РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, ОДРЖАН ВО 1966 ГОД.

Трети клас

1. Да се реши системот

$$\log_a x - \log_{a^2} y = m, \quad \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n.$$

2. За кои вредности на x е точно неравенството

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} > 0.$$

3. Да се конструира триаголникот, ако се познати страната c, висината h_b и тежишната линија t_a.

4. Од правилна четиристрана призма отсечена е пирамида со рамнина што минува низ дијагоналата на едната основа и едно теме на другата основа. Волуменот на пирамидата е V, а аголот при врвот на триаголникот, образуван на пресечната рамнина е 2α. Да се пресметаат плоштината и волуменот на призмата.

Четврти клас

1. На еден шаховски турнир одиграни се вкупно 84 партии, при тоа двајца учесници на турнирот го напуштиле истиот по три одиграни партии. Колку учесници биле на почетокот на турнирот и дали двата шахисти што го напуштиле турнирот одиграле меѓу себе партија?

2. Во крајните точки A и B на еден полукруг, чиј радиус е R, повлечени се тангенти, а на нив се избрани точките M и H, такви што $\overline{AM}=nR$, $\overline{BH}=\frac{R}{n}$.

Да се покаже дека правата MH е тангента на полукругот во некоја точка S. Колку изнесува растојанието $\overline{BT}$, каде што T е пресечната точка на правите AS и BH?

3. Од една група екскурзијанти еден се изгубил, а меѓу останатите 16 имало 4 кои добро го познавале местото каде што е изведена екскурзијата. На колку начини можат да се поделат 16-те во две еднакви групи за барање на изгубениот другар, така што

секоја група да има по два од оние што го познаваат местото?

4. Дадена е функцијата

$$y^2 = x(x-\alpha)^2, \alpha > 0$$

а) Да се определи геометриското место на екстремните точки на графикот од дадената функција кога α се менува;

б) Да се испита и графички да се претстави функцијата, земајќи да е $\alpha = 3$.

РЕШЕНИЈА

Трети клас

1. Имајќи предвид дека е $\log_a b = \log_{a^n} b^n$, дадениот систем може да се напише во вид:

$$\log_a x - \log_a \sqrt{y} = m, \quad \log_a \sqrt{x} - \log_a \sqrt[3]{y} = n$$

Следува:

$$\log_a \frac{x}{\sqrt{y}} = m, \quad \log_a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}} = n;$$

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = a^m, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}} = a^n \;;$$

$$x^2 = a^{2m} y, \quad x^3 = a^{6n} y^2;$$

$$x = a^{2(2m-3n)}, \quad y = a^{6(m-2n)}.$$

2.

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} = \frac{2\sin x\cos x + 2\sin^2 x}{2\sin x\cos x - 2\sin^2 x} = \frac{\sin x(\cos x + \sin x)}{\sin x(\cos x - \sin x)} = \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}.$$

Според тоа, даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x} > 0$$

Ова неравенство е задоволено ако е

$$1+\operatorname{tg}x > 0, \quad 1-\operatorname{tg}x > 0$$

или ако е

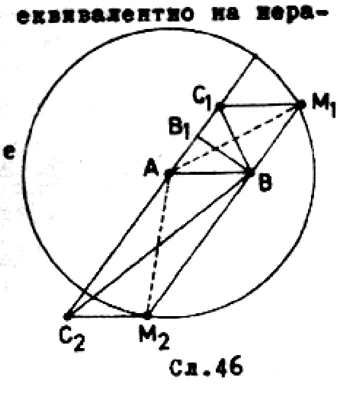
$$1+\operatorname{tg}x < 0, \quad 1-\operatorname{tg}x < 0.$$

Од првите две неравенки следува

$$-1 < \operatorname{tg}x < 1,$$

што значи дека е

$$k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$



Сл.46

Вторите две неравенки се противречни.

3. Ќе се конструира правоаголен триаголник ABB_1 со хипотенуза $\overline{AB}=c$ и катета $\overline{BB_1}=h_b$. Од темето A на тој триаголник се опишува кружница со радиус $2t_a$, а од темето B се повлекува паралела со страната AB_1 која ја сече кружницата$(A, 2t_a)$ во точките M_1 и M_2. Низ темето B и средината на AM_1 односно AM_2 се повлекува права. Пресекот на таа права со AB_1 е третото теме на бараниот триаголник. Задачата има две решенија(сл.46).

4. Нека се a и H основен раб и висина на призмата, а h нека е висината на добиениот пресек(сл.47). Тогаш плоштината на призмата е:

$$P=2a^2+4aH=2a(a+2H).$$

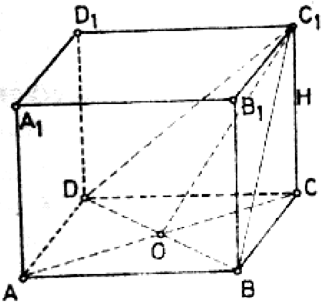
За да се изрази a и H со помош на V и α, се користиме со равенките:

$$\frac{a^2H}{6}=V,\quad h=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2},\quad \frac{a\sqrt{2}}{2}=h\,tg\alpha .$$

Од овие равенки следува:

$$a^2H=6V,\ \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left[H^2+\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]tg^2\alpha$$

$$H=\frac{a\sqrt{2\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha},\quad a=\sqrt[3]{\frac{12V\sin\alpha}{\sqrt{2\cos 2}}}\ .$$



Сл.47

$$P=2a^2+4aH=2a^2+\frac{2a^2\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}=2a^2\left(1+\frac{\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}\right)=\frac{72V^2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}\left(1+\frac{\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}\right)$$

Волуменот на призмата е:

$$V_1=6V.$$

Четврти клас

1. Бараниот број на учесниците на турнирот ќе го обележиме со x. Од нив оние што не го напуштиле турнирот меѓу себе одиграле вкупно $C^2_{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$ партии.

