\sqrt{x^2+11}=y$, добиваме $y^2+y-42=0$, од каде што $y_1=6$, $y_2=-7$. Но, y_2 отпаѓа, па од

$$\sqrt{x^2+11}=6,$$

добиваме $x=\pm 5$.

б) Пишувајќи ја оваа равенка во облик

$$x^4+8x^3+12x^2+8x+1=0,$$

а потоа, по делењето со x^2 и средувањето, во облик

$$(x+\frac{1}{x})^2+8(x+\frac{1}{x})+10=0,$$

добиваме

$$x+\frac{1}{x}=-4-\sqrt{6} \quad \text{и} \quad x+\frac{1}{x}=-4+\sqrt{6},$$

од каде што

$$x^2+(4+\sqrt{6})x+1=0 \quad \text{и} \quad x^2+(4-\sqrt{6})x+1=0,$$

па решенијата се

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}(-4-\sqrt{6}\pm\sqrt{18+8\sqrt{6}}),$$

бидејќи, поради $18-8\sqrt{6}<0$, втората равенка од последните две нема решение, в) Ако дадената равенка ја напишеме во облик

$$(x+\frac{2}{x})^2+2(x+\frac{2}{x})-15=0$$

добиваме

$$x+\frac{2}{x}=3 \quad и \quad x+\frac{2}{x}=-5 ,$$

т.е.

$$x^2-3x+2=0 \quad и \quad x^2+5x+2=0,$$

од каде што

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_{3,4}=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{17}).$$

г) Равенката ја пишуваме во облик

$$12(x^5+1)+18x(x^3+1)-45x^2(x+1)=0,$$

т.е.

$$(x+1)(12x^4+6x^3-51x^2+6x+12)=0$$

па

$$x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{1}{8}(-1+\sqrt{101}\pm\sqrt{98-2\sqrt{101}}),\ x_{4,5}=\frac{1}{8}(-1-\sqrt{101}\pm\sqrt{98+2\sqrt{101}}).$$

д) Се уочува дека $x_1=a$ е еден корен на дадената равенка, па пишувајќи ја во облик

$$(x-a)[ax^2-(ab+b^2)x-ab^2]=0,$$

добиваме

$$x_{2,3}=\frac{b}{2a}(a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4a^2}) .$$

Притоа, јасно, треба да е $a\neq 0$ и $(a+b)^2-4a^2\geqslant 0$.

ѓ) $x=5,2$; $x=0,5$; $x=0,75$. е) $x=1$. ж) $1\leqslant x\leqslant 2$.

151. а) Неравенката е еквивалентна со

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0,$$

која е задоволена за секое $x\in(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup(1,\infty)$.

б) Пишувајќи ја дадената неравенка во облик

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{2(x-1/2)(x+4)(x-3)}<0,$$

го испитуваме знакот на изразот од левата страна, во секој од интервалите $(-\infty,-4),(-4,-3),(-3,-2),(-2,-1),(-1,1/2),(1/2,3),(3,\infty)$ и утврдуваме дека знакот е негативен само во $(-4,-3)$ и $(1/2,3)$, т.е. дадената неравенка е задоволена за секое $x\in(-4,-3)\cup(1/2,3)$.

в) Дадената неравенка е еквивалентна со системот

$$-1<\frac{x-1}{x+2}<1,$$

кој е еквивалентен со системите:

1) $x+2>0,\ x^2-x-3<0,\ x^2+x+1>0;$

2) $x+2<0,\ x^2-x-3>0,\ x^2+x+1<0.$

Првиот систем е задоволен за секое $x\in((1-\sqrt{13})/2,(1+\sqrt{13})/2)$, а вториот е неспоив.

г) Дадената неравенка е еквивалентна со системот

$$-3<\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}<3,$$

кој е пак еквивалентен со неравенката

$$x^2+3x+2>0,$$

па решение е секое $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$.

152. Од неравенствата

$$-(x+1)^2\leqslant 0\leqslant(x-1)^2$$

добиваме

$$-(x^2+1)\leqslant 2x\leqslant x^2+1$$

или

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{x^2+1}\leqslant\frac{1}{2},$$

па значи, најголемата вредност на функцијата $f(x)$ е $1/2$, а најмалата $-1/2$.

153. а) Бидејќи $\sqrt{1+x}\geqslant 1$ или $\sqrt{1-x}\geqslant 1$, равенката нема решение.

б) Имаме:

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=2.$$

За $\sqrt{x-1}-1\leqslant 0$, т.е. за $1\leqslant x\leqslant 2$, добиваме $\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2$, чие решение е секое $x\in[1,2]$, а за $\sqrt{x-1}-1>0$, равенката се сведува на $\sqrt{x-1}=1$, од каде што $x=2$. Значи, решение на дадената равенка е секое $x\in[1,2]$.

в) Нека некој број x ја задоволува дадената равенка. Тогаш е $x\geqslant 0$ и $a+\sqrt{x}\geqslant 0$. Ставајќи $a+\sqrt{x}=y$, т.е. $a=y-\sqrt{x}$, дадената равенка се сведува на

$$x=y-\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

од каде што

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1)=0.$$

Бидејќи $\sqrt{x}+\sqrt{y}+1>0$, имаме $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ или $x=y$, т.е.

$$x=a+\sqrt{x}\,. \tag{1}$$

Значи, ако x ја задоволува дадената равенка, тогаш тој ја задоволува и равенката (1). Но, и обратно, ако x е решение на (1), тогаш е

$$a+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a+\sqrt{x}=x,$$

т.е. x ја задоволува и дадената равенка.

Равенката (1) ја пишуваме во облик

$$(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - a = 0 \tag{2}$$

и ги бараме ненегативните корени. Равенката (2) по однос на x има решенија при $1+4a \geqslant 0$, т.е. при $a \geqslant -1/4$, при кој услов добиваме:

$$\sqrt{x}_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}), \quad \sqrt{x}_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a}).$$

Првиот корен е позитивен; вториот корен при $-1/4 \leqslant a < 0$ е позитивен, при $a=0$ е нула, а при $a>0$ е негативен.

Следствено, при $a<-1/4$, дадената равенка нема решанија; при $a=-1/4$ има еден корен $x=1/4$; при $-1/4 < a \leqslant 0$ има деве решенија $x_{1,2} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{1+4a})^2$, а при $a>0$ има само еден корен $x = \frac{1}{4}(1+\sqrt{1+4a})^2$.

г) За $a=0$, $x \neq 0$ равенката се сведува на $x=x$, која е задоволена за секое позитивно x.

Јасно, дека треба да е $a+x>0$ и $a>0$. Нека ставиме $a+x=t^2$ и $a=b^2$, каде што $b>0$. Тогаш добиваме

$$t - \frac{b}{t} = \sqrt{b^2+t^2},$$

од каде што следува $t^2 > b$. Квадрирајќи, добиваме $t^2 = b/(b+2)$, а бидејќи е $b/(b+2) < b$, следува дека равенката нема решенија за $a \neq 0$.

д) Левата страна е поголема од 2, па значи равенката нема решение.

ѓ) Левата страна има смисла при $2x-1 \geqslant 0$, $x+\sqrt{2x-1} \geqslant 0$ и $x-\sqrt{2x-1} \geqslant 0$, од каде што $x \geqslant 1/2$, во кој случај, равенката е еквивалентна со

$$2x+2|x-1| = a^2. \tag{3}$$

За $x \geqslant 1$, од (3) добиваме $x = (a^2+2)/4$, а за $1/2 \leqslant x < 1$, пак од (3) добиваме $a^2=2$.

Значи, ако $a>\sqrt{2}$, равенката има единствено решение $x = (a^2+2)/4$; ако $a=\sqrt{2}$, тогаш секој број $x \in [1/2,1]$ е решение на дадената равенка; ако $a<\sqrt{2}$, равенката нема решение.

е) Ако ставиме

$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}} = y,$$

равенката се сведува на

$$y + \frac{1}{y} = 2$$

или

$$y^2 - 2y + 1 = 0,$$

од каде што $y=1$. Од

$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}} = 1,$$

добиваме $x = \frac{a-b}{2}$.

ж) За $a=b=0$ решение е секој реален број x. Ако еден од броевите a,b е нула а другиот различен од нула решение е само $x=0$.

Нека a и b се реални броеви различни од нула. Јасно, дека треба да е

$$\frac{1-ax}{1+ax} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1+bx}{1-bx} > 0,$$

од каде што $x^2 < \min\{1/a^2, 1/b^2\}$. При овој услов, равенката е еквивалентна со

$$\left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)^2 \frac{1+bx}{1-bx} = 1,$$

од каде што добиваме

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 = \frac{2a-b}{a^2 b}.$$

Последната равенка има решение при $\frac{a}{b} \geqslant \frac{1}{2}$. Но, бидејќи треба да е $x^2 < \frac{1}{a^2}$ и $x^2 < \frac{1}{b^2}$, добиваме дека првото е исполнето за $\frac{a}{b} < 1$, а второто е исполнето секогаш при $a \neq b$.

Значи, дадената равенка има решенија: $x_1 = 0$, за било кои a и b, и

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2a-b}{a^2 b}} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} < 1.$$

154. а) При $\frac{1}{3} \leqslant x < 2$ имаме

$$\frac{3x-1}{2-x} \geqslant 0,$$

па за овие вредности на x, неравенката е еквивалентна со

$$\frac{3x-1}{2-x} \geqslant 1,$$

т.е. со $3x-1 \geqslant 2-x$, од каде што $x \geqslant \frac{3}{4}$. Значи, неравенката е задоволена за секое x од $[\frac{3}{4}, 2)$.

б) За $x \in (0,3)$, неравенката е еквивалентна со

$$x < \sqrt{6x-x^2}, \quad \text{т.е.} \quad x(x-3) < 0,$$

која е задоволена за секое $x \in (0,3)$.

в) Решенијата на дадената неравенка ќе ги бараме во интервалот $(-\infty, \min\{a^2, b^2\}]$.

1) Ако $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, тогаш $\sqrt{a^2-x} > a$ и $\sqrt{b^2-x} > b$, па и

$$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}>a+b,$$

за секое $x\in(-\infty,\min\{a^2,b^2\}]$.

2) Ако е $a>0$ и $b>0$, тогаш при $x\in(-\infty,0)$ имаме $\sqrt{a^2-x}>a$, и $\sqrt{b^2-x}>b$, па оттука и

$$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}>a+b,$$

а при $x\in[0,\min\{a^2,b^2\}]$ имаме $\sqrt{a^2-x}\leqslant a$ и $\sqrt{b^2-x}\leqslant b$, т.е.

$$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}\leqslant a+b.$$

Значи, при $a>0$ и $b>0$, решение на дадената неравенка е секое x од интервалот $(-\infty,0)$.

3) Ако едниот од броевите a, b е позитивен, а другиот негативен, на пример, $a>0$, $b<0$, тогаш при $|b|>a$ добиваме $a+b<0$, па дадената неравенка е задоволена за секое $x\in(-\infty,a^2]$; при $|b|<a$, дадената неравенка секако е задоволена за секое $x\in(-\infty,0]$, а за $x\in(0,b^2]$ имаме

$$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}\geqslant\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{b^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)}>\sqrt{(a+b)^2}=a+b.$$

Значи, и во овој случај, решение на дадената неравенка е секое x од интервалот $(-\infty,\min\{a^2,b^2\}]$.

г) Не губејќи ништо од општоста, можеме да претпоставиме дека $b\leqslant a$, па решенијата ќе ги бараме во интервалот $(-\infty,b]$.

Пред сè, јасно е дека треба да е $a+b\geqslant 0$.

1) Ако е $a+b=0$, т.е. $a=-b$ (при што е можно $a=b=0$), неравенката се сведува на $\sqrt{-b-x}+\sqrt{b-x}>0$, која е задоволена за секое x од интервалот $(-\infty,-|b|]$.

2) Ако е $a>0$ и $b<0$, тогаш, поради $a+b>0$, мора да е $a\geqslant|b|$, па за $x\in(-\infty,b]$ неравенката се сведува на $\sqrt{(a-x)(b-x)}>x$, која е задоволена за секое $x\in(-\infty,b]$.

3) Ако е $0<b\leqslant a$, тогаш, за $x\in(-\infty,0]$ добиваме $\sqrt{(a-x)(b-x)}>x$, која е задоволена за секое $x\in(-\infty,0]$, ако $x\in(0,b]$, тогаш се добива $x<\frac{ab}{a+b}$ $(<b)$, па неравенката е задоволена за секое x од интервалот $(-\infty,\frac{ab}{a+b})$.

д) Јасно е дека $x=0$ е едно решение на дадената неравенка. Од $x>0$ следува $2+\sqrt[4]{x}>2$, $3+\sqrt[6]{x}>3$, па и $(2+\sqrt[4]{x})(3+\sqrt[6]{x})>6$ што значи решението $x=0$ на дадената неравенка е единствено.

155. а) Имаме:

$$10^{x-1}(10-\tfrac{1}{2})=950,\quad 10^{x-1}=100,\quad x=3.$$

б) Делејќи со 8^x, равенката се сведува на

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 2.$$

Ставајќи $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = y$, добиваме $y^3 + y - 2 = 0$, или $(y-1)(y^2 + y + 2) = 0$, од каде $y=1$, односно $x=0$.

в) Ставајќи $x + \sqrt{x^2-2} = y$, равенката ја пишуваме во облик

$$4^y - 5\cdot 2^{y-1} = 6, \qquad 2\cdot 2^{2y} - 5\cdot 2^y - 12 = 0,$$

од каде што $2^y = 4$, $y=2$. Од равенката $x + \sqrt{x^2-2} = 2$ добиваме $x = \frac{3}{2}$.

г) Равенката се сведува на

$$5^{x(1+x)} = 5^{56},$$

од каде што $x=7$.

156. а) Равенката има смисла само при $a,b > 0$ и $a,b \neq 1$. Од равенството

$$\log_a x = \log_b x \, \log_a b,$$

добиваме

$$(\log_b x)^2 \log_a b = \log_a b;$$

за $a,b \neq 1$, имаме:

$$(\log_b x)^2 = 1,$$

од каде $x=b$ и $x = \frac{1}{b}$.

б) Равенката е еквивалентна со

$$2\log_2|x+1| + \log_2|x+1| = 6,$$

од каде што

$$\log_2|x+1| = 2, \quad |x+1| = 4,$$

односно $x_1 = 3$, $x_2 = -5$.

в) Имаме:

$$\frac{1}{3}\log(271+3^{\sqrt{2x}}) = 2 - \log 10, \ \log(271+3^{\sqrt{2x}}) = 3, \ 271+3^{\sqrt{2x}} = 10^3, \ 3^{\sqrt{2x}} = 3^6,$$

од каде што $x=18$.

г) Имаме:

$$\log_4 x \left(\frac{\log_2 x}{\log_4 x} + \frac{\log_3 x}{\log_4 x} + 1\right) = 1,$$

$$\log_4 x \,(\log_2 4 + \log_3 4 + 1) = 1,$$

$$\log_4 x = \frac{1}{3 + 2\log_3 2},$$

од каде што $x = 2^{\frac{2}{3+2\log_3 2}} = 2^{2\log_{108} 3}$.

157. а) Со смената $x+y=u$, $xy=v$, добиваме

$$u = 6, \quad (u^2-2v)(u^3-3uv) = 1440,$$

т.е. $v^2-30v+176=0$, од каде што $v_1=22$, $v_2=8$. Враќајќи се на смените, добиваме дека системот

$$x+y=6, \quad xy=22$$

нема решение, а системот

$$x+y=6, \quad xy=8$$

има решенија $x=4,\ y=2$ и $x=2,\ y=4$.

б) Степенувајќи ја првата равенка со 3, го добиваме системот

$$x+y=9, \quad xy=8,$$

од каде што $x=8,\ y=1$ и $x=1,\ y=8$.

в) Множејќи ја првата со x^z, а втората со y^z, добиваме $x=y$, а потоа $z=\frac{2}{3}$ и накрај $x=y=\frac{1}{81}$.

г) Користејќи ја формулата

$$\log_b a = \log_{b^n} a^n,$$

доаѓаме до систем, еквивалентен на дадениот:

$$x:\sqrt{y}=a^m, \quad \sqrt{x}:\sqrt[3]{y}=a^n,$$

т.е.

$$x^2:y=a^{2m}, \quad x^3:y^2=a^{6n},$$

од каде што $x=a^{4m-6n}$, $y=a^{6m-12n}$.

158. а) $x=2,\ y=1$.

б) $x=1,\ y=-1$; $x=2,\ y=0$.

в) $x>20$, $\frac{3x+4}{2}<y<2x-8$.

г) $\frac{1}{2}<x<1$, $\frac{1}{2}<y<x$; $1<x<2$, $\frac{1}{2}<y<\frac{1}{x}$.

д) $|x|=1$, $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{4}{3}$.

ѓ) Бидејќи важи неравенството $2^x>\log_2 x$, за било кое $x\in R^+$, системот нема решение.

159. а) $x=1$.

б) За секое $x\in R$ важи неравенството $2^x>x$, па равенката нема решение.

в) $x=2$. г) $x\approx 2,1$. д) нема решение.

V. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ И ПОЛИНОМИ

160. $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $k\in N^0$; $2^k i^k$ за $n=2k$, $(2i)^m(1+i)$ за $n=2m+1$; 2.

161. а) a^2-ab+b^2, б) $a^3+b^3+c^3-3abc$.

162. Имаме:

$$4i(1+i)^{98}-4(1-i)^{96}=4i(2i)^{49}-4(-2i)^{48}=-4\cdot 2^{49}-4\cdot 2^{48}=$$
$$=-3\cdot 2^{50}=3(2i)^{50}=3[(1+i)^2]^{50}=3(1+i)^{100}.$$

163. а) $x=\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$. б) $\frac{1-7i}{10}$. в) $x=1+i$, $y=i$.

г) $x=\frac{10(3-11i)}{9}$, $y=-\frac{10(3+8i)}{9}$, $z=\frac{10(1-7i)}{9}$.

164. а) Од $x\bar{x}=1$, следува дека тоа се комлексните броеви $x=u+iv$ за кои е $|x|^2=1$, т.е. $u^2+v^2=1$.

б) $x=0$ и $x=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$.

в) $x=0,1,-1,i,-i$. г) $x=0$, $x=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$;

165. $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$; $3-i=\sqrt{10}(\cos(\operatorname{arctg}\frac{1}{3})-i\sin(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}))$;

$-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; $(1+i)^n=\sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$;

$(3-i)^n=\sqrt{10^n}(\cos(n\operatorname{arctg}\frac{1}{3})-i\sin(n\operatorname{arctg}\frac{1}{3}))$;

$(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})^n=\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3}$.

166. Упатство. Да се стави $\operatorname{tg}\phi=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}$, а потоа да се примени формулата на Моавр.

167. Имаме:

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2})^n=$$
$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2})^n=$$
$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}).$$

168. Од $z=\cos x+i\sin x$, имаме $\bar{z}=\cos x-i\sin x$, па

$$\cos x=\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},\quad \sin x=\frac{z-\bar{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz};$$

следствено,

$$\operatorname{tg}x=\frac{z^2-1}{i(z^2+1)},\quad \operatorname{ctg}x=\frac{(z^2+1)i}{z^2-1}.$$

169. Од $z+\frac{1}{z}=2\cos\phi$, имаме $z=\cos\phi\pm i\sin\phi$, $\frac{1}{z}=\bar{z}=\cos\phi\mp i\sin\phi$. Но, тогаш е

$$z^n+\frac{1}{z^n}=z^n+\bar{z}^n=(\cos\phi\pm i\sin\phi)^n+(\cos\phi\mp i\sin\phi)^n=2\cos n\phi.$$

170. Ако е $z = \cos x + i\sin x$, тогаш е $\bar{z} = \cos x - i\sin x$,

$$z^k = \cos kx + i\sin kx, \qquad \bar{z}^k = \cos kx - i\sin kx,$$

од каде добиваме

$$\cos kx = \frac{z^k + \bar{z}^k}{2}, \qquad \sin kx = \frac{z^k - \bar{z}^k}{2i}.$$

Следствено имаме:

а) $\sin^3 x = \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^3 = \frac{z^3-3z+3\bar{z}-\bar{z}^3}{-8i} = \frac{(z^3-\bar{z}^3)-3(z-\bar{z})}{-8i} =$

$$= \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}.$$

б) $\frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$.

в) $\frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$.

г) $\frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}$.

171. Тргнувајќи од

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$$

добиваме

$$\cos^3\alpha + 3i\sin\alpha\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha - i\sin^3\alpha = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha,$$

т.е.

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Слично, добиваме

$$\sin n\alpha = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{k+1}\binom{n}{2k-1}\cos^{n-2k+1}\alpha\,\sin^{2k-1}\alpha,$$

$$\cos n\alpha = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\alpha\,\sin^{2k}\alpha,$$

каде $\left[\frac{n}{2}\right]$ значи цел дел од $\frac{n}{2}$.

172. а) Имаме:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2 + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)] =$$

$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}.$$

Слично се докажуваат и другите равенства.

173. Нека ставиме

$$A = \sum_{k=1}^{n}\cos k, \qquad B = \sum_{k=1}^{n}\sin k;$$

тогаш

$$A + iB = \sum_{k=1}^{n}(\cos k\alpha + i\sin k\alpha) = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha} = e^{i\alpha}\,\frac{e^{in\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1} =$$

$$= e^{i(n+1)\frac{\alpha}{2}}\,\frac{e^{in\frac{\alpha}{2}} - e^{-in\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = \left(\cos\frac{n+1}{2}\alpha + i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\right)\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\ ,$$

од каде што

$$A = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{n+1}{2}\alpha, \quad B = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{n+1}{2}\alpha.$$

174. а) Ако е

$$A = 1 + a\cos\phi + a^2\cos 2\phi + \dots + a^k\cos k\phi,$$

$$B = a\sin\phi + a^2\sin 2\phi + \dots + a^k\sin k\phi\ ,$$

ќе имаме

$$A+iB = 1+a(\cos\phi+i\sin\phi)+a^2(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)+\ \dots\ +a^k(\cos k\phi+i\sin k\phi).$$

Ставајќи $z = \cos\phi + i\sin\phi$, добиваме

$$A+iB = \frac{a^{k+1}z^{k+1}-1}{az-1} = \frac{a^{k+1}z^{k+1}-1}{az-1}\,\frac{a\bar z-1}{a\bar z-1} =$$

$$= \frac{a^{k+2}z^{k} - a^{k+1}z^{k+1} - a\bar z + 1}{a^2 - a(z+\bar z) + 1}\ .$$

Бидејќи е A реалниот дел од овој комплексен број, добиваме

$$A = \frac{a^{k+2}\cos k\phi - a^{k+1}\cos(k+1)\phi - a\cos\phi + 1}{a^2 - 2a\cos\phi + 1}\ .$$

б) Ако е

$$A = \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx,$$

тогаш со смената

$$\sin^2 kx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2kx,$$

добиваме

$$A = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos^2 nx).$$

Ставајќи

$$S = \cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2nx,$$

$$T = \sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx,$$

$$z = \cos x + i\sin x,$$

имаме

$$S+iT = z^2 + z^4 + \dots + z^{2n} = z^2\,\frac{z^{2n}-1}{z^2-1} =$$

$$= z^2\,\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}\,\frac{\bar z^2-1}{\bar z^2-1} = \frac{z^{2n} - z^{2n+2} + \bar z^2 - 1}{2 - (z^2+\bar z^2)}\ ,$$

од каде што

$$S = \frac{\cos 2nx - \cos(2n+2)x + \cos 2x - 1}{2-2\cos x} = \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{\sin x}.$$

Значи,

$$A = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x\ \sin nx}{2\sin x}.$$

в) $\frac{n}{2} - \frac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$.

175. а) $\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}),\ -(1+i)\}$.

б) $\{\frac{\sqrt[6]{2}}{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}),\ \frac{\sqrt[6]{16}}{2}(-1+i),\ -\frac{\sqrt[6]{2}}{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}})\}$.

в) $\{\frac{1}{\sqrt[12]{2}}(\cos\frac{\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})+2k\pi}{6};k=0,1,..,5\}$.

176. Грешката е направена при премин од $\sqrt{(-1)(-1)}$ на $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ и од $\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}$ на $i\cdot i$.

177. а) Нека $x\in\sqrt[n]{z_1}\sqrt[n]{z_2}$, т.е. $x=uv$, каде што $u^n=z_1$, $v^n=z_2$; тогаш имаме $x^n=u^nv^n=z_1z_2$, т.е. $x\in\sqrt[n]{z_1z_2}$.

Обратно, нека $y\in\sqrt[n]{z_1z_2}$, т.е. $y^n=z_1z_2$. Ако е

$$z_1 = \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),\quad z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2),$$

ќе имаме

$$y^n = \rho_1\rho_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)),$$

т.е.

$$y = \sqrt[n]{\rho_1\rho_2}(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+2k\pi}{n}),$$

па ставајќи

$$u = \sqrt[n]{\rho_1}(\cos\frac{\alpha_1}{n} + i\sin\frac{\alpha_2}{n}),\quad v = \sqrt[n]{\rho_2}(\cos\frac{\alpha_2+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha_2+2k\pi}{n}),$$

добиваме $u^n = z_1$, $v^n = z_2$ и $y=uv$, што значи $y\in\sqrt[n]{z_1}\sqrt[n]{z_2}$.

Според тоа даденото равенство е точно.

б) Нека $x\in\sqrt[n]{z}$; тоа значи дека $x^n=z$. Но, тогаш е $(x^n)^k = z^k$, т.е. $x^{nk}=z^k$, па $x\in\sqrt[nk]{z^k}$, што значи

$$\sqrt[n]{z} \subseteq \sqrt[nk]{z^k} \qquad (1)$$

Множеството $\sqrt[n]{z}$ има n елементи, а множеството $\sqrt[nk]{z^k}$ има kn елементи, па во (1) важи стриктна инклузија.

178. Ако ϵ е примитивен корен на единицата од степен $2n$, тогаш $\epsilon^{2n}= 1$, а $\epsilon^n=-1$. Но, тогаш е

$$1+\epsilon+\dots+\epsilon^{n-1}=\frac{\epsilon^n-1}{\epsilon-1}=\frac{-1-1}{\epsilon-1}=\frac{2}{1-\epsilon}.$$

179. Знаеме дека

$$z_k=\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(k-1)\pi}{n},\quad k=1,2,\dots,n$$

или

$$z_k=\epsilon^{k-1},\qquad \epsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Тогаш, имаме

$$S_m=z_1^m+z_2^m+\dots+z_n^m=1+\epsilon^m+\epsilon^{2m}+\dots+\epsilon^{(n-1)m}.\ (1)$$

Ако $n|m$, и $\frac{m}{n}=p$, ќе имаме

$$\epsilon^m=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^m=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}=$$

$$=\cos 2p\pi+i\sin 2p\pi=1,$$

па од (1) добиваме $S_m=n$.

Ако $n\nmid m$, бидејќи е

$$\epsilon^{nm}=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})^{nm}=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi=1,$$

од (1) ќе имаме

$$S_m=1+\epsilon^m+\epsilon^{2m}+\dots+\epsilon^{(n-1)m}=\frac{\epsilon^{nm}-1}{\epsilon-1}=0,$$

бидејќи $\epsilon^m-1\neq 0$ при $n\nmid m$.

180. Нека е $a+ib=\cos\phi+i\sin\phi$; тогаш имаме:

$$\frac{x+i}{x-i}=\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n},$$

$$x+i=(x-i)[\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}],$$

$$x=\frac{i[\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+1+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}]}{\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}-1+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\phi+2k\pi}{2n}\,\frac{i(\cos\frac{\phi+2k\pi}{2n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{2n})}{(i\cos\frac{\phi+2k\pi}{2n}-\sin\frac{\phi+2k\pi}{2n})},$$

т.е.

$$x=\operatorname{ctg}\frac{\phi+2k\pi}{2n},$$

па значи, сите корени на равенката се реални.

181. а) Ставајќи

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\quad \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

добиваме

$$x^6 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} - i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

од каде што

$$x_k = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{5\pi+24k\pi}{72} + i\sin\frac{5\pi+24k\pi}{72}\right), \quad k=0,1,2,3,4,5.$$

б) Од $(x^4-1)^2 = 1+i$, на што се сведува дадената равенка, добиваме:

$$x^4-1 = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{-1+\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x^4-1 = -\sqrt{1+\sqrt{2}} - i\sqrt{-1+\sqrt{2}},$$

т.е.

$$x_k = \sqrt[8]{1+2\sqrt{2}+2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{4}\right), \quad k=0,1,2,3$$

и

$$x_m = \sqrt[8]{1+2\sqrt{2}-2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\beta+2m\pi}{4} + i\sin\frac{\beta+2m\pi}{4}\right), \quad m=0,1,2,3,$$

каде што

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{1-\sqrt{1+\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{2}.$$

в) $x_1 = 1+i, \quad x_2 = 2+i.$

г) $x_{1,2} = \pm i, \quad x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$

182. а) $x_k = -i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}, \quad k=0,1,\dots,n-1.$

б) Множејќи ја дадената равенка со $(x+1)$ добиваме

$$x^{2n} + 1 = 0,$$

од каде што

$$x_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{2n+1} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n+1}, \quad k=0,1,\dots,2n.$$

Корените на дадената равенка се добиваат за $k=0,1,\dots,n-1,n+1,\dots,2n$.

в) Ако дадената равенка ја напишеме во облик

$$2x^n = x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \dots + a^n,$$

т.е.

$$2x^n = (x+a)^n,$$

добиваме

$$x_k = \frac{a}{\epsilon_k\sqrt[n]{2} - 1},$$

каде што
$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,2,\dots,n-1.$$

183. Ако дадената равенка ја помножиме со x^{-n}, добиваме

$$1 + a_1x^{-1} + a_2x^{-2} + \dots + a_nx^{-n} = 0.$$

Ставајќи $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, добиваме

$$1+a_1(\cos\alpha - i\sin\alpha)+a_2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)+ \dots +a_n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha)=0,$$

од каде што

$$a_1\sin\alpha + a_2\sin 2\alpha + \dots + a_n\sin n\alpha = 0,$$

што требаше да се докаже.

184. а) Имаме

$$u^6 + 63u^3 - \frac{12^3}{3^3} = 0 \quad \text{или} \quad u^6 + 63u^3 - 64 = 0,$$

од каде што едно решение е $u_0 = 1$ и $v_0=-4$, па решенијата се $x_1=-3$, $x_2= \frac{3+5i\sqrt{3}}{2}$, $x_3= \frac{3-5i\sqrt{3}}{2}$.

б) Едно решение на равенката $u^6 - iu^3 - 1 = 0$ е

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18},$$

а потоа, поради $p=3$, $q=-i$, добиваме

$$v_0 = -\frac{1}{u_0} = -\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}.$$

Од тоа следува, дека решенијата на дадената равенка се:

$$x_1=2i\sin\frac{\pi}{18}, \quad x_2=\varepsilon^2 u_0+\varepsilon v_0=-2i\sin\frac{7\pi}{18}, \quad x_3=\varepsilon u_0+\varepsilon^2 v_0=2i\sin\frac{5\pi}{18}.$$

в) Еден корен на равенката

$$u^6 + (a^3+b^3)u^3 + a^3b^3 = 0,$$

е $u_0=-a$, а $v_0=-b$, па решенијата на дадената равенка се:

$$x_1=-(a+b), \quad x_{2,3}= \frac{a+b}{2} \pm \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}i.$$

г) $x_1=x_2=-1-2i$, $x_3= 2+i$.

