I РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика 1976-1985
подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Една група косачи требало да окосат две ливади. Од утрината до пладне целата група косачи работела на поголемата ливада. На пладне косачите се поделиле. Една половина од нив останале да ја докосат поголемата ливада, а другата половина преминала на помалата ливада, која е двапати помала од поголемата. Првата половина од косачите ја довршува поголемата ливада. Втората половина од косачите не можела да ја доврши помалата ливада. Остатокот од помалата ливада го докосил сам еден косач уште за еден ден. Колку косачи имало во групата?

2. Даден е правоаголен триаголник со катети $a = 6$ cm и $b = 8$ cm. Кружницата со центар во темето на правиот агол и со радиус еднаков со катетата **a**, ја сече хипотенузата во точката D. Од точката D е спуштена нормала кон катетата **b**. Нејзината подножна точка е точката E. Определи ја плоштината на триаголникот CDE.

3. Триаголникот ABC со $\alpha = 75^{\circ}$, $\beta = 45^{\circ}$ и $c = 6$ cm ротира околу права што минува низ темето A и е паралелна со страната a. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

4. Дадени се функциите: $a \equiv y = -3x + 15$; $b \equiv y = x - 5$; $c \equiv y = -5x + 37$ и $d \equiv y = 2x - 5$. Правите **a** и **b** се сечат во точката B, правите **b** и **c** во точката C, правите **c** и **d** во точката D и правите **d** и **a** во точката A. Определи ја плоштината на четириаголникот ABCD.

1. (1976.VIII.1)

I. На големата ливада сите косачи (цела бригада) работеле половина ден, а половина од нив работеле уште половина ден, што вкупно изнесува $\frac{3}{4}$ работен ден. На втората ливада половина од косачите работеле половина ден, што вкупно изнесува $\frac{1}{4}$ работен ден. Бидејќи оваа ливада, според условот, е двапати помала од првата ливада, за да ја завршат цела, косачите треба да употребат половина од $\frac{3}{4}$ работен ден, т.е. за $\frac{3}{8}$ дена. Но на малата ливада останала работа за уште еден косач, што претставува $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ работен ден од целата бригада. Бидејќи еден косач сам ја завршил оваа работа за еден ден, следува дека целата бригада се состои од 8 луѓе.

II. (со равенки) Нека е x бројот на косачите а y површината што ја коси еден косач за еден ден. Да ја изразиме површината на првата ливада преку броевите x и y.

Еден косач за половина ден коси $\frac{y}{2}$, а x — косачи, за половина ден ќе искосат $x \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{2}$. Попладне ливадата ја косат $\frac{x}{2}$ косачи, па е $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{4}$. Значи површината на целата ливада е $\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$.

За другата ливада имаме слично:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} + y = \frac{xy + 4y}{4}.$$

Бидејќи првата ливада е двапати поголема од втората, ја составуваме равенката:

$$\frac{3xy}{4} = 2\frac{xy + 4y}{4}$$

или

$$3xy = 2(x+4)\,y \Leftrightarrow 3x = 2x + 8 \Leftrightarrow x = 8.$$

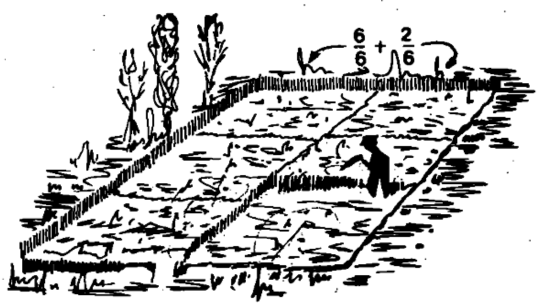
Забелешка: Забележуваш дека непознатата y не влијае на резултатот, што можеше и да се очекува, бидејќи „брзината" на косењето на косачите не влијае на бројот на косачите, како ни големината на ливадите, освен оној суштествен услов дека едната ливада е двапати поголема од другата.

III. Толстој вака ја решил оваа задача:

Ако поголемата ливада ја коси целата група половина ден и половина група — другата половина од денот, тогаш оваа половина група ќе искоси попладне $\frac{1}{3}$ од ливадата (првите $\frac{2}{3}$ од ливадата ги коси целата група претпладне). Површината на малата ливада е $\frac{1}{2}$ од површината на големата ливада. Бидејќи на неа попладне работеле половина од косачите, тие и овде ќе искосат $\frac{1}{3}$ од површината на големата ливада. За утредента од малата ливада остануваат уште $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ од големата ливада ($\frac{1}{2}$ — од големата ливада е еднаква на малата ливада, а $\frac{1}{3}$ — е делот што косачите го завршуваат за тоа попладне на малата ливада). Значи, еден косач искосил за еден ден $\frac{1}{6}$ од ливадата. Вкупно се искосени $\frac{6}{6}$ од големата ливада и $\frac{2}{6}$ од малата ливада, т.е. $\frac{8}{6}$ за првиот ден. Бидејќи еден косач коси $\frac{1}{6}$ на ден, тоа значи дека бригадата се состои од 8 косачи.