Освен тоа, ако претпоставиме дека двајцата шахисти што го напуштиле турнирот меѓу себе не одиграле партија, ќе беа одиграни уште шест партии, и затоа имаме:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2}+6=84,\ x^2-5x-150=0,$$

$$x_1=15,\ x_2=-10.$$

Од овие две решенија, со оглед на природата на задачата, доаѓа во предвид само првото решение.

Ако претпоставиме дека двајцата шахисти што се откажале меѓу себе одиграле партија, тогаш вкупниот број на партиите што тие ги одиграле е 5, така што се добива равенката

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 5 = 84, x^2-5x-152 = 0.$$

Но корените на оваа равенка се ирационални, што значи дека втората претпоставка не доаѓа предвид.

2. Нека е $HK \parallel AB$ (сл.48).

Тогаш е:

$$\overline{MH}^2 = \overline{HK}^2 + \overline{KM}^2 = 4R^2 + (\overline{AM}-\overline{BH})^2 =$$

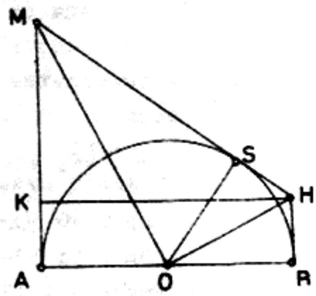
$$= 4R^2 + (nR - \frac{R}{n})^2 = n^2R^2 + 2R^2 + \frac{R^2}{n^2}(nR+\frac{R}{n})^2;$$

$$\overline{MH} = nR + \frac{R}{n} = \overline{AM} + \overline{BH}.$$

Од триаголниците ADM и BHO следува:

$$\overline{OM}^2 = R^2 + n^2R^2, \quad \overline{OH}^2 = R^2 + \frac{R^2}{n^2};$$

$$\overline{OM}^2 + \overline{OH}^2 = n^2R^2 + 2R^2 + \frac{R^2}{n^2} = (nR + \frac{R}{n})^2 = \overline{MH}^2.$$



Сл.48

Според тоа триаголникот OHM е правоаголен. Нека е S точката на неговата хипотенуза, одбрана така што е $MS=nR, SH=\frac{R}{n}$

Таа точка претставува подножјето на висината на овој правоаголен триаголник, бидејќи е

$$\overline{MS} \cdot \overline{SH} = \left(\frac{\overline{OM} \cdot \overline{OH}}{\overline{MH}}\right)^2 = R^2$$

Следува: $\overline{OS}=R$, што значи дека точката S се наоѓа на кружницата.

3. Бројот на начините на кои може да се распределат четирите екскурзијанти што ја познаваат месноста е C_4^2. На секој од тие парови може да се присоединат по шест човека на C_{12}^6 начини. Така, општиот број на начини на делење во групи е

$$\frac{1}{2} C_{12}^6 \cdot C_4^2 = 2772.$$

4.a) $y = \pm\sqrt{x(x-a)}, \quad y' = \pm\frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = \pm\frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$

Од $y'=0$ следува: $x=\frac{\alpha}{3}$. Бидејќи е $y''_I=\frac{\alpha}{3}\neq 0$, екстремните точки на кривата се:

$$M_1\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right),\ M_2\left(\frac{\alpha}{3}, -\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right).$$

Геометриското место на екстремните точки на дадената функција се добива ако во равенката $y^2=x(x-\alpha)^2$ се замени x со $3x$. Така се добива:

$$y^2=4x^3$$

б)
$$y^2 = x(x-3)^2$$
$$y = \pm (x-3)\sqrt{x}$$

Функцијата е дефинирана за $x\geq 0$.

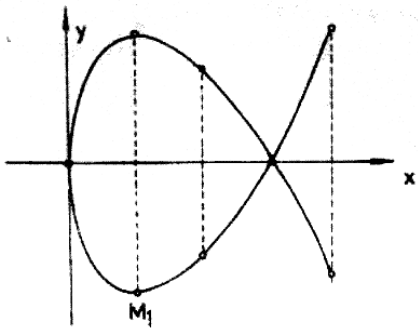
Пресеци со x оската кривата има за $x=0$ и $x=3$.

Графикот на таа функција е симетричен во однос на x оската.

$$y'=\pm\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}},\quad y''=\pm\frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}}.$$

Од $y'=0$ следува: $x=1$.

За $y=(x-3)\sqrt{x}, y''_{(1)}>0$ затоа точката $M_1(1,-2)$ претставува точка на минимум на кривата.



Сл.49

За $y=-(x-3)\sqrt{x}, y''(1)<0$, затоа точката $M(1,2)$ претставува точка на максимум на кривата (сл.49).

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески