УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ" - СКОПЈЕ

АЛЕКСАНДАР САМАРЏИСКИ
НАУМ ЦЕЛАКОСКИ

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА

МНОЖЕСТВА

ТРЕТО ИЗДАНИЕ

СКОПЈЕ, 1996

Одобрено со решение на ректорот бр. 11-399/6 од 11-III - 1996,
како учебно помагало, трето неизменето издание

Рецензент
Проф. д-р Ѓорѓи Чупона

Лектура
Оливера Павловска

CIP – Каталогизација во публикација,
Народна и универзитетска библиотека
„Св. Климент Охридски", Скопје

510.22(076)(075.8)

САМАРЏИСКИ, Александар
Множества: збирка задачи по алгебра/
Александар Самарџиски, Наум Целакоски. -
[3. неизменето изд.]. - Скопје: Универзитет
"Св. Кирил и Методиј", 1996. - 116, 1 стр. ; 24 см
ISBN 9989-43-046-2
I. ЦЕЛАКОСКИ, Наум

Според Мислењето на Министерството за култура бр. 08-95/420-420 од 22-II- 1996 год., за книгата "Збирка задачи по алгебра" се плаќа повластена даночна стапка

Печатено на офсет техника во Универзитетската печатница
"Св. Кирил и Методиј" – Скопје
Тираж 250 примероци

ПРЕДГОВОР

Теоријата на множествата е релативно млада област од математиката, а сепак, речиси, нема математичка дисциплина која не го користи јазикот на множествата или во која не се чувствува,на некој начин,нејзиното влијание. Затоа воопшто не зачудува сѐ поголемиот интерес на математичарите за неа.

Студентите од математичката група на Природно-математичкиот факултет во Скопје изучуваат елементи од теоријата на множествата, главно, во рамките на предметот алгебра. Оваа збирка е работена според наставната програма за тој предмет што го изучуваат во трета година, па е наменета, пред сѐ,за нив.

Материјалот што го опфаќа збиркава се изнесува според учебникот "Предавања по алгебра II" (§1 - §4) од Ѓ. Чупона и Б. Трпеноски, од каде што е земен и извесен број задачи. Потребните дефиниции и особини студентот ќе ги најде таму. Сепак, за поудобно користење на збиркава, дефинициите на некои поими се даваат во задачите, а на крајот е приложен индекс за тие поими.

Задачите се распоредени во шест параграфи и нумерирани се за секој параграф посебно. Повеќето од нив се решени, а оние што не се решени се непосредни последици или од некои особини или од претходно решени задачи; за некои од нив се дадени упатства. Во решенијата на извесен број задачи се користени особини од гореспоменатиот учебник, па при повикувањето, на пример, на особината 15° од 3 пишуваме AII,3.15°. Ако се повикуваме на задача од оваа збирка, тогаш пишуваме, на пример, 3.20 за задачата 20 од параграфот 3.

Седмиот параграф од збиркава содржи историски забелешки за множествата и некои парадокси.

Во сите етапи на изработката на збиркава, од почетокот до конечната редакција, имавме голема и перманентна помош од проф.д-р Ѓ. Чупона, којшто беше и рецензент. Неговите совети, предлози и критички забелешки придонесоа битно да се подобри квалитетот на збиркава. За сето тоа му должиме посебна благодарност.

Ракописот го прочитаа колегите С. Марковски и Н. Пандевски кои изведуваа вежби по предметот алгебра, за што им благодариме. Посебно му заблагодаруваме на колегата С. Марковски кој ја прочита конечната верзија и даде драгоцени забелешки. Ќе му бидеме благодарни на секој што ќе ни достави какви било забелешки во врска со збиркава.

Скопје,
јануари 1975

Авторите

1. ОПЕРАЦИИ СО МНОЖЕСТВА

1.1. Нека $\{A_i \mid i\in I\}$, $I\neq\emptyset$, е произволна фамилија множества и нека $k\in I$. Да се покаже дека $P\subseteq A_k\subseteq S$, каде што $P=\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ и $S=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$.

Решение. Ако $x\in P$, тогаш $x\in A_i$ за секој $i\in I$, па значи $x\in A_k$. Следствено $P\subseteq A_k$. Ако $y\in A_k$, тогаш поради $k\in I$, $y\in S$, што значи дека $A_k\subseteq S$.

1.2. Нека A е множество и $\{B_k \mid k\in K\}$ фамилија множества. Да се докаже дека:

а) $A\cap\left(\bigcap\limits_{k\in K}B_k\right)=\bigcap\limits_{k\in K}(A\cap B_k)$ ако $K\neq\emptyset$,

б) $A\cup\left(\bigcup\limits_{k\in K}B_k\right)=\bigcup\limits_{k\in K}(A\cup B_k)$ ако $K\neq\emptyset$,

за кое било множество A (обопштен асоцијативен закон за пресекот односно унијата).

1.3. Да се најде пресекот B и унијата C на низата множества $A_1,A_2,\dots,A_k,\dots$ ако:

а) $A_k=\{1,2,\dots,k\}$; б) $A_k=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant x<k\}$.

Одговор. а) $B=\{1\}$, $C=\mathbb{N}$. б) $B=[0,1)=A_1$, $C=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.

1.4. Нека $A_k=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ \frac{k-1}{k}\leqslant x<k\}$, $k\in\mathbb{N}$. Да се најде унијата B и пресекот C на низата множества $A_1,A_2,\dots,A_k,\dots$

Одговор. $B=\{0\}\cup\mathbb{R}^+$, $C=\emptyset$.

1.5. Нека A_k е множеството од сите природни броеви што се деливи со природниот број k, т.е. $A_k = \{k,2k,3k,\dots\}$. Да се најде:

а) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$;

б) $A_k\cup A_{jk}$, $A_k\cap A_{jk}$, $j\in\mathbb{N}$;

в) $A_j\cap A_k$, $j\in\mathbb{N}$;

г) $\bigcap\limits_{k\in K} A_k$, K е бесконечно подмножество од $\mathbb{N}$;

д) $\bigcup\limits_{p\in P} A_p$, P е множеството од сите прости броеви.

Одговор. а) $\mathbb{N}$, $\emptyset$. б) A_k, A_{jk}. в) A_s, каде што s е најмалиот заеднички содржател на j и k. г) $\emptyset$. д) $\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

1.6. Нека A е множество, $|A|\geq 2$, и нека $A_x = A\setminus\{x\}$, $x\in A$. Да се покаже дека, кога x се менува во A, унијата на множествата A_x е A, а нивниот пресек е празното множество.

1.7. Да се покаже дека:

$$(A\cap B)\cup(C\cap D)\subseteq(A\cup C)\cap(B\cup D).$$

Дали важи равенство?

Упатство. Да се примени дистрибутивниот закон на унијата спрема пресекот (двапати) и фактот дека $X\cap Y\subseteq X$. Во општ случај левата страна не е еднаква со десната; нпр. $A=\{a\}=D$, $B=\{b\}$, $C=\{a,b\}$.

1.8. Да се докажат следниве равенства (обопштени дистрибутивни закони):

а) $A\cap(\bigcup\limits_k B_k) = \bigcup\limits_k (A\cap B_k)$, $k\in K$.

б) $A\cup(\bigcap\limits_k B_k) = \bigcap\limits_k (A\cup B_k)$, $k\in K$.

Решение. а) $x\in A\cap(\bigcup\limits_k B_k) \Longleftrightarrow x\in A\cap B_j$ за некој $j\in K$, коешто е еквивалентно со $x\in\bigcup\limits_k(A\cap B_k)$.

1.9. Да се докаже дека:

а) $(\bigcup_{k} A_k) \cap (\bigcup_{j} B_j) = \bigcup_{k,j} (A_k \cap B_j)$,

б) $(\bigcap_{k} A_k) \cup (\bigcap_{j} B_j) \subseteq \bigcap_{k,j} (A_k \cup B_j)$,

каде што к и j се менуваат во K и J соодветно.

Упатство. Да се примени задачата 1.8. Задачата под б) да се спореди со 1.7 и 1.8б).

1.10. Ако $\{A_{kj} \mid (k,j) \in K \times J\}$ е фамилија множества, тогаш

$$\bigcup_{j\in J} (\bigcap_{k\in K} A_{kj}) \subseteq \bigcap_{k\in K} (\bigcup_{j\in J} A_{kj}). \qquad (1)$$

Решение. Да ја означиме со L левата, а со D десната страна на (1). Ако $x \in L$, тогаш постои $s \in J$, таков што $x \in \bigcap_{k\in K} A_{ks}$, т.е. $x \in A_{ks}$ за секој $k \in K$, а од тоа $x \in \bigcup_{j\in J} A_{kj}$ за секој $k \in K$. Тоа значи дека $x \in D$, т.е. $L \subseteq D$.

Дека не мора да важи равенство, види 1.7.

1.11. Да се покаже дека

$$(\bigcap_{k} A_k) \cup (\bigcap_{j} B_j) = \bigcap_{j} (\bigcap_{k} (A_k \cup B_j)).$$

Упатство. Да се примени задачата 1.8б).

1.12. Една фамилија од дисјунктни непразни подмножества на едно множество A се вика разбивање (или дисјунктна поделба) на A, ако унијата на таа фамилија е еднаква со A.

Дадени се две разбивања на едно множество A: $\{B_k \mid k\in K\}$ и $\{C_j \mid j \in J\}$. Дали фамилијата што ја сочинуваат сите непразни множества од облик $B_k \cap C_j$ формира разбивање на множеството A?

Решение. Бидејќи $B_k \cap C_j \neq \emptyset$ и $(B_{k_1} \cap C_{j_1}) \cap (B_{k_2} \cap C_{j_2}) = \emptyset$ за $k_1 \neq k_2$, $j_1 \neq j_2$, а

$$\bigcup_{k,j}(B_k \cap C_j) = \underset{j}{\cup}(\underset{k}{\cup}(B_k \cap C_j)) = \underset{j}{\cup}((\underset{k}{\cup}B_k)\cap C_j) =$$

$$= \underset{j}{\cup}(A \cap C_j) = \underset{j}{\cup} C_j = A,$$

фамилијата $\{B_k \cap C_j \mid k \in K, j \in J\}$ е разбивање на A.

1.13. Нека A_k, $k \in K$, се подмножества од некое множество M и, ако $B \subseteq M$, нека $B' = M \setminus B$ е комплементот на B во M. Да се докаже дека се точни следниве равенства (обопштени Де Моргановн теореми):

а) $(\bigcup_{k\in K} A_k)' = \bigcap_{k\in K} A_k'$;

б) $(\bigcap_{k\in K} A_k)' = \bigcup_{k\in K} A_k'$.

1.14. Да се покаже дека

$$\bigcap_{k\in \mathbb{N}} A_k = A_1 \setminus (\bigcup_{k\in \mathbb{N}} (A_1 \setminus A_k)).$$

<u>Решение</u>. Користејќи го фактот што $A \setminus B = A \cap B'$ за кои било подмножества A, B од некое множество M, како и задачата 1.13, добиваме:

$$A_1 \setminus (\bigcup_{k\in \mathbb{N}} (A_1 \setminus A_k)) = A_1 \cap (\bigcup_{k\in \mathbb{N}} (A_1 \setminus A_k))' =$$

$$= A_1 \cap (\bigcap_{k\in \mathbb{N}} (A_1 \setminus A_k)') = A_1 \cap (\bigcap_{k\in \mathbb{N}} (A_1' \cup A_k)) =$$

$$= \bigcap_{k\in \mathbb{N}} (A_1 \cap (A_1' \cup A_k)) = \bigcap_{k\in \mathbb{N}} (A_1 \cap A_k) = \bigcap_{k\in \mathbb{N}} A_k.$$

1.15. Да се докаже инклузијата

$$(\underset{k}{\cup} A_k) \setminus (\underset{k}{\cup} B_k) \subseteq \underset{k}{\cup}(A_k \setminus B_k), \quad k \in K.$$

Да се покаже со пример дека во општ случај равенството не важи.

<u>Одговор</u>. Ако $A_1, A_2 = B_1, B_2$ се три непразни дисјунктни множества, тогаш

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) = A_1 \neq A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$

1.16. Нека Φ е фамилија подмножества од некое множество M (т.е. $\Phi \subseteq \mathcal{P}(M)$) и нека $\mathcal{P}(X)$ е партитивното множество од множеството X. Да се покаже дека:

а) $\bigcap\limits_{X\in\Phi} \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\bigcap\limits_{X\in\Phi} X)$; б) $\bigcup\limits_{X\in\Phi} \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup\limits_{X\in\Phi} X)$.

1.17. Да се покаже дека

$$(A \times B = A \times C \text{ и } A \neq \emptyset) \Rightarrow B = C.$$

1.18. Да се покаже дека

$$A \times (\bigcup_k B_k) = \bigcup_k (A \times B_k), \quad k \in K.$$

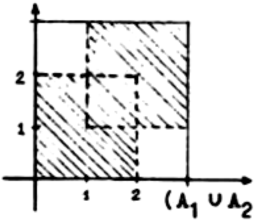
1.19. Нека $\{A_k \mid k \in K\}$ и $\{B_k \mid k \in K\}$ се две фамилии множества при што $K \neq \emptyset$. Да се покаже дека:

$$(\bigcap_k A_k) \times (\bigcap_k B_k) = \bigcap_k (A_k \times B_k). \qquad (1)$$

Дали е точно равенството

$$(\bigcup_k A_k) \times (\bigcup_k B_k) = \bigcup_k (A_k \times B_k)? \qquad (2)$$

Упатство. Точноста на (1) лесно се покажува, а дека (2) не важи во општ случај, покажува следниов пример: $A_1 = [0,2] = B_1$ и $A_2 = [1,3] = B_2$, каде што $[0,2]$ и $[1,3]$ се сегменти од реалната права.



Тогаш

$$(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) \supset (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2).$$

Во општ случај десната страна од (2) е подмножество од левата.

1.20. Нека K и J се две непразни множества, а $\{A_k \mid k \in K\}$ и $\{B_j \mid j \in J\}$ се две фамилии множества. Да се докажат равенствата:

а) $(\bigcup\limits_k A_k) \times (\bigcup\limits_j B_j) = \bigcup\limits_{(k,j)} (A_k \times B_j)$

б) $(\bigcap_{k} A_k)\times(\bigcap_{j} B_j) = \bigcap_{(k,j)}(A_k\times B_j)$, $(k,j)\in K\times J$.

1.21. Да се докаже дека:

а) $(A_1\times A_2)\setminus(B_1\times B_2) = [(A_1\setminus B_1)\times A_2]\cup[A_1\times(A_2\setminus B_2)]$.

б) $\prod_{k=1}^{n} A_k\setminus\prod_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n}[A_1\times\ldots\times A_{k-1}\times(A_k\setminus B_k)\times A_{k+1}\times\ldots\times A_n]$.

1.22. Да се докаже точноста на равенствата:

а) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

б) $A\Delta(A\cap B) = A\setminus B$;

в) $(A\Delta B)\Delta(A\cap B) = A\cup B$.

(Притоа, $X\Delta Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$.)

1.23. Дали од $A\subseteq C$, $B\subseteq D$ следува $A\Delta B\subseteq C\Delta D$?

Одговор. Не.

1.24. Да се покаже дека:

а) $A\Delta B\subseteq(A\Delta C)\cup(B\Delta C)$; б) $(A\setminus B)\Delta(C\setminus D)\subseteq(A\Delta C)\cup(B\Delta D)$.

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}(A\Delta C)\cup(B\Delta C) &= (A\cap C')\cup(A'\cap C)\cup(B\cap C')\cup(B'\cap C) =\\ &= [(A\cup B)\cap C']\cup[C\cap(A'\cup B')] = \ldots =\\ &= (A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C')\supseteq\\ &\supseteq(A\cup B)\cap(A'\cup B') = A\Delta B.\end{aligned}$$

1.25. Да се покаже дека

$$(A_1\Delta A_2\Delta\ldots\Delta A_k)\cap B = (A_1\cap B)\Delta(A_2\cap B)\Delta\ldots\Delta(A_k\cap B).$$

1.26. Да се покаже дека

$$(A_1 * A_2 * \ldots * A_n)\Delta(B_1 * B_2 * \ldots * B_n)\subseteq(A_1\Delta B_1) * \ldots * (A_n\Delta B_n),$$

каде што $*$ е или операцијата $\cup$ или операцијата $\cap$.

Решение. Да го докажеме тврдењето за операцијата $\cup$, а слично се докажува и за пресекот.

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)\Delta\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \Big[\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)\cap\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k'\Big)\Big]\cup\Big[\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k'\Big)\cap\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big)\Big] =$$

$$= \Big[\bigcup_{k=1}^{n}(A_k\cap B_1'\cap\ldots\cap B_n')\Big]\cup\Big[\bigcup_{k=1}^{n}(A_1'\cap\ldots\cap A_n'\cap B_k)\Big] \subseteq$$

$$\subseteq \Big[\bigcup_{k=1}^{n}(A_k\cap B_k')\Big]\cup\Big[\bigcup_{k=1}^{n}(A_k'\cap B_k)\Big] =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n}\big[(A_k\cap B_k')\cup(A_k'\cap B_k)\big] = \bigcup_{k=1}^{n}(A_k\Delta B_k).$$

1.27. Нека M е непразно множество, а $\mathcal{F}$ фамилија подмножества од M со следниве особини:

(i) $\emptyset\notin\mathcal{F}$;

(ii) $A,B\in\mathcal{F} \Rightarrow A\cap B\in\mathcal{F}$;

(iii) $A\in\mathcal{F}, A\subseteq X\subseteq M \Rightarrow X\in\mathcal{F}$.

Тогаш за $\mathcal{F}$ велиме дека е филтер на M.

Да се провери дали фамилијата:

а) $\mathcal{F}=\{A \mid A\subseteq \mathbb{N},\ \mathbb{N}\setminus A$ конечно$\}$,

б) $\mathcal{F}=\{A \mid A\subseteq \mathbb{N},\ A$ конечно$\}$

е филтер над $\mathbb{N}$.

Одговор. а)Да. б) Не.

1.28. Нека M е бесконечно множество и нека

$$\mathcal{F}=\{X \mid X\subseteq M,\ M\setminus X \text{ конечно}\}.$$

Да се покаже дека $\mathcal{F}$ е филтер над M.

1.29. Нека M е бесконечно множество и нека

$$\mathcal{F}=\{X \mid X\subseteq M,\ M\setminus X \text{ пребројиво или конечно}\}.$$

Да се покаже дека $\mathcal{F}$ е филтер над M.

1.30. Да се покаже дека пресекот на произволна фамилија филтри над множеството M е филтер на M.

1.31. Нека A е непразно подмножество од множеството M. Да се покаже дека

$$\mathcal{F}(A) = \{X \mid X \subseteq M,\ A \subseteq X\}$$

е филтер над M. (Тој се вика главен филтер.)

Решение. Нека $A \subseteq A_1$ и $A \subseteq A_2$; тогаш $A \subseteq A_1 \cap A_2$, па значи $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}(A)$. Нека $A_1 \in \mathcal{F}(A)$ и $A_1 \subseteq X \in \mathcal{P}(M)$. Тогаш $A \subseteq X$, па $X \in \mathcal{F}(A)$. Бидејќи $A \neq \emptyset$ имаме $A \not\subseteq \emptyset$, т.е. $\emptyset \notin \mathcal{F}(A)$. Значи, $\mathcal{F}(A)$ е филтер над M.

1.32. Филтерот $\mathcal{F}$ е главен ако и само ако $\mathcal{F}$ го содржи пресекот на сите свои множества.

Решение. Да претпоставиме дека филтерот $\mathcal{F}$ над множеството M е главен. Тогаш постои непразно подмножество A од M, така што $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$ и притоа A е пресекот на сите множества од $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F}$ го содржи пресекот на сите свои множества.

Обратно, нека филтерот $\mathcal{F}$ над множеството M го содржи пресекот на сите свои множества. Ако A е тој пресек, тогаш $A \neq \emptyset$, па $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$, т.е. филтерот $\mathcal{F}$ е главен.

1.33. Секој филтер над конечно множество е главен.

Упатство. Последица од 1.32.

1.34. Да се покаже дека фамилијата

$$\mathcal{F} = \{X \mid X \subseteq \mathbb{N},\ \mathbb{N}\setminus X \subseteq 2\mathbb{N},\ \mathbb{N}\setminus X \text{ конечно}\}$$

е филтер над $\mathbb{N}$. Дали овој филтер е главен?

Одговор. Не.

1.35. Фамилијата Φ подмножества од M е содржана во некој филтер над M ако и само ако пресекот на прозволен конечен број множества од Φ е непразен.