Одговор: 8 косачи.

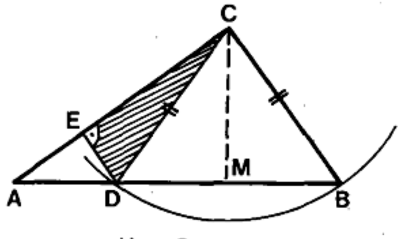
Забелешка: Оваа задача во математичката литература е позната како задача на Толстој, т.е. Толстоеви косачи. Големиот руски писател Лав Николаевич Толстој (1828—1910) едно време предавал математика во својата Јасна Полјана, а издал и оригинална „Аритметика". На своите гости често им поставувал задачи, од кои една е и оваа. Толстој своето духовито решение го поткрепил и со уште подуховит цртеж.



Црт. 1

2. (1976.VIII.2)

I. Нека е $\triangle ABC$ правоаголен ($\measuredangle C = 90^o$) и нека $k(C, \overline{CB})$ ја сече хипотенузата AB во точката D. (цртеж 2), и нека е $DE \perp AC$.



Црт. 2

Плоштината на $\triangle CDE$ е: $P = \frac{1}{2}\overline{CE} \cdot \overline{ED}$. Значи, треба да се определат должините на овие отсечки. Нека CM е висина на триаголникот ABC.

Имаме $P_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{MC}$

Бидејќи е $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, добиваме

$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 10\,\overline{MC} \Rightarrow \overline{MC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ cm.

Тогаш е:

$\overline{DM} = \overline{BM} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{MC}^2} = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = 3{,}6 \Rightarrow \overline{BD} = 2\overline{DM} = 7{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AD} = 10 - 7{,}2 = 2{,}8.$

Од сличноста на триаголниците ABC и ADE имаме

$\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AE} : \overline{ED} \Leftrightarrow 8 : 6 = \overline{AE} : \overline{ED} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{4}{3}\overline{ED}.$

Од $\triangle ADE$ имаме

$\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AD}^2$

$(\frac{4}{3}\overline{ED})^2 + \overline{ED}^2 = 2{,}8^2$

$(\frac{16}{9} + 1)\overline{ED}^2 = 2{,}8^2$

$\frac{25}{9}\overline{ED}^2 = 2{,}8^2 \Leftrightarrow \overline{ED}^2 = \frac{2{,}8^2 \cdot 9}{25} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{2{,}8 \cdot 3}{5} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{8{,}4}{5}$ cm.

Сега $\overline{AE} = \frac{4}{3}\overline{ED} = \frac{4}{3} \cdot \frac{8{,}4}{5} = \frac{11{,}2}{5}$; $AE = \frac{11{,}2}{5}$ cm.

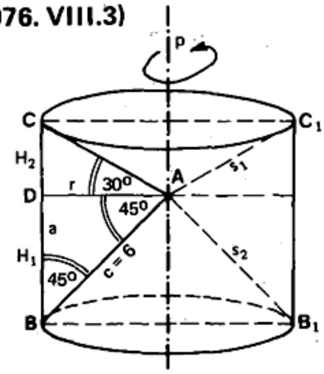
и $\overline{CE} = \overline{CA} - \overline{AE} = 8 - \frac{11{,}2}{5} = \frac{40 - 11{,}2}{5} = \frac{28{,}8}{5}$; $CE = \frac{28{,}8}{5}$ cm.

Конечно, плоштината на $\triangle CDE$ изнесува

$P = \frac{1}{2} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{ED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{28{,}8}{5} \cdot \frac{8{,}4}{5} = \frac{120{,}96}{25}$

Одговор: $P = 4{,}84\ cm^2$

3. (1976. VIII.3)



Црт. 3

I. Дадениот триаголник ABC нека ротира околу правата **p**, која што минува низ темето A и е паралелна со страната $\overline{BC} = a$. При оваа ротација се добива едно сложено тело: цилиндар, од кој се отстранети два конуса. Радиусот на цилиндарот и двата конуса е отсечката $\overline{AD}$, висини на конусите се отсечките $\overline{BD} = H_1$ и $\overline{CD} = H_2$, а на цилиндарот нивниот збир: $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = H_1 + H_2$.

Освен ова ќе треба да ја пресметаме уште и страната $\overline{AC} = s_2$, која што е изводница на помалиот конус.

Од цртежот е јасно: $\overline{AD} = \overline{BD} \Rightarrow \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\overline{AD}^2 = 36 \Rightarrow \overline{AD}^2 = 18 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}.$
Значи: $r = \overline{AD} = 3\sqrt{2}$ и $H_1 = \overline{BD} = 3\sqrt{2}.$

Понатаму, од другиот правоаголен $\triangle ACD$ имаме: $\overline{AC} = 2\overline{CD}$
(... катета наспроти аголот од 30° е половина од хипотенузата...)
или $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 \Rightarrow 4\overline{CD}^2 - \overline{CD}^2 = 18 \Rightarrow 3\overline{CD}^2 = 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{CD}^2 = 6 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{6} \Rightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{6}$. Значи: $H_2 = \overline{CD} = \sqrt{6}$
$s_2 = \overline{AC} = 2\sqrt{6}.$

Плоштината на ротационото тело е збир од плоштините што ги образуваат секоја од страните на триаголникот. Страните AB и AC при оваа ротација образуваат плоштини на обвивка на конус, а страната BC – обвивка на цилиндар. За плоштините што ги образуваат овие отсечки, ќе имаме:

$P_{AB} = \pi \cdot r \cdot s_1 = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 18\sqrt{2}\pi.$

$P_{AC} = \pi \cdot r \cdot s_2 = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 12\sqrt{3}\pi.$

$P_{BC} = 2r\pi(H_1 + H_2) = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \pi(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 6\sqrt{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})\pi.$

Вкупната плоштина е:

$$P = P_{AB} + P_{AC} + P_{BC} = 18\sqrt{2}\pi + 12\sqrt{3}\pi + 6\sqrt{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{6})\pi$$
$$= (18\sqrt{2} + 12\sqrt{3} + 18\sqrt{6} + 12\sqrt{3})\pi$$
$$= (18\sqrt{2} + 24\sqrt{3} + 18\sqrt{6})\pi = 6(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6})\pi$$

$$P = 6(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6})\pi cm^2$$

Волуменот на ротационото тело е разлика од волуменот на цилиндарот и збирот од волумените на конусите.

$$V_3 = r^2 \pi \cdot (H_1 + H_2);\ V_1 = \frac{1}{3} r^2 \pi H_1;\ V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi H_2$$

$$V = V_3 - (V_1 + V_2) = r^2 \pi (H_1 + H_2) - \frac{1}{3} r^2 \pi\ (H_1 + H_2)$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi (H_1 + H_2) = \frac{2}{3} (3\sqrt{2})^2 \pi \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$= \frac{2}{3} 18 (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \pi = 12\ (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \pi.$$

$V = 12\ (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \pi cm^3$.

Одговор: $P = 6(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}) \pi cm^2$ $\quad V = 12(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \pi cm^3$

4. (1976. VIII.4)

I. Плоштината на четириаголникот ABCD ќе ја определиме ако прво ги определиме координатите на неговите темиња т.е. координатите на пресечните точки на соодветните прави.

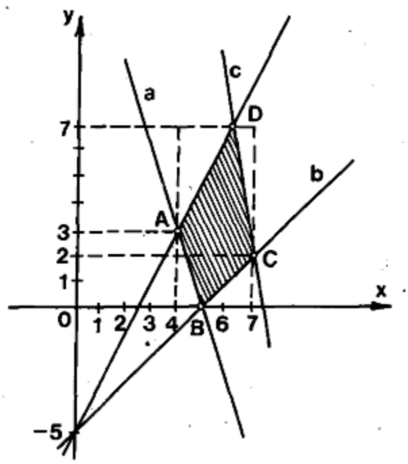
Координатите на темето A ќе ги добиеме како решение на системот равенки.

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x + 15. \end{cases}$$

Имаме: $2x - 5 = -3x + 15 \Leftrightarrow$
$5x = 20$
$x = 4$

Тогаш е: $y = 2 \cdot 4 - 5 = 3$.

Добиваме A (4, 3)



Црт. 4

Координатите на темето B ќе ги добиеме како решение на системот. $\begin{cases} y = -3x + 15 \\ y = x - 5 \end{cases}$

Од $x - 5 = -3x + 15$ добиваме $x = 5$, а потоа $y = 0$.
Значи B (5, 0).

Аналогно, со решавањето на системите:

$$\begin{cases} y = -5x + 37 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = x - 5 \\ y = -5x + 37 \end{cases}$$

ги добиваме координатите на темињата (види црт. 4).

C (7, 2) и D (6, 7)

Плоштината на четириаголникот ABCD ќе ја пресметаме индиректно, т.е. околу четириаголникот ABCD ќе „опишеме" еден правоаголник, чија што плоштина лесно ја наоѓаме, а потоа од оваа плоштина ги одземаме плоштините на „надворешните" триаголници (види црт. 4).

Плоштината на „опишаниот" правоаголник е $P_1 = 3 \cdot 7 = 21$, а збирот на плоштините на четирите „надворешни" триаголници е

$$P_2 = \frac{1}{2}2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{1}{2}(4 + 3 + 5 + 8) = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$$

Конечно, плоштината на четириаголникот ABCD е
$P = P_1 - P_2 = 21 - 10 = 11.$

Одговор: P = 11 квадратни единици.