

Општински натпревар 2016

I година

1A. Ако $ab = 5$ пресметај ја вредноста на изразот $\frac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{a+b}$.

2A. Докажи дека бројот $2^{10} + 5^{12}$ е сложен.

3A. Голема коцка е составена од 64 единечни бели коцки и истата е обое-на со црвена боја. Колку единечни коцки имаат само еден црвен сид, колку имаат два црвени сида, колку имаат три црвени сида и колку единечни коцки немаат ниту еден црвен сид?

4A. Даден е паралелограм $ABCD$. Во рамнината на паралелограмот над страните AB , BC , CD и DA се конструирани квадрати кои лежат надвор од квадратот. Центарот (пресекот на дијагоналите) на паралелограмот, средина на било која негова страна и центарот на квадратот конструиран над таа страна се темиња на триаголник.

а) Докажи дека вака добиените четири триаголници се складни.

б) Докажи дека четириаголникот чии темиња се центрите на конструирани-ните квадрати е квадрат.

II година

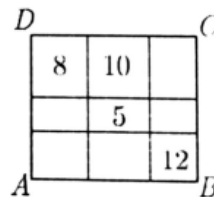
1A. Пресметај $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot 4\sqrt{\frac{a^2}{b^3}} \cdot 6\sqrt{\frac{a^5}{b^4}} \cdot 3\sqrt{\frac{b^2}{a}} \cdot 4\sqrt{\frac{b^3}{a^2}} \cdot 6\sqrt{\frac{b^4}{a^3}} \cdot 12\sqrt{\frac{a^{10}}{b^{14}}}$, ако $a = \sqrt{10}$, $b = 2$.

2A. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - y = z^2, \\ y^2 - z = x^2, \\ z^2 - x = y^2. \end{cases}$$

3A. Ако точката M е средина на кракот AD на трапезот $ABCD$, докажи дека плоштината на триаголникот MBC е половина од плоштината на трапезот $ABCD$.

4А. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на 9 помали правоаголници, така што плоштините на четири од нив се 8, 10, 5, 12, како што е прикажано на цртежот. Определи ја најмалата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.



III година

1А. Докажи го идентитетот: $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$.

2А. Нека $x, y \in (0, 1)$ се такви што за $a > 0, a \neq 1$ важи равенството $\log_x a + \log_y a = 4 \log_{xy} a$. Докажи дека $x = y$.

3А. Определи ја вредноста на параметарот a така што неравенството $|\frac{(a+2)x}{x^2-x+1}| < 1$ важи за секој $x \in \mathbb{R}$.

4А. Страната BC на триаголникот ABC има должина a , а радиусот на впишаната кружница е еднаков на r . Определи ја плоштината на триаголникот, ако впишаната кружница ја допира кружницата со дијаметар BC .

IV година

1Б. Производот на третиот и четвртиот член во развојот на биномот $(x + x^{\lg x})^5$ е еднаков на 10000000. Определи го x .

2Б. Ако вториот, третиот и шестиот член на една аритметичка прогресија формираат геометричка прогресија, определи го количникот на геометричката прогресија.

3Б. Определи ги вредностите на параметарот p за кои равенката $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$ има четири реални корени кои се последователни членови на аритметичка прогресија.

4Б. Најди ја најмалата вредност на изразот $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1}$, ако x, y, z се ненегативни реални броеви такви што $x + y + z = 2013$.