Решение. Да претпоставиме дека пресекот на произволен конечен број множества од Φ не е празен. Да ја означиме со $\mathcal{F}$ фамилијата на оние подмножества од M, секое од кои содржи пресек од конечен број на некои множества од Φ. Бидејќи тие пресеци, по услов, не се празни, $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Потоа, ако $A \subseteq M$ го содржи множеството $P = A_1 \cap \ldots \cap A_m$, $A_k \in \Phi$, а $B \subseteq M$ го содржи $S = B_1 \cap \ldots \cap B_n$, $B_j \in \Phi$, тогаш $A \cap B$ го содржи $P \cap S = A_1 \cap \ldots \cap A_m \cap B_1 \cap \ldots \cap B_n$. Значи, $A \cap B \in \mathcal{F}$. На крајот, ако $A \subseteq X \subseteq M$, $A \in \mathcal{F}$, тогаш е јасно дека $X \in \mathcal{F}$. Значи $\mathcal{F}$ е филтер над M и $\Phi \subseteq \mathcal{F}$.

Обратното е јасно.

1.36. Нека Φ е фамилија подмножества од едно множество M со следниве особини:

(i) $M \in \Phi$; (ii) $\Phi' \subset \Phi \Rightarrow \bigcap_{F \in \Phi'} F \in \Phi$.

Секоја фамилија Φ со особините (i) и (ii) се вика мурова фамилија на M.

Да се покаже дека:

а) пресекот на мурови фамилии на едно множество M е пак мурова фамилија.

б) за секое подмножество A од M постои "најмало" множество $\bar{A}$ од Φ такво што $A \subseteq \bar{A}$. ($\bar{A}$ е "најмало" во следнава смисла: ако $B \in \Phi$ и $A \subseteq B$, тогаш $\bar{A} \subseteq B$.) Притоа, $A = \bar{A}$ ако и само ако $A \in \Phi$.

Решение. а) Нека Φ_k, $k \in K$, се мурови фамилии и нека Φ е нивниот пресек. Според (i), $M \in \Phi_k$ за секој $k \in K$, па $M \in \Phi$. Нека $\Phi' \subseteq \Phi$. Тогаш $\Phi' \subseteq \Phi_k$ за секој $k \in K$, а според (ii), имаме $\bigcap_{F \in \Phi'} F \in \Phi_k$ за секој $k \in K$, па значи тој пресек му припаѓа и на Φ. Следствено, Φ е мурова фамилија.

б) Според (i), фамилијата Φ' елементи F од Φ што го содржат A не е празна. Според (ii), $\bar{A} = \bigcap_{F \in \Phi'} F \in \Phi$; значи, имаме $A \subseteq \bar{A}$ и, јасно, $\overline{X}$ е најмалото множество од Φ што го содржи A.

Последното тврдење е очигледно.

1.37. Ако $X_1, X_2, \dots$ е низа множества, тогаш множеството $\underline{\lim}\, X_k$, односно $\overline{\lim}\, X_k$, определено со равенството

$$\underline{\lim}\, X_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} X_j \quad \text{односно} \quad \overline{\lim}\, X_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} X_j$$

се вика долен лимес (или лимес инфериор) односно горен лимес (или лимес супериор) на низата $X_1, X_2, \dots$

Да се покаже дека:

а) ако $X_{2j-1} = A$, $X_{2j} = B$ $(j=1,2,3,\dots)$ тогаш $\underline{\lim}\, X_k = A \cap B$, $\overline{\lim}\, X_k = A \cup B$;

б) $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \subseteq \underline{\lim}\, X_k \subseteq \overline{\lim}\, X_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ за произволна низа $X_1, X_2, \dots$ Да се даде пример на низа $X_1, X_2, \dots$, таква што ни на едно место при погорните инклузии да не важи равенство;

в) ако низата множества монотоно расте, $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$, или пак монотоно опаѓа, $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$, тогаш $\underline{\lim}\, X_k = \overline{\lim}\, X_k$;

г) ако $X_k \subseteq M$ за секој $k \in \mathbb{N}$ и ако ставиме $I = \underline{\lim}\, X_k$ и $S = \overline{\lim}\, X_k$, тогаш $I' = \overline{\lim}\, X_k'$, а $S' = \underline{\lim}\, X_k'$. (Притоа $X' = M \setminus X$.)

Решение. а) Тврдењето следува од дефинициите и од тоа што $X_k \cap X_{k+1} \cap \dots = A \cap B$ и $X_k \cup X_{k+1} \cup \dots = A \cup B$ за секој $k \in \mathbb{N}$.

б) Првата и третата инклузија се јасни, а втората следува од 1.10. Ако $A = \{a,x\}$, $B = \{b,y\}$, $C = \{a,b\}$, тогаш за низата $A, B, C, B, C, \dots$ имаме: $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k = \emptyset$, $\underline{\lim}\, X_k = \{b\}$, $\overline{\lim}\, X_k = \{a,b,y\}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \{a,x,b,y\}$, т.е. сите инклузии се стриктни.

г) Да се применат Де Моргановите теореми (види 1.13).

2. ПРЕСЛИКУВАЊА

2.1. Да се провери кое од следниве пресликувања е инјекција, сурјекција или биекција:

а) $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}$, $f(x)=\frac{x}{2x+1}$;

б) $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, $f(a+bi)=a^2+b^2$;

в) $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N}$, $f(x)=x^2+1$.

Решение. Едно пресликување $f:A\longrightarrow B$ се вика: *сурјекција*, ако $(\forall y\in B)(\exists x\in A)f(x)=y$; *инјекција*, ако $x_1,x_2\in A$, $x_1\neq x_2$ $f(x_1)\neq f(x_2)$ (или еквивалентно, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$); *биекција*, ако тоа е и сурјекција и инјекција.

а) Ако $f(x_1)=f(x_2)$, тогаш $x_1(2x_2+1)=x_2(2x_1+1)$, од каде што $x_1=x_2$; значи, f е инјекција. Бидејќи $\frac{x}{2x+1}<1$ за секој природен број x, бројот, на пример, $\frac{3}{2}$ не е слика на ниеден елемент од $\mathbb{N}$, што значи f не е сурјекција, па следствено не е ни биекција.

б) Пресликувањето не е инјекција, зашто, на пример, $a+bi\neq a-bi$ за $b\neq 0$, но $f(a+bi)=f(a-bi)$. Ако c е произволен ненегативен реален број, тогаш $f(\sqrt{c})=c$. Значи, f е сурјекција.

в) Не е инјекција, зашто, на пример, $f(2)=f(-2)=5$, а не е ни сурјекција, зашто, на пример, 3 не е слика на ниеден елемент.

2.2. Нека $f:A\longrightarrow B$ и $g:B\longrightarrow C$ се пресликувања и нека со h е означен нивниот производ. Да се покаже дека:

а) ако f и g се инјекции, тогаш и h е инјекција;

б) ако f и g се сурјекции, тогаш и h е сурјекција.

(Следствено, ако f и g се биекции , тогаш и h е биекција.)

в) Дали важи обратното од а) или б)?

Решение. Ако $f:A\longrightarrow B$ и $g:B\longrightarrow C$ се пресликувања, тогаш $h=gf$, дефинирано со: $(\forall x\in A)h(x)=g(f(x))$ е пресликување од A во C, наречено производ (или состав) на пресликувањата f и g.

а) Нека $f:A\longrightarrow B$ и $g:B\longrightarrow C$ се инјекции и нека $h=gf$. Ако $h(x_1)=h(x_2)$, тогаш $g(f(x_1))=g(f(x_2))$, па бидејќи g е инјекција, добиваме $f(x_1)=f(x_2)$, од што следува $x_1=x_2$ бидејќи и f е инјекција. Значи, h е инјекција.

б) Нека f и g се сурјекции и нека с е произволен елемент од C. Бидејќи g е сурјекција, постои елемент $y\in B$, таков што $g(y)=c$, а како и f е сурјекција, постои $x\in A$, таков што $f(x)=y$, па $g(f(x))=c$, т.е. $h(x)=c$. Значи, h е сурјекција.

в) Не важи. На пример, $A=\{a,p\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{c,s\}$, $f:A\longrightarrow B$, $f(a)=1$, $f(p)=2$, $g:B\longrightarrow C$, $g(1)=g(3)=s$, $g(2)=c$; gf е инјекција, но g не е, а gf е и сурјекција, но f не е.

2.3. Нека $f:A\longrightarrow B$, $g:B\longrightarrow C$ се пресликувања. Да се покаже дека:

а) ако gf е инјекција, тогаш f е инјекција.

б) ако gf е сурјекција, тогаш g е сурјекција.

Решение. а) Нека gf е инјекција и $f(x_1)=f(x_2)$. Тогаш

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (gf)(x_1)=(gf)(x_2)\Rightarrow x_1=x_2,$$

што значи f е инјекција.

б) Нека gf е сурјекција и нека c е произволен елемент од C. Тогаш постои $x\in A$, таков што $(gf)(x)=c$, т.е. постои елемент $f(x)=y\in B$, таков што $g(y)=c$, што значи дека g е сурјекција.

Дека g во а) не мора да биде инјекција, а f во б) не мора да биде сурјекција види в) од претходната задача.

2.4. Пресликувањето $f:A\longrightarrow B$ е инјекција ако и само ако постои пресликување $g:B\longrightarrow A$, такво што $gf=1_A$.

Упатство. Ако f е инјекција и ако $f(x)=y$ да се стави $g(y)=x$, а $g(y)$ да се земе произволно кога $y\in B\setminus f(A)$. За обратното да се искористи претходната задача, а).

2.5. Пресликувањето $f:A\longrightarrow B$ е сурјекција ако и само ако постои пресликување $h:B\longrightarrow A$, такво што $fh = 1_B$.

2.6. Да се покаже дека пресликувањето $f:X\longrightarrow Y$ е инјекција ако и само ако за кое било множество U и кои било пресликувања $g_1, g_2:U\longrightarrow X$ е исполнет условот

$$fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2. \qquad (1)$$

Решение. Нека $f:X\longrightarrow Y$ е инјекција, а $g_1, g_2:U\longrightarrow X$ пресликувања со особината $fg_1=fg_2$. Тогаш, за секој $u\in U$, имаме:

$$f(g_1(u)) = f(g_2(u)), \text{ т.е. } g_1(u) = g_2(u),$$

па значи $g_1=g_2$.

Обратно, за пресликувањето f нека е исполнет условот (1) за кое било множество U и кои било пресликувања $g_1, g_2:U\longrightarrow X$. Ако f не би било инјекција, ќе постојат елементи $x_1, x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, за кои $f(x_1)=f(x_2)$. Ставајќи $U=\{x_1, x_2\}$, $g_1(x_1)=x_2$, $g_1(x_2)= x_2$ и $g_2(x_1)=g_2(x_2)=x_1$, тогаш јасно е дека $fg_1 = fg_2$, но $g_1\neq g_2$.

2.7. Да се покаже дека пресликувањето $f:X\longrightarrow Y$ е сурјекција ако и само ако за кое било множество Z и кои било пресликувања $h_1,h_2:Y\to Z$ е исполнет условот

$$h_1f = h_2f \Rightarrow h_1 = h_2. \qquad (1)$$

Решение. Нека f е сурјекција и $h_1f = h_2f$, каде што h_1, h_2 се пресликувања од Y во Z. Ако $y\in Y$, тогаш постои $x\in X$, таков што $f(x)=y$. Тогаш имаме:

$$h_1(y) = h_1(f(x)) = h_2(f(x)) = h_2(y), \text{ т.е. } h_1 = h_2.$$

Обратно, нека f не е сурјекција. Тогаш постои барем еден елемент $y_0\in Y\setminus f(X)$. Ставајќи $Z = Y$ и

$$h_1(y)=y \text{ за } y\neq y_0,\ h_1(y_0)=y_1\neq y_0 \quad\text{и}\quad h_2(y)=y,$$

добиваме $h_1f(x) = h_2f(x)$; според (1) треба да е и $h_1(y)=h_2(y)$ за секој $y\in Y$, но тоа не е точно, на пример, за $y=y_0$, што претставува противречност на (1). Следствено f е сурјекција.

2.8. Слично како во претходните две задачи, да се даде карактеристика и за биекциите.

Решение. Според претходните две задачи, заклучуваме дека пресликувањето $f:X\to Y$ е биекција ако и само ако за кои било множества U и Z и кои било пресликувања $g_1,g_2:U\to X$, $h_1,h_2:Y\to Z$ се исполнети условите:

$$fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2, \qquad h_1f = h_2f \Rightarrow h_1 = h_2.$$

2.9. Нека A е конечно множество и нека $f:A\to A$ е пресликување. Да се докаже дека f е инјекција ако и само ако f е сурјекција.

2.10. Нека дијаграмите Д.1 и Д.2 се комутативни:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "q"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h"'] & S \arrow[r, "p"] \arrow[d, "j"] & T \\
 & C \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Д.1

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & P \arrow[d, "j"] \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] & C \arrow[r, "k"] & E
\end{tikzcd}$$

Д.2

а) Колку можни патишта (т.е. "низи" од стрелки) има од А до Т во Д.1?

б) Да се формираат сите можни прозводи од пресликувањата во Д.2 и потоа да се наведе кои пресликувања се еднакви.

Решение. Еден дијаграм од пресликувања меѓу множества се вика комутативен ако кои било два пата (што одат по стрелките) од едно множество во друго определуваат исто пресликување меѓу тие множества.

а) Можни се шест патишта од А до Т: $A\to B\to T$, $A\to S\to T$, $A\to C\to T$, $A\to B\to S\to T$, $A\to B\to S\to C\to T$ и $A\to S\to C\to T$; притоа сите производи: qf, pg, kh, pif, $kjif$, kjg претставуваат исто пресликување од А во Т.

б) gf, if, ji, kh, kg, kgf, jif;

$gf = h$, $ji = kg$, $jif = kgf = kh$.

2.11. Нека дијаграмите Д.1 и Д.2 се комутативни (притоа,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, "f"'] & & A \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "1_B"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\
& A \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Д.1 Д.2

1_X е идентичното пресликување на X). Да се извлечат сите информации што ги дава:

а) Д.1; б) Д.2; в) Д.1 и Д.2 заедно.

Решение. а) Бидејќи дијаграмот е комутативен, следува $gf = 1_A$. Потоа, бидејќи gf е инјекција (зашто 1_A е инјекција), f мора да е инјекција, а бидејќи gf е и сурјекција, g мора да е сурјекција.

в) Освен информациите од а) и б) овде заклучуваме дека f и g се биекции и дека се заемно инверзни. Јасно е дека f и g се заемно инверзни ако и само ако дијаграмите Д.1 и Д.2 се комутативни.

2.12. Нека $f:A\longrightarrow B$ е пресликување. Да се покаже дека постои сурјекција s и инјекција i, такви што $f = is$.

Решение. Нека $C = f(A) \subseteq B$, а пресликувањата $s:A\longrightarrow C$ и $i:C\longrightarrow B$ нека се дефинирани со:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "s"'] & & B \\
& f(A) \arrow[ur, dashed, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$$(\forall x\in A)s(x)=f(x),$$

$$(\forall y\in C)i(y)= y.$$

Јасно е дека s е сурјекција, а i инјекција и дека $is = f$ (т.е. дека приложениот дијаграм е комутативен).

2.13. Нека $\{M_i \mid i\in I\}$ е фамилија дисјунктни множества (т.е. $M_k\cap M_j = \emptyset$ за $k\neq j$) и нека $M = \bigcup_{i\in I} M_i$. За секој $i\in I$ го определуваме пресликувањето $j_i:M_i\longrightarrow M$ со $j_i(x)=x$. Да се покаже дека:

а) за секој $i\in I$, j_i е инјекција;

б) ако $f_i:M_i\longrightarrow S$ е фамилија пресликувања, тогаш фамилијата дијаграми Д.1 е еднозначно решлива (т.е. постои еднозначно определено пресликување $f:M\longrightarrow S$ со особината $fj_i = f_i$);

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "j_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & M \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Д.1

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & T \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Д.2

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "j_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & M \arrow[dl, dashed, "p"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Д.3

в) ако T е множество и $g_i:M_i\longrightarrow T$ фамилија пресликувања, такви што секоја фамилија дијаграми Д.2 е еднозначно решлива, тогаш фамилијата дијаграми Д.3 е еднозначно решлива и притоа p е биекција.

Решение. Ако $j_i(x)=j_i(y)$, тогаш од дефиницијата на j_i добиваме $x=y$, т.е. j_i е инјекција.

б) За секој $x\in M$ постои $i\in I$, таков што $x\in M_i$. Да го означиме тој x со x_i и да ставиме $f(x) = f_i(x_i)$. Тогаш

$$f_i(x_i) = f(x) = f(j_i(x_i)) = (fj_i)(x_i),$$

т.е. $f_i = fj_i$. Ако $f':M \longrightarrow S$ е пресликување со особината $f'j_i = f_i$, тогаш

$$f'(x) = f'(j_i(x_i)) = (f'j_i)(x_i) = (fj_i)(x_i) = f(j_i(x_i)) = f(x),$$

па значи f е еднозначно определено.

в) Според б), фамилијата Д.3 е еднозначно решлива. Да покажеме дека p е биекција. За таа цел во Д.2 на местото од S ќе ставиме M; добиваме дека фамилијата дијаграми Д.4 е еднозначно решлива. Да ги сврземе дијаграмите Д.3 и Д.4 како што е прикажано со Д.5 и Д.6. Од Д.5 добиваме дека $ph = 1_T$, а од Д.6 - $hp=1_M$. Следствено (AII,1.10°) p е биекција.

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "j_i"'] & & T \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Д.4

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dd, "g_i"'] & & T \arrow[dl, "h"] \\
& M \arrow[dl, "p"] & \\
T & &
\end{tikzcd}$$

Д.5

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, dash, "j_i"] \arrow[dd] & & M \arrow[dl, "p"] \\
& T \arrow[dl, "h"] & \\
T & &
\end{tikzcd}$$

Д.6

2.14. Ако е f пресликување од X во Y, каков е односот меѓу множествата:

а) $f(\bigcup_i A_i)$ и $\bigcup_i f(A_i)$;

б) $f(\bigcap_i A_i)$ и $\bigcap_i f(A_i)$;

в) $f(X\setminus A)$ и $Y\setminus f(A)$,

каде што $A_i, A \subseteq X$?

Одговор. а) Важи равенство.

б) $f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$. Дека во општ случај не важи равенство, покажува следниов пример. Нека $X=Y=\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $A_1=(-\infty,0]$ и

$A_2=[0,+\infty)$; имаме:

$$f(A_1\cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}\subset[0,+\infty) = f(A_1)\cap f(A_2).$$

Но, ако е f инјекција, тогаш важи равенство.

в) Во општ случај множествата $f(X\setminus A)$ и $Y\setminus f(A)$ не се споредливи, што се гледа од примерот во б) земајќи $A = A_1$.

Ако f е инјекција, тогаш $f(X\setminus A)\subseteq Y\setminus f(A)$, а ако е f сурјекција, тогаш $f(X\setminus A)\supseteq Y\setminus f(A)$, па значи во случај да е f биекција важи равенство.

<u>**2.15**</u>. Нека $f:X\longrightarrow Y$ е пресликување и $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$. Каков е односот меѓу множествата:

а) $f^{-1}(f(A))$ и A; б) $f(f^{-1}(B))$ и B?

Притоа со $f^{-1}(B)$ е означено множеството $\{x\mid x\in X,\ f(x)\in B\}$.

<u>Одговор</u>. а) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$. б) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$. Дека не мора да важи равенство ни во а) ни во б) покажува следниов пример: $X = \{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, $f(x_1) = f(x_2) = y_1$, $A=\{x_1\}$, $B = Y$.

<u>**2.16**</u>. Нека $f:X\longrightarrow Y$ е пресликување. Да се покаже дека:

а) $f^{-1}(f(A)) = A$ за секое $A\subseteq X$ ако и само ако f е инјекција.

б) $f(f^{-1}(B)) = B$ за секое $B\subseteq Y$ ако и само ако f е сурјекција.

<u>Забелешка</u>. Да се уочи дека f^{-1} не е ознака за пресликување од Y во X туку од $\mathcal{P}(Y)$ во $\mathcal{P}(X)$. Уште повеќе, пишувајќи $f(A)$ за $A\subseteq X$, ние f го интерпретираме како пресликување од $\mathcal{P}(X)$ во $\mathcal{P}(Y)$. Види ги задачите 2.17 и 2.18.

<u>**2.17**</u>. Нека $f:X\longrightarrow Y$ е пресликување. Ако ставиме

$$(\forall A\subseteq X)f_0(A) = f(A) = \{f(a)\mid a\in A\},$$

тогаш $f_0:\mathcal{P}(X)\longrightarrow\mathcal{P}(Y)$ е пресликување.

Да се покаже дека f_0 е биекција ако и само ако f е биекција.

Решение. Нека f е биекција. Ако $A_1,A_2\subseteq X$ и $A_1\neq A_2$, тогаш (можеме да претпоставиме дека) постои $x_1\in A_1$, таков што $x_1\notin A_2$, па $f(x_1)\in f(A_1)$ и $f(x_1)\notin f(A_2)$ (бидејќи f е инјекција). Значи, $f_0(A_1)\neq f_0(A_2)$, т.е. f_0 е инјекција. Нека $B\subseteq Y$. Ако $B=\emptyset$, тогаш за $\emptyset\subseteq X$ имаме $f(\emptyset)=\emptyset$. Ако $B\neq\emptyset$, тогаш $A=f^{-1}(B)$ е подмножество од X (непразно, бидејќи f е сурјекција), такво што $f(A)=B$, т.е. $B=f_0(A)$. Значи, f_0 е и сурјекција. Следствено, f_0 е биекција.

Обратно, нека f_0 е биекција. Ако $x_1,x_2\in X$ и $x_1\neq x_2$, тогаш $\{x_1\}\neq\{x_2\}$, па бидејќи f_0 е инјекција, имаме $f_0(\{x_1\})\neq f_0(\{x_2\})$, од што следува $f(x_1)\neq f(x_2)$, т.е. f е инјекција. Ако y е произволен елемент од Y, тогаш, бидејќи f_0 е сурјекција, $f^{-1}(\{y\})$ е подмножество од X со барем еден елемент, на пример x_0. Така, $f(x_0)=y$, т.е. f е и сурјекција. Значи, f е биекција.

2.18. Нека $f:X\longrightarrow Y$ е пресликување. Да ставиме:

$$(\forall B\subseteq Y)\, f^*(B) = f^{-1}(B) = \{x \mid x\in X,\ f(x)\in B\}.$$

Да се покаже дека:

а) f^* е пресликување;

б) f^* е инјекција ако и само ако f е сурјекција;

в) f^* е сурјекција ако и само ако f е инјекција.

Решение. а) За секое множество $B\subseteq Y$, множеството $f^{-1}(B)\subseteq X$ е еднозначно определено, па значи f^* е пресликување од $\mathcal{P}(Y)$ во $\mathcal{P}(X)$. Притоа $f^*(\emptyset)=\emptyset$, но исто така и $f^*(B)=\emptyset$ за секое $B\subseteq Y\setminus f(X)$.

б) Нека f е сурјекција и нека $f^*(B_1)=f^*(B_2)$. Тогаш, според дефиницијата на f^*, имаме $f^{-1}(B_1)=f^{-1}(B_2)$, а од тоа $f(f^{-1}(B_1))=f(f^{-1}(B_2))$. Бидејќи f е сурјекција, од 2.12 следува $f(f^{-1}(B_1))=B_1$, $f(f^{-1}(B_2))=B_2$, па значи $B_1=B_2$, т.е. f^* е инјекција.

Нека сега f^* е инјекција и нека $y\in Y$. Множеството $f^*(\{y\})$ не е празно, зашто $f^*(\emptyset)=\emptyset$ а f^* е инјекција. Значи, во $f^*(\{y\})$

постои барем еден елемент $x\in X$, таков што $f(x)=y$, т.е. f е сурјекција.

в) Нека f е инјекција и нека $A\subseteq X$. Ако $A=\emptyset$, тогаш $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, т.е. $\emptyset\in\mathcal{P}(X)$ е слика на $\emptyset\in\mathcal{P}(Y)$ при f. Нека $A\neq\emptyset$ и нека $f(A)=B$. Тогаш $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$, а бидејќи f е инјекција, од 2.12 следува дека $f^{-1}(f(A)) = A$. Значи, за секое $A\subseteq X$, постои $B\subseteq Y$, такво што $f^*(B)=A$, т.е. f^* е сурјекција.

Нека f^* е сурјекција и нека $f(x_1)=f(x_2)=y$ $(x_1,x_2\in X)$. Кога би било $x_1\neq x_2$, тогаш $f^{-1}(\{y\})\supseteq\{x_1,x_2\}$, а тоа значи дека $\{x_1\}$ не е слика на ниеден елемент од $\mathcal{P}(Y)$ при f^*, т.е. f^* не би било сурјекција. Следствено, $x_1=x_2$, т.е. f е инјекција.

2.19. Нека $f:X\longrightarrow Y$ е пресликување и нека f_0 и f^* се пресликувањата од задачите 2.17 и 2.18. При кои услови важи равенството:

а) $f^*f_0 = 1$; б) $f_0f^* = 1$?

Одговор. а) Ако (и само ако) f е инјекција. б) Ако (и само ако) f е сурјекција.

2.20. Ако A е непразно множество, да се покаже дека тоа е бесконечно ако и само ако множеството $\mathcal{T}_A$ од сите трансформации на A е бесконечно.

Решение. Ако A е конечно множество со n елементи, тогаш $\mathcal{T}_A$ содржи точно n^n елементи, па значи, ако $\mathcal{T}_A$ е бесконечно, тогаш и A е бесконечно.

Обратно, нека A е бесконечно. За секој $a\in A$ го дефинираме пресликувањето $f_a:A\longrightarrow A$ со

$$(\forall x\in A)\, f_a(x) = a.$$

Јасно е дека множеството $\{f_a \mid a\in A\}$ е бесконечно, а бидејќи е подмножество од $\mathcal{T}_A$, следува дека и $\mathcal{T}_A$ е бесконечно.

2.21. Нека A е подмножество од множеството X и нека $f:X\longrightarrow Y$ е пресликување. Ако $f|A$ е рестрикцијата од f на A, да се покаже дека:

а) ако f е инјекција, тогаш и $f|A$ е инјекција;

б) ако $f|A$ е сурјекција, тогаш и f е сурјекција;

в) Да се дадат примери од кои ќе се види дека $f|A$ може да биде инјекција, а f да не биде и f да биде сурјекција, а $f|A$ да не биде.

Решение. в) $X=\{a,b,c,d,e\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$, $f:a\rightarrow 1$, $b\rightarrow 2$, $c\rightarrow 3$, $d\rightarrow 3$, $e\rightarrow 4$, $A=\{a,b,c\}$; f е сурјекција, а $f|A$ не е сурјекција и $f|A$ е инјекција, а f не е инјекција.

2.22. Нека $f:X\longrightarrow Y$ е пресликување и $A\subsetneq X$. Ако g е рестрикцијата од f на A, т.е. $g=f|A$, да се покаже дека

$$B\subsetneq Y \Longrightarrow g^{-1}(B)=A\cap f^{-1}(B).$$

2.23. Нека $A\subsetneq B\subsetneq C$ и нека $f:A\longrightarrow E$, $g:B\longrightarrow E$, $h:C\longrightarrow E$ се пресликувања. Ако $(\forall a\in A)g(a)=f(a)$, т.е. $g|A=f$, тогаш пресликувањето g се вика проширување од f.

Да се покаже дека: ако h е проширување од g, а g е проширување од f, тогаш и h е проширување од f.

2.24. Нека $f:2\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ е пресликување. Во кој случај постои биекција од $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, која е проширување на f?

Одговор. f мора да е инјекција, а множеството $\mathbb{N}\setminus f(2\mathbb{N})$ бесконечно.

2.25. Нека $f:A\longrightarrow B$ е инјекција и нека $C\subsetneq A\setminus f(A)$. Да ставиме:

$$f^0(C)=C,\quad f^{n+1}(C)=f(f^n(C)),\quad S=\bigcup_{n=0}^{\infty}f^n(C).$$

Да се покаже дека:

а) $S = C \cup f(S)$;

б) $S \cap f(A \setminus S) = \emptyset$;

в) пресликувањето $f^*: A \longrightarrow C \cup f(A)$, определено со

$$f^*(x) = \begin{cases} x & \text{за } x \in S, \\ f(x) & \text{за } x \in A \setminus S \end{cases}$$

е биекција.

Решение. а) Имаме:

$$S = C \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(C)\right) = C \cup f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{n-1}(C)\right) =$$

$$= C \cup f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(C)\right) = C \cup f(S).$$

б) Од изборот на C следува дека $C \cap f(A) = \emptyset$. Бидејќи f е инјекција, имаме и $f(S) \cap f(A \setminus S) = \emptyset$, па

$$S \cap f(A \setminus S) = (C \cup f(S)) \cap f(A \setminus S) =$$

$$= (C \cap f(A \setminus S)) \cup (f(S) \cap f(A \setminus S)) = \emptyset.$$

в) Со директна проверка.

2.26. Нека $f: A \longrightarrow B$ е инјекција од A во B и $g: B \longrightarrow A$ е инјекција од B во A. Да се покаже дека постои биекција од A на B. (теорема на Шредер-Бернштајн).

Решение. Да ги означиме со (истите букви) f и g пресликувањата $f: A \longrightarrow f(A) \subsetneq B$, $g: B \longrightarrow g(B) \subsetneq A$. Тогаш производот $h = gf$ ќе биде биекција од A на $g(f(A))$. Според претходната задача, постои биекција h^* од A на $C \cup h(A)$ за кое било множество $C \subsetneq A \setminus h(A)$. Избирајќи го $C = g(B) \setminus h(A)$, добиваме $h^*(A) = g(B)$. Следствено, $h^* g^{-1}$ ќе биде биекција од A на B.

2.27. Да се покаже дека:

$$X^Y = Y^X \Longrightarrow X = Y. \qquad (1)$$

Притоа со A^B е означено множеството на сите пресликувања од B во A.

Решение. Ако $X=\emptyset$, а $Y\neq\emptyset$ (значи $X\neq Y$), тогаш $X^Y = \emptyset \neq Y^X$. Нека $X,Y\neq\emptyset$ и $X\neq Y$. Тогаш множествата X^Y и Y^X се дисјунктни. Следствено важи (1).

2.28. Нека f е пресликување од X во Y и нека A е непразно множество. Со помош на f да се определи пресликување

а) $f_A:A^Y\longrightarrow A^X$;   б) $f^A:X^A\longrightarrow Y^A$.

Решение. Нека $f:X\longrightarrow Y$ е дадено пресликување и нека φ е произволен елемент од A^Y, т.е. $\varphi:Y\longrightarrow A$ е произволно пресликување. Тогаш φf е пресликување од X во A, па ставајќи

$$f_A(\varphi) = \varphi f,$$

добиваме пресликување $f_A: A^Y\longrightarrow A^X$.

Нека ψ е произволен елемент од X^A, т.е. ψ е пресликување од A во X. Тогаш $f\psi$ е пресликување од A во Y, па ставајќи

$$f^A(\psi) = f\psi,$$

добиваме пресликување $f^A:X^A\longrightarrow Y^A$.

3. КАРДИНАЛНИ БРОЕВИ

3.1. За две множества A и B велиме дека се еквивалентни, пишуваме $A \sim B$, или дека имаат ист кардинален број, пишуваме $|A|=|B|$, ако постои биекција од A на B.

Да се покаже дека:

а) $A \sim A$.

б) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$.

в) $A \sim B \wedge B \sim C \Longrightarrow A \sim C$.

Решение. а) Бидејќи е $1_A : A \longrightarrow A$ биекција, следува $A \sim A$.

б) Нека $A \sim B$; тоа значи дека постои биекција f од A во B. Од тоа што f е биекција од A во B следува дека f^{-1} е биекција од B во A, па значи $B \sim A$.

в) Нека $A \sim B$ и $B \sim C$; тоа значи дека постојат биекции f од A во B и g од B во C. Според 2.2, gf е биекција од A во C. Значи, $A \sim C$.

3.2. Да се покаже дека:

а) $(0,1] \sim [0,1)$; б) $[0,1] \sim [0,1)$,

каде што $(0,1]$ е интервалот од реални броеви $x: 0 < x \leqslant 1$, итн.

Решение. а) Пресликувањето $f:(0,1] \longrightarrow [0,1)$, дефинирано со $f(x) = 1-x$ е биекција.

б) Пресликувањето $f:[0,1] \longrightarrow [0,1)$, дефинирано со: $f(x) = \frac{1}{n+1}$ за $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, и $f(x) = x$ за $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ е биекција.

3.3. Да се покаже дека:

а) $A \times B \sim B \times A$;

б) $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \sim A_{\alpha_1} \times A_{\alpha_2} \times \ldots \times A_{\alpha_k}$, каде што $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_k$ е пермутација на множеството $\{1,2,\ldots,k\}$;

в) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C) \sim A \times B \times C$.

3.4. Секое множество A што е еквивалентно со множеството на природните броеви се вика *преброиво* множество. Множество што не е преброиво и не е конечно, се вика *непреброиво*.

Да се покаже дека секое подмножество од едно преброиво множество е преброиво или конечно.

Решение. Нека A е преброиво множество, а B подмножество од A. Множеството A можеме да го запишеме во обликот

$$A = \{1,2,\ldots,k,\ldots\},$$

а множеството B во обликот

$$B = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\}.$$

Ако меѓу броевите $k_1, k_2, \ldots$ има најголем, тогаш B е конечно; во спротивниот случај B е преброиво.

3.5. Да се покаже дека секое бесконечно множество содржи преброиво подмножество.

3.6. Ако M е бесконечно множество, а A преброиво или конечно, тогаш $M \sim A \cup M$.

Решение. Нека $B = A \setminus M$; тогаш $B \cap M = \emptyset$ и $A \cup M = B \cup M$. Да уочиме едно преброиво подмножество $C = \{ c_1, c_2, \dots \}$ од M (види 3.5). Ставајќи $P = M \setminus C$, добиваме $M = P \cup C$, па $B \cup M = B \cup C \cup P$.

Ако B е конечно, $B = \{ a_1, a_2, \dots, a_k \}$, тогаш пресликувањето f од $B \cup M$ во M, дефинирано со:

$$f(a_i) = c_i \ (i = 1, 2, \dots, k), \quad f(c_j) = c_{k+j} \ (j = 1, 2, \dots), \quad f(x) = x \ (x \in P)$$

е биекција, а ако B е бесконечно, $B = \{ a_1, a_2, \dots \}$, тогаш пресликувањето $g : B \cup M \longrightarrow M$, дефинирано со

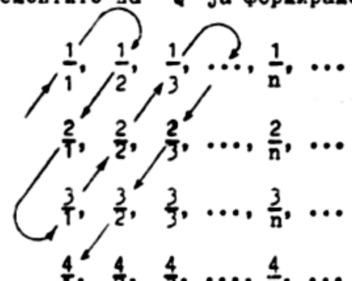
$$g(a_k) = c_{2k-1}, \quad g(c_k) = c_{2k} \ (k = 1, 2, \dots) \ \text{и} \ g(x) = x \quad (x \in P)$$

е биекција. Значи, $M \sim B \cup M = A \cup M$.

3.7. Да се покаже дека множеството $\mathbb{Q}$ од рационалните броеви е преброиво.

Решение. Според 3.6, доволно е да покажеме дека $\mathbb{Q}^+$ е преброиво множество.

Од елементите на $\mathbb{Q}^+$ ја формираме следнава шема:



Потоа, елементите од оваа шема ги подредуваме во една низа, како што покажуваат стрелките, т.е. во низата

$$\frac{1}{1}; \ \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}; \ \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}; \ \dots$$

од каде што следува дека $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

3.8. Да се покаже дека: ако множеството M е непреброиво и A конечно или преброиво, тогаш $(M\setminus A)\sim M$.

Упатство. Тврдењето следува од 3.6.

3.9. Да се покаже дека унијата A од преброиво многу конечни множества $A_1,A_2,\dots$ е преброиво или конечно множество.

Решение. Ако, почнувајќи од некој индекс n_0, сите A_n (за $n\geqslant n_0$) се еднакви, тогаш A е унија од конечно многу конечни множества, па значи тоа е конечно множество. Затоа можеме да претпоставиме дека множествата A_n пар по пар се дисјунктни, т.е. $A_i\cap A_j=\emptyset$ за $i\neq j$ (зашто, во спротивно, би ги разгледувале множествата A_1, $A_2\setminus A_1$, $A_3\setminus(A_1\cup A_2),\dots$ кои се дисјунктни и нивната унија е множеството A). Ако ставиме $A_n=\{a_{n1},a_{n2},\dots,a_{nk_n}\}$ за $n=1,2,\dots$, тогаш елементите од $A_1,A_2,\dots$ можеме да ги наредиме во низа:

$$a_{11},a_{12},\dots,a_{1k};a_{21},a_{22},\dots,a_{2k};\dots;a_{n1},a_{n2},\dots,a_{nk};\dots$$

од што следува дека $A\sim\mathbb{N}$.

3.10. Да се покаже дека:

а) унијата од конечно многу преброиви множества,

б) унијата од преброиво многу преброиви множества,

е преброиво множество.

Решение. а) Следува од 3.6, со индукција.

б) Нека $A_1,A_2,\dots$ се преброиви множества и нека

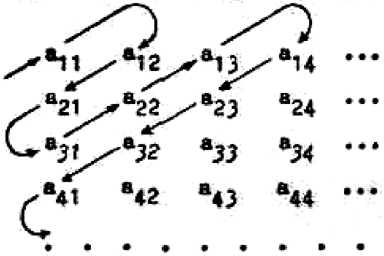
$$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n.$$

Прво ќе претпоставиме дека A е дисјунктна унија, т.е. $A_i\cap A_j=\emptyset$ за $i\neq j$. Елементите од $A_1,A_2,\dots$ можеме да ги напишеме во следнава шема:

од A_1: $a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n}\ \dots$

од A_2: $a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n}\ \dots$

Сите тие елементи ќе ги индексираме "дијагонално" (по збирот на нивните сегашни индекси) одејќи по стрелките во следнава шема:



Јасно е дека на тој начин секој елемент ќе добие свој индекс. Следствено, $A \sim \mathbb{N}$.

Во случај A да не е дисјунктна унија, ќе ги разгледуваме множествата $A_1, A_2\setminus A_1, A_3\setminus(A_1\cup A_2),\dots$; тие се попарно дисјунктни и нивната унија е A. Ако сите тие се преброиви, тогаш според претходното, A е преброиво множество. Ако меѓу нив има конечни множества, тогаш нивната унија, да ја означиме со B, ќе биде конечно или преброиво множество (3.9), а унијата C од преостанатите множества ќе биде преброиво множество; според 3.6, $C \sim B\cup C = A$, па значи A е преброиво.

3.11. Ако множествата $A_1,A_2,\dots,A_k$ се преброиви, тогаш и множеството $A = A_1\times A_2\times\dots\times A_k$ е преброиво.

Решение. Бидејќи секое од множествата A_j е преброиво, наместо множеството $A = A_1\times A_2\times\dots\times A_k$ може да го разгледаме множеството M^k, каде што M е преброиво множество.

За $k=1$, $M^1=M$ е преброиво по услов. Да претпоставиме дека множеството M^{k-1} е преброиво и да го разгледаме множеството $X=M^{k-1}\times M$. Секое од множествата $M^{k-1}\times\{y\}$, кога $y\in M$, е еквивалентно со M^{k-1}, па значи преброиво. Бидејќи

$$X = \bigcup_{y\in M} M^{k-1}\times\{y\},$$

според 3.10, следува дека X е преброиво. Но, според 3.6, множеството X е еквивалентно со множеството M^X, па значи множеството M^X е преброиво.

3.12. Да се покаже дека множеството од сите полиноми со рационални коефициенти е преброиво.

Решение. Секој полином од n-ти степен $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ може да се разгледува како подредена (n+1)-торка $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ од рационални броеви. Множеството од сите полиноми, за секој фиксен природен број n, според 3.11, е преброиво. Ако n се менува во $\mathbb{N}$, добиваме преброиво многу преброиви множества, па според 3.10, добиваме дека множеството од сите полиноми со рационални коефициенти е преброиво.

3.13. Нека A_1 и A_2 се множествата точки од две кружници, B_1 и B_2 се множествата точки од две отсечки, B_3 – множеството реални броеви од интервалот (0,1) и C множеството точки од една права. Да се покаже дека $A_1 \sim A_2 \sim B_1 \sim B_2 \sim B_3 \sim C$.

Решение. За кружниците A_1 и A_2 можеме да претпоставиме дека се концентрични. На секоја точка x од A_1 ѝ го придружуваме пресекот на A_2 со полуправата, чиј почеток е центарот на A_1 и A_2, а минува низ x. Пресликувањето е биекција од A_1 на A_2, па значи $A_1 \sim A_2$.

Нека сега B_1 и B_2 се две отсечки, на пример, $B_1 = [a,b]$, $B_2 = [c,d]$; тогаш пресликувањето

$$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

е биекција од B_1 на B_2, од каде што $B_1 \sim B_2$.

Според тоа, наместо произволна отсечка, можеме да ја разгледуваме отсечката [0,1]. Ако $B_3 = (0,1)$, т.е. отсечката [0,1] без своите крајни точки, ќе покажеме дека $[0,1]\sim(0,1)$. За таа цел ефективно ќе конструираме биекција меѓу тие множества. Ја избираме низата:

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{3},\ \dots,\ x_n=\frac{1}{n+1},\dots$$

која им припаѓа на двете множества. На точката $0\in[0,1]$ ѝ ја придружуваме точката x_1, а на точката $1\in[0,1]$ - точката x_2; потоа, на точката x_k ѝ ја придружуваме точката x_{k+2} $(k=1,2,\dots)$. Сите други точки се пресликуваат сами во себе. Дефинираното пресликување е биекција од $[0,1]$ на $B_3=(0,1)$.

Нека C е множеството точки од една права, а $B=[a,b]$. Од претходното, B и $B\setminus\{a,b\}$ се еквивалентни, а пресликувањето

$$g(x)=\frac{b-a}{2}\cdot\frac{x}{1+x}+\frac{b+a}{2}$$

ја пресликува целата права на $B\setminus\{a,b\}$, од каде што следува

$$B\sim(B\setminus\{a,b\})\sim C.$$

Останува да се покаже уште дека $A\sim B$, каде што A е множеството точки од една кружница, а B од една отсечка. За поѓодно, нека A е множеството точки од една кружница со радиус единица, а $B=[0,2\pi)$. Фиксираме една точка $a\in A$ и на секоја точка $x\in A$ ѝ ја придружуваме бројната вредност на лакот, мерен од a. На тој начин множеството A го пресликуваме биективно на $B=[0,2\pi)$, па значи $A\sim B$.

<u>**3.14**</u>. Множеството $\mathbb{R}$ од реалните броеви е непреброиво.

<u>Решение</u>. Бидејќи $\mathbb{R}$ е еквивалентно со множеството точки од една права, според 3.13, доволно е да покажеме дека множеството (интервалот) $(0,1)$ е непреброиво, т.е. меѓу множествата $(0,1)$ и $\mathbb{N}$ не постои биекција.

Да претпоставиме дека сите елементи од $(0,1)$ може да ги нарeдиме во низа. Секој реален број може да се претстави во облик на бесконечна децимална дропка, која, евентуално, од некое место има само нули. Затоа би имале:

$$\begin{array}{l}
a_1 = 0,c_{11}c_{12}c_{13}\cdots c_{1n}\cdots \\
a_2 = 0,c_{21}c_{22}c_{23}\cdots c_{2n}\cdots \\
a_3 = 0,c_{31}c_{32}c_{33}\cdots c_{3n}\cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_n = 0,c_{n1}c_{n2}c_{n3}\cdots c_{nn}\cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

каде што c_{jk} е една од цифрите 0,1,...,9. Нека a е реалниот број $a=0,c_1c_2\ldots c_n\ldots$, каде што

$$c_n = \begin{cases} 2 \text{ ако } c_{nn}=1 \\ 1 \text{ ако } c_{nn}\neq 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Бројот a очигледно му припаѓа на (0,1), а се разликува од секој од броевите $a_1,a_2,\ldots$ од горната низа, зашто од првиот се разликува во првата децимала, од вториот во втората децимала итн. Значи, низата (a_n) не ги содржи сите реални броеви од интервалот (0,1). Оваа противречност го докажува тврдењето.

3.15. За реалниот број x велиме дека е алгебарски број ако тој е корен на некој полином со рационални коефициенти, а во спротивниот случај велиме дека е трансцендентен.

Да се покаже дека множеството од сите алгебарски броеви е пребројиво, а множеството од сите трансцендентни броеви непребројиво.

Решение. Секој полином од n-ти степен има најмногу n различни корени. Бидејќи множеството од сите полиноми со рационални коефициенти е пребројиво (3.12), добиваме дека множеството од сите алгебарски броеви, како унија од пребројиво многу конечни множества, е пребројиво.

Да го означиме со T множеството трансцендентни броеви, а со A множеството од алгебарските. Тогаш $T = \mathbb{R}\setminus A$, па бидејќи $\mathbb{R}$ е непреброиво, според 3.8, добиваме дека и T е непреброиво.

3.16. Да се покаже дека за секое бесконечно множество постои разбивање на преброиво многу бесконечни множества.

Решение. Нека е A бесконечно множество. Според 3.5, A има преброиво подмножество, па за поедноставно изразување, ќе сметаме дека $\mathbb{N}$ е подмножество од A. За секој прост број p го формираме множеството

$$M_p = \{ p^n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Јасно дека M_p е бесконечно и $\{M_p \mid p \text{ - прост}\}$ е преброива фамилија. Ако ставиме $B = A\setminus(\bigcup_p M_p)$, тогаш добиваме дека B е бесконечно, $A = B\cup(\bigcup_p M_p)$, $B\cap M_p = \emptyset$ за секој p и $M_p\cap M_q = \emptyset$ за $p\neq q$, т.е. фамилијата составена од B и M_p е разбивање на A што го исполнува условот на задачата.

3.17. Множеството ирационални броеви има ист кардинален број како $\mathbb{R}$.

Решение. Ако се стави $M = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ во 3.8, се добива $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$.

3.18. Ако A е подмножество од множеството X, тогаш пресликувањето $\chi_A : X \to \{0,1\}$, дефинирано со:

$$(\forall x\in X)\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{за } x\in A \\ 0 & \text{за } x\in X\setminus A \end{cases}$$

се вика карактеристична функција на A (во однос на X).

Ако $K(X) = \{\chi_A \mid A \subseteq X\}$, тогаш $|\mathcal{P}(X)| = |K(X)|$.

Решение. Пресликувањето $f : \mathcal{P}(X) \to K(X)$, дефинирано со

$$(\forall A\subseteq X) f(A) = \chi_A$$

е биекција.

3.19. Ако постои инјекција од множеството A во множеството B, тогаш пишуваме $|A| \leqslant |B|$, а ако $|A| \leqslant |B|$ но $|A| \neq |B|$, тогаш пишуваме $|A| < |B|$.

Да се покаже дека:

а) $|A| \leqslant |B|,\ |B| \leqslant |C| \Longrightarrow |A| \leqslant |C|$;

б) $|A| \leqslant |B|,\ |B| \leqslant |A| \Longrightarrow |A| = |B|$;

в) $A \subseteq B \Longrightarrow |A| \leqslant |B|$, но може да биде $|A| = |B|$ и при $A \subset B$.

Решение. а) Следува од тоа што производ на две инјекции е инјекција. б) Следува од теоремата на Шредер-Бернштајн (2.26). в) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, но $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

3.20. Нека $f:X \longrightarrow Y$ е сурјекција. Ако X е преброиво, тогаш и Y е преброиво или конечно, а секогаш важи $|Y| \leqslant |X|$.

Решение. За секој $y \in Y$ можеме да избереме точно еден елемент $\bar{x}$ од множеството $f^{-1}(y)$. Ставајќи $g(y)=\bar{x}$, добиваме инјекција од Y во X, од што следуваат заклучоците во задачата.

3.21. Да се покаже дека пресликувањето $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, дефинирано со

$$(\forall a \in \mathbb{R}) f(a) = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < a\},$$

е инјекција, т.е. $|\mathbb{R}| \leqslant |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$.

3.22. Нека $K(\mathbb{N})$ е фамилијата карактеристични функции (3.18) и нека $P:K(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ е пресликување дефинирано со

$$(\forall f \in K(\mathbb{N})) P(f) = 0,f(1)f(2)f(3)\ldots$$

- бесконечна децимална дропка што се состои од нули и единици. Да се покаже дека P е инјекција, т.е. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leqslant |\mathbb{R}|$.

3.23. Да се покаже дека $|I| = |I \times I|$, каде што $I = (0,1)$.

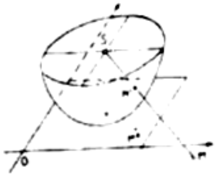
Решение. Очигледно е дека $|I| \leqslant |I \times I|$. Нека $(x,y) \in I \times I$, каде што $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$, $y = 0,b_1b_2b_3\ldots$ Пресликувањето f од $I \times I$ во I, дефинирано со

$$f((x,y)) = z = 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$$

е инјекција, па $|I \times I| \leqslant |I|$. Значи, $|I| = |I \times I|$.

3.24. Да се покаже дека $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$.

Решение. Пресликувањето $f((x,y)) = x+iy$ е биекција од $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$, па $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$. Значи треба да покажеме дека $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$. Над квадратот $I \times I = (0,1) \times (C,1)$ поставуваме сфера со радиус 1/2, така што да ја допира рамнината xOy во точката $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Секоја точка $M \in \mathbb{R}^2$ ја сврзуваме со центарот S на сферата, а прободот M′ на сферата со правата MS го проектираме на $I \times I$ и ја добиваме точката M". На тој начин се добива инјекција од $\mathbb{R}^2$ во $I \times I$, што значи $|\mathbb{R}^2| \leqslant |I \times I|$. Но, обратното неравенство е очигледно, па користејќи ја претходната задача, добиваме:



$$|\mathbb{R}^2| = |I \times I| = |I| = |\mathbb{R}|.$$

3.25. Да се покаже дека $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ за кое било множество A (теорема на Кантор).

Решение. Множеството $\mathcal{P}(A)$ да го означиме со P. Бидејќи $g: A \longrightarrow P$, дефинирано со $(\forall a \in A) g(a) = \{a\}$ е инјекција, следува $|A| \leqslant |P|$. Ќе покажеме дека $|A| \neq |P|$, од каде што ќе следува $|A| < |P|$.

За таа цел нека $f: A \longrightarrow P$ е која било инјекција. Да го означиме со B множеството на оние елементи од A што не им припаѓаат на своите слики, т.е.

$$B = \{x \mid x \in A,\ x \notin f(x)\}. \qquad (1)$$

Јасно е дека $B \in P$. Да претпоставиме дека постои $b \in A$, таков што $f(b) = B$. Ако $b \in B$, тогаш од (1) следува дека $b \notin B$ – контрадикција; ако $b \notin B$, тогаш пак од (1) следува дека $b \in B$ – контрадикција. Според тоа, таков елемент b не постои, т.е. инјекцијата f не е сурјекција. Значи не постои биекција од A на P, па $|A| < |P|$.

3.26. Ако множеството B има барем два елемента, тогаш за кое било множество X важи $|X| < |B^X|$. (Притоа со B^X е означено множеството од сите пресликувања од X во B.)

Решение. Нека $0,1 \in B$ и нека $C = \{0,1\}^X$. Јасно е дека $|C| \leqslant |B^X|$, а според 3.25 и 3.18, имаме $|X| < |\mathcal{P}(X)| = |C|$.

3.27. Да се покаже дека, ако

$$A \sim A', \quad B \sim B', \quad A \cap B = A' \cap B' = \emptyset,$$

тогаш:

а) $|A \cup B| = |A' \cup B'|$;

в) $|A \times B| = |A' \times B'|$,

каде што $|X|$ означува кардиналниот број на множеството X.

Решение. Од $A \sim A'$ и $B \sim B'$ следува дека постојат биекции f од A во A' и g од B во B'. Пресликувањето

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{за } x \in A \\ g(x) & \text{за } x \in B \end{cases}$$

е биекција од $A \cup B$ на $A' \cup B'$, а $p(x,y) = (f(x), g(y))$ е биекција од $A \times B$ на $A' \times B'$, па значи точни се равенствата а) и б).

3.28. Ако α и β се кардинални броеви и ако A и B се дисјунктни множества, такви што $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, тогаш со

$$\alpha + \beta = |A \cup B|, \quad \alpha\beta = |A \times B| \tag{1}$$

е дефинирана операција собирање, односно множење на кардинални броеви. Да се покаже дека овие операции се асоцијативни и комутативни, а множењето е дистрибутивно спрема собирањето, т.е.

а) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, $\quad \alpha+\beta = \beta+\alpha$;

б) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, $\quad \alpha\beta = \beta\alpha$;

в) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$,

при што $\gamma = |C|$, за некое множество C, дисјунктно и со A и со B.

Решение. Да забележиме дека операциите собирање и множење на кардинални броеви, според претходната задача, со (1) се добро дефинирани.

Равенствата под а) следуваат од асоцијативноста односно комутативноста на унијата, равенствата под б) – од задачата 3.3, а в) – од равенството $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

3.29. Нека $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$, $c = |\mathbb{R}|$. Да се покаже дека:

а) $\aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$;

б) $\aleph_0 + c = c + c = c$;

в) $\aleph_0 c = cc = c$.

Решение. а) Следува од 3.6 и 3.10.

б) Следува од 3.6 и од тоа што $|\mathbb{R}^-| = c = |\{0\}\cup\mathbb{R}^+|$, а $\mathbb{R} = \mathbb{R}^-\cup(\{0\}\cup\mathbb{R}^+)$.

в) Нека $A = [0,1)$ и нека $f:\mathbb{Z}\times A \longrightarrow \mathbb{R}$ е дефинирано со

$$f(k,a) = k + a.$$

Пресликувањето f е биекција, па $|\mathbb{Z}\times A| = |\mathbb{R}|$. Бидејќи $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ и $|A| = c = |\mathbb{R}|$, имаме $\aleph_0 c = c$. Второто равенство следува од 3.23.

3.30. Ако α и β се кардинални броеви, такви што α е конечен или $\aleph_0$, а β е бесконечен, тогаш $\alpha+\beta = \beta$.

Решение. Ако A и B се дисјунктни множества, такви што $|A| = \alpha$

и $|B| = \beta$, тогаш, како во 3.6, добиваме $A \cup B \sim B$, т.е. $\alpha + \beta = \beta$.

(Од тоа, патем, заклучуваме дека законот за кратење при собирањето на кардинални броеви не важи. На пример, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 = 1 + \aleph_0$ не повлекува $\aleph_0 = 1$.)

3.31. Ако α, β, γ и δ се кардинални броеви, такви што $\alpha \leqslant \beta$ и $\gamma \leqslant \delta$, тогаш:

а) $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$;

б) $\alpha\gamma \leqslant \beta\delta$.

Решение. Нека A, B, C и D се попарно дисјунктни множества, со $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$, $\delta = |D|$ и нека $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$ се инјекции. Тогаш:

а) пресликувањето $h: A \cup C \rightarrow B \cup D$ дефинирано со:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{за} \quad x \in A \\ g(x) & \text{за} \quad x \in C \end{cases}$$

е инјекција; следствено $|A \cup C| \leqslant |B \cup D|$.

б) пресликувањето $p: A \times C \rightarrow B \times D$ дефинирано со: $p(x,y) = (f(x), g(x))$ е инјекција, па $|A \times C| \leqslant |B \times D|$.

3.32. Нека B^A е множеството од сите пресликувања од множеството A во множеството B и нека $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$. Да ставиме $\beta^\alpha = |B^A|$.

Да се покаже дека следниве особини за експоненти, кои важат за природни броеви, важат и за кои било кардинални броеви α, β и γ:

а) $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$;

б) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$;

в) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

Решение. Нека $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$ за некои попарно дисјунктни множества A, B и C.

а) Точноста на равенството ќе биде докажана ако покажеме дека $A^{B\cup C} \sim A^B \times A^C$. За таа цел, нека $f \in A^{B\cup C}$, т.е. f е пресликување од $B\cup C$ во A; тогаш $f|B \in A^B$, $f|C \in A^C$, а бидејќи $B\cap C=\emptyset$ следува дека пресликувањето $F: A^{B\cup C} \longrightarrow A^B \times A^C$ дефинирано со

$$F(f) = (f|B, f|C)$$

е биекција. Следствено важи а).

б) Нека $g_1 \in A^C$, $g_2 \in B^C$ и нека $g \in (A\times B)^C$ е дефинирано со:

$$(\forall c \in C)\ g(c) = (g_1(c), g_2(c)).$$

Пресликувањето $G: (A\times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$ дефинирано со

$$G(g) = (g_1, g_2)$$

е биекција. Следствено важи б).

3.33. Степените со природни експоненти можат да се воведат и кај кардиналните броеви на вообичаениот начин, т.е. да се стави $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^{n+1} = \alpha^n\alpha$ за секој кардинален број α и природен број n. Да се покаже дека оваа дефиниција е во согласност со општата дефиниција за степен на кардинални броеви, $\alpha^\beta = |A^B|$, каде што A^B е множеството од сите пресликувања од B во A.

Решение. Нека A е множество, такво што $|A| = \alpha$. Да ставиме

$$A^{\{1,2,\dots,n\}} = B \quad \text{и} \quad A^n = C.$$

Значи, B е множеството од сите пресликувања од $\{1,2,\dots,n\}$ во A, а C множеството од сите n-ки $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, каде што $a_i \in A$. Ако $f \in B$, ставајќи $f(i) = a_i$, ја добиваме n-ката $(a_1,a_2,\dots,a_n)$. Јасно е дека пресликувањето $f \longrightarrow (f(1),f(2),\dots,f(n)) = (a_1,a_2,\dots,a_n)$ е биекција од B на C, па значи $|B| = |C|$.

3.34. Нека α, β и γ се кардинални броеви и $\alpha \leqslant \beta$. Да се покаже дека:

а) $\alpha^{\gamma} \leqslant \beta^{\gamma}$;

б) $\gamma^{\alpha} \leqslant \gamma^{\beta}$;

в) Ако α и β се конечни, поголеми од 1, а γ бесконечен, тогаш $\alpha^{\gamma} = \beta^{\gamma}$.

Решение. Нека $A \subseteq B$, $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ и $\gamma = |C|$.

а) Нека $f \in A^C$, т.е. $f:C \rightarrow A$. Бидејќи $A \subseteq B$, f може да се смета за пресликување од C во B, т.е. $f \in B^C$. Значи, A^C може да се смета за подмножество од B^C. Следотвено, $|A^C| \leqslant |B^C|$.

б) Нека $f \in C^A$ и нека f' е едно од проширувањата на f до пресликување $f':B \longrightarrow C$. Ако g' е проширување на g и $f \neq g$, тогаш, јасно, $f' \neq g'$. Според тоа, пресликувањето $F:C^A \longrightarrow C^B$ дефинирано со $F(f) = f'$ е инјекција. Следствено, $|C^A| \leqslant |C^B|$.

4. РЕЛАЦИИ

4.1. Секое подмножество α од $A\times B$ се вика <u>кореспонденција</u> од A во B.

Да се најдат сите кореспонденции од $A=\{1,2,3\}$ во $B=\{b\}$.

<u>Одговор</u>. $\emptyset$, $\{(1,b)\}$, $\{(2,b)\}$, $\{(3,b)\}$, $\{(1,b),(2,b)\}$, $\{(1,b),(3,b)\}$, $\{(2,b),(3,b)\}$, $A\times B$.

4.2. Ако A е множество со m елементи, а B множество со n елементи, да се најде бројот на кореспонденциите од A во B.

<u>Решение</u>. Бидејќи секоја кореспонденција е подмножество од $A\times B$, а $A\times B$ има mn елементи, бројот на кореспонденциите од A во B е 2^{mn}.

4.3. Нека е α кореспонденција од $A=\{2,3,5,6\}$ во $B=\{3,4,6,9\}$ дефинирана со:

$$x\alpha y \Longleftrightarrow x|y.$$

а) Да се напише α во табеларна форма.

б) Да се најде кореспонденцијата α^{-1}.

в) Да се најде $\alpha(\{2,6\})$, при што со $\alpha(X)$, $X\subseteq A$, е означено множеството $\{y \mid y\in B, (\exists x\in X)(x,y)\in\alpha\}$.

<u>Одговор</u>. а) $\alpha=\{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(3,9),(6,6)\}$.

б) $\alpha^{-1}=\{(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(9,3),(6,6)\}$.

в) $\alpha(\{2,6\})=\{4,6\}$.

4.4. Ако е $\alpha \subset A \times B$ кореспонденција, а $\{C_j \mid j \in J\}$ е фамилија подмножества од A, да се покаже дека:

а) $\alpha(\bigcup_{j\in J} C_j) = \bigcup_{j\in J} \alpha(C_j)$.

б) $\alpha(\bigcap_{j\in J} C_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} \alpha(C_j)$.

Решение. а) Нека $y \in \alpha(\bigcup_{j\in J} C_j)$; тоа значи дека постои барем еден елемент $x \in \bigcup_{j\in J} C_j$, таков што $x\alpha y$, т.е. $x\alpha y$ за некој $j_0 \in J$ и $x \in C_{j_0}$, односно $y \in \alpha(C_{j_0})$ за некој $j_0 \in J$. На крајот, имаме $y \in \bigcup_{j\in J} \alpha(C_j)$, т.е.

$$\alpha(\bigcup_{j\in J} C_j) \subseteq \bigcup_{j\in J} \alpha(C_j). \qquad (1)$$

Обратно, нека $y \in \bigcup_{j\in J} \alpha(C_j)$; тогаш постои $j_1 \in J$, така што $y \in \alpha(C_{j_1})$, односно постои барем еден $x \in C_{j_1}$, таков што $x\alpha y$, што значи дека $y \subset \alpha(\bigcup_{j\in J} C_j)$, т.е.

$$\alpha(\bigcup_{j\in J} C_j) \supseteq \bigcup_{j\in J} \alpha(C_j). \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува равенството.

б) Слично како под а). Дека не мора да важи равенство, покажува следниов пример. Нека $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$, $\alpha=A\times B$, $C_1=\{a_1\}$, $C_2=\{a_2\}$. Тогаш имаме:

$$\alpha(C_1 \cap C_2) = \alpha(\emptyset) = \emptyset, \quad \alpha(C_1) \cap \alpha(C_2) = \{b\}.$$

4.5. Нека α е кореспонденција од A во B, а $\{\beta_i \mid i \in I\}$ е фамилија кореспонденции од A во B. Да се покаже дека:

а) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$;

б) $(\bigcup_i \beta_i)^{-1} = \bigcup_i \beta_i^{-1}$;

в) $(\bigcap \beta_i)^{-1} = \bigcap_i \beta_i^{-1}$.

Решение. б) $(b,a)\in(\bigcup_i \beta_i)^{-1} \Longleftrightarrow (a,b)\in\bigcup_i \beta_i \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\exists i\in I)\ (a,b)\in\beta_i \Longleftrightarrow (\exists i\in I)\ (b,a)\in\beta_i^{-1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (b,a)\in\bigcup_i \beta_i^{-1}.$$

4.6. Ако α и β се кореспонденции од A во B, тогаш

$$\alpha\subseteq\beta \Longleftrightarrow \alpha^{-1}\subseteq\beta^{-1}.$$

Решение. Нека $\alpha\subseteq\beta$; тоа значи дека од $x\alpha y$ следува $x\beta y$, а тоа е еквивалентно со

$$y\ \alpha^{-1}x \Longrightarrow y\ \beta^{-1}x,$$

т.е. $\alpha^{-1}\subseteq\beta^{-1}$.

Бидејќи $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$, според претходното имаме:

$$\alpha^{-1}\subseteq\beta^{-1} \Longrightarrow (\alpha^{-1})^{-1}\subseteq(\beta^{-1})^{-1} \Longrightarrow \alpha\subseteq\beta.$$

4.7. Нека е α кореспонденција од $A=\{2,3,4,5\}$ во $B=\{3,6,7,10\}$ дефинирана со:

$$x\alpha y \Longleftrightarrow x|y,$$

а β кореспонденција од B во B дефинирана со:

$$x\beta y \Longleftrightarrow x+y=13.$$

Да се покаже дека $\alpha\beta=\{(2,7),(2,3),(3,10),(3,7),(5,3)\}$.

4.8. Ако α е кореспонденција од A во B, а $\{\beta_i \mid i\in I\}$ фамилија кореспонденции од B во C, да се покаже дека:

а) $\alpha(\bigcup_i\beta_i)=\bigcup_i(\alpha\beta_i)$; б) $\alpha(\bigcap_i\beta_i)\subseteq\bigcap_i(\alpha\beta_i)$.

Решение. а) Нека $(a,d)\in\alpha(\bigcup_i\beta_i)$; тоа значи дека постои $b\in B$, таков што $(a,b)\in\alpha$ и $(b,d)\in\bigcup_i\beta_i$, т.е. постои $i_0\in I$, таков што $(b,d)\in\beta_{i_0}$. Од $(a,b)\in\alpha$ и $(b,d)\in\beta_{i_0}$ следува дека $(a,d)\in\ \beta_{i_0}$, т.е. $(a,d)\in\bigcup_i(\alpha\beta_i)$. Според тоа,

$$\alpha(\bigcup_i\beta_i)\subseteq\bigcup_i(\alpha\beta_i). \qquad (1)$$

На сличен начин се покажува дека

$$\alpha(\bigcup_i \beta_i) \supseteq \bigcup_i (\alpha\beta_i), \qquad (2)$$

што значи дека даденото равенство е точно.

б) Како и под а). Дека во општ случај не мора да важи равенство покажува следниов пример. Ако $A=\{a\}$, $B=\{b,c\}$, $C=\{d\}$, $\alpha = \{(a,b),(a,c)\}$, $\beta_1 = \{(b,d)\}$, $\beta_2 = \{(c,d)\}$, тогаш имаме:

$$\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset, \quad \alpha(\beta_1 \cap \beta_2) = \emptyset, \quad \alpha\beta_1 \cap \alpha\beta_2 = \{(a,d)\}.$$

4.9. Ако $f: A \longrightarrow B$ е пресликување, тогаш кореспонденцијата $\alpha = \{(x,f(x)) | x \in A\}$ се вика <u>график</u> на пресликувањето f.

Да се покаже дека, ако $\alpha, \beta \subseteq A \times B$ се графици на пресликувања и $\alpha \subseteq \beta$, тогаш $\alpha = \beta$.

<u>Решение</u>. Нека $\beta \subseteq A \times B$ е график на пресликување и нека $\alpha \subset \beta$; тогаш постои $(a,b) \in \beta$, таков што $(a,b) \notin \alpha$. Ако постои $b' \in B$, таков што $(a,b') \in \alpha$, тогаш, од $\alpha \subset \beta$, следува дека $(a,b') \in \beta$, а бидејќи β е график на пресликување, добиваме $b = b'$, т.е. α не е график на пресликување. Следствено, $\alpha = \beta$.

4.10. Нека $\alpha, \beta \subseteq A \times B$ се графици на пресликувања. Во кој случај кореспонденцијата:

а) $\alpha \cup \beta$; б) $\alpha \cap \beta$

е график на пресликување?

<u>Решение</u>. а) Ако $\alpha \cup \beta$ е график на пресликување, тогаш од $\alpha \subseteq \alpha \cup \beta$, $\beta \subseteq \alpha \cup \beta$, според 4.9, следува $\alpha = \alpha \cup \beta$, $\beta = \alpha \cup \beta$, т.е. $\alpha = \beta$. Значи, ако $\alpha, \beta \subset A \times B$ се графици на пресликувања, тогаш $\alpha \cup \beta$ е график на пресликување ако и само ако $\alpha = \beta$.

б) $\alpha = \beta$.

4.11. Да се покаже дека кореспонденцијата $\alpha \subseteq A \times B$ е график на пресликување ако и само ако се исполнети следниве услови:

$$\Delta_A \subseteq \alpha\alpha^{-1}, \quad \alpha^{-1}\alpha \subseteq \Delta_B.$$

Решение. Лесно се уочува дека условот $\Delta_A \subseteq \alpha\alpha^{-1}$ е еквивалентен со условот

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(a,b) \in \alpha, \tag{1}$$

а пак условот $\alpha^{-1}\alpha \subseteq \Delta_B$ е еквивалентен со условот

$$(a,b_1),(a,b_2) \in \alpha \implies b_1 = b_2. \tag{2}$$

Условите пак (1) и (2) (AII,2.2^0) се потребни и доволни за α да биде график на пресликување.

4.12. Ако $\alpha \subseteq A \times B$ е график на пресликување, во кој случај α^{-1} е график на пресликување?

Одговор. Ако (и само ако) α е график на биекција.

4.13. Кореспонденцијата $\alpha \subseteq A \times B$ е график на биекција ако и само ако се исполнети условите:

$$\Delta_A = \alpha\alpha^{-1}, \quad \alpha^{-1}\alpha = \Delta_B. \tag{1}$$

Решение. Од (1) и 4.11 следува дека α и α^{-1} се графици на пресликувања, па според 4.12, α е график на биекција.

Обратно, ако α е график на биекција, тогаш и α^{-1} е график на биекција, па според 4.12 и 4.11, добиваме дека се исполнети условите (1).

4.14. Ако A и B се две множества и $f: C \longrightarrow B$, $C \subseteq A$, тогаш за f велиме дека е функција од A во B со домен C, а за кореспонденцијата $\alpha_f = \{(c,b) \mid c \in C, b = f(c)\}$ ќе велиме дека е график на функцијата f.

Нека $\alpha, \beta \subseteq A \times B$. Да се покаже дека:

а) α е график на функција ако и само ако

$$(a,b_1),(a,b_2)\in\alpha \Longrightarrow b_1=b_2;$$

б) ако β е график на функција и ако $\alpha\subseteq\beta$, тогаш и α е график на функција;

в) ако α и β се графици на функции, тогаш $\alpha\cap\beta$ е график на функција;

г) ако α и β се графици на функции, тогаш $\alpha\cup\beta$ е график на функција ако и само ако

$$(a,b_1)\in\alpha,\ (a,b_2)\in\beta \Longrightarrow b_1=b_2; \qquad (1)$$

д) $\alpha\cup\beta$ е график на пресликување ако и само ако

$$(a\alpha b \vee a\beta b)\wedge(a\alpha c\vee a\beta c) \Longrightarrow b=c,$$
$$(\forall a\in A)(\exists b\in B)a\alpha b\Rightarrow a\beta b.$$

е) $\alpha\cap\beta$ е график на пресликување ако и само ако се исполнети условите:

$$a\alpha b_1, a\beta b_1, a\alpha b_2, a\beta b_2 \Longrightarrow b_1=b_2,$$
$$(\forall a\in A)(\exists b\in B)a\alpha b,\ a\beta b.$$

4.15. Да се даде пример на кореспонденции $\alpha\subseteq A\times B$, $\beta\subseteq B\times C$ такви што $\alpha\beta$ да е график на пресликување, но:

а) ниедна од нив да не е график на пресликување;

б) едната од нив да е график на пресликување, а другата да не е.

Решение. а) Нека $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{x,y,z\}=C$,

$$\alpha=\{(a,x),(a,y),(b,x),(c,y),(d,y)\},$$
$$\beta=\{(x,x),(y,x),(z,x),(z,y)\}.$$

Тогаш имаме:

$$\alpha\beta=\{(a,x),(b,x),(c,x),(d,x)\}.$$

Кореспонденциите α и β не се графици на пресликувања, но $\alpha\beta$ е график на пресликувањето $f: a\longrightarrow x, b\longrightarrow x, c\longrightarrow x, d\longrightarrow x$.

б) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{x,y,z\} = C$, $\alpha = \{(a,x),(b,x),(c,y),(d,y)\}$, $\beta = \{(x,x),(y,x),(z,x),(z,y)\}$, $\alpha\beta = \{(a,x),(b,x),(c,x),(d,x)\}$.

4.16. Секоја кореспонденција $\alpha \subseteq A \times A$ се вика **релација** во A. Нека релациите α и β во $\mathbb{C}$ се дефинирани со:

$$z_1 \alpha z_2 \iff |z_1| \leqslant |z_2| ,$$

$$z_1 \beta z_2 \iff \arg z_1 = \arg z_2 .$$

Да се најде $\alpha \cap \alpha^{-1}$, $\alpha \cup \alpha^{-1}$, $\alpha \cap \alpha^{-1} \cap \beta$.

Решение. Нека $z_1 \, \alpha \cap \alpha^{-1} z_2$; тоа значи дека $z_1 \alpha z_2$ и $z_1 \alpha^{-1} z_2$, т.е. $|z_1| \leqslant |z_2|$ и $|z_2| \leqslant |z_1|$, од каде што следува $|z_1| = |z_2|$. Значи,

$$\alpha \cap \alpha^{-1} = \{ (z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \ |z_1| = |z_2| \}.$$

Слично добиваме дека $\alpha \cup \alpha^{-1} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ $\alpha \cap \alpha^{-1} \cap \beta = \Delta_{\mathbb{C}}$.

4.17. Нека $A = \mathbb{R}^n$, а α_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ нека се релации во A, дефинирани со:

$$(a_1,\dots,a_n) \, \alpha_{ij} (b_1,\dots,b_n) \iff a_1+\dots+a_i = b_1+\dots+b_j .$$

Да се најдат релациите:

а) $\alpha = \alpha_{11} \cap \alpha_{21} \cap \dots \cap \alpha_{n1}$;

б) $\beta = \alpha_{11} \cap \alpha_{22} \cap \dots \cap \alpha_{nn}$;

в) $\gamma = \bigcap\limits_{i,j} \alpha_{ij}$.

Одговор. а) $(a_1,\dots,a_n) \alpha (b_1,\dots,b_n) \iff a_1 = b_1, a_2 = \dots = a_n = 0$.

б) $\beta = \Delta_A$.

в) $(a_1,\dots,a_n) \gamma (b_1,\dots,b_n) \iff a_1 = b_1, a_2 = \dots = a_n = b_2 = \dots = b_n = 0$.

4.18. Кои од својствата: рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност ги има релацијата α_1 во $\mathbb{N}$, дефинирана со:

а) $m \alpha_1 n \iff m = n^2$; б) $m \alpha_2 n \iff m$ и n се заемно прости;

в) $m \alpha_3 n \iff m < n$; г) $m \alpha_4 n \iff |m-n| = 4$.

Одговор. а) Антисиметрична, б) симетрична. в) нерефлексивна и транзитивна. г) симетрична.

4.19. Во множеството $\mathcal{P}(M)$ се дефинирани релациите α_i, $i=1,2,3$, со:

$$A\,\alpha_1 B \Longleftrightarrow A \subseteq B,$$

$$A\,\alpha_2 B \Longleftrightarrow A\cap B \neq \emptyset,$$

$$A\,\alpha_3 B \Longleftrightarrow |A| = |B|,\ A \text{ и } B \text{ конечни.}$$

Да се испитаат особините на овие релации.

Одговор. α_1 е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. α_2 е симетрична; не е рефлексивна, зашто $\emptyset\cap\emptyset = \emptyset$. Оваа релација е транзитивна ако и само ако M нема повеќе од два елемента. Релацијата α_3 е симетрична и транзитивна; таа е рефлексивна ако и само ако множеството M е конечно.

4.20. Нека релациите α_i, $i=1,2,3,4$, се дефинирани како во 4.18. Да се покаже дека:

$$\alpha_2^2 = \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \qquad \alpha_3^2 = \{(m,n)\mid n-m > 1\},$$

$$\alpha_3\alpha_4 = \alpha_4\alpha_3 = \{(m,n)\mid m-n < 4\}.$$

4.21. Нека α_1, α_2 и β се релации во множеството A, при што $\alpha_1\subseteq\alpha_2$. Да се покаже дека:

$$\beta\alpha_1 \subseteq \beta\alpha_2, \qquad \alpha_1\beta \subseteq \alpha_2\beta.$$

Решение. Да покажеме дека $\alpha_1\beta\subseteq\alpha_2\beta$, а другото се докажува слично.

Нека $x\,\alpha_1\beta y$; тоа значи дека постои некој елемент $z\in A$, таков што $x\,\alpha_1 z$ и $z\,\beta y$. Бидејќи $\alpha_1\subseteq\alpha_2$, од $x\,\alpha_1 z$ следува $x\,\alpha_2 z$, кое заедно со $z\,\beta\,y$, дава $x\alpha_2\beta\,y$. Значи, важи $\alpha_1\beta \subseteq \alpha_2\beta$.

4.22. Ако α е релација во A, тогаш $\alpha^2\cap\alpha = \emptyset$ ако и само ако од $a\,\alpha\,b$ и $b\alpha c$ следува $a\,\alpha' c$.

4.23. Нека α е релација во множеството A и нека за $a \in A$,

$$a^{\alpha} = \{ x \mid x \in A,\ x\alpha a \}.$$

Да се покаже дека $A = \bigcup_{a \in A} a^{\alpha}$ ако и само ако релацијата $\alpha\alpha^{-1}$ е рефлексивна.

Решение. Ако релацијата $\alpha\alpha^{-1}$ е рефлексивна и ако $b \in A$, тогаш $(b,b) \in \alpha\alpha^{-1}$, па постои $a \in A$, таков што $(b,a) \in \alpha$, т.е. $b \in a^{\alpha}$. Обратно, ако за секој $b \in A$ постои $a \in A$, таков што $b \in a^{\alpha}$ ќе имаме $(b,a) \in \alpha$, $(a,b) \in \alpha^{-1}$, па и $(b,b) \in \alpha\alpha^{-1}$, т.е. релацијата $\alpha\alpha^{-1}$ е рефлексивна.

4.24. Нека α е релација во множеството A. Да се покаже дека:

а) α е рефлексивна $\Longleftrightarrow$ $\Delta_A \subseteq \alpha$;

б) α е нерефлексивна $\Longleftrightarrow$ $\alpha \cap \Delta_A = \emptyset$;

в) α е симетрична $\Longleftrightarrow$ $\alpha = \alpha^{-1}$;

г) α е антисиметрична $\Longleftrightarrow$ $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_A$;

д) α е транзитивна $\Longleftrightarrow$ $\alpha^2 \subseteq \alpha$.

Решение. а), б) и г) следуваат директно од дефиницијата.

в) Од дефиницијата на симетричност на релација имаме:

$$\alpha \text{ е симетрична} \Longleftrightarrow \alpha \subseteq \alpha^{-1}.$$

Од $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ следува $\alpha^{-1} \subseteq (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, т.е. релацијата α е симетрична ако и само ако $\alpha = \alpha^{-1}$.

д) Нека релацијата α е транзитивна. Ако $x\alpha^2 y$, тогаш постои елемент $z \in A$, таков што $x\alpha z$ и $z\alpha y$, а од транзитивноста на α следува дека $x\alpha y$. Значи, $\alpha^2 \subseteq \alpha$.

Обратно, нека $\alpha^2 \subseteq \alpha$. Ако $x\alpha z$ и $z\alpha y$, тогаш имаме $x\alpha^2 y$, а од $\alpha^2 \subseteq \alpha$, следува $x\alpha y$, т.е. релацијата α е транзитивна.

→ **4.25.** Ако α е релација во множеството A, тогаш релацијата $\alpha\alpha^{-1}$ е симетрична.

4.26. Ако релациите α и β во A се рефлексивни, тогаш и релацијата $\alpha\beta$ е рефлексивна.

Решение. Од $\Delta_A \subseteq \alpha$ следува $\Delta_A\beta \subseteq \alpha\beta$ (4.21), па

$$\Delta_A \subseteq \beta \subseteq \Delta_A\beta \subseteq \alpha\beta .$$

4.27. Нека α и β се релации во множеството A и нека $\alpha\beta \subseteq \beta\alpha$. Да се покаже дека:

а) ако α и β се симетрични, тогаш $\alpha\beta = \beta\alpha$ е симетрична;

б) ако α и β се транзитивни, тогаш $\beta\alpha$ е транзитивна.

Решение. а) Да покажеме дека релацијата $\alpha\beta$ е симетрична. Имаме:

$$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta\alpha \supseteq \alpha\beta, \qquad (1)$$

а од друга страна $\alpha\beta = \alpha^{-1}\beta^{-1} = (\beta\alpha)^{-1}$. Од $\alpha\beta \subseteq \beta\alpha$, според 4.6, следува

$$\alpha\beta = (\beta\alpha)^{-1} \supseteq (\alpha\beta)^{-1}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\alpha\beta = (\alpha\beta)^{-1}$, т.е. релацијата $\alpha\beta$ е симетрична.

На крајот имаме $\beta\alpha = \beta^{-1}\alpha^{-1} = (\alpha\beta)^{-1} = \alpha\beta$.

б) Имаме:

$$(\beta\alpha)^2 = \beta\alpha\beta\alpha \subseteq \beta\beta\alpha\alpha = \beta^2\alpha^2 \subseteq \beta\alpha,$$

т.е. релацијата $\beta\alpha$ е транзитивна.

4.28. Да се даде пример на две релации α, β во A што се симетрични и транзитивни, но $\alpha\beta$ да не биде ни симетрична ни транзитивна.

Решение. Нека $A = \{1,2,3,4\}$, $\alpha = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(4,4)\}$, $\beta = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}$. Тогаш $\alpha\beta = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(1,2),(1,3),(2,1),(2,4),(4,4),(4,1)\}$. Релациите α, β се симетрични и транзитивни, но релацијата $\alpha\beta$ не е ни симетрична ни транзитивна.

4.29. Релацијата α во A е подредување ако и само ако се исполнети условите:

$$\alpha \cap \alpha^{-1} = \Delta_A, \quad \alpha^2 \subseteq \alpha .$$

4.30. Нека $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ е фамилија релации во A. Ако секоја од релациите α_i е:

а) рефлексивна; б) нерефлексивна;

в) симетрична; г) антисиметрична;

д) транзитивна,

тогаш соодветната особина ја има и нивниот пресек.

Во кој случај унијата β од дадената фамилија има некоја од особините а) – д)?

Решение. До соодветниот заклучок за пресекот се доаѓа лесно користејќи ги соодветните дефиниции. За унијата β имаме:

β е рефлексивна $\Longleftrightarrow (\forall a \in A)(\exists i \in I)\ a\alpha_i a.$

β е симетрична $\Longleftrightarrow \big((\exists i \in I)\ a\alpha_i b \Longrightarrow (\exists j \in I)\ b\alpha_j a\big).$

β е нерефлексивна $\Longleftrightarrow (\forall i \in I)\ \alpha_i$ е нерефлексивна.

β е антисиметрична $\Longleftrightarrow (\forall i,j \in I)\ \alpha_i \cap \alpha_j^{-1} \subseteq \Delta_A .$

β е транзитивна $\Longleftrightarrow \big((\exists i,j \in I)\ a\alpha_i b,\ b\alpha_j c \Longrightarrow (\exists k \in I)\ a\alpha_k c\big).$

4.31. Нека Π_1 и Π_2 се разбивања на множеството X. Π_1 е ***пофино*** од Π_2 ако и само ако $A \in \Pi_1$ имплицира $A \subseteq B$ за некој $B \in \Pi_2$. Да се покаже дека релацијата "е пофино" е подредување во множеството од сите разбивања на X.

Решение. Нека $\mathcal{P}$ е множеството од сите разбивања на множеството X, а α нека е релација дефинирана со:

$$(\forall \Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P})\,\Pi_1 \alpha \Pi_2 \Longleftrightarrow \Pi_1 \text{ е пофино од } \Pi_2 .$$

Ако $\Pi \in \mathcal{P}$, тогаш за секое $A \in \Pi$ имаме $A \subseteq A$, т.е. $\Pi \alpha \Pi$, што значи релацијата α е рефлексивна.

Нека $\Pi_1 \alpha \Pi_2$, $\Pi_2 \alpha \Pi_1$ и нека A е произволен елемент од Π_1. Од $\Pi_1 \alpha \Pi_2$ следува дека постои елемент $B \in \Pi_2$, така што $A \subseteq B$. Од $\Pi_2 \alpha \Pi_1$ следува дека постои елемент $A_1 \in \Pi_1$, така што $B \subseteq A_1$. Бидејќи Π_1 е разбивање на X следува дека $A \cap A_1 = \emptyset$ или $A = A_1$. Но, од $A \subseteq B \subseteq A_1$ следува дека $A \cap A_1 = A \neq \emptyset$, па значи $A = A_1 = B$. Значи, за секое $A \in \Pi_1$ постои $B \in \Pi_2$, така што $A = B$, т.е. $\Pi_1 = \Pi_2$, а тоа значи дека релацијата α е антисиметрична.

Од транзитивноста на релацијата "$\subseteq$" кај множествата следува дека и релацијата α е транзитивна, т.е. релацијата α е подредување.

4.32. Да го означиме со $Q[x]$ множеството од сите полиноми со рационални коефициенти. Да дефинираме релација на $A = Q[x] \setminus Q$ на следниов начин: за секој пар $f, g \in A$, $f \alpha g$ ако и само ако $g = qf$ за некој $q \in A$. Да се покаже дека α е стриктно подредување на A. Дали $\alpha \cup \Delta_A$ е потполно подредување на A?

Решение. Лесно се проверува дека α е нерефлексивна и транзитивна, т.е. α е стриктно подредување. Исто така лесно се покажува дека $\alpha \cup \Delta_A$ е подредување, но не е потполно, зашто, на пример, полиномите $f(x) = x-1$ и $g(x) = x+1$ не се во релација $\alpha \cup \Delta_A$.

4.33. Нека е α стриктно подредување на A, а β стриктно подредување на B. На $A \times B$ дефинираме релација γ на следниов начин:

$$(a_1, b_1) \gamma (a_2, b_2) \Longleftrightarrow b_1 \beta b_2 \text{ или } (a_1 \alpha a_2 \text{ и } b_1 = b_2).$$

Да се покаже дека γ е стриктно подредување на $A \times B$.

4.34. Да се покаже дека Δ_A е единствената релација на A, којашто е еквивалентност и подредување.

Решение. Нека α е релација во множеството A, којашто е еквивалентност и подредување. Тоа значи дека α е рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна. Од симетричноста на α следува дека $\alpha = \alpha^{-1}$, а од рефлексивноста и антисиметричноста следува дека $\alpha \cap \alpha^{-1} = \Delta_A$. Значи, имаме $\alpha = \alpha \cap \alpha = \alpha \cap \alpha^{-1} = \Lambda_A$.

4.35. Да се покаже дека релацијата α во множеството A е еквивалентност ако и само ако се исполнети условите:

(i) $\alpha = \alpha^{-1}$

(ii) $(\forall a \in A)(\exists b \in B) a \alpha b$;

(iii) $a\alpha b \wedge c \alpha b \Longrightarrow a \alpha c$.

Решение. Ако α е еквивалентност, јасно е дека условите (i) до (iii) се исполнети.

Обратно, за релацијата α нека се исполнети условите (i) до (iii). Од $\alpha = \alpha^{-1}$ следува дека α е симетрична. Нека a е произволен елемент од A; од (ii) следува дека постои еден елемент $b \in A$, така што $a\alpha b$, а според (iii), од $a\alpha b$ и $a \alpha b$ следува $a \alpha a$, т.е. α е рефлексивна. Потоа, нека $a\alpha b$ и $b \alpha c$. Поради симетричноста на α, имаме $a\alpha b$ и $c \alpha b$, а според (iii), добиваме и $a \alpha c$, т.е. α е транзитивна.

4.36. Релацијата α е еквивалентност на A ако и само ако:

$$\Delta_A \subseteq \alpha, \quad \alpha\alpha^{-1} \subseteq \alpha. \qquad (1)$$

Решение. Да претпоставиме дека α е еквивалентност на A. Тогаш $\Delta_A \subseteq \alpha$, $\alpha^{-1} = \alpha$, $\alpha^2 \subseteq \alpha$, па добиваме $\alpha\alpha^{-1} = \alpha\alpha \subseteq \alpha$.

Обратно, нека релацијата α ги исполнува условите (1). Тогаш имаме:

$$\alpha^{-1} = \Delta_A \alpha^{-1} \subseteq \alpha\alpha^{-1} \subseteq \alpha,$$

$$\alpha = (\alpha^{-1})^{-1} \subseteq \alpha^{-1},$$

т.е. $\alpha = \alpha^{-1}$. Значи, α е симетрична, а бидејќи и $\alpha^2 = \alpha\alpha^{-1} \subseteq \alpha$, таа е еквивалентност.

← **4.37.** Нека $Z^* = Z \setminus \{0\}$ и $S = Z \times Z^*$. Да се покаже дека релацијата $\alpha = \{((x,y),(u,v)) \mid xv = yu\}$ е еквивалентност во S.

б **4.38.** Нека $S = N^2$. Да се покаже дека релацијата

$$\alpha = \{((x,y),(u,v)) \mid x+v=y+u\}$$

е еквивалентност во S и дека $(4,7)^{\alpha} = \{(x,y) \mid y-x=3\}$.

б **4.39.** Нека α е еквивалентност во A, β еквивалентност во B и нека релацијата γ во $A \times B$ е дефинирана со:

$$(a_1,b_1)\,\gamma\,(a_2,b_2) \Longleftrightarrow a_1 \alpha a_2,\ b_1 \beta b_2.$$

Да се покаже дека γ е еквивалентност.

4.40. Производот $\alpha\beta$ на еквивалентностите α, β ги содржи α и β и се содржи во секоја еквивалентност γ што ги содржи α и β.

Решение. Бидејќи α и β се еквивалентности, имаме $\Delta_A \subseteq \alpha$, $\Delta_A \subseteq \beta$, па според 4.21, множејќи ја првата инклузија со β оддесно, а втората со α одлево, добиваме $\beta \subseteq \alpha\beta$, $\alpha \subseteq \alpha\beta$.

Нека γ е произволна еквивалентност што ги содржи α и β. Бидејќи $\beta \subseteq \gamma$, следува дека $\gamma\beta \subseteq \gamma$, па според тоа добиваме:

$$\alpha \subseteq \gamma \Longrightarrow \alpha\beta \subseteq \gamma\beta \subseteq \gamma.$$

б **4.41.** Ако α и β се еквивалентности во A, тогаш $\alpha\beta$ е еквивалентност во A ако и само ако $\alpha\beta = \beta\alpha$.

4.42. Ако α и β се еквивалентности, тогаш $\alpha \cup \beta$ е еквивалентност ако и само ако

$$(\forall a,b \in A)\, a^{\alpha} \cap b^{\beta} \neq \emptyset \Longrightarrow a^{\alpha} \subseteq b^{\beta} \vee b^{\beta} \subseteq a^{\alpha}. \qquad (1)$$

Ако $\alpha \cup \beta$ е еквивалентност, тогаш $\alpha \cup \beta = \alpha\beta$.

Решение. Нека $\alpha \cup \beta$ е еквивалентност и нека $c \in a^{\alpha} \cap b^{\beta}$,

$b^{\beta} \not\subseteq a^{\alpha}$. Тогаш постои $d \in b^{\beta}$, $d \notin a^{\alpha}$. Ако $x \in a^{\alpha}$, тогаш имаме:

$$x\,\alpha\cup\beta\,c,\ c\,\alpha\cup\beta\,b,\ b\,\alpha\cup\beta\,d,\ x\,\alpha\cup\beta\,d,\ x\alpha' d,$$

па значи $x\beta d$, т.е. $x \in d^{\beta} = b^{\beta}$, односно $a^{\alpha} \subseteq b^{\beta}$.

Обратно, да претпоставиме дека α и β се еквиваленtности во A со особината (1). Релацијата $\gamma = \alpha \cup \beta$ е рефлексивна и симетрична. Да покажеме дека γ е и транзитивна. Нека $a\gamma b$, $b\gamma c$; треба да покажеме дека $a\alpha c$ или $b\alpha c$. Ако $a\alpha b$ и $b\alpha c$, или $a\beta b$ и $b\beta c$, тогаш сигурно е и $a\gamma c$. Затоа, да претпоставиме дека $a\alpha b$ и $b\beta c$; тогаш $b \in a^{\alpha} \cap c^{\beta}$, па значи $a^{\alpha} \subseteq c^{\beta}$ или $c^{\beta} \subseteq a^{\alpha}$; ако $a^{\alpha} \subseteq c^{\beta}$, тогаш $a\beta c$, па и $a\gamma c$; ако $c^{\beta} \subseteq a^{\alpha}$, тогаш $c\alpha a$, па и $c\gamma a$.

4.43. Нека X е множество и $\Phi \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\Phi \neq \emptyset$, што ги задоволува условите:

(i) $(Y \subseteq Z) \wedge Z \in \Phi \Longrightarrow Y \in \Phi$;

(ii) $Y, Z \in \Phi \Longrightarrow Y \cup Z \in \Phi$.

Ако Φ е фиксирано,во $\mathcal{P}(X)$ дефинираме релација α со:

$$A\alpha B \Longleftrightarrow A \triangle B \in \Phi, \quad (A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)).$$

Да се покаже дека:

а) α е еквиваленtност во $\mathcal{P}(X)$.

б) од $A\alpha B$ следува $A \cup C\,\alpha\,B \cup C$, $A \cap C\,\alpha\,B \cap C$, $A \setminus C\,\alpha\,B \setminus C$ и $C \setminus A\,\alpha\,C \setminus B$, каде што C е произволно подмножество од X.

Решение. а) Јасно е дека од $\Phi \neq \emptyset$ следува $\emptyset \in \Phi$. Бидејќи $A \triangle A = \emptyset \in \Phi$ за секој $A \in \mathcal{P}(X)$, следува $A\alpha A$, т.е. α е рефлексивна. Од комутативноста на $\triangle$ следува симетричноста на α, а од $A\alpha B$ и $B\alpha C$, користејќи ја инклузијата

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C),$$

добиваме и $A\alpha C$, т.е. α е и транзитивна. Значи, релацијата α е еквиваленtност во $\mathcal{P}(X)$.

б) Ако $A \alpha B$, да покажеме, на пример, дека $A \cup C \alpha B \cup C$. Поради $(A \cup C) \Delta (B \cup C) \subseteq A \Delta B$, според (i), следува дека $(A \cup C) \Delta$ $\Delta (B \cup C) \in \Phi$, т.е. $A \cup C \alpha B \cup C$.

4.44. Секоја рефлексивна и транзитивна релација се вика претподредување. Ако α е претподредување во A, да се покаже дека:

а) релацијата $\beta = \alpha \cap \alpha^{-1}$ е еквивалентност;

б) релацијата $\overline{\alpha}$ во A/β , дефинирана со

$$a^{\beta} \overline{\alpha} b^{\beta} \iff (\exists a_1 \in a^{\beta}, b_1 \in b^{\beta})\ a_1 \alpha b_1 ,$$

е подредување.

Решение. а) Бидејќи α е рефлексивна и транзитивна, следува дека и β е таква, а бидејќи

$$\beta^{-1} = (\alpha \cap \alpha^{-1})^{-1} = \alpha^{-1} \cap (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha^{-1} \cap \alpha = \alpha \cap \alpha^{-1} = \beta,$$

следува дека β е и симетрична. Значи, релацијата β е еквивалентност.

б) Од рефлексивноста и транзитивноста на α следува дека и $\overline{\alpha}$ е таква. Да покажеме дека $\overline{\alpha}$ е антисиметрична.

Нека $a^{\beta} \overline{\alpha} b^{\beta}$ и $b^{\beta} \overline{\alpha} a^{\beta}$; тоа значи дека постојат $a_1, a_2 \in a^{\beta}$ и $b_1, b_2 \in b^{\beta}$, такви што $a_1 \alpha b_1$ и $b_2 \alpha a_2$, т.е. $a_1 \alpha b_1$ и $a_2\ \alpha^{-1} b_2$. Бидејќи $b_1, b_2 \in b^{\beta}$, $a_1, a_2 \in a^{\beta}$, следува $a_1 \beta a_2$ и $b_1 \beta b_2$, а според тоа, имаме и $b_1 \alpha b_2$ и $a_2 \alpha a_1$. Од $a_1 \alpha b_1$ и $b_1 \alpha b_2$ добиваме $a_1 \alpha b_2$, а од $a_1 \alpha^{-1} a_2$ и $a_2 \alpha^{-1} b_2$ добиваме и $a_1 \alpha^{-1} b_2$. Значи, имаме $a_1 \beta b_2$, т.е. $a_1^{\beta} = b_2^{\beta}$, па и $a^{\beta} = a_1^{\beta} = b_2^{\beta} = b^{\beta}$.

4.45. Во множеството Z на целите броеви е определена релација α со:

$$a \alpha b \iff (\exists c \in Z)\ b = ac.$$

а) Да се покаже дека α е претподредување.

б) Да се најде еквивалентноста $\beta = \alpha \cap \alpha^{-1}$, факторможеството $\mathbb{Z}/\beta$ и подредувањето $\bar{\alpha}$ во $\mathbb{Z}/\beta$, во смисла на претходната задача.

<u>Одговор</u>. б) $m \beta n \iff m = n$ или $m = -n$, $m, n \in \mathbb{Z}$;

$$\mathbb{Z}/\beta = \{ A_n \mid A_n = \{n, -n\}, n \in \mathbb{N}^0 \};$$

$$m^\beta \, \bar{\alpha} \, n^\beta \iff (\exists k \in \mathbb{Z}) \; n = km .$$

<u>**4.46.**</u> Да се покаже дека множеството X е бесконечно ако и само ако постојат бесконечно многу еквивалентности во X.

<u>Решение</u>. Ако множеството X е конечно, со n елементи, тогаш бројот на еквивалентности во X е помал од 2^{n^2}, па според тоа, ако во множеството X постојат бесконечно многу еквивалентности, тогаш и множеството X е бесконечно.

Обратно, нека множеството X е бесконечно. За секој пар елементи $a, b \in X$, $a \neq b$, во X ја дефинираме релацијата $\alpha_{a,b}$ на следниов начин:

$$x \, \alpha_{a,b} \, y \iff x = y \vee (x,y) = (a,b) \vee (x,y) = (b,a).$$

Лесно се покажува дека релацијата $\alpha_{a,b}$ е еквивалентност, а бидејќи

$$\alpha_{a,b} = \alpha_{c,d} \iff (a,b) = (c,d) ,$$

заклучуваме дека во X постојат бесконечно многу еквивалентности.

<u>**4.47.**</u> Ако $f: A \to B$ е пресликување, тогаш $\ker f = f^{-1} f$. (Притоа: $\ker f = \{ (x,y) \mid f(x) = f(y) \}$ се вика <u>јадро</u> на пресликувањето f.)

<u>**4.48.**</u> Нека $f: A \to B$, $g: B \to C$ се пресликувања. Каков е односот меѓу релациите $\ker f$ и $\ker (gf)$?

<u>Одговор</u>. $\ker f \subseteq \ker (gf)$.

4.49. Нека α и β се еквиваленtности во A, такви што $\alpha \subseteq \beta$. Да се покаже дека постои едно и само едно пресликување $f: A/\alpha \longrightarrow A/\beta$ такво што $f(\mathrm{nat}\,\alpha) = \mathrm{nat}\,\beta$, т.е. дека е еднозначно решлив следниов дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathrm{nat}\,\alpha"] \arrow[dr, "\mathrm{nat}\,\beta"'] & & A/\alpha \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& A/\beta &
\end{tikzcd}$$

(Притоа, $\mathrm{nat}\,\alpha$ е природното пресликување, $(\mathrm{nat}\,\alpha)(a) = a^{\alpha}$.)

Решение. Да ставиме $f(a^{\alpha}) = a^{\beta}$. Ако $a_1^{\alpha} = a_2^{\alpha}$, тогаш, поради $\alpha \subset \beta$ имаме $a_1^{\beta} = a_2^{\beta}$, па значи со $f(a^{\alpha}) = a^{\beta}$ е дефинирано пресликување од A/α во A/β. Притоа:

$$(\forall a \in A)\ (f(\mathrm{nat}\,\alpha))(a) = f(\mathrm{nat}\,\alpha(a)) = f(a^{\alpha}) = a^{\beta} = \mathrm{nat}\,\beta(a),$$

што значи $f(\mathrm{nat}\,\alpha) = \mathrm{nat}\,\beta$, т.е. дадениот дијаграм е решлив.

Ако $g: A/\alpha \longrightarrow A/\beta$ е пресликување со особината $g(\mathrm{nat}\,\alpha) = {}$ $= \mathrm{nat}\,\beta$, тогаш

$$(\forall a \in A)\ g(a^{\alpha}) = g(\mathrm{nat}\,\alpha(a)) = \mathrm{nat}\,\beta(a) = f(a^{\alpha}),$$

што значи $g = f$, т.е. дадениот дијаграм е еднозначно решлив.

4.50. Нека $f: A \longrightarrow B$ е пресликување и α еквиваленtност во A, таква што $\alpha \subseteq \ker f$. Да се покаже дека постои едно и само едно пресликување $f^*: A/\alpha \longrightarrow B$ за кое важи $f^*(\mathrm{nat}\,\alpha) = f$, т.е. дека еднозначно е решлив следниов дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\mathrm{nat}\,\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & A/\alpha \arrow[dl, dashed, "f^*"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Упатство. Тоа е последица од 4.49.

4.51. Да се покаже дека транзитивното проширување на секоја рефлексивна релација е претподредување.

4.52. Нека $A = \{1,2,\dots,9\}$ и нека релацијата α е определена со

$$\alpha = \Delta_A \cup \{(1,3),(3,1),(1,5),(5,3),(1,7),(7,1),(1,9),(2,4),(4,2)\}.$$

Да се најде:

а) транзитивното проширување α^*;

б) еквивалентноста $\beta = \alpha^* \cap (\alpha^*)^{-1}$;

в) факторможеството A/β и соодветното подредување $\overline{\alpha^*}$.

Одговор. а) $\alpha^* = \alpha \cup \{(3,5),(3,7),(3,9),(5,1),(7,3),(7,5),(7,9),(5,7),(5,9)\}$.

б) $\beta = \Delta_A \cup \{(1,3),(3,1),(1,7),(7,1),(2,4),(4,2),(7,3),(3,7),(5,7),(7,5),(5,3),(3,5),(1,5),(5,1)\}$.

в) $A/\beta = \{\{1,3,5,7\},\{2,4\},\{6\},\{8\},\{9\}\}$.

$$\overline{\alpha^*} = \Delta_{A/\beta} \cup \{(\{1,3,5,7\},\{9\})\}.$$

4.53. Да се најде транзитивното проширување на релацијата $(\alpha \cap \alpha^{-1}) \cup \beta$, при што α и β се релации во $\mathbb{C}$, дефинирани со:

$$z_1 \alpha z_2 \iff |z_1| \leq |z_2|, \quad z_1 \beta z_2 \iff \arg z_1 = \arg z_2.$$

Одговор. $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

4.54. Да се покаже дека транзитивното проширување на:

а) рефлексивна релација е рефлексивна релација.

б) симетрична релација е симетрична релација.

Решение. а) Нека α е рефлексивна релација и нека α^* е нејзиното транзитивно проширување. Тогаш имаме $\alpha \subseteq \alpha^*$ и $\Delta_A \subseteq \alpha$, па $\Delta_A \subseteq \alpha^*$, што значи дека релацијата α^* е рефлексивна.

б) Нека α е симетрична и $a\,\alpha^*\,b$. Тогаш имаме:

$$a\,\alpha^*\,b \Longrightarrow (\exists\, a_1,\dots,a_k \in A)\, a\,\alpha\, a_1, a_1\,\alpha\, a_2,\dots,a_k\,\alpha\, b \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\exists\, a_1,\dots,a_k \in A)\, b\,\alpha\, a_k,\dots,a_1\,\alpha\, a \Longrightarrow b\,\alpha^*\,a,$$

т.е. релацијата α^* е симетрична.

4.55. Да се покаже дека транзитивното проширување на рефлексивна и симетрична релација е еквивалентност.

4.56. Нека α е релација во A и нека ставиме:

$$\alpha^{*} = \bigcup_{1}^{\infty} \alpha^{n}, \quad \alpha^{n} = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{n}.$$

Да се покаже дека α^{*} е транзитивното проширување на α.

Решение. Нека τ е транзитивното проширување на α. Тогаш $\alpha \subseteq \tau$, па имаме $\alpha^{n} \subseteq \tau^{n} \subset \tau$, т.е. $\alpha^{*} \subseteq \tau$. Бидејќи

$$\alpha^{*}\alpha^{*} = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \alpha^{m+n} = \alpha^{2} \cup \alpha^{3} \cup \cdots \subset \alpha^{*},$$

следува дека релацијата α^{*} е транзитивна, па значи $\alpha^{*} = \tau$.

4.57. Ако α и β се релации во A такви што $\alpha \subseteq \beta$, тогаш $\alpha^{*} \subseteq \beta^{*}$, каде што α^{*}, β^{*} се транзитиваните проширувања на α, β соодветно.

4.58. За произволна релација α во A да ставиме

$$\beta = \alpha \cup \alpha^{-1} \cup \Delta_{A}.$$

Ако β^{*} е транзитивното проширување на β, тогаш:

а) $\alpha \subseteq \beta^{*}$;

б) β^{*} е еквивалентност во A;

в) ако γ е еквивалентност во A што ја содржи α, тогаш $\beta^{*} \subseteq \gamma$. (Со други зборови, β^{*} е минималната еквивалентност во A што ја содржи α.)

Решение. а) Бидејќи $\beta = \alpha \cup \alpha^{-1} \cup \Delta_{A}$, следува дека $\alpha \subseteq \beta$, а бидејќи β^{*} е транзитивното проширување на β, имаме $\beta \subseteq \beta^{*}$. Значи, $\alpha \subseteq \beta^{*}$.

б) Од $\Delta_{A} \subseteq \alpha$ и $\beta^{-1} = (\alpha \cup \alpha^{-1} \cup \Delta_{A})^{-1} = \alpha^{-1} \cup \alpha \cup \Delta_{A} = \beta$, следува дека β е рефлексивна и симетрична, па според 4.55, следува дека релацијата β^* е еквивалентност.

в) Нека γ е еквивалентност во A што ја содржи α. Од $\alpha \subseteq \gamma$ следува $\alpha^{-1} \subseteq \gamma$, па и $\beta = \alpha \cup \alpha^{-1} \cup \Delta_A \subseteq \gamma$. Од $\beta \subseteq \gamma$ следува и $\beta^* \subseteq \gamma^* = \gamma$.

4.59. Нека $A = \{1,2,\dots,18\}$,

$$\alpha = \{(1,5),(5,9),(9,13),(13,17),(2,6),(6,10),(10,14),(14,18),\\ (3,7),(7,11),(11,15),(4,8),(8,12),(12,16)\},$$

$$\beta = \{(1,7),(7,13),(2,8),(8,14),(3,9),(9,15),(4,10),\\ (10,16),(5,11),(11,17),(6,12),(12,18)\},$$

$$\gamma = \{(1,13),(2,14),(3,15),(4,16),(5,17),(6,18)\}.$$

Да се најдат:

а) транзитивните проширувања α^*, β^*, γ^* на α, β, γ;

б) минималните еквивалентности α_1, β_1, γ_1 што ги содржат α, β, γ;

в) фактормножествата A/α_1, A/β_1, A/γ_1;

г) пресликувањата $\mathrm{nat}\,\alpha_1$, $\mathrm{nat}\,\beta_1$, $\mathrm{nat}\,\gamma_1$;

д) транзитивниот производ на α и β.

Решение. Можеме да забележиме дека:

$$\alpha = \{(m,n) \mid m,n \in A,\ n-m=4\},$$

$$\beta = \{(m,n) \mid m,n \in A,\ n-m=6\},$$

$$\gamma = \{(m,n) \mid m,n \in A,\ n-m=12\}.$$

а) $\alpha^* = \{(m,n) \mid m,n \in A,\ n-m=4;\ 8;\ 12;\ 16\}$;

$\beta^* = \{(m,n) \mid m,n \in A,\ n-m=6;\ 12\}$; $\gamma^* = \gamma$.

б) Според 4.58, имаме:

$$\alpha_1 = (\alpha \cup \alpha^{-1} \cup \Delta_A)^* = \Delta_A \cup \{(m,n) \mid m,n \in A,\ |m-n| = 4;\ 8;\ 12;\ 16\};$$

$$\beta_1 = (\beta \cup \beta^{-1} \cup \Delta_A)^* = \Delta_A \cup \{(m,n) \mid m,n \in A,\ |m-n| = 6;\ 12\};$$

$$\gamma_1 = (\gamma \cup \gamma^{-1} \cup \Delta_A)^* = \Delta_A \cup \{(m,n) \mid m,n \in A,\ |m-n| = 12\}.$$

в) $A/\alpha_1 = \{\{1,5,9,13,17\},\{2,6,10,14,18\},\{3,7,11,15\},$
$\{4,8,12,16\}\} = \{A_1,A_2,A_3,A_4\};$

$A/\beta_1 = \{\{1,7,13\},\{2,8,14\},\{3,9.15\},\{4,10,16\},$
$\{5,11,17\},\{6,12,18\}\} = \{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6\};$

$A/\gamma_1 = \{\{1,13\},\{2,14\},\{3,15\},\{4,16\},\{5,17\},\{6,18\},$
$\{7\},\{8\},\{9\},\{10\},\{11\},\{12\}\} = \{C_1,C_2,\dots,C_{12}\}.$

г) $\mathrm{nat}\,\alpha_1$: $1,5,9,13,17 \longrightarrow A_1$; $2,6,10,14,18 \longrightarrow A_2$;
$3,7,11,15 \longrightarrow A_3$; $4,8,12,16 \longrightarrow A_4$.

$\mathrm{nat}\,\beta_1$: $1,7,13 \longrightarrow B_1$; $2,8,14 \longrightarrow B_2$; $3,9,15 \longrightarrow B_3$;
$4,10,16 \rightarrow B_4$; $5,11,17 \rightarrow B_5$; $6,12,18 \rightarrow B_6$.

$\mathrm{nat}\,\gamma_1$: $1,13 \longrightarrow C_1$; $2,14 \longrightarrow C_2$; $3,15 \longrightarrow C_3$; $4,16 \longrightarrow C_4$;
$5,17 \longrightarrow C_5$; $6,18 \longrightarrow C_6$; $k \longrightarrow C_k$, $k=7,\dots,12$.

д) Нека τ е транзитивниот производ на α и β. Имаме:

$$\tau = (\alpha \cup \beta)^* = \{(m,n) \mid m,n \in A,\ |m-n| = 4;6;8;\dots;16\}.$$

4.60. Нека α_i, $i=1,2,3$, се релации во $\mathbb{N}$ определени со:

$$\alpha_i = \{(x, x+m_i) \mid x \in \mathbb{N}\},\quad i=1,2,3,$$

каде што m_1, m_2, m_3 се дадени природни броеви.

а) Да се најдат транзитивните проширувања α_i^*, $i=1,2,3$.

б) Да се најдат минималните еквиваленетности β_i што ги содржат α_i, $i=1,2,3$.

в) Во кој случај $\beta_1 \subseteq \beta_2$?

г) Во кој случај $\beta_1 = \beta_2 \cap \beta_3$?

Одговор. а) $\alpha_i^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{(x, x+km_i) \mid x \in \mathbb{N}\}$, $i=1,2,3$.

б) $\beta_i = \equiv(\mathrm{mod}\, m_i)$, $i=1,2,3$.

в) $m_2 \mid m_1$. г) $m_1 = [m_2, m_3]$, при што со $[m_2, m_3]$ означува најмалиот заеднички содржател на m_2 и m_3.

4.61. а) Нека α е транзитивна и антисиметрична релација во М и нека $\beta = \alpha \cup \Delta_M$. Да се покаже дека β е подредување на М.

б) Да се даде пример на антисиметрична (транзитивна) релација што не може да се прошири до подредување.

Решение. а) Имајќи го предвид тоа што $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_M$ и $\alpha^2 \subseteq \alpha$, имаме:

$$\beta \cap \beta^{-1} = (\alpha \cup \Delta_M) \cap (\alpha^{-1} \cup \Delta_M) =$$
$$= (\alpha \cap \alpha^{-1}) \cup (\alpha \cap \Delta_M) \cup (\Delta_M \cap \alpha^{-1}) \cup (\Delta_M \cap \Delta_M) \subseteq \Delta_M ,$$
$$\beta^2 = \alpha^2 \cup \alpha \cup \alpha \cup \Delta_M \subseteq \alpha \cup \Delta_M = \beta .$$

Значи, β е антисиметрична и транзитивна, па бидејќи и $\Delta_M \subseteq \beta$, таа е подредување.

б) Нека $M=\{1,2,3\}$, $\alpha = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, $\tau = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$. Релацијата α е антисиметрична, а τ транзитивна, но ниедна од нив не може да се прошири до подредување. На пример, кога би постоело подредување β што е проширување на α, би имале $1\beta 2$, а бидејќи β е транзитивна, од $2\beta 3$ и $3\beta 1$ би следувало $2\beta 1$, а тоа значи дека β не би била антисиметрична.

4.62. Нека А е множество со n елементи. Да се покаже дека:

а) бројот на релациите во А е 2^{n^2};

б) бројот на рефлексивните (нерефлексивните) релации во А е 2^{n^2-n}.

в) бројот на симетричните релации во А е $2^{n(n+1)/2}$;

г) бројот на релациите во А што се рефлексивни и симетрични е $2^{n(n-1)/2}$;

д) бројот на релациите во А што се симетрични и антисиметрични е 2^n;

ѓ) бројот на антисиметричните релации во А е $2^{1+n(n+1)/2} - 2^n$.

е) ако $f(n)$ е бројот на еквивалентностите во А, тогаш

$$f(n+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f(k).$$

5. ПОДРЕДЕНИ МНОЖЕСТВА

5.1. Да се направат дијаграми на подредените множества:

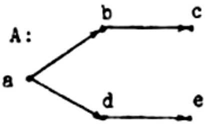
$A=\{a,b,c,d,e\}$, $\alpha=\Delta_A\cup\{(a,b),(a,c),(b,c),(a,d),(a,e),(d,e)\}$;

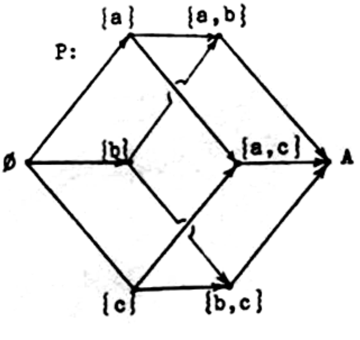
$B=\{a,b,c,d,e\}$, $\beta=\Delta_B\cup\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,e),(c,e),(d,e)\}$;

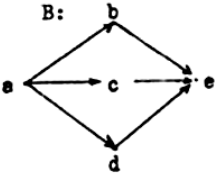
$C=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $\gamma=\Delta_C\cup\{(a,b),(a,d),(a,e),(b,e),(f,g)\}$;

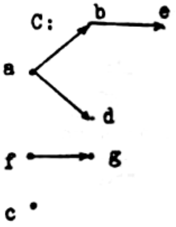
$P=\mathcal{P}(\{a,b,c\})$, $\delta=(\subseteq)$.

Одговор.



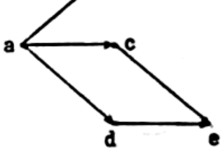




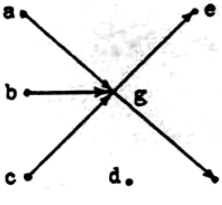


5.2. Кое множество A и подредување α одговара на дијаграмот:

а)



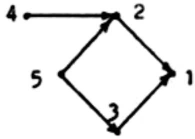
б)



Решение. а) $A = \{a,b,c,d,e,f\}$, $\alpha = \Delta_A \cup \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,f),(c,e),(d,e)\}$.

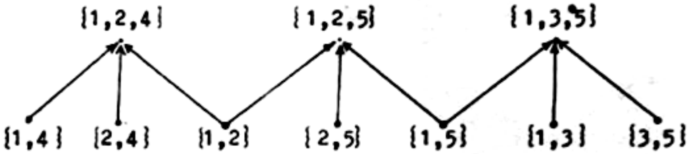
б) $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, $\alpha = \Delta_A \cup \{(a,g),(a,e),(a,f),(b,g),(b,e),(b,f),(c,g),(c,e),(c,f),(g,e),(g,f)\}$.

5.3. Множеството $M = \{1,2,3,4,5\}$ е подредено како на дијаграмот



Нека Φ е фамилијата од потполноподредените подмножества од M што содржат барем два елемента и нека Φ е подредено по инклузија. Да се конструира дијаграмот на Φ.

Решение. Според условот на задачата, елементите на Φ се следниве подмножества од M: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,5\}$. Дијаграмот на Φ е следниов:



5.4. Нека $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ е верига подредувања на множеството M. Да се покаже дека $\alpha = \bigcup_i \alpha_i$ е подредување на M.

Упатство. Да се искористи 4.30,а лесно се покажува и директно.

5.5. Нека α е подредување на множеството M и $A \subseteq M$. Да се покаже дека:

а) $\beta = \alpha \cap (A \times A)$ е подредување на A.

б) ако α е потполно подредување на M, тогаш β е потполно подредување на A.

в) може да се случи β да е потполно подредување на A, а α да не е потполно подредување на M.

5.6. Во кој случај секој елемент од едно подредено множество е минимален?

Решение. Нека M е подредено множество, така што секој елемент во M е минимален. Ако a и b се два различни елемента од M, тогаш, бидејќи a е минимален, не може да биде $b \leqslant a$, а бидејќи и b е минимален, не може да биде $a \leqslant b$. Значи, кои било два различни елемента од M не се споредливи. Во овој случај за подреденото множество M велиме дека е потполно неподредено.

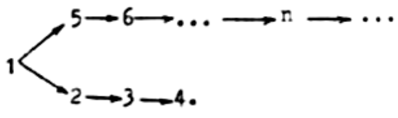
5.7. Да се покаже дека во секое конечно подредено множество има барем еден максимален и барем еден минимален елемент. Дали тоа важи и за бесконечните множества?

Решение. Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е конечно подредено множество и нека a_i е произволен елемент од A. Ако $a_j \not\leqslant a_i$ за кој било $j \neq i$, тогаш a_i е минимален елемент; ако пак постои некој елемент a_k, така што $a_k < a_i$, тогаш истата дискусија може да се направи за елементот a_k. Но, оваа постапка може да се повтори само конечен број пати, што значи дека во A постои барем еден минимален елемент. Слично, за максимален.

За бесконечните множества ова не мора да важи. На пример, $\mathbb{R}$ во однос на обичното подредување.

5.8. Да се даде пример на подредено множество со само еден максимален елемент што не е најголем. Дали постои конечно подредено множество со таа особина?

Решение. Нека во $\mathbb{N}$ е зададено подредување со дијаграмот:



Во така подреденото множество $\mathbb{N}$ бројот 4 е единствен максимален, но не е најголем.

Ако M е конечно множество со единствен максимален елемент, тогаш тој е и најголем елемент.

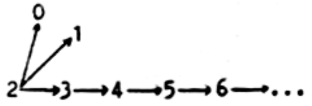
5.9. Ако елементот a од подреденото множество M е максимален и минимален, тогаш тој не е споредлив со ниеден друг елемент од M.

Решение. Кога би било, на пример, $a<b$, тогаш a не би бил максимален; од минималноста на a следува дека не е можно да биде ни $c<a$.

5.10. Ако a и b се различни минимални (максимални) елементи во подреденото множество M, тогаш $\{a,b\}$ нема минорант (мајорант) во M.

5.11. Ако подмножеството A од подреденото множество M содржи два различни максимални (минимални) елементи a,b на M, тогаш не постои $\sup A$ ($\inf A$). Дали овој исказ е точен и во случајот кога A содржи само еден максимален (минимален) елемент на M?

Решение. Не постои $\sup A = c$, зашто тој би бил мајорант на $\{a,b\}$, а тоа, според 5.10, не е можно. Во случајот кога A содржи точно еден максимален елемент на M може да постои $\sup A$, но не мора. На пример, ако множеството $\mathbb{N}^0$ е подредено како што покажува дијаграмот, тогаш за множеството $A=\{0,2\}$, кое содржи само еден максимален елемент на $\mathbb{N}^0$, постои $\sup A = 0$, а за множеството $B = \{0,2,4,6,...\}$ не постои.



5.12. Нека M е подредено множество, а A подмножество од M. Да го означиме со A^* множеството од сите мајоранти на A, а со A_* множеството од сите миноранти на A. Да се покаже дека:

а) $\emptyset^* = \emptyset_* = M$.

б) Ако M има најмал елемент a и најголем елемент b, тогаш $M_* = \{a\}$, $M^* = \{b\}$.

в) $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \supseteq B^*$, $A_* \supseteq B_*$.

г) $A \subseteq (A^*)_* \cap (A_*)^*$.

д) $A^* = ((A^*)_*)^*$.

ѓ) $(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$.

е) Да се формулираат и да се докажат аналогните тврдења на д) и ѓ) за минорантите.

Решение. г) За секој елемент $x \in A$ и секој елемент $y \in A^*$ важи $x \leqslant y$, што значи $x \in (A^*)_*$, т.е. $A \subseteq (A^*)_*$. Слично, имаме $A \subseteq (A_*)^*$, т.е. $A \subseteq (A^*)_* \cap (A_*)^*$.

д) Од $A \subseteq (A^*)_*$, според в), добиваме $A^* \supseteq ((A^*)_*)^*$. Од $A \subseteq (A_*)^*$, ставајќи A^* наместо A, добиваме $A^* \subseteq ((A^*)_*)^*$, од каде што следува бараното равенство.

ѓ) Од $A, B \subseteq A \cup B$, според в), добиваме $(A \cup B)^* \subseteq A^*$, $(A \cup B)^* \subseteq B^*$, па и $(A \cup B)^* \subseteq A^* \cap B^*$. Ако $x \in A^* \cap B^*$, тогаш $x \geqslant y$ за секој $y \in A \cup B$, па $A^* \cap B^* \subseteq (A \cup B)^*$. Следствено, важи равенство.

5.13. Ако A е подмножество од подреденото множество M и ако постојат $\sup A$, $\inf A$, $\sup A^*$ и $\inf A^*$, тогаш

$$\sup A = \inf A^*, \quad \inf A = \sup A_*.$$

Решение. Според дефиницијата на $\sup A$ и A^* (5.12), $\sup A$ е најмалиот елемент на A^*, па значи тоа е и $\inf A^*$.

5.14. Ако $M = \{a, b, c\}$, да се најдат сите:

а) еквиваленности на M,

б) подредувања на M.

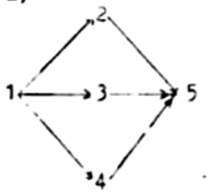
Потоа да се направат дијаграми на овие подредени множества.

Решение. а) Еквиваленностите на множеството M се: $\alpha_1 = \Delta_M$, $\alpha_2 = \Delta_M \cup \{(a,b),(b,a)\}$, $\alpha_3 = \Delta_M \cup \{(a,c),(c,a)\}$, $\alpha_4 = \Delta_M \cup \{(b,c),(c,b)\}$ $\alpha_5 = M \times M$.