185. а) Со смената $x = z + \frac{1}{2}$, дадената равенка се сведува на

$$z^4 + \frac{1}{2}z^2 + 5z - \frac{91}{16} = 0, \qquad (1)$$

па дополнувајќи ја до квадрат имаме

$$(z^2 + \frac{u}{2})^2 - [(u-\frac{1}{2})z^2 - 5z + \frac{u^2}{4} + \frac{91}{16}] = 0. \qquad (2)$$

За да биде изразот во средната заграда потполн квадрат, треба да е

$$8u^3 - 4u^2 + 182u - 291 = 0,$$

чиј што еден корен е $u=\frac{3}{2}$. Заменувајќи ја оваа вредност на u во (2) се добива

$$(z^2 + z - \frac{7}{4})(z^2 - z + \frac{13}{4}) = 0,$$

од каде што $z_{1,2}=-\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$, $z_{3,4}= \frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}$.

На крајот, добиваме $x_{1,2}= \pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=1\pm i\sqrt{3}$.

б) Со смената $x = z + \frac{1}{2}$, равенката се сведува на

$$z^4 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{39}{16} = 0,$$

од каде што

$$z^2 = \frac{\sqrt{48}-3}{4} \quad \text{и} \quad z^2 = -\frac{\sqrt{48}+3}{4}$$

или

$$z_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{48}-3}, \qquad z_{3,4} = \pm\frac{i}{2}\sqrt{\sqrt{48}+3},$$

па корените на дадената равенка се:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\sqrt{48}-3}), \quad x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{\sqrt{48}+3}).$$

в) $-1 \pm \sqrt{6}$, $\pm i\sqrt{3}$.

г) $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, $x_{3,4} = -\frac{1}{2}(b+1 \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4c})$.

Равенката може да се реши како под а). Но, подобро е да се трансформира на следниов начин:

$$(x^4 + x) + b(x^3 + 1) + c(x^2 - x + 1) = 0,$$

$$x(x+1)(x^2 - x + 1) + b(x+1)(x^2 - x + 1) + c(x^2 - x + 1) = 0,$$

$$(x^2 - x + 1)(x^2 + (1+b)x + b + c) = 0,$$

од каде што лесно се добива резултатот.

186. $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

187. Нека при делењето на $f(x)$ со $x-x_0$ се добие остаток r, т.е.

$$f(x) = (x-x_0)f(x) + r.$$

Ова равенство треба да е точно за секое x, па за $x=x_0$ добиваме $r = f(x_0)$, што требаше да се докаже.

188. Бидејќи е $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, според 186, остатоците при делењето на $f(x)$ со $x-1$, односно $x-2$, се: $f(1)=1+a+b$ и $f(2)=4+2a+b$. Според тоа, за да биде $f(x)$ делив со x^2-3x+2, треба да е $f(1) = 0$ и $f(2) = 0$, од каде што добиваме $a=-3$, $b=2$.

189. а) Да претпоставиме обратното, т.е. $g(x) = h_1(x)h_2(x)$. Бидејќи е $f(x) = x^n g(\frac{1}{x})$, имаме $g(\frac{1}{x}) = h_1(\frac{1}{x})h_2(\frac{1}{x})$, па е $f(x) = x^r h_1(\frac{1}{x})h_2(\frac{1}{x})x^s$ $(r+s=n)$. Ставајќи $f_1(x) = x^r h_1(\frac{1}{x})$, $f_2(x) = x^s h_2(\frac{1}{x})$ добиваме $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, што противречи на претпоставката дека $f(x)$ е неразложлив полином.

б) Од условот имаме:

$$f(x)=(x-a)q_1(x)+A, \quad f(x)=(x-b)q_2(x)+B, \quad f(x)=(x-c)q_3(x)+C.$$

Ако $f(x)$ го поделиме со $(x-a)(x-b)(x-c)$, ќе добиеме остаток од облик ux^2+vx+w. Поради $f(a)=A$, $f(b)=B$, $f(c)=C$, добиваме

$$ua^2+va+w=A,\quad ub^2+vb+w=B,\quad uc^2+vc+w=C,$$

од каде што

$$u=\frac{A}{(a-b)(c-a)}+\frac{B}{(a-b)(b-c)}+\frac{C}{(b-c)(c-a)},$$

$$v=-\frac{(c+b)A}{(a-b)(c-a)}-\frac{(a+c)B}{(a-b)(\ -c)}-\frac{(a+b)C}{(b-c)(c-a)},$$

$$w=\frac{bc\,A}{(a-b)(c-a)}+\frac{a\,c\,B}{(a-b)(b-c)}+\frac{a\,b\,C}{(b-c)(c-a)}.$$

Според тоа, остатокот ќе биде ux^2+vx+w, при што u, v и w ги имаат горните вредности.

190. Нека е

$$f(x)=(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\dots+b_1x+b_0)(x-x_0)+b.$$

По извршеното множење и средување се добива $b_{n-1}=a_n$, $b_{n-2}=$ $=x_0b_{n-1}+a_{n-1}$, ..., $b_0=x_0b_1+a_1$, $b=x_0b_0+a_0$, а според задачата 187. имаме $b=f(x_0)$.

191. а) Остатокот е 0, а количникот $x^5-x^4-x^3+x^2+2x-1$.

б) Остатокот е 135, а количникот $x^6-3x^4+10x^3-17x^2+34x-68$.

192. а) $f(3)=125$; $f(1,1)=-24,32347$; $f(-2,5)=212,65625$.

б) $5+22i$.

193. а) При примената на Евклидовиот алгоритам на полиноми со цели коефициенти, деленикот може да се множи или делителот да се скратува со цел број различен од нула, со што се избегнуваат дробните коефициенти. Притоа, ова може да се применува не само во почетокот на некое од последователните делења, туку и во самиот процес на делењето. Резултатот ќе се разликува само до некој множител од нулти степен, а при барањето на најголем заеднички делител, ова се дозволува.

Делејќи го $9f(x)$ со $g(x)$ се добива остаток $r_1(x)=-x^3-53x+1$. По делењето на $g(x)$ со $r_1(x)$ се добива остаток $-162x^2-162x$, кој поделен со -162 дава $r_2(x)=x^2+x$. По делењето на $r_1(x)$ со $r_2(x)$ се добива остаток $r_3(x)=-54x+1$. Најпосле, делејќи го $54r_2(x)$ со $r_3(x)$ се добива остаток $55/54$, од каде што следува $(f(x),g(x))=1$.

б) Делејќи го $g(x)$ со $f(x)$ се добива остаток

$$2r_1(x)=2(x^4-x^3+x^2-1).$$

Делејќи го $f(x)$ со $r_1(x)$, се добива остаток $r_2(x)=x^3+x+1$. Но, $r_1(x)=r_2(x)(x-1)$, па имаме

$$(f(x),g(x)) = (f(x),r_1(x)) = (r_1(x),r_2(x)) = x^3+x+1.$$

в) x^2+3x+2.

194. Да претпоставиме дека постојат полиноми $f(x)$ и $g(x)$, такви што

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = c(x)$$

и нека е $a(x)=d(x)a_1(x)$, $b(x)=d(x)b_1(x)$, каде што $d(x)=(a(x),b(x))$. Тогаш, од

$$d(x)(a_1(x)f(x) + b_1(x)g(x)) = c(x),$$

следува дека $d(x)$ е делител и на $c(x)$.

Обратно, нека $(a(x),b(x))=d(x)$ и нека $d(x)$ е делител на $c(x)$; постојат полиноми $u(x)$ и $v(x)$, така што

$$a(x)u(x) + b(x)v(x) = d(x).$$

Ако $c(x)=c_1(x)d(x)$, тогаш имаме

$$a(x)u(x)c_1(x) + b(x)v(x)c_1(x) = c(x),$$

па можеме да ставиме $f(x)=u(x)c_1(x)$, $g(x)=v(x)c_1(x)$.

195. а) $f(x)=\frac{1}{3}(2-x)(3-x^2)$, $g(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(3-x^2)$.

б) Полиномите $f(x)$ и $g(x)$ не постојат, бидејќи $(a(x),b(x))=x-1$ не е делител на $c(x)$.

196. а) Со елиминација на x_1, x_2 и x_3 од

$$x_1 = x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$$
$$x_1x_2x_3 = -c$$

добиваме $a^3 + 8c = 4ab$.

б) $b^3 = a^3c$.

197. Нека $x_1 \neq 0$ е двоен корен на полиномот $x^5 + ax^3 + b$; тогаш тој е корен и на полиномот $5x^4 + 3ax^2 = (x^5 + ax^3 + b)'$. Бидејќи $x_1 \neq 0$, тој е корен наполиномот $5x^2 + 3a$. Со елиминација на x_1 од

$$x_1 + ax_1^3 + b = 0, \quad 5x_1^2 + 3a = 0,$$

добиваме $1728a^5 + 3125b^2 = 0$, што го претставува бараниот услов.

198. Нека $x=a$ е корен на полиномот

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Од

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

добиваме $f'(x) = f(x) - \frac{x^n}{n!}$. Бидејќи е $f(a)=0$, за да биде $f'(a)=0$ треба да е $\frac{a^n}{n!} = 0$, т.е. $a=0$ што не е можно, зашто $f(0)\neq 0$. Значи, $f(x)$ нема сложени корени.

199. Кога е $f(x) = k(x-a)^n$, каде k е константа, а $n\in N$.

200. Нека $g(y) = y^3 + Ay^2 + By + C$. Според Виетовите формули, имаме

$$y_1 + y_2 + y_3 = -A, \quad y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = B, \quad y_1y_2y_3 = -C$$

и

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \quad x_1x_2x_3 = -c$$

Понатаму.

$$A = -(y_1+y_2+y_3) = -2(x_1+x_2+x_3) = 2a,$$

$$B = y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3 = (x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_2+x_3)(x_1+x_2)+(x_3+x_1)(x_1+x_2) =$$
$$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = a^2+b,$$

$$C = -y_1y_2y_3 = -(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2) =$$
$$= -(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3 = ab - c.$$

Значи, $g(y) = y^3 + 2ay^2 + (a^2+b)y + ab - c$.

201. а) Ако нулите на полиномот $f(x)$ образуваат геометриска прогресија, тогаш тие ќе бидат x_1, dx_1, d^2x_1. Од Виетовите формули имаме:

$$x_1(1+d+d^2) = -p, \quad x_1^2d(1+d+d^2) = q \quad и \quad x_1^3d^3 = -r;$$

елиминирајќи ги x_1 и d, добиваме

$$p^3r - q^3 = 0,$$

што го претставува бараниот услов.

б) За дадената равенка имаме: $p=-\frac{21}{4}$, $q=\frac{63}{8}$, $r=-\frac{27}{8}$, па $p^3r-q^3=0$. Значи, според а), корените на оваа равенка образуваат геометриска прогресија и тие се : $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=3$.

202. Од условот имаме: $p+q=-p$ и $pq=q$. Од втората равенка добиваме $q=0$ или $p=1$. Но, за $q=0$ имаме и $p=0$, а за $p=1$ имаме $q=-2$. Значи; $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$, а соодветните равенки се: $x^2=0$ и $x^2+x-2=0$.

203. а) Бидејќи $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ се корени различни од единица, тогаш $(x-1)f(x) = x^n - 1$, од каде што

$$f(x) = \frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1.$$

б) Имаме:

$$g(x) = \frac{1}{x-x_1} + \dots + \frac{1}{x-x_{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{f(x)}[(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_{n-1}) +$$

$$+ \dots + (x-x_1)\dots(x-x_{n-2})] = \frac{f'(x)}{f(x)} .$$

па

$$g(1) = \frac{(n-1)+(n-2)+\dots+1}{f(1)} = \frac{n-1}{2} .$$

в) Вредноста на изразот е $f(1) = n$.

г) Вредноста на изразот е $f(2) = 2^n - 1$.

204. Од Виетовите формули можат да се добијат следниве равенства

$$S_1+a_1=0,\ S_2+a_1S_1+2a_2=0,\dots,S_n+a_1S_{n-1}+\dots+a_{n-1}S_1+na_n=0,$$

каде што

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k ,$$

а a_i се коефициентите од равенката

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Во дадениот случај имаме: $S_1=-3$, $S_2=33$, $S_3=-45$ и $S_4=357$.

205. а) Имаме:

$$f(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n) = (-1)^n(x_1-x)\dots(x_n-x),$$

па

$$(x_1+1)\dots(x_n+1) = (-1)^n f(-1) = 1-a_1+\dots+(-1)^n a_n .$$

б) Имаме:

$$(x_1^2-1)\cdot\ldots\cdot(x_n^2-1) = (x_1-1)\dots(x_n-1)(x_1+1)\dots(x_n+1) =$$

$$= (-1)^n f(1)\cdot(-1)^n f(-1) =$$

$$= (1+a_1+\dots+a_n)(a_n-a_{n-1}+\dots+(-1)^n).$$

в) Имаме:

$$(x_1^2+1)\dots(x_n^2+1) = (x_1-i)\dots(x_n-i)(x_1+i)\dots(x_n+i) =$$

$$= (-1)\ f(i)\cdot(-1)\ f(-i) =$$

$$= (a_n+ia_{n-1}+\dots+i^n)(a_n-ia_{n-1}+\dots+(-i)^n) =$$

$$=[(a_n-a_{n-2}+\dots)+i(a_{n-1}-a_{n-3}+\dots)][(a_n-a_{n-2}+\dots)-i(a_{n-1}-a_{n-3}+\dots)]=$$

$$= (a_n-a_{n-2}+\dots)^2 + (a_{n-1}-a_{n-3}+\dots)^2.$$

206. а) $-\frac{3}{23}+\frac{7}{23}\sqrt[3]{2}-\frac{1}{23}\sqrt[3]{4}$. б) $1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{8}$.

в) Со примена на Евклидовиот алгоритам над полиномите

$$x^2+2x-1 \quad \text{и} \quad x^3+x^2+3x+4$$

добиваме

$$21=-(x^2+2x-1)(2x^2+x+9)+(x^3+x^2+3x+4)(2x+3).$$

Ставајќи $x=\alpha$ и множејќи со $\alpha^2-3\alpha-1$, а истовремено користејќи го условот $\alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$, се добива

$$\frac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha-1}=-\frac{1}{21}(\alpha^2-3\alpha-4)(2\alpha^2+\alpha+9).$$

Од $\alpha^3=-\alpha^2-3\alpha-4$ и $\alpha^4=\alpha\alpha^3=-2\alpha^2-\alpha-4$, конечно имаме

$$\frac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha-1}=-\frac{1}{21}(5\alpha^2-15\alpha+19).$$

г) $\frac{1}{3}(\alpha^2-\alpha+1)$.

207. Според Виетовите формули имаме:

$$a_1=-(x_1+\dots+x_n)=-\frac{n}{2}(2x_1+(n-1)d),$$

$$2a_2=2(x_1x_2+\dots+x_{n-1}x_n)=\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)^2-\sum_{k=1}^{n}x_k^2 .$$

Но,
$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}(x_1+(k-1)d)^2=nx_1^2+2dx_1\sum_{k=1}^{n}(k-1)+d^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=$$
$$=nx_1^2+dn(n-1)x_1+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)d^2 .$$

Одовде

$$nx_1^2+n(n-1)dx_1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)d^2=a_1^2-2a_2 .$$

Останува да се реши по однос на x_1 и d системот равенки

$$\frac{n}{2}(2x_1+(n-1)d)=-a_1,$$
$$nx_1^2+n(n-1)dx_1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)d^2=a_1^2-2a_2 .$$

Одовде се добива

$$d=\frac{2}{n}\sqrt{\frac{3(n-1)a_1^2-6na_2}{n^2-1}}, \quad x_1=-\frac{a_1}{n}+\frac{1-n}{2} .$$

Значи, $x_k=x_1+(k-1)d$, каде x и d се горните вредности.

208. а) $a_1^2-2a_2$, (да се види решението на 207.).

б) Нека

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}x_k, \quad S_2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2, \quad S_3=\sum_{k=1}^{n}x_k^3 ,$$

каде што $x_1,\dots,x_n$ се корените на дадената равенка. Според Виетовите формули, добиваме

$$S_2a_1=S_3+\sum_{i,j=1}^{n}x_i^2x_j, \quad S_1a_2=\sum_{i,j=1}^{n}x_i^2x_j-3a_3 \quad (i\neq j).$$

Бидејќи е $S_2=a_1^2-2a_2$ (според а)), добиваме $S_3=-a_1^3+3a_1a_2-3a_3$.

209. а) Рационални корени на полиномот можат да бидат само делителите на 14, т.е. броевите ±1, ±2, ±7, ±14. Со проверка се добива дека рационален корен е само $x=2$.

б) Нема рационални корени.

210. Ако $\frac{a}{b}$ е рационален корен на полиномот $f(x)$, тогаш имаме $a|a_0$ и $b|a_n$. Но, бидејќи е $a_n=1$, b може да биде само ±1, од каде што следува дека рационален корен е цел број.

211. а) $x\approx-1,4$. б) $x_1\approx-2,8$, $x_2\approx-0,65$, $x_3\approx0,53$.

в) $x_1\approx1,7$, $x_2\approx-2,9$.

212. Според Хероновата формула

$$P=\sqrt{s(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3)},\quad 2s=x_1+x_2+x_3=-a,$$

ќе имаме

$$P=\left[-\frac{a}{2}\left(-\frac{a}{2}-x_1\right)\left(-\frac{a}{2}-x_2\right)\left(-\frac{a}{2}-x_3\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[a(a+2x_1)(a+2x_2)(a+2x_3)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\{a\left[a^3+2a^2(x_1+x_2+x_3)+4a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+8x_1x_2x_3\right]\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[a(4ab-a^3-8c)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Но, за да има проблемот решение, потребно е $a<0, b>0, c<0$ и $4ab<a^3+8c$.

VI. МАТРИЦИ И ДЕТЕРМИНАНТИ

213. $\vec{d}=(1,2,3,4)$.

214. а) Линеарно зависни: $3\vec{a}-2\vec{b}=0$.

б) Линеарно зависни: $\vec{c}=7\vec{a}-9\vec{b}$.

в) Линеарно независни.

215. Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се некомпланарни вектори и нека $\vec{d}$ е било кој друг вектор; тогаш системот вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ е линеарно зависен, па значи постојат скалари $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, од кои барем еден е различен од 0, така што да е

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}=0$$

Ако е $\delta=0$, од независноста на $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ следува и $\alpha=\beta=\gamma=0$. Значи, мора да биде $\delta\neq0$. Но, тогаш имаме

$$\vec{d}=-\frac{\alpha}{\delta}\vec{a}-\frac{\beta}{\delta}\vec{b}-\frac{\gamma}{\delta}\vec{c}.$$

216. а) 2. б) 2.

217. а) 2(1,2,1)+(-1,1,2)-(2,1,1).

б) (1,2,1)+2(-1,1,2)+(2,1,1).

в) -(1,2,1)-(-1,1,2)+2(2,1,1).

218. Ако ставиме

$\vec{e}_1=(1,0,0,\dots,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $\vec{e}_n=(0,0,0,\dots,1)$,

тогаш,

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n \tag{1}$$

$$\vec{a}_1=\vec{e}_1,\ \vec{a}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_2,\ \vec{a}_3=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\dots,\vec{a}_n=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\dots+\vec{e}_n.$$

Нека е

$$\vec{x}=y_1\vec{a}_1+y_2\vec{a}_2+\dots+y_n\vec{a}_n.$$

Тогаш добиваме

$$\vec{x}=(y_1+y_2+\dots+y_n)\vec{e}_1+(y_2+y_3+\dots+y_n)\vec{e}_2+\dots+y_n\vec{e}_n. \tag{2}$$

Споредувајќи ги (1) и (2) добиваме

$$y_1=x_1-x_2,\ y_2=x_2-x_3,\ \dots,y_{n-1}=x_{n-1}-x_n,\ y_n=x_n,$$

па е

$$\vec{x}=(x_1-x_2)\vec{a}_1+(x_2-x_3)\vec{a}_2+\dots+(x_{n-1}-x_n)\vec{a}_{n-1}+x_n\vec{a}_n.$$

219. Нека

$$\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_m\vec{a}_m=0, \tag{1}$$

каде што $\alpha_i\neq 0$, за некое $i=1,2,\dots,m$, и

$$\vec{b}=x_1\vec{a}_1+\dots+x_m\vec{a}_m. \tag{2}$$

Ако $r\neq 0$ е реален број, тогаш е и

$$\vec{b}=x'_1\vec{a}_1+\dots+x'_m\vec{a}_m, \tag{3}$$

каде што $x'_i=x_i+r\alpha_i$. Бидејќи r може да биде било кој реален број $\neq 0$, постојат безброј многу записи на $\vec{b}$ од обликот (3).

220. Ставајќи $\vec{a}_j=(a_{1j},a_{2j},\dots,a_{nj})$, $j=1,2,\dots,n$, $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$, наместо системот равенки

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=b_i \tag{1}$$

можеме да ја разгледаме равенката

$$\vec{a}_1x_1+\vec{a}_2x_2+\dots+\vec{a}_nx_n=\vec{b} \tag{2}$$

1) Ако $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ се линеарно зависни и $\vec{b}$ е нивна линеарна комбинација, според задачата 219, постојат безброј многу n-торки $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ што ја задоволуваат (2), а поради тоа и (1). Ако $\vec{b}$ не е нивна линеарна комбинација, не постои n-торка $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ за која важи (2), па значи системот (1) нема решение.

2) Ако $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ се линерно независни, тогаш $\vec{b}$ е еднозначно определен со скаларите $x_1,x_2,\dots x_n$, т.е. постои само една

n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, таква што важи (2), а од тоа и (1).

221. Нека $\vec{b}_i$, $i=1,2,\ldots,m$ се линеарно независни вектори; тогаш од

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \vec{b}_i + \beta_i \vec{a}_i') = 0,$$

каде што $\vec{a}_i' = (0,\ldots,0, x_{i\,n+1}, \ldots, x_{ik})$, следува

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{b}_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i' = 0,$$

од каде што $\alpha_i = 0$ за $i=1,2,\ldots,m$, па значи векторите $\vec{a}_i$, $i=1,2,\ldots,m$, се линеарно независни.

Нека $\vec{a}_i$, $i=1,2,\ldots,m$ се линеарно зависни; тогаш постојат скалари β_i, $i=1,2,\ldots,m$, од кои барем еден е различен од нула, така што да е

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{a}_i = 0 \quad \text{т.е.} \quad \sum_{i=1}^{m} (\beta_i \vec{b}_i + \beta_i \vec{a}_i') = 0,$$

од каде што и

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{b}_i = 0,$$

па $\vec{b}_i$, $i=1,2,\ldots,m$ се линеарно зависни.

Примерот $\vec{a}_1 = (1,2,3)$, $\vec{a}_2 = (2,4,5)$, $\vec{b}_1 = (1,2)$, $\vec{b}_2 = (2,4)$ покажува дека векторите $\vec{a}_i$ можат да бидат линеарно независни, додека векторите $\vec{b}_i$ се линеарно зависни.

222. За пресликувањето h имаме:

$$h(x,y,z) = y(1,0,0) + x(0,1,0) + z(0,0,1),$$

па матрицата што му одговара е

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Слично за f, g и k наоѓаме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

соодветно.

223. Ако е

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

матрицата на пресликувањето $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ од R_3 во R_3, тогаш е

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_3 &= -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{aligned},$$

па за $\vec{a}_1 = (2,2,3)$ ќе имаме $y_1 = 3, y_2 = 0, y_3 = 10$, т.е. $\vec{a}_1 = (2,2,3) \to (3,0,10)$. Слично, $\vec{a}_2 \to (5,6,3)$, $\vec{a}_3 \to (3,3,4)$.

224. Ако е

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

бараната матрица на пресликувањето $f: (x_1,x_2,x_3) \to (y_1,y_2,y_3)$, тогаш е

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \,. \end{aligned}$$

Бидејќи: $(1,2,1) \to (4,2,5)$; $(2,0,1) \to (1,1,0)$; $(1,0,1) \to (0,0,1)$, добиваме

$$\begin{array}{lll} a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 4 & 2a_{11} + a_{13} = 1 & a_{11} + a_{13} = 0 \\ a_{21} + 2a_{22} + a_{23} = 2 & 2a_{21} + a_{23} = 1 & a_{21} + a_{23} = 0 \\ a_{31} + 2a_{32} + a_{33} = 5 & 2a_{31} + a_{33} = 0 & a_{31} + a_{33} = 0, \end{array}$$

од каде што $a_{11}=1, a_{12}=2, a_{13}=-1, a_{21}=1, a_{22}=1, a_{23}=-1, a_{31}=-1, a_{32}=2$ и $a_{33}=2$, па

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

225. а) $A+B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. б) $2A-3B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ -6 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

226. а) $AB = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -20 \\ -2 & -2 & -13 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -16 & -10 & -1 \\ 13 & 9 & 5 \\ -18 & -11 & 0 \end{bmatrix}$. б) $AB = \begin{bmatrix} 13 & 14 & 5 \\ 9 & 16 & 9 \end{bmatrix}$

в) $AB = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -11 & 3 \\ -1 & 9 & 18 & -6 \\ 8 & -7 & -1 & 9 \\ -2 & -2 & -8 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 10 & -26 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$.

г) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 12 & 18 & 12 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $BA = O$.

д) $AB = O$, $BA = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 28 \\ -9 & 12 & 42 \\ -3 & 4 & 14 \end{bmatrix}$, ѓ) $AB = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 39 & 37 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 39 & 37 \end{bmatrix}$.

227. Лесно се проверува дека е $AB = AC$. Од овој пример се гледа дека законот за кратење не важи, т.е. од $AB = AC$ не мора да следува $B = C$.

228. Имаме:

$$f(A) = 2A^2 - 5A + 3E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 5 & -10 \\ -10 & -5 & -5 \\ -5 & -10 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Слично добиваме

$$g(A) = \begin{bmatrix} 0 & 13 & -5 \\ 1 & 0 & 11 \\ 11 & -5 & 12 \end{bmatrix}.$$

229. Имаме:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^2-ad & -ab-bd \\ -ac-cd & -ad-d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

што требаше да се докаже.

230. Ако матрицата $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, ја задоволува равенката

$$x^2 - ax + b = 0,$$

ќе имаме $A^2 - aA + bE = 0$, или

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2x_3 - ax_1 + b & x_1x_2 + x_2x_4 - ax_2 \\ x_1x_3 + x_3x_4 - ax_3 & x_2x_3 + x_4^2 - ax_4 + b \end{bmatrix} = 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2x_3 - ax_1 + b &= 0 \\ x_1x_2 + x_2x_4 - ax_2 &= 0 \\ x_1x_3 + x_3x_4 - ax_3 &= 0 \\ x_2x_3 + x_4^2 - ax_4 + b &= 0, \end{aligned}$$

од каде што се добива дека матрицата A е од облик $\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ s & t_2 \end{bmatrix}$, каде t_1 и t_2 се корени на равенката $t^2 - at + b = 0$, или пак

$$\begin{bmatrix} x & y \\ \dfrac{ax - x^2 - b}{y} & a - x \end{bmatrix},$$

каде x и y се произволни и $y \neq 0$.

231. Нека ставиме $C = AB$ и $C = [c_{ij}]$. Од дефиницијата за производ на матрици имаме

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii}b_{ij},$$

бидејќи е $a_{ik} = 0$ за $i \neq k$, па $C = AB = [a_{ii}b_{ij}]$.

Слично за BA.

232. а) A е било која дијагонална матрица.

б) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$, каде a, b, c се произволни.

233. Секоја матрица A која комутира со матрицата $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ има облик $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, каде што a и b се произволни броеви.

Нека A_1 и A_2 се две такви матрици; тогаш имаме:

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2 \\ b_1a_2+a_1b_2 & b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_2a_1+b_2b_1 & a_2b_1+b_2a_1 \\ b_2a_1+a_2b_1 & b_2b_1+a_2a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = A_2A_1.$$

234. Било која матрица A, за која е $AD=DA$, е од облик

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x-\frac{3}{2}y \end{bmatrix},$$

каде што x и y се произволни броеви. Ставајќи $x=a+4b$, $y=2b$, добиваме

$$A = \begin{bmatrix} a+4b & 0 \\ 2b & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4b & 0 \\ 2b & b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = aE+bD,$$

што требаше да се докаже.

235. Нека A е дијагонална матрица, за која $a_{ii} \neq a_{jj}$ за $i \neq j$, $B = [b_{ij}]$ произволна матрица и нека $AB=BA$. Според задачата 231. имаме $AB = [a_{ii}b_{ij}]$, $BA = [b_{ij}a_{jj}]$. Од $a_{ii}b_{ij} = b_{ij}a_{jj}$ и $i \neq j$, добиваме $b_{ij}=0$. Значи матрицата B исто така е дијагонална.

236. Според резултатот од задачата 235., добиваме дека A мора да биде дијагонална матрица, бидејќи треба да е комутативна со секоја дијагонална матрица. Нека земеме сега $B=[b_{ij}]$ да е матрица определена со $b_{ij}=1$ за секои $i,j=1,2,\ldots,n$. Според задачата 231. имаме:

$$[a_{ii}] = [a_{ii}b_{ij}] = AB = BA = [b_{ij}a_{jj}] = [a_{jj}],$$

т.е. добиваме дека A има облик

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{bmatrix} = aE.$$

Значи, A треба да биде скаларна матрица.

237. б) Нека A и B се идемпотентни матрици, т.е. $A^2=0$, $B^2=0$, и $AB+BA=0$. Тогаш, имаме

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+BA+AB+B^2 = A+B,$$

што значи и $A+B$ е идемпотентна матрица.

Обратно, нека A, B, $A+B$ се идемпотентни матрици. Тогаш од $(A+B)^2 = A+B$, т.е. од $A+BA+AB+B = A+B$ добиваме $AB+BA = 0$.

238. а) Нека $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$, $A^2 = 0$, $A \neq 0$. Тогаш добиваме

$$x_1^2+x_2y_1=0, \quad y_1(x_1+y_2)=0, \quad x_2(x_1+y_2)=0, \quad x_2y_1+y_2^2=0.$$

За $y_1 = x_2 = 0$, се добива $A=0$, па значи мора да е $x_1+y_2=0$, во кој случај матрицата A има облик $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $bc=-a^2$.

б) Слично, како под а), ако се исклучи тривијалниот случај $\pm E$, тогаш матрицата A, за која е $A^2 = E$, има облик

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \quad a^2 = 1-bc.$$

239. а) $\begin{bmatrix} x^n & nx^{n-1} \\ 0 & x^n \end{bmatrix}$. б) $3^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

в) $\begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$. г) $\begin{bmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

240. Прво да покажеме дека $tr(AB) = tr(BA)$, каде што матриците A и B се $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. По дефиницијата за траг, имаме:

$$tr(AB)=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2})+$$
$$+\dots+(a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+\dots+a_{nn}b_{nn}) =$$
$$=(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\dots+b_{1n}a_{n1})+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\dots+b_{2n}a_{n2})+$$
$$+\dots+(b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\dots+b_{nn}a_{nn}) =$$
$$= tr(BA).$$

Потоа,

$$tr(AB)^m = tr((AB)^{m-1}(AB)) = tr(((AB)^{m-1}A)B) =$$
$$= tr(B(AB)^{m-1}A) = tr((BA)^{m-1}BA) = tr(BA)^m.$$

241. Бидејќи е $tr(AB-BA) = tr(AB)-tr(BA) = tr(AB)-tr(AB) = 0$, а $tr\,E = n$, следува дека матрици со особината $AB-BA=E$ не постојат.

242. Нека ставиме $C = \frac{1}{2}(A + \tilde{A})$; тогаш е

$$\tilde{C} = \frac{1}{2}\widetilde{(A + \tilde{A})} = \frac{1}{2}(\tilde{A} + \tilde{\tilde{A}}) = \frac{1}{2}(A + \tilde{A}) = C,$$

па C е симетрична матрица.

Слично за $D = \frac{1}{2}(A - \tilde{A})$.

Бидејќи е $A = \frac{1}{2}(A + \tilde{A}) + \frac{1}{2}(A - \tilde{A})$, следува дека секоја матрица е збир од една симетрична и една кососиметрична матрица.

243. а) Нека A и B се кососиметрични матрици, а AB симетрична матрица. Тогаш имаме:

$$AB = \widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A} = (-B)(-A) = BA.$$

Ако, пак, А и В се кососиметрични матрици, и $AB=BA$, тогаш имаме:

$$AB = (-\tilde{A})(-\tilde{B}) = \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A} = \widetilde{AB},$$

т.е. AB е симетрична матрица.

б) Нека А и В се кососиметрични матрици.

Ако AB е кососиметрична матрица, ќе имаме

$$AB = -(\widetilde{AB}) = -(\tilde{B}\tilde{A}) = -(-B)(-A) = -BA.$$

Ако, пак, е $AB=-BA$, ќе имаме

$$AB = (-\tilde{A})(-\tilde{B}) = \tilde{A}\tilde{B} = -\widetilde{BA},$$

т.е. AB е кососиметрична матрица.

244. а) $j=8$, $k=3$. б) $j=6$, $k=3$.

245. а) 17. б) $\frac{n(n-1)}{2}$. в) $\frac{n(3n+1)}{2}$.

246. -2; 0; $(a-d)(c-b)$; 1; 1; 22; 0; 1.

247. а) и б) Резултатите се непосредна последица од дефиницијата на детерминанта.

в) Ако првата редица се извади од преостанатите, се добива триаголна матрица.

г) Ако секоја редица се помножи со -2 и се додаде на наредната, потоа втората односно третата редица од добиената детерминанта се помножи со -3 и се додаде на третата односно четвртата, и на крајот ако третата редица од новодобиената детерминанта се помножи со -4 и се додаде на четвртата, се добива триаголна детерминанта.

д) Како и в).

ѓ) На првата редица да ѝ се додаде втората, а исто така третата и четвртата помножени со -1; ако во добиената детерминанта се стави $x=-a+b+c$, сите елементи на првата редица ќе бидат еднакви на нула. Слично и за другите три вредности.

248. а) Дадената детерминанта нека ја обележиме со D_n. Множејќи ја втората редица со -1 и додавајќи ја на првата, па потоа развивајќи ја добиената детерминанта по првата редица, се добива

$$D_n = (1-x)D_{n-1}.$$

Одовде,

$$D_3 = (1-x)D_2 = (1-x)^2,$$

па е

$$D_n = (1-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}.$$

б) Развивајќи ја дадената детерминанта по првата колона, се добива

$$a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

249. а) Ако на првата колона ги додадеме сите други, добиваме

$$D_n = \begin{vmatrix} na+x & a & \dots & a & a+x \\ na+x & a & \dots & a+x & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ na+x & a & \dots & a & a \end{vmatrix} = (na+x)\begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a & a+x \\ 1 & a & \dots & a+x & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a & \dots & a & a \end{vmatrix} .$$

Множејќи ја сега првата колона со $-a$, и додавајќи ја на сите други, се добива

$$D_n = (na+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 0 & \dots & x & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} ,$$

која е триаголна, па нејзината вредност е

$$D_n = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)} (na+x)x^{n-1}.$$

б) Ако ја помножиме првата колона со -1, и ја додадеме на сите други добиваме

$$\begin{vmatrix} x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & \dots & x & 2 & x \\ x & x & \dots & 3 & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & n & \dots & x & x & x \\ x & x & \dots & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-x \\ x & 0 & \dots & 0 & 2-x & 0 \\ x & 0 & \dots & 3-x & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & n-x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x(x-1)\cdots(x-n)$$

в) $(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n^{n-1}(n+1)$. Детерминантата се сведува на триаголна на следниот начин: од секоја редица ја одземаме наредната, почнувајќи со првата; потоа, од првите $n-1$ колони ја одземаме последната; на крајот, кон последната колона ги додаваме сите други, помножени со $\frac{1}{n}$.

250. а) Развивајќи ја по првата редица, добиваме

$$D_n = 7D_{n-1} - 12D_{n-2} ,$$

од каде што добиваме $D_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$.

б) Ако кон последната редица се додаде првата, се добива

$$D_n = (x+a)D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}.$$

Ако, пак, на првата редица се додаде последната редица, се добива

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1}.$$

Исклучувајќи го D_{n-1} од овие две равенства, се добива

$$D_n = \frac{1}{2}((x+a)^n + (x-a)^n).$$

в) Ако од секоја редица ја одземеме претходната, лесно се добива равенството

$$D_{n+1} = n!(x-1)D_n,$$

од каде што

$$D_{n+1} = n!(n-1)!\cdots 2!1!(x-1)^n.$$

251. Нека $\tilde{A} = -A$. Тогаш

$$\det A = \det \tilde{A} = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det A = -\det A,$$

од каде што $\det A = 0$.

252.
$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & -13 \\ -10 & 10 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

253.
а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. в) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. г) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

д) Имаме:

$$\det A = 1, \quad A_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ -1, & i=j+1 \\ 0, & i\neq j, j+1 \end{cases},$$

па е

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ѓ) Имаме:

$$\det A = 2^n, \quad A_{ij} = \begin{cases} 2^{n-1}, & i=j \\ 0, & i>j \\ 2^{n-j+i}, & i<j \end{cases},$$

па е

$$A^{-1} = \frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-2} & \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 2^{n-1} & \ldots & 2^2 & 2 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

254. а) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. в) $\begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$. г) $\begin{bmatrix} a & b \\ 2(1-a) & 1-2b \end{bmatrix}$,

каде што a, b се произволни реални броеви.

д) нема решение.

f) Имаме:

$$X = A^{-1}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\end{bmatrix},$$

каде што A^{-1} е најдена во 253.f).

255. б) Имаме:

$$(AB)(\widetilde{AB}) = (AB)(\widetilde{B}\widetilde{A}) = A(B\widetilde{B})\widetilde{A} = A\widetilde{A} = E,$$

т.е. AB е ортогонална матрица.

в) Бидејќи A е ортогонална, $A\widetilde{A} = E$, па $\det(A\widetilde{A}) = 1$, т.е. $\det A\cdot\det\widetilde{A} = 1$. Користејќи го условот $\det A = \det\widetilde{A}$, добиваме $\det A = \pm 1$.

256. Ако е $(A^{-1}BA)^k = A^{-1}B^kA$, тогаш

$$(A^{-1}BA)^{k+1} = (A^{-1}BA)^k(A^{-1}BA) = A^{-1}B^kAA^{-1}BA = A^{-1}B^{k+1}A,$$

а бидејќи за $k=1$ равенството е точно, индуктивниот доказ е завршен.

257. Бидејќи е

$$(E-A)(E+A+A^2+\ \dots\ +A^{k-1}) = E,$$

следува дека тврдењето е точно.

258. Нека $AB = BA$; тогаш $B^{-1}AB = A$, па $B^{-1}A = AB^{-1}$. Оттука имаме: $A^{-1}B^{-1}A = B^{-1}$, па $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Од последното следува $AB=BA$.

259. Дадениот систем е еквивалентен со матричната равенка $AX=0$, каде што

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ . & . & .\\ . & . & .\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix}x_1\\ .\\ .\\ x_n\end{bmatrix}.$$

Нека системот има нетривијално решение $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогаш е $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ \dots\ + x_n\vec{a}_n = 0$, т.е. векторите $\vec{a}_i$, $i=1,2,\dots,n$, формирани од колоните на матрицата A, се линеарно зависни, па според тоа имаме $\det A=0$.

Обратно, нека $\det A=0$. Тогаш векторите $\vec{a}_i$, $i=1,2,\dots,n$, се линеарно зависни, па постојат броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$, од кои барем еден не е нула, такви што $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ \dots\ + x_n\vec{a}_n = 0$, т.е. системот има нетривијално решение.

260. а) $\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$. б) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}9\\ 10\\ -10\\ -5\end{bmatrix}$.

261. а) Координатите на точките (x_i, y_i), $i=1,2,3$ ја задоволуваат равенката на кругот

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

па е

$$x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0$$
$$x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0$$
$$x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0.$$

Овој систем од четири равенки по "непознатите" $1, a, b, c$ е хомоген а една е различна од нула, па е

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

што претставува равенка на круг низ три точки.

б)
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

262. а) 3. б) 3. в) 2. г) 5.

263. а) Нема решение.

б) Бидејќи е

$\Delta = (a-1)^2(a+2)$, $\Delta_x = -(a-1)^2(a+1)$, $\Delta_y = (a-1)^2$, $\Delta_z = (a-1)^2(a+1)^2$,
добиваме дека:

1) за $a \neq -2$ и $a \neq 1$, решение на системот е

$$x = -\frac{a+1}{a+2}, \quad y = \frac{1}{a+2}, \quad = \frac{(a+1)}{a+2};$$

2) за $a=-2$, системот нема решение;

3) за $a=1$ системот има безброј многу решенија.

в) Бидејќи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a+b & -c \\ -a & b+c & b+c \\ c+a & -b & c+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & -(a+b+c) \\ -a & a+b+c & a+b+c \\ c+a & -a-b-c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b & 0 & -1 \\ -a & 1 & 1 \\ c+a & -1 & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)^3,$$

за $a+b+c \neq 0$ системот има единствено решение

$$x = \frac{c-b}{a+b+c}, \quad y = \frac{a-c}{a+b+c}, \quad = \frac{b-a}{a+b+c},$$

а за $a+b+c=0$, системот е неопределен.

264. а) $x_1 = 1+a$, $x_2 = a = x_4$, $x_3 = 0$, $x_5 = -2(1+a)$.

б) $x_1 = 0 = x_3$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_4 = -\frac{1}{5}$.

265. n-те прави линии $a_i x + b_i y + c_i = 0$ $(i=1,2,\dots,n)$ минуваат низ една точка ако рангот на матрицата и проширената матрица на системот

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + c_n &= 0 \end{aligned}$$

е 2, или 1, во кој случај сите прави се исти.

n- рамнини минуваат низ една точка, ако рангот на матрицата и проширената матрица на системот, формиран од равенките на рамнините, е 3, а низ две точки, ако рангот е 2 или 1.

266. Да ја најдеме инверзната матрица на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Карактеристичниот полином на матрицата A е $\det(xE-A)=(x-2)^3(x+2)$, а минималниот полином x^2-4, па затоа имаме $A^2-4E = 0$. Множејќи ја оваа равенка со A^{-1} добиваме $A^{-1} = \frac{1}{4} A$.

Слично за другите матрици.

267. Ако A е скаларна матрица.

268. Нека $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Од $\det(A)^k = (\det A)^k = 0$, следува $\det A = 0$. Карактеристичниот полином на матрицата A е $\det(xE-A) = x^2 - x(a+d)$, бидејќи е $\det A = ad-bc = 0$. Но, тогаш е

$$A^2 = (a+d)A, \quad A^3 = A^2 A = (a+d)^2 A, \dots, A^k = (a+d)^{k-1}A.$$

Од $A \neq 0$, следува $a+d=0$, па и $A^2 = 0$.

269. а) x^2-5x-2. б) x^2-x. в) x^2-1.

270. Нека е $xE-A = D$. Тогаш имаме: $xE-C^{-1}AC = C^{-1}DC$ и

$$\det(C^{-1}DC) = \det C^{-1} \det D \det C = \det C^{-1} \det C \det D =$$
$$= \det E \det D = \det D .$$

271. Матрицата A е корен на полиномот x^k, па значи x^k се дели со минималниот полином $g(x)$ од матрицата A. Тоа е можно само ако има облик x^s, каде што $s \leqslant \min\{n,k\}$. Од тоа следува $A^s = 0$, па значи и $A^n = A^s A^{n-s} = 0$.

VII. АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ

272. Релацијата α не покажува ниедна од особините: рефлексивност, симетричност и транзитивност; релацијата γ е транзитивна, β е симетрична, а δ е релација за еквивалентност, со две класи на еквивалентни елементи: $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$.

273. Ако е $a\alpha b$ и $b\alpha c$, тогаш за $c=a$ имаме $a\bar{\alpha}c$, па α не е транзитивна.

За секоја права a имаме $a=a$, т.е. $a\beta a$, па β е рефлексивна релација; ако a не се сече со b, тогаш и b не се сече со a, т.е. $a\beta b \Rightarrow b\beta a$; на крајот, ако a не се сече со b, а b не се сече со c, тогаш или a не се сече со c, или $a=c$, па β е транзитивна релација. Значи, β е релација за еквивалентност.

274. а) Лесно се покажува дека α е релација за еквивалентност. Со α, N се разбива на две класи еквивалентни елементи и тоа, едната е множеството од сите парни, а другата-од сите непарни броеви, т.е. $N = \{2n \mid n\in N\}\cup\{2n-1 \mid n\in N\}$.

б) Лесно се покажува дека β е рефлексивна и симетрична релација.

Нека е $a\beta b$ и $b\beta c$, т.е. $ab=m^2$, $bc=n^2$; тогаш $a=\frac{m^2}{b}$, $c=\frac{n^2}{b}$, па $ac = \frac{m^2}{b}\frac{n^2}{b} = (\frac{mn}{b})^2$, што значи $a\beta c$, т.е. β е транзитивна релација.

Според тоа, β е релација за еквивалентност.

Класите на еквивалентни елементи се:

$$\{m^2 \mid m\in N\},\ \{2^{2k-1} \mid k\in N\},\ \{3^{2k-1} \mid k\in N\},\dots,\{n^{2k-1} \mid k,n\in N, n\neq m^2\},\dots$$

в) γ не е релација за еквивалентност, бидејќи не е рефлексивна; γ е симетрична и транзитивна релација.

г) Лесно се покажува дека δ е рефлексивна и симетрична.

Нека е $a\delta b$ и $b\delta c$; тогаш $|a-b|=7k_1$, $|b-c|=7k_2$, т.е. $a-b=\pm 7k_1$, $b-c=\pm 7k_2$, од каде што $a-c=a-b+b-c=\pm 7(k_1+k_2)$, т.е. $|a-c|=7k$, па е $a\delta c$. Значи, δ е и транзитивна релација, па е релација за еквивалентност.

Класите на еквивалентни елементи се:

$$\{7n \mid n\in N\},\ \{7n+1 \mid n\in N^0\},\ \dots,\ \{7n+6 \mid n\in N^0\}.$$

д) ρ е рефлексивна и симетрична релација, но не и транзитивна, па значи, не е релација за еквивалентност.

275. ρ е релација за еквивалентност.

276. Од $f(x)=f(x)$ следува $x\alpha x$ за секое $x\in X$, што значи релацијата α е рефлексивна. Нека е $x_1\alpha x_2$; тоа значи дека $f(x_1)=f(x_2)$, но тогаш е и $f(x_2)=f(x_1)$, т.е. $x_2\alpha x_1$, па значи α е симетрична релација. На крајот, нека е $x_1\alpha x_2$ и $x_2\alpha x_3$. Од $f(x_1)=f(x_2)$ и $f(x_2)=f(x_3)$ следува $f(x_1)=f(x_3)$, што значи $x_1\alpha x_3$, т.е. α е транзитивна релација. Од сето тоа следува дека α е релација за еквивалентност.

277. Од рефлексивноста и транзитивноста на α непосредно следува рефлексивност и транзитивноот на β. Потоа,

$$x\beta y \Leftrightarrow x\alpha y\wedge y\alpha x \Leftrightarrow y\alpha x\wedge x\alpha y \Leftrightarrow y\beta x,$$

па ако е $x\beta y$, тогаш е и $y\beta x$, т.е. β е симетрична, што значи β е релација за еквивалентност.

278. Од дадената дефиниција следува дека $<$ е нерефлексивна. Нека $x<y$ и $y<z$, т.е. $x|y$, $x\neq y$ и $y|z$, $y\neq z$. Тогаш имаме $x|z$. Треба да покажеме дека $x\neq z$. Ако би било $x=z$, би имале $x|y$ и $y|x$, што е можно само за $x=y$. Значи $x\neq z$, а со тоа транзитивноста е докажана.

Во множеството од целите броеви $<$ не е транзитивна.

279. а) Нека α и β се рефлексивни релации. Од $(a,a)\in\alpha$ и $(a,a)\in\beta$ следува дека $(a,a)\in\alpha\cap\beta$, за секое $a\in M$, т.е. $\alpha\cap\beta$ исто така е рефлексивна релација.

б) Нека α и β се симетрични релации. Од $(a,b)\in\alpha\Rightarrow(b,a)\in\alpha$ и $(a,b)\in\beta\Rightarrow(b,a)\in\beta$ за било кои $a,b\in M$, следува дека

$$(a,b)\in\alpha\cap\beta\Rightarrow(b,a)\in\alpha\cap\beta.$$

Слично под в), г) и д).

Релациите $\alpha=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ и $\beta=\{(a,c),(c,d),(a,d)\}$ се транзитивни, но релацијата $\alpha\cup\beta=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d)\}$ не е транзитивна, бидејќи, на пример $(b,c),(c,d)\in\alpha\cup\beta$, но $(b,d)\notin\alpha\cup\beta$.

280. а) 2^6. б) 2^3. в) 4. г) 19.

281. Нека M е множество со n елементи и нека $\Delta=\{(x,x)\mid x\in M\}$. Множеството $M\times M$ има n^2 елемени, а множеството $(M\times M)\setminus\Delta$ има n^2-n елементи. Секоја рефлексивна релација α претставува унија од Δ и елемент од $P((M\times M)\setminus\Delta)$, а бидејќи бројот на елементи од $P((M\times M)\setminus\Delta)$ е 2^{n^2-n}, следува дека во M има 2^{n^2-n} рефлексивни релации.

Нека $M=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ е множество со n елементи, а $M\times M$ нека го претставиме со шемата:

$$\begin{array}{l}(a_1,a_1),\ (a_1,a_2),\ \dots\ ,\ (a_1,a_n)\\ (a_2,a_1),\ (a_2,a_2),\ \dots\ ,\ (a_2,a_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (a_n,a_1),\ (a_n,a_2),\ \dots\ ,\ (a_n,a_n)\end{array}$$

Ако α е симетрична релација во М, од $(a_i,a_j)\in\alpha$ следува $(a_j,a_i)\in\alpha$, па можеме да го разгледаме множеството $S = \{(a_i,a_j) \mid i \leqslant j\}$. Бројот на елементите од S е $\frac{n(n+1)}{2}$ (кое се гледа од шемата), а бројот на елементите од P(S) изнесува $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, па тоа е и бројот на симетричните релации во М.

282. Бројот $f(n)$ од релации на еквивалентност, кои можат да се дефинираат во множество со n елементи, е еднаков на бројот од различните разложувања на множеството на непразни дисјунктни подмножества, чија унија е тоа множество.

За $n=1$ множеството $S=\{a_1\}$ има само едно разложување, па $f(1)=1$. За $n=2$ множеството $S=\{a_1,a_2\}$ има разложувања $\{a_1\},\{a_2\}$, и $\{a_1,a_2\}$, па $f(2)=2$. Истиот резултат го добиваме и од даденото равенство.

Да претпоставиме дека тоа е точно за $n=1,2,\dots,k$. Ако

$$S = \{a,a_1,a_2,\dots,a_k\}$$

е било кое множество со $k+1$ елемент, тогаш спомнатите разложувања на множеството S, во кои во исто подмножество се наоѓа a и уште $\gamma(0\leqslant\gamma\leqslant k)$ елементи од S, според индуктивната претпоставка, ги има

$$\binom{k}{\gamma}f(k-\gamma) = \binom{k}{k-\gamma}f(k-\gamma).$$

Земајќи $\gamma=0,1,2,\dots,k$ ги добиваме сите различни разложувања на S на непразни дисјунктни подмножества, чија унија е множеството S. Затоа имаме

$$f(k+1) = \sum_{\gamma=0}^{k}\binom{k}{\gamma}f(\gamma), \qquad f(0) = 1,$$

па равенството е докажано.

283. а), б) и г) Комутативен, асоцијативен, без неутрален елемент.

в) Некомутативен, неасоцијативен, без неутрален елемент.

284. а) Q (•) е комутативен групоид.

б) Q (o) е комутативен групоид.

в) Q (Δ) е комутативен групоид.

г) Q (□) е комутативна полугрупа со неутрален елемент.

285. $S(*)$ е комутативен групоид со единица, но не е полугрупа, бидејќи, на пример: $(0,7*0,6)*0,8 = 0,3$, а $0,7*(0,6*0,8) = 0,4$.

286. а) Ако шемата е симетрична по однос на "главната" дијагонала.

б) Ако редицата и колоната на таков елемент се исти со редицата односно колоната со кои е определена шемата.

Со првата и втората шема се определени комутативни групоиди со неутрален елемент; во првиот групоид неутрален елемент е a, а во вториот b. Групоидот определен со третата шема не е комутативен и нема неутрален елемент.

287. Во $S(\cup)$ неутрален елемент е $\emptyset$, во $S(\cap)$ е M, а во $S(\setminus)$ нема неутрален елемент, ако $M \neq \emptyset$.

288. Од

$$x*(y*z) = x = x*y = (x*y)*z\,,$$
$$x\circ(y\circ z) = y\circ z = z = (x\circ y)\circ z$$

следува дека $S(*)$ и $S(\circ)$ се полугрупи. Ако S има повеќе од еден елемент, тогаш за $x \neq y$ имаме:

$$x*y = x \neq y = y*x,$$
$$x\circ y = y \neq x = y\circ x,$$

па тие полугрупи не се комутативни. Неутрални елементи немаат.

289. а) Ако $G(\cdot)$ е комутативен, тогаш $x*y = yx = xy = y*x$, па и групоидот $G(*)$ е комутативен.

Слично под б) и в).

290. Нека e е неутралниот елемент на групоидот G. Тогаш имаме:

$$x(yz) = (xe)(yz) = (xy)(ez) = (xy)z$$

и

$$xy = (ex)(ye) = (ey)(xe) = yx,$$

т.е. G е комутативна полугрупа.

291. Нека групоидите G_1 и G_2 се, на пример, комутативни. Тогаш е:

$$(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2)=(y_1x_1,y_2x_2)=(y_1,y_2)(x_1,x_2),$$

т.е. и групоидот G е комутативен.

Слично, ако G_1 и G_2 се полугрупи, односно имаат нетрални елементи, се добива дека и групоидот G ја има таа особина.

Да претпоставиме, сега, на пример, дека групоидот G има неутрален елемент $e=(e_1,e_2)$. Тогаш имаме:

$$(x_1e_1,x_2e_2)=(x_1,x_2)(e_1,e_2)=(x_1,x_2)=(e_1,e_2)(x_1,x_2)=(e_1x_1,e_2x_2),$$

т.е.

$$x_1 e_1 = x_1 = e_1 x_1, \quad x_2 e_2 = x_2 = e_2 x_2,$$

за секои $x_1 \in G$, $x_2 \in G$, па значи e_1 е неутрален елемент во G_1, а e_2 во G_2.

292. Нека групоидот $G(*)$ е асоцијативен, а A, B и C се било кои подмножества од G. Од асоцијативноста на $G(*)$ следува

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

за било кои $a \in A, b \in B$ и $c \in C$, а тоа значи

$$(A*B)*C = A*(B*C), \qquad (1)$$

т.е. групоидот $S(*)$ е асоцијативен.

Обратно, ако групоидот $S(*)$ е асоцијативен, т.е. равенството (1) важи за било кои $A,B,C \in S$, тогаш имаме специјално и

$$\{a*(b*c)\} = \{a\}*(\{b\}*\{c\}) = (\{a\}*\{b\})*\{c\} = \{(a*b)*c\},$$

за било кои $a,b,c \in G$, што значи и групоидот $G(*)$ е асоцијативен.

Слично за комутативност.

Нека групоидот $G(*)$ има неутрален елемент e. Бидејќи за било кое $x \in G$ важи $x*e = e*x = x$, ќе имаме $a*e = e*a = a$, за секое $a \in A$, каде што $\in S$. Ако $E = \{e\}$, тогаш од последното равенство имаме

$$A*E = E*A = A \qquad (2)$$

за секое $A \in S$ т.е. E е неутрален елемент во $S(*)$.

Обратно, нека групоидот $S(*)$ има неутрален елемент E. Тоа значи дека за било кое $A \in S$ важи (2), па и

$$\{x\}*E = E*\{x\} = \{x\},$$

т.е.

$$\{x\}*\{e\} = \{e\}*\{x\} = \{x\},$$

за било кое $e \in E$. Земајќи $x=e' \in E$, имаме

$$\{e\} = \{e'\}*\{e\} = \{e'\},$$

што значи E е едноелементно множество. Од ова следува дека, ако $E = \{e\}$, тогаш e е неутрален елемент за групоидот $G(*)$.

293. Операцијата е асоцијативна, но не е комутативна.

294. Операцијата е само комутативна.

295. За да биде $M(*)$ групоид, при $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ треба да е $(a,b,c)*(x,y,z) \neq (0,0,0)$, т.е. системот

$$ax+bz+cy = 0, \quad az+by+cx = 0, \quad ay+bx+cz = 0 \qquad (1)$$

да нема нетривијални решенија. Но детерминантата на системот е

$$\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3,$$

која, на пример, за (1,1,1) е нула, па значи $M(*)$ не е групоид.

296. Од

$$x(\alpha\circ\beta)\circ\gamma y \Longleftrightarrow (\exists z_2 \in M)\, x\alpha\circ\beta z_2 \wedge z_2\gamma y \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\exists z_1, z_2 \in M)(x\alpha z_1 \wedge z_1\beta z_2) \wedge z_2\gamma y \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\exists z_1 \in M)\, x\alpha z_1 \wedge z_1(\beta\circ\gamma)y \Longleftrightarrow x\alpha\circ(\beta\circ\gamma)y,$$

следува дека

$$\alpha\circ(\beta\circ\gamma) = (\alpha\circ\beta)\circ\gamma ,$$

т.е. T е полугрупа. Релацијата $\Delta = \{(x,x) \mid x \in M\}$ го задоволува условот $\alpha\circ\Delta = \Delta\circ\alpha = \alpha$, па таа е единичен елемент во T.

297. а) Изоморфни се. Изоморфизмот е остварен со пресликувањето $a \to x,\ b \to y,\ c \to z$.

б) Не се изоморфни. в) Изоморфни се.

299. Не е група, зашто, на пример, нема неутрален елемент; не е дури ни полугрупа, зашто не важи асоцијативниот закон, како што покажува следниот пример: $(be)c = bc = e$, а $b(ec) = bb = c$.

300. Пермутациите во множеството $M = \{1,2,3\}$ се:

$$e = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad a_1 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad a_2 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$
$$a_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad a_4 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad a_5 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},$$

а мултипликативната шема на групата $M!$ е

	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	e	a_4	a_5	a_3
a_2	a_2	e	a_1	a_5	a_3	a_4
a_3	a_3	a_5	a_4	e	a_2	a_1
a_4	a_4	a_3	a_5	a_1	e	a_2
a_5	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	e .

301. Бидејќи

$$\frac{1+2m_1}{1+2n_1}\,\frac{1+2m_2}{1+2n_2} = \frac{1+2(m_1+m_2+2m_1m_2)}{1+2(n_1+n_2+2n_1n_2)} = \frac{1+2m}{1+2n}$$

$G(\cdot)$ е групоид. Елементот $1 = \dfrac{1+2\cdot 0}{1+2\cdot 0}$ е единица во $G(\cdot)$. Понатаму, за $\dfrac{1+2m}{1+2n} \in G$, елементот $\dfrac{1+2n}{1+2m} \in G$ е инверзен, а бидејќи важат асоцијативниот и комутативниот закон (зашто се работи за реалните броеви), $G(\cdot)$ е комутативна група.

302. Нека се $a,b \in R_m$; тогаш од $(a,m)=1$ и $(b,m)=1$ следува $(ab,m)=1$, па значи $R_m(\cdot)$ е полугрупа со единица.

Нека $a\in R_m$; од $(a,m)=1$ следува

$$1 = ax + my, \tag{1}$$

па, ако x го поделиме со m, добиваме $x=mq+b$, $0<b<m$ и $(b,m)=1$. Заменувајќи го ова во (1) добиваме

$$1 = ab + m(aq+y)$$

или

$$ab-1 = -m(aq+y),$$

т.е. $ab\equiv 1 \pmod m$, што значи $a^{-1}=b$.

Со тоа покажавме дека $R_m(\cdot)$ е група.

303. Неравенствата

$$-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1,$$

за $x,y\in(-1,1)$, се еквивалентни со неравенствата

$$x(1+y) > -(1+y) \quad и \quad x(1-y) < 1-y,$$

кои се точни за било кои $x,y\in(-1,1)$. Значи, ако $x,y\in(-1,1)$, тогаш и $xoy = \frac{x+y}{1+xy}\in(-1,1)$. Понатаму,

$$(xoy)oz = \frac{x+y}{1+xy}\ o\ z = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz+x(y+z)} =$$

$$= \frac{x+\frac{y+z}{1+y}}{1+x\frac{y+z}{1+yz}} = xo\ \frac{y+z}{1+yz} = xo(yoz),$$

т.е. операцијата o е асоцијативна. Елементот $0\in G$ е неутрален, а ако $x\in(-1,1)$, тогаш $-x\in(-1,1)$ и $xo(-x)=0$.

Комутативниот закон очигледно важи, па $G(o)$ е комутативна група.

304. Доволно е да испитаме дали производот на два елемента од G е пак во G и дали за секој елемент од G и инверзниот е во G.

Нека $x=a_1+b_1\sqrt{p}$ и $y=a_2+b_2\sqrt{p}$ се било кои два елемента од G; тогаш

$$xy = (a_1a_2+pb_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{p} = a+b\sqrt{p}$$

и $a^2+b^2\neq 0$, што лесно се проверува. Значи, $xy\in G$.

Нека $a+b\sqrt{p}\in G$; тогаш равенката

$$(a+b\sqrt{p})(x+y\sqrt{p}) = 1$$

се сведува на системот

$$ax+byp = 1, \quad bx+ay = 0,$$

кој, поради $\begin{vmatrix} a & bp \\ b & a \end{vmatrix} = a^2-b^2p \neq 0$, има единствено решение

$$x = \frac{a}{a^2-b^2p}\,, \quad y = \frac{b}{b^2p-a^2}\,.$$

Значи, за секој елемент $a+b\sqrt{p}\in G$ постои инверзен

$$\frac{a}{a^2-b^2p} + \frac{b}{b^2p-a^2}\sqrt{p}\in G.$$

Значи, $G(\cdot)$ е група.

305. Нека $z_1, z_2 \in G$, т.е. $|z_1| = |z_2| = 1$. Бидејќи е

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1,$$

$z_1 z_2 \in G$. Потоа, $1\in G$, а ако $z\in G$, тогаш и $\bar{z}\in G$ и $z\bar{z} = |z|^2 = 1$. Множеството G е подмножество од C, па во него се исполнети асоцијативниот и комутативниот закон.

Значи, $G(\cdot)$ е комутативна група.

306. Нека ϵ е примитивен корен на единицата; тогаш множеството од сите n-ти корени на единицата е

$$\{\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{n-1}, \epsilon^n=1\} = G.$$

Множеството G е групоид во однос на операцијата множење, дефинирана со $\epsilon^i \epsilon^j = \epsilon^{i+j} = \epsilon^k$ $(i,j<n)$, каде што k е остатокот од делењето на $i+j$ со n.

Асоцијативниот и комутативниот закон важат, единичен елемент во G е 1, а за било кој ϵ^i постои ϵ^j, така што $i+j=n$, т.е. $\epsilon^i \epsilon^j = 1$.

Значи, G е комутативна група по однос на операцијата множење.

307. Нека $z_1, z_2 \in G$; тоа значи дека постојат m, n, такви што z_1 припаѓа на $G_m(p)$ и z_2 припаѓа на $G_n(p)$, т.е. $z_1^{p^m} = 1$ и $z_2^{p^n} = 1$. Имаме:

$$(z_1 z_2)^{p^{m+n}} = (z_1 z_2)^{p^m p^n} = (z_1^{p^m})^{p^n}(z_2^{p^n})^{p^m} = 1,$$

т.е. $z_1 z_2 \in G_{m+n}(p)$, па $z_1 z_2 \in G$.

Потоа, нека $z\in G$ и нека z^{-1} е инверзен елемент на z во мултипликативната група од комплексните броеви различни од нула. Бидејќи е

$$(z^{-1})^{p^n} = (z^{p^n})^{-1} = 1 \quad \text{и} \quad zz^{-1} = 1,$$

следува дека z^{-1} е инверзен елемент на z и во G. Единичен елемент во G е 1, асоцијативниот закон важи, па G е група.

308. Нека $x_1, x_2 \in S$; значи постојат природни броеви m и n, такви што $x_1^m=1$ и $x_2^n=1$. Но, тогаш е $(x_1x_2)^{mn}=(x_1^m)^n(x_2^n)^m=1$, па $x_1x_2\in S$.

Јасно, $1\in S$ и важи асоцијативниот закон. Ако $x\in S$, тогаш $x^n=1$ за некое n, па и $(x^{-1})^n=(x^n)^{-1}=1$ за истото n, $x^{-1}\in S$ и $xx^{-1}=1$ каде што x^{-1} е инверзен елемент на x во мултипликативната група на комплексните броеви различни од нула.

Значи, $S(\cdot)$ е група.

309. Нека $f_1, f_2\in G$, каде што

$$f_1(x)=\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1},\qquad f_2(x)=\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}.$$

Тогаш имаме

$$(f_2f_1)(x)=f_2(f_1(x))=\frac{(a_1a_2+c_1b_2)x+(a_2b_1+b_2d_1)}{(a_1c_2+c_1d_2)x+(b_1c_2+d_1d_2)},$$

а бидејќи е

$$\begin{vmatrix} a_1a_2+c_1b_2 & a_2b_1+b_2d_1\\ a_1c_2+c_1d_2 & b_1c_2+d_1d_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{vmatrix}=1,$$

следува дека $f_2f_1\in G$.

Неутрален елемент е трансформацијата $e(x)=x$, која се добива за $a=1=d$, $b=0=c$.

За произволен елемент $f\in G$, каде што $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, трансформацијата $g(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$, која е елемент на G, е инверзна.

Бидејќи асоцијативниот закон важи за произволни пресликувања, G по однос на операцијата состав на пресликувања е група.

310. Нека $f_1, f_2\in G$, т.е. f_1, f_2 се обратноеднозначни пресликувања од A на A и $f_1(S)=S=f_2(S)$. Тогаш имаме:

$$x\in S\Rightarrow f_2(x)\in S\Rightarrow f_1(f_2(x))\in S\Rightarrow f_1f_2\in G.$$

Јасно е дека $e_A\in G$. Ако $f\in G$ и $x\in S$, тогаш постои $y\in S$, така што $x=f(y)$, па $f^{-1}(x)=f^{-1}(f(y))=y\in S$, т.е. $f^{-1}\in G$.

Бидејќи асоцијативниот закон важи, G е група по однос на операцијата множење на пресликувања.

311. Дека множеството $\{E,A,B,C,D,F\}$ е група по однос на операцијата множење на матрици, се гледа од шемата:

·	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	C	B	F	D
B	B	D	E	F	A	C
C	C	F	A	D	E	B
D	D	B	F	E	C	A
F	F	C	D	A	B	E

Имено, од шемата се гледа дека E е неутрален елемент и дека $A^{-1}=A$, $B^{-1}=B$, $C^{-1}=D$, $D^{-1}=C$, $F^{-1}=F$, а асоцијативниот закон важи за било кои матрици.

312. Ако A и B се несингуларни матрици од ред n, т.е. $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, тогаш производот AB секогаш постои и

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0,$$

т.е. AB е несингуларна матрица. Матрицата $E = [e_{ij}]$, $e_{ii}=1$, $e_{ij}=0$ за $i\neq j$, е неутрален елемент по однос множењето на матрици, а инверзна на A е матрицата $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A$. Асоцијативниот закон важи, па множеството несингуларни матрици од ред n е група по однос на операцијата множење на матрици.

313. Множеството G, по однос на операцијата множење на матрици, не е група, бидејќи, на пример, за n=3 од задачата 311. имаме $A^2 = E$, $B^2=E$, но $(AB)^2 = C^2 = D \neq E$.

314. Од асоцијативноста и комутативноста на $G(+)$ следува дека $G_n(+)$ е комутативна полугрупа. Елементот $(0,\ldots,0)\in G_n$ е неутрален елемент, а ако $(x_1,\ldots,x_n)\in G_n$, тогаш $(-x_1,\ldots,-x_n)\in G_n$ и е спротивен на $(x_1,\ldots,x_n)$. Значи, $G_n(+)$ е комутативна група.

315. Комутативноста и асоцијативноста на G се покажува исто како и во задачата 291. Неутрален елемент во G е $(e_1,\ldots,e_k)$, каде што e_i е неутралниот елемент во G_i, $i=1,2,\ldots,k$. Ако $(x_1,\ldots,x_k)$ е било кој елемент од G, од $x_i\in G_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$, следува $x_i^{-1}\in G_i$, па $(x_1^{-1},\ldots,x_k^{-1})\in G$ и е инверзен на елементот $(x_1,\ldots,x_k)$. Значи, G е комутативна група.

Обратно, нека G е комутативна група. Тогаш, од

$$(x_1,\ldots,x_k)(y_1,\ldots,y_k) = (y_1,\ldots,y_k)(x_1,\ldots,x_k),$$

т.е.

$$(x_1y_1,\ldots,x_ky_k) = (y_1x_1,\ldots,y_kx_k)$$

следува $x_iy_i = y_ix_i$, па значи и групата G_i, $i=1,2,\ldots,k$, е комутативна.

316. Ако ставиме $G_1 = G_2 = \ldots = G_k$ и ако $k=n$, тогаш задачата 315 се сведува на задачата 314.

317. Дека тврдењата се точни, следува од шемите:

а)

	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

,

б)

	1	−1	i	−i
1	1	−1	i	−i
−1	−1	1	−i	i
i	i	−i	−1	1
−i	−i	i	1	−1

319. Од задачата 300 следува дека нетривијални подгрупи се:

$\{e,a_1,a_2\}$, $\{e,a_3\}$, $\{e,a_4\}$ и $\{e,a_5\}$.

320. Ако $c_1,c_2\in C$, ќе имаме:

$$(c_1c_2^{-1})x = c_1(c_2^{-1}x) = c_1(x^{-1}c_2)^{-1} = c_1(c_2x^{-1})^{-1} =$$
$$= c_1(xc_2^{-1}) = (c_1x)c_2^{-1} = x(c_1c_2^{-1}),$$

за секое $x\in G$, т.е. C е подгрупа од G.

C се совпаѓа со G ако, и само ако, групата G е комутативна.

321. Нека $x,y\in C_a$, т.е. $ax=xa$, $ay=ya$; тогаш имаме

$$a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a,$$

т.е. $xy\in C_a$. Ако e е единицата на групата G, тогаш $ex = xe$ за секој $x\in G$, па $e\in C_a$.

Нека $x\in C_a$ и нека x^{-1} е инверзниот елемент на x во G. Тогаш, од $ax = xa$ следува $x^{-1}a^{-1} = a^{-1}x^{-1}$ и множејќи го последново равенство, прво одлево, а потоа одесно, со a, добиваме $ax^{-1} = x^{-1}a$, т.е. $x^{-1}\in C_a$.

Значи C_a е подгрупа од групата G.

C_a се совпаѓа со G, само кога $a\in C$, каде што C е центарот на групата G. Бидејќи при $G\neq\{e\}$ и $a\neq e$, C_a ги содржи барем елементите e,a,a^{-1}, следува дека $C_a\neq\{e\}$. Значи, $C_a=\{e\}$ само кога $G=\{e\}$.

Користејќи ги ознаките од задачата 300, имаме $a=a_3$, па од шемата се гледа дека $C_a=\{e,a\}$.

322. Нека G_1 и G_2 се подгрупи од групата G. Ако $x,y\in G_1\cap G_2$, тогаш $x,y\in G_1$ и $x,y\in G_2$, т.е. $x,y^{-1}\in G_1$ и $x,y^{-1}\in G_2$, а потоа и $xy^{-1}\in G_1$ и $xy^{-1}\in G_2$, што значи $xy^{-1}\in G_1\cap G_2$, па $G_1\cap G_2$ е подгрупа од G.

Ако G_1 и G_2 се подгрупи од G и $G_1\cup G_2=G_1$ или $G_1\cup G_2=G_2$, тогаш и $G_1\cup G_2$ е подгрупа. Но, важи и обратното: ако $G_1\cup G_2$ е подгрупа од групата G, при што G_1 и G_2 се подгрупи од G, тогаш е $G_1\cup G_2 = G_1$ или $G_1\cup G_2=G_2$. Навистина, нека $G_1\cup G_2$ е подгрупа, $a\in G_1$, но $a\notin G_2$ и нека b е произволен елемент од G_2. Тогаш $a,b\in G_1\cup G_2$, па значи $ab=c\in G_1\cup G_2$. Поради $a=cb^{-1}$, не е можно да биде $c\in G_2$, оти тогаш и $a\in G_2$. Значи, $c\in G_1$, од каде што следува дека и $b=a^{-1}c\in G_1$, па добиваме дека $G_2\subseteq G_1$.

323. а) Нека групата G е комутативна; тогаш е

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}.$$

Обратно, нека е точно равенството

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

за било кои $x,y\in G$; тогаш имаме:

$$xy = (x^{-1})^{-1}(y^{-1})^{-1} = (y^{-1}x^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} = yx,$$

т.е. групата G е комутативна.

б) Нека групата G е комутативна; тогаш е

$$x(yz) = (xy)z = (yx)z.$$

Обратно, нека е точно равенството $x(yz) = (yx)z$; тогаш имаме:

$$xy = x(ye) = (yx)e = yx,$$

т.е. групата G е комутативна.

в) Ако групата G е комутативна, тогаш јасно дека е исполнето равенството

$$(xy)(xy) = xxyy, \tag{1}$$

за било кои $x,y\in G$.

Обратно, нека е исполнето равенството (1) за било кои x,y од G. Поради асоцијативноста имаме: $x(yx)y = xxyy$; множејќи го одлево со x^{-1}, а оддесно со y^{-1}, добиваме $xy=yx$ за било кои $x,y\in G$, т.е. групата G е комутативна.

г) Види ја задачата 290.

324. Од $x=x^{-1}$ следува $xy = (xy)^{-1}$, а поради $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$, имаме $xy = y^{-1}x^{-1}$ или $xy=yx$ за секои $x,y \in G$, што значи дека групата G е е комутативна.

На пример, такви групи се определени со шемите 1) и 2):

1)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

,

2)

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

;

исто така, ако M е било кое множество, тогаш $P(M)$ по однос на операцијата Δ, дефинирана со: $X\Delta Y = (X\cup Y)\setminus(X\cap Y)$, е група со таа особина.

325. Јасно дека a_0 е неутрален елемент и дека $(a_n)^{-1}=a_{-n}$, $b_n^{-1} = b_n$. За да се докаже дека G е група, треба да се покаже равенството $x(yz) = (xy)z$, за секоја тројка $(x,y,z)=(a_m,a_n,a_p),(a_m,a_n,b_p),\ldots$ (сите осум вакви тројки). На пример, имаме:

$$(a_m\circ b_n)\circ b_p = b_{m+n}\circ b_p = a_{m+n-p} = a_m\circ a_{n-p} = a_m\circ(b_n\circ b_p).$$

Со тоа покажавме дека $G(o)$ е група. Дека не важи комутативниот закон се гледа од:

$$a_m o b_n = b_{m+n} \neq b_{n-m} = b_n o a_m.$$

326. Дека не мора да важи равенството $(xy)^n = x^n y^n$ се гледа од следниов пример. Нека $x=a_m$, $y=b_n$ и $n=2$; тогаш имаме:

$$(a_m o b_n)^2 = (a_m o b_n) o (a_m o b_n) = a_m o (b_n o a_m) o b_n = a_m o b_{n-m} o b_n = b_{2n},$$

а

$$a_m^2 o b_n^2 = a_{2m} o a_0 = a_{2m}.$$

327. Пресликувањето $f(x)=\log x$ е обратноеднозначно од R^+ на R, а бидејќи е

$$\log (xy) = \log x + \log y,$$

следува дека f е изоморфизам меѓу $R^+(\cdot)$ и $R(+)$.

328. Да покажеме дека $G(o)$ е група. Од $xoy = xay$, каде што $a\in G$ е фиксен елемент, имаме:

$$(xoy)oz=(xoy)az=(xay)az=xa(yaz)=xa(yoz)=(xoy)oz,$$

што значи дека во $G(o)$ важи асоцијативниот закон.

Нека e е единичниот елемент во $G(\cdot)$, а a^{-1} инверзниот елемент на a. Тогаш:

$$xoa^{-1} = xaa^{-1} = xe = x, \quad a^{-1}ox = a^{-1}ax = ex = x,$$

што значи дека a^{-1} е единичен елемент во $G(o)$.

Од $xoy=a^{-1}$, т.е. $xay=a^{-1}$, добиваме $y = a^{-1}x^{-1}a^{-1}$, т.е. $a^{-1}x^{-1}a^{-1}$ е инверзен елемент на x во $G(o)$.

Од сето ова следува дека $G(o)$ е група.

Лесно се покажува дека и $G(*)$ е група.

Дека $G(*)$ е изоморфна со $G(\cdot)$ следува од тоа што пресликувањето $f(x) = x^{-1}$ е обратноеднозначно и

$$f(x*y) = (x*y)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y).$$

Дека $G(o)$ е изоморфна со $G(\cdot)$ следува од тоа што пресликувањето $g(x) = xa$ е обратноеднозначно и

$$g(xoy) = (xoy)a = xaya = g(x)g(y).$$

329. Да го разгледаме пресликувањето

$$f(x) = a^{-1}xa$$

од B во H_a. Нека $x,y \in B$; тогаш од $f(x) = f(y)$, т.е. $a^{-1}xa = a^{-1}ya$ следува (множејќи го ова равенство одлево со a, оддесно со a^{-1}) дека $x=y$, т.е. пресликувањето f е обратноеднозначно. Јасно дека f

е од облик на. Потоа,

$$f(xy)=a^{-1}xya=a^{-1}x(aa^{-1})ya=(a^{-1}xa)(a^{-1}ya)=f(x)f(y),$$

па значи, f е изоморфизам меѓу B и H_a, т.е. H_a е подгрупа од G.

331. Според задачите 314 и 315 следува дека $P(+)$ е комутативна група, а $P(\cdot)$ е комутативна полугрупа. Да покажеме уште дека важи дистрибутивниот закон. Имаме:

$$(x_1,x_2)((y_1,y_2)+(z_1,z_2)) = (x_1,x_2)(y_1+z_1,y_2+z_2) =$$
$$=(x_1(y_1+z_1),x_2(y_2+z_2)) = (x_1y_1+x_1z_1,x_2y_2+x_2z_2) =$$
$$=(x_1y_1,x_2y_2)+(x_1z_1,x_2z_2) = (x_1,x_2)(y_1,y_2)+(x_1,x_2)(z_1,z_2).$$

За елементите $(0,x)$ и $(y,0)$, каде што $x,y \neq 0$, имаме

$$(0,x)(y,0) = (0,0),$$

што значи дека $P(+,\cdot)$ е прстен со делители на нулата.

332.

+	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

·	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,1)
(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(1,0)
(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)

334. Во 332. се (0,1) и (1,0), а во 333. се (0,1),(0,2) и (1,0).

335. Слично како во задачата 331 се покажува дека P_∞ е прстен со делители на нулата. Прстенот P_∞ е комутативен ако, и само ако, прстенот P е комутативен.

Ако P е интегрален домен, тогаш вистински делители на нулата во P_∞ се сите елементи што имаат нула барем на едно место во низата, а да не е нултата низа. На пример, низите $(1,0,1,1,\ldots)$ и $(0,1,0,0,\ldots)$ не се нулти, додека производот им е $(0,0,0,\ldots)$.

337. Имаме $(x+y)(x+y) = x+y$; од тоа следува $x+y = xx+xy+yx+yy$, т.е. $xy+yx = 0$; ставајќи $x=y$ добиваме $xx+yy = 0$, т.е. $x=-x$; потоа од $xy+yx = 0$ добиваме $xy=-yx=yx$.

338. Дека $P(+)$ е комутативна група види задача 10. Поради асоцијативноста и комутативноста на пресек ($\cap$) следува дека $P(\cdot)$ е комутативна полугрупа. Дистрибутивниот закон е докажан во задачата 10.f), од каде што следува дека $P(+,\cdot)$ е комутативен прстен.

Овој прстен е поле само кога M е едноелементно множество.

Во случај кога M има повеќе од еден елемент, $P(+,\cdot)$ има делители на нулата, на пример, ако A и B се било кои дисјунктни непразни подмножества од M, тогаш $AB = A\cap B = \emptyset$.

339. а) Не. б) Да. в) Не. г) Не. д) Не.

340. Нека $p_1,p_2 \in P$; тоа значи $p_1=ax_1$ и $p_2=ax_2$, па $p_1-p_2=a(x_1-x_2)$ $=ax_3 \in P$ и $p_1p_2=ax_1ax_2=a(ax_1x_2)=ax_4\in P$, што значи P е потпрстен од Z.

Обратно, нека A е потпрестен од Z. Ако $A=\{0\}$, тогаш $A=P$ за $a=0$. Нека во A има ненулти елементи; ако $x\in A$ и $x\neq 0$, тогаш сигурно и $-x\in A$ и $-x\neq 0$, па значи во A има позитивни елементи. Нека a е најмалиот позитивен елемент во A. Ако $b\in A$, тогаш делејќи го со a, ќе добиеме $b=qa+r$, каде што $0\leqslant r< a$. Бидејќи $b,a\in A$, имаме $r=b-qa\in A$, што е можно само ако $r=0$. Според тоа секој елемент $b\in A$ има облик $b=qa$.

P ќе биде интегрален домен само во случај кога $a=1$, т.е. $P = Z$.

341. а) Ако прстенот P е комутативен, тогаш сигурно важи равенството

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 . \qquad (1)$$

Ако пак во P е точно равенството (1), тогаш имаме:

$$x^2+xy+yx+y^2 = x^2+2xy+y^2, \quad xy+yx = 2xy, \quad xy = yx,$$

што значи дека прстенот P е комутативен.

б) Ако прстенот P е комутативен, тогаш сигурно важи равенството

$$(x+y)(x-y) = x^2-y^2 . \qquad (2)$$

Обратно, ако важи равенството (2), тогаш ќе имаме:

$$x^2+yx-xy-y^2= x^2-y^2, \quad yx-xy = 0, \quad xy = yx,$$

т.е. прстенот P е комутативен.

342. Пресликувањето $f(x)=x-1$ е обратноеднозначно од P на P и

$$f(x+y) = x+y-1 = (x-1)+(y-1)+1 = f(x)\oplus f(y);$$

$$f(xy) = xy-1 = (x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1) = f(x)\odot f(y),$$

т.е. f е изоморфизам меѓу $P(+,\cdot)$ и $P(\oplus,\odot)$. Од ова следува дека $P(\oplus,\odot)$ е прстен.

343. Дека $S(+)$ е комутативна група следува од задачата 314. На сличен начин се проверува дека "$\cdot$" е асоцијативна и комутативна операција. Дека важи дистрибутивниот закон се гледа од следново:

$$(x_1,y_1)[(x_2,y_2)+(x_3,y_3)] = (x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3) =$$

$= (x_1x_2+x_1x_3-y_1y_2-y_1y_3, x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_3y_1) =$

$= (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)+(x_1x_3-y_1y_3, x_1y_3+y_1x_3) =$

$= (x_1,y_1)(x_2,y_2) + (x_1,y_1)(x_3,y_3).$

б) (1,0) е единичен елемент, па $S(+,\cdot)$ е интегрален домен. Дека $S(+,\cdot)$ не е поле следува од тоа што системот равенки

$$ax-by = 1,\ ay+bx = 0$$

нема решение во множеството Z.

в) S е поле, ако равенката $x^2+1 = 0$ нема решение во P.

г) Поради

$$f(x+y) = (x+y,0) = (x,0)+(y,0) = f(x)+f(y)$$

и

$$f(xy) = (xy,0) = (x,0)(y,0) = f(x)f(y),$$

добиваме дека f е навистина изоморфно вметнување од P во S.

344. Пресликувањето ψ дефинирано со

$$(a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots) \to \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\ ,$$

каде само конечно многу a_i се различни од нула, е изоморфизам меѓу множеството S од низи и множеството $C[x]$ од полиноми, од каде што следува дека $S(+,\cdot)$ е прстен.

345. Пресликувањето $a \to aE$, $a\in R$, остварува изоморфизам меѓу множеството R и множеството $\{aE \mid a\in R\}$ од скаларни матрици.

346. Елементите од P/ρ се класи еквивалентни елементи од P. За произволен елемент $x\in P$, класата на еквивалентни елементи со x ќе ја означуваме со A_x. Операциите "+" и "·" во P/ρ ги дефинираме на следниов начин:

$$A_x+A_y=A_z \Leftrightarrow x+y=z, \quad A_xA_y=A_t \Leftrightarrow xy=t.$$

Класите A_z и A_t не зависат од изборот на x и y, туку само од класите A_x и A_y.

Нека A_0 е класата елементи еквивалентни со нулата од P. Тогаш, бидејќи е $x+0 = 0+x = x$, ќе важи

$$A_x+A_0 = A_0+A_x = A_x,$$

па A_0 е нулти елемент во P/ρ. Ако $x\in P$, а $-x$ е спротивниот елемент на x во P, тогаш од $x+(-x) = 0$ следува

$$A_x+A_{-x} = A_0,$$

т.е. A_{-x} е спротивен на A во P/ρ.

Од асоцијативноста на "+" и "·", комутативноста на "+" и дистрибутивноста на "·" према "+" во P, следуваат истите особини на "+" и "·" во P/ρ. Значи, P/ρ е прстен.

347. Нека ρ е произволна конгруенција во полето P, различна од еднаквоста. Тогаш постои елемент $a \in P$, $a \neq 0$, така што е $0 \rho a$; но, бидејќи е $a^{-1} \rho a^{-1}$, множејќи ги добиваме $0 \rho 1$, а од ова и $x \rho x$, за секое $x \in P$, добиваме $0 \rho x$ за секое $x \in P$, т.е. $x \rho y$ за секој пар $x, y \in P$.

348. Таква е, секако, релацијата за еднаквост, па затоа нека претпоставиме дека ρ е една таква еквивалентност што е различна од еднаквоста. Според тоа, постојат цели броеви a,b, такви што $a \rho b$, $a \neq b$. Поради $(-b) \rho (-b)$, добиваме $(a-b) \rho 0$. Значи, во класата A_0 од елементи еквивалентни со нулата постои барем еден ненулт елемент.

Да покажеме дека A_0 е потпрстен од Z. Прво, $0 \in A_0$. Ако a и b се елементи од A_0, тогаш $a \rho 0$ и $b \rho 0$, од што следува $(a+b) \rho 0$ и $ab \rho 0$. Потоа, поради $(-a) \rho (-a)$, од $a \rho 0$ следува $0=(-a+a) \rho (-a+0)$, т.е. $-a \in A_0$. Со тоа покажавме дека A_0 е навистина потпрстен. Според задачата 340, постои природен број m, таков што $a \in A_0 \Leftrightarrow m | a$. Потоа, $a \rho b \Leftrightarrow (a-b) \rho 0$, т.е. $a-b \in A$, па значи $a \rho b \Leftrightarrow m | (a-b)$, т.е. $a \equiv b \pmod m$.

Обратно, ако n е даден природен број и ако релацијата ρ ја дефинираме со

$$a \rho b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod n,$$

тогаш од особините за конгруенции следува дека ρ е согласна со операциите собирање и множење во Z.

349. T ќе биде потполе од полето на комплексните броеви, само во случај кога и S е потполе од полето на реалните броеви.

350. а) Ако $x \neq 0$, $y \neq 0$, тогаш е исполнет еден од следните услови: $x>0$, $y>0$; $x>0$, $-y>0$; $-x>0$, $y>0$; $-x>0$, $-y>0$. Според тоа ќе имаме $xy>0$ или $-xy>0$, што повлекува $xy \neq 0$.

б) Ако x е даден позитивен елемент и ако ставиме:

$$a_1=x, \quad a_2=a_1+x, \ldots, a_{n+1}=a_n+x,$$

добиваме бесконечно подмножество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ од дадениот прстен.

351. Нека x е произволен елемент од P; тогаш е $x>0$, или $x=0$, или $-x>0$. Ако е $x>0$, т.е. $x \in P^+$, тогаш и $x^2=xx \in P^+$, па $x^2>0$; ако $x=0$, тогаш и $xx=0$, па $x^2 \geq 0$; на крајот, ако $-x>0$, т.е. $-x \in P^+$, тогаш $x^2=(-x)(-x) \in P^+$, па и во овој случај е $x^2>0$.

Нека е e единицата на P. Бидејќи $e \neq 0$ и $e=e^2$, имаме $e \in P^+$.

352. Од $a=(a+b)-b$ имаме $|a|\leqslant|a+b|+|b|$, т.е.

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|, \qquad (1)$$

а од $b=-a+(a+b)$ имаме $|b|\leqslant|a|+|a+b|$, т.е.

$$-|a+b|\leqslant|a|-|b|. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|.$$

Од докажаното непосредно следува и

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|.$$

Неравенството $|a-b|\leqslant|a+b|$ во општ случај не важи, што покажува следниов пример во Z: за $a=3$, $b=-2$ имаме $|a-b|=5$, а $|a+b|=1$.

353. Бидејќи $xx^{-1}=1$ за било кој $x\in P$ (P е подредено поле), при претпоставката $x>0$, следува и $x^{-1}>0$.

а) Множејќи го $0<a<b$ со a^{-1} одлево, а со b^{-1} оддесно, добиваме $0<b^{-1}<a^{-1}$.

б) Слично како под а).

в) Ако c би бил најмалиот позитивен елемент, тогаш нека d е било кој позитивен елемент, така што $c^{-1}<d$. (Таков елемент постои, на пример $c^{-1}+x$, $x\in P^{+}$). Според а) имаме $d^{-1}<c$ што значи c не може да биде најмал. Слично се покажува дека во P^{-} нема најголем елемент.

354. Нека D е потпрстен од полето K изоморфен со прстенот Z, а f – изоморфизмот $f(n)=ne$, каде што e е единицата во D, а $n\in Z$. Го дефинираме пресликувањето $F\colon Q\to K$ со

$$F(\tfrac{a}{b}) = f(a)(f(b))^{-1}.$$

Лесно се проверува дека ова пресликување е изоморфизам од Q во K.

355. Нека во подредениот интегрален домен D го разгледаме множеството

$$S=\{ne \mid n\in Z, e\in D\},$$

каде што e е единицата во доменот D. Во $S(+,\cdot)$ се исполнети сите услови за прстен, па S е потпрстен од D. Пресликувањето $f\colon S\to Z$, дефинирано со $f(ne)=n$, остварува изоморфизам меѓу S и Z.

Нека P е подредено поле. Според претходното, во P постои потпрстен S изоморфен со Z, а според задачата 354 постои потпрстен P изоморфен со полето Q.

356. Во секој подреден прстен имаме $x^{2}\geqslant 0$, (задача 351), од што

од што следува дека $e^2 = e > 0$. Кај комплексните броеви имаме $i^2 = -1$, а -1 не може да биде позитивен број.

357. Производ на "вектор" (елемент од R) со"скалар" (елемент од Q) секогаш е "вектор" (а и прозвод на два "вектора" е "вектор") , при што сите услови за векторски простор (а и алгебра) се исполнети, па R е векторски простор (а и алгебра) над полето Q. Димензијата на овој простор е бесконечна.

358. Ако $V \neq \{0\}$, тогаш V не е векторски простор над P, бидејќи $1 \cdot \vec{a} = 0$, а треба да е $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, за секое $\vec{a} \in V$.

359. Не е векторски простор, бидејќи не е исполнет условот

$$(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

360. Нека G е векторски простор над полето $P=\{0,1\}$; тогаш од

$$(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x},$$

имаме: $\vec{x} + \vec{x} = (1+1)\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = 0$, за секое $\vec{x} \in G$.

Обратното е очигледно дефинирајќи $0 \cdot \vec{x} = 0$ и $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, за $\forall \vec{x} \in G$.

361. Лесно се проверува дека за V се исполнети сите услови за векторски простор. Димензијата на V е $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

362. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V_1 \cap V_2$; тогаш $\vec{a}, \vec{b} \in V_1$ и $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$, па бидејќи V_1, V_2 се потпростори, ќе имаме $x\vec{a}, \vec{a}+\vec{b} \in V_1$ и $x\vec{a}, \vec{a}+\vec{b} \in V_2$, што значи дека $x\vec{a}, \vec{a}+\vec{b} \in V_1 \cap V_2$, од каде што следува дека $V_1 \cap V_2$ е потпростор од V.

363. Нека $\vec{a}, \vec{b} \in U_f$, т.е. $f(\vec{a}) = 0$, $f(\vec{b}) = 0$. Бидејќи е

$$f(\alpha\vec{a}) = \alpha f(\vec{a}) = \alpha \cdot 0 = 0$$

и

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) = 0,$$

следува дека U_f е потпростор од U .

364. Од тоа што V има бесконечна димензија следува дека постои бесконечно множество вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots$, меѓу себе линеарно независни вектори. Потпросторот генериран од било кои n вектори од множеството $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots\}$ е n-димензионален.

365. $R_\infty(+)$ е векторски простор над R и R_∞ е прстен по однос на дефинираните операции "+" и "·" . Бидејќи важи условот $x(\vec{a}\vec{b}) = (x\vec{a})\vec{b}$, R_∞ е векторска алгебра.

Нека $s_1, s_2 \in S$, т.е. s_1, s_2 се бесконечни низи чии членови само на конечно многу места се различни од нула. Тогаш и αs_1 ($\alpha \in R$), $s_1 + s_2$ и $s_1 s_2$ се низи со истата особина, па S е подалгебра од R_∞ .

Пресликувањето

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i,$$

каде што само конечно многу a_i се различни од нула, е изоморфизам од S во алгебрата на сите полиноми со реални коефициенти.

366. Ако, на пример, во R ставиме $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$, добиваме алгебра што не е изоморфна со алгебрата на комплексните броеви.

367. Да.

368. С не е подалгебра, бидејќи производ на два непарни полинома е парен полином.

370. Не е векторска алгебра, бидејќи $f(g+h)(x) = f(g(x)+h(x))$, во општ случај, е различно од $fg(x)+fh(x)$.

371. а) Со директна проверка се утврдува дека К е потпрстен од прстенот на квадратни матрици од ред 2. Потоа, ако $A \in K$ и $A \neq 0$, имаме

$$\det A = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \neq 0,$$

па значи A^{-1} постои и

$$A^{-1} = \frac{1}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & z_1 \end{bmatrix},$$

а јасно е дека $A^{-1} \in K$.

Ако е $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, имаме $A \in K$, $B \in K$ и

$$AB = \begin{bmatrix} -1+1 & 1-1 \\ -1-1 & -1-1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1+1 & 1+1 \\ -1+1 & -1-1 \end{bmatrix} = BA,$$

што значи дек К е некомутативно тело.

в) Дека К не е векторска алгебра на полето од комплексните броеви следува од тоа што, ако $A \in K$, iA не мора да припаѓа на К.

СОДРЖИНА