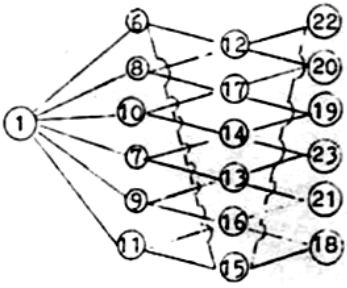
б) Подредувањата на множеството M се: $\alpha_1 = \Delta_M$, $\alpha_6 = \Delta_M \cup \{(a,b)\}$, $\alpha_7 = \alpha_6^{-1}$, $\alpha_8 = \Delta_M \cup \{(a,c)\}$, $\alpha_9 = \alpha_8^{-1}$, $\alpha_{10} = \Delta_M \cup \{(b,c)\}$, $\alpha_{11} = \alpha_{10}^{-1}$, $\alpha_{12} = \Delta_M \cup \{(a,b),(a,c)\}$, $\alpha_{13} = \alpha_{12}^{-1}$, $\alpha_{14} = \Delta_M \cup \{(b,a),(b,c)\}$, $\alpha_{15} = \alpha_{14}^{-1}$, $\alpha_{16} = \Delta_M \cup \{(c,a),(c,b)\}$, $\alpha_{17} = \alpha_{16}^{-1}$, $\alpha_{18} = \Delta_M \cup \{(a,b),$ $(c,a),(c,b)\}$, $\alpha_{19} = \alpha_{18}^{-1}$, $\alpha_{20} = \Delta_M \cup \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$, $\alpha_{21} = \alpha_{20}^{-1}$, $\alpha_{22} = \Delta_M \cup \{(a,b),(a,c),(c,b)\}$, $\alpha_{23} = \alpha_{22}^{-1}$.

Дијаграмите на овие подредени множества се:

а)



б)



5.15. Ако Φ е фамилијата од сите подредувања на множеството M, да се покаже дека α е максимален елемент во Φ ако и само ако α е потполно подредување на M.

Решение. Нека α е потполно подредување на M и нека $\alpha \subset \beta$, $\beta \subseteq M \times M$. Тогаш постои $(a,b) \in \beta$, таков што $(a,b) \notin \alpha$. Бидејќи α е потполно подредување, следува $\alpha \cup \alpha^{-1} = M \times M$, а од тоа следува дека $(b,a) \in \alpha$, па и $(b,a) \in \beta$. Значи, $(a,b),(b,a) \in \beta$, но $a \neq b$, па релацијата β не е антисиметрична. Со тоа докажавме дека α е максимален елемент во Ф.

Ако подредувањето α не е потполно, тогаш постојат барем два елемента $a,b \in M$, такви што $a\alpha' b$ и $b\alpha' a$, а релацијата

$$\beta = \alpha \cup \{(x,y) \mid x,y \in M,\ x\alpha a,\ b\alpha y\}$$

е подредување на М такво што $\alpha \subset \beta$, т.е. α не е максимален елемент во Ф. Следствено, ако α е максимален елемент во Ф, тогаш тоа е потполно подредување на М.

5.16. Во кој случај секое подмножество од подреденото множество М е:

а) верига;

б) почетен сегмент во М?

Решение. а) Да претпоставиме дека секое подмножество од подреденото множество М е верига; тогаш секое двоелементно подмножество $\{x,y\}$ од М е верига, па значи или $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$, а тоа значи дека М е потполно подредено.

Обратно, ако М е потполно подредено множество, тогаш е јасно дека секое подмножество од М е верига.

б) Да претпоставиме дека секое подмножество од подреденото множество М е почетен сегмент; тогаш секое едноелементно подмножество $\{a\}$ е почетен сегмент, а тоа значи дека а е минимален елемент во М. Значи, секој елемент од М е минимален, т.е. М е потполно неподредено.

Обратно, ако М е потполно неподредено, тогаш е јасно дека секое подмножество од М е почетен сегмент.

5.17. Нека М е подредено множество. Да се покаже дека:

а) $\bigcup\limits_{a\in M} (-\infty, a) \subseteq M, \quad \bigcup\limits_{a\in M} (-\infty, a] = M;$

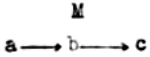
б) ако $M \neq \emptyset$, тогаш $\bigcap\limits_{a\in M}(-\infty, a) = \emptyset$,

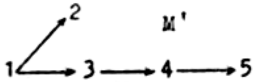
$$\bigcap_{a\in M}(-\infty, a] = \begin{cases} \overset{\{m\}}{m}, & \text{ако } m \text{ е најмал елемент на } M \\ \emptyset, & \text{ако } M \text{ нема најмал елемент.} \end{cases}$$

5.18. Нека M и M' се подредени множества. Ако $f:M\rightarrow M'$ е монотоно пресликување (т.е. $x\leq y \Rightarrow f(x)\leq f(x)$) и ако a е најмал (најголем, максимален, минимален) елемент, дали $f(a)$ го има истото својство?

Решение. Елементот $f(a)$ не мора да ја има особината што ја има елементот a. На пример, нека множествата $M = \{a,b,c\}$ и $M'= \{1,2,3,4,5\}$ се подредени како на дијаграмите:

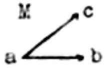
а)

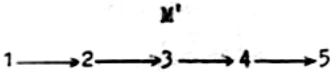




Ако пресликувањето $f:M\rightarrow M'$ е дефинирано со $f:a\rightarrow 3$, $b\rightarrow 4, c\rightarrow 5$, тогаш f е монотоно. Елементот a е најмал елемент во M, а $f(a)=3$ не е најмал во M'; исто така, c е најголем во M, а $f(c)=5$ не е најголем во M'.

б)





Пресликувањето $f:M\rightarrow M'$, дефинирано со $f:a\rightarrow 2$, $b\rightarrow 3$, $c\rightarrow 4$, е монотоно и притоа a е минимален елемент (како најмал) во M, но $f(a)=2$ не е минимален во M'; исто така, b и c се максимални елементи во M, но $f(b)=3$, $f(c)=4$ не се максимални во M'.

5.19. Нека f е монотоно пресликување од подреденото множество M во подреденото множество M' и нека A е подмножество од M. Ако постојат $a=\sup_M A$ и $a'=\sup_{M'} f(A)$, тогаш $f(a)\geqslant a'$. Ако постојат $b=\inf_M A$ и $b'=\inf_{M'} f(A)$, тогаш $f(b)\leqslant b'$.

Решение. Бидејќи $a\geqslant x$ за секој $x\in A$, а f е монотоно пресликување, следува дека $f(a)\geqslant f(x)$, за секој $x\in A$. Затоа, $f(a)\geqslant x'$ за секој $x'\in f(A)$, т.е. $f(a)\geqslant a'$. Другото тврдење се докажува слично.

5.20. Нека M е подредено множество и нека со $\mathcal{L}(M)$ ја означиме фамилијата од сите почетни сегменти на M. Во $\mathcal{L}(M)$ дефинираме релација $\equiv$ со:

$$A\equiv B \iff A=B\vee(\exists a\in M)\{(A=(-\infty,a]\wedge B=(-\infty,a))\vee$$
$$\vee(A=(-\infty,a)\wedge B=(-\infty,a])\}.$$

а) Да се покаже дека релацијата $\equiv$ е еквивалентност и дека класите на еквивалентноста се едноелементни или двоелементни множества.

б) Факторрмножеството $\mathcal{L}(M)/\equiv$ да го означиме со $\mathcal{L}^*(M)$. Да се покаже дека постои само едно подредување на $\mathcal{L}^*(M)$, такво што природното пресликување $\mathrm{nat}\equiv$ да биде монотоно.

в) Што претставува $\mathcal{L}^*(M)$, ако $M=\mathbb{N}$, $M=\mathbb{Q}$, односно $M=\mathbb{R}$?

Решение. а) Дека релацијата $\equiv$ е рефлексивна и симетрична е јасно. Да покажеме дека е и транзитивна. Нека $A\equiv B$ и $B\equiv C$. Ако $A=B$ или $B=C$, тогаш е јасно дека $A\equiv C$, Затоа, нека $A\neq B$ и $B\neq C$. Можни се следниве два случаи:

$$A=(-\infty,a),\ B=(-\infty,a],\ C=(-\infty,a);$$
$$A=(-\infty,a],\ B=(-\infty,a),\ C=(-\infty,a],$$

па значи, во секој случај $A\equiv C$. Значи, релацијата $\equiv$ е еквивалентност.

Од доказот на транзитивноста на релацијата $\equiv$ се гледа дека класите на еквивалентноста се или едноелементни или двоелементни множества. Едноелементни се класите $\{A\}$, за секој почетен сегмент A од M што не е од облик $(-\infty,a)$ или $(-\infty,a]$. Ако во M нема најголем елемент, тогаш и $M^{\equiv}=\{M\}$ е едноелементно множество.

б) Ако во $\mathcal{L}^*(M)$ дефинираме подредување со:

$$A^{\equiv} \leqslant B^{\equiv} \Longleftrightarrow A \subseteq B, \qquad (1)$$

тогаш е јасно дека пресликувањето $\mathrm{nat}\equiv$ е монотоно. Ако пак $\mathrm{nat}\equiv$ треба да е монотоно, тогаш имаме:

$$A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{nat}\equiv(A) \leqslant \mathrm{nat}\equiv(B) \Longrightarrow A^{\equiv} \leqslant B^{\equiv},$$

т.е. само подредувањето, дефинирано со (1), е такво што природното пресликување $\mathrm{nat}\equiv$ е монотоно.

в) $\mathcal{L}^*(\mathbb{N})$ е изоморфно со проширеното множество $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ на природните броеви, каде што $(\forall n\in\mathbb{N})\ n<\infty$. $\mathcal{L}^*(\mathbb{Q})$, како и $\mathcal{L}^*(\mathbb{R})$, е изоморфно со проширеното множество $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ на реалните броеви, при што $(\forall x\in\mathbb{R})\ -\infty<x<\infty$.

5.21. а) Да се покаже дека пресликувањето $f: a \longrightarrow (-\infty, a]$ е монотона инјекција од M во $\mathcal{L}(M)$ и од тоа да се заклучи дека множеството $\{(-\infty,a] \mid a\in M\}$ е подмножество од $\mathcal{L}(M)$ изоморфно со M.

б) Да се определи монотона инјекција од M во $\mathcal{L}^*(M)$.

Решение. а) Јасно е дека пресликувањето f е инјекција. Понатаму, имаме:

$$a\leqslant b \Longrightarrow (-\infty,a] \subseteq (-\infty,b] \Longrightarrow f(a)\leqslant f(b),$$

т.е. инјекцијата f е монотона.

Нека $A=\{(-\infty,a] \mid a\in M\}$. Бидејќи $f(M)=A$, пресликувањето $f: M\longrightarrow A$ е биекција. Значи, постои пресликување $f^{-1}: A\longrightarrow M$, кое е исто така биекција и притоа монотона, па значи A е подмножество од $\mathcal{L}(M)$, изоморфно со M.

б) Пресликувањето $g: M\longrightarrow\mathcal{L}^*(M)$, $g(a)=\{(-\infty,a),(-\infty,a]\}$, е монотона инјекција од M во $\mathcal{L}^*(M)$.

5.22. Да се покаже дека сите потполни подредувања на едно конечно множество се изоморфни. Дали важи истото за делумните подредувања, односно потполните подредувања на бесконечните множества?

Решение. Нека $M=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ е конечно множество, а

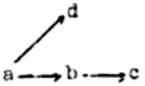
$$\alpha_1:\ a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n \quad \text{и} \quad \alpha_2:\ a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \dots \leqslant a_{i_n},$$

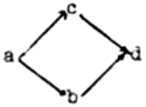
се две потполни подредувања на М. Пресликувањето $f: M \longrightarrow M$, дефинирано со

$$f(a_k) = a_{i_k},$$

е биекција и притоа f и f^{-1} се монотони. Значи, потполните подредувања α_1 и α_2 на М се изоморфни.

Делумните подредувања на едно множество М не мора да се изоморфни. На пример, нека $M = \{a,b,c,d\}$, а две делумни подредувања на М нека се дадени со дијаграмите:





Овие две подредувања не се изоморфни. Исто така потполните подредувања на едно бесконечно множество не мора да бидат изоморфни. На пример, подредувањата:

$$1<2<3<\dots<n<\dots,$$

$$1<3<5<\dots<2<4<6<\dots$$

на множеството $\mathbb{N}$ се потполни, но не се изоморфни.

5.23. Да се покаже дека секој отворен интервал (a,b), $a<b$, од $\mathbb{Q}$, односно $\mathbb{R}$, е изоморфно подредено со $\mathbb{Q}$, односно $\mathbb{R}$.

Упатство. Докажи дека, на пример, пресликувањето

$$f(x) = \frac{b-a}{2}\,\frac{x}{1+|x|} + \frac{b+a}{2},$$

е монотона инјекција од $\mathbb{R}$ во (a,b), ако $(a,b) \subset \mathbb{R}$, односно од $\mathbb{Q}$ во (a,b), ако $(a,b) \subset \mathbb{Q}$.

5.24. За едно подредено множество M велиме дека е дискретно ако за секои $a, b \in M$, $a < b$, интервалот (a,b) е конечно множество. Ако пак $(a,b) \neq \emptyset$ за секои $a, b \in M$, тогаш за M велиме дека е густо.

Да се покаже дека:

а) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ се дискретни;

б) секое конечно подредено множество е дискретно;

в) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ се густо подредени;

г) едно дискретно подредено множество не е густо.

Решение. а) Ако m и n се природни броеви, $m<n$, тогаш интервалот (m,n) има $n-m-1$ броеви, т.е. конечно многу, па значи $\mathbb{N}$ е дискретно.

в) Ако a и b се произволни рационални броеви, $a<b$, тогаш $a < \frac{a+b}{2} < b$, па $(a,b) \neq \emptyset$. Значи, $\mathbb{Q}$ е густо.

г) Нека $a, b \in M$, $a<b$ и $(a,b) \neq \emptyset$. Ако M е дискретно, тогаш (a,b) има конечно многу елементи, па ако a_1 е најмалиот од нив, тогаш $(a,a_1) = \emptyset$. Значи, M не е густо.

5.25. Да се окарактеризираат сите дискретно потполни подредени множества.

Решение. Нека M е дискретно потполно подредено множество. Доволно е да се разгледаат следниве четири случаи:

(i) M има најмал и најголем елемент;

(ii) M има најмал но нема најголем елемент;

(iii) M има најголем но нема најмал елемент;

(iv) M нема најмал и нема најголем елемент.

(i) Нека a е најмалиот, а b најголемиот елемент во M. Бидејќи M е дискретно подредено, интервалот (a,b) е конечен, а бидејќи M е потполно подредено, имаме $[a,b] = M$. Значи, множеството M е конечно.

(ii) Нека a_1 е најмалиот елемент во М. Јасно е дека множеството М не е конечно, зашто во тој случај, поради потполната подреденост, во М би постоел најголем елемент. Нека b е произволен елемент од М, $b \neq a_1$. Интервалот (a_1,b) е конечен, па ако има $n-2$ елементи, елементот b ќе го означиме со a_n. Така ја добиваме низата

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \} \subseteq M, \qquad (1)$$

при што

$$a_i \leqslant a_j \iff i \leqslant j. \qquad (2)$$

Ако a е произволен елемент од М и ако постои барем еден $a_i \in A$, таков што $a < a_i$, тогаш $a \in (a_1, a_i)$, па значи $a \in A$. Затоа, ако $c \in M \setminus A$, ќе имаме $a_n < c$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Значи, интервалот (a_1, c) не би бил конечно множество, а тоа значи дека не постои елемент $c \in M \setminus A$, т.е. $A = M$.

Пресликувањето $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$, дефинирано со $f(n) = a_n$ е биекција, а според (2), следува дека f е изоморфизам. Значи, множеството М е изоморфно со множеството $\mathbb{N}$ од природните броеви.

(iii) Слично како погоре се добива дека М е изоморфно со множеството $\{ \dots, -n, \dots, -3, -2, -1 \}$ негативни цели броеви.

(iv) Нека a е произволен елемент од множеството М. Множеството $A = M \setminus (-\infty, a]$, е дискретно потполно подредено множество со најмал елемент, но без најголем елемент, па значи, тоа е изоморфно со множеството $\mathbb{N}$. Нека тој изоморфизам е f. Множеството $(-\infty, a)$ е дискретно потполно подредено без најмал елемент, но со најголем елемент. Според (iii), тоа е изоморфно со множеството од негативните цели броеви. Нека тој изоморфизам е g.

Пресликувањето $h : M \longrightarrow Z$, дефинирано со

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = a \\ f(x), & \text{ако } x \in A \\ g(x), & \text{ако } x \in (-\infty, a) \end{cases}$$

е изоморфизам, т.е. M е изоморфно со множеството $\mathbb{Z}$ од целите броеви.

5.26. Множеството комплексни броеви го подредуваме со

$$[a+ib<c+id] \iff [a<c \vee (a=c \wedge b<d)].$$

а) Да се покаже дека со тоа комплексните броеви се потполно подредени.

б) Дали тоа подредување е: (i) густо; (ii) непрекинато; (iii) изоморфно со подредувањето на $\mathbb{R}$?

Решение. а) Со директна проверка.

б) (i) Нека $a+ib$ и $c+id$ се кои било два комплексни броја, при што $a+ib<c+id$. Ако $a<c$, тогаш имаме:

$$a+ib<\frac{a+c}{2}+ib<c+id,$$

а ако $a=c$ и $b<d$, тогаш имаме:

$$a+ib<a+i\frac{b+d}{2}<c+id,$$

т.е. ова подредување е густо.

(ii) За едно подредено множество велиме дека е *непрекинато подредено* ако секое мајорирано подмножество има супремум, а секое минорирано има инфимум.

Подредувањето не е непрекинато, зашто, на пример, множеството $S=\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R},\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ е мајорирано, но не постои $\sup S$. Секој комплексен број $a+ib$, $a>1$, е мајорант за S.

(iii) Бидејќи подредувањето не е непрекинато, следува дека тоа не е изоморфно со подредувањето на $\mathbb{R}$.

5.27. За подреденото множество M велиме дека е *добро подредено* ако во секое непразно подмножество $A\subset M$ постои најмал елемент.

Дали следното множество рационални броеви, подредени по големина, е добро подредено?

а) Множеството на сите цели негативни броеви.

б) Множеството од сите броеви од видот $\frac{n}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

в) Множеството од сите броеви од видот $(\frac{4}{3})^n$, $n\in\mathbb{N}$.

г) Множеството од сите броеви од видот $(\frac{3}{4})^n$, $n\in\mathbb{N}$.

д) Множеството од сите броеви од видот $-\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Одговор. а) Не. б) Да. в) Да. г) Не. д) Да.

5.28. Ако постои подредување α на множеството A, така што α и α^{-1} се добри подредувања, тогаш A е конечно.

Решение. Од условот на задачата следува дека A е потполно подредено, со најмал и со најголем елемент. Нека $a,b\in A$, $a<b$; ако множеството (a,b) е бесконечно, тогаш постои низа $c_1,c_2,\ldots$, така што $\{c_1,c_2,\ldots\}\subseteq(a,b)$ нема најголем елемент, спротивно на тоа што α^{-1} е добро подредување. Значи, множеството (a,b) е конечно за кои било $a,b\in A$, т.е. A е дискретно подредено. Според 5.25 (1), множеството A е конечно.

5.29. Да се покаже дека едно густо подредено множество M не може да биде добро подредено.

Решение. Нека M е густо подредено множество и нека $a,b\in M$, $a<b$. Да го разгледаме множеството (a,b). Бидејќи M е густо подредено, следува дека множеството (a,b) не е празно. За секој елемент $c\in(a,b)$, множеството (a,c) не е празно, па значи во (a,b) нема најмал елемент, т.е. M не е добро подредено.

5.30. Нека M_1 и M_2 се добро подредени множества, со најмали елементи a_1 и a_2, а $f:M_1\longrightarrow M_2$ нека е изоморфизам. Да се покаже дека:

а) $f(a_1)=a_2$;

б) f е единствениот изоморфизам од M_1 во M_2.

Решение. а) Нека $f:M_1\longrightarrow M_2$ е изоморфизам и нека $f(a_1)=x_2$.

Од $a_2 \leqslant x_2$ следува $f^{-1}(a_2) \leqslant f^{-1}(x_2)$, т.е. $f^{-1}(a_2) \leqslant a_1$. Но, a_1 е најмалиот елемент во M_1, па $f^{-1}(a_2) = a_1$, т.е. $f(a_1) = a_2$.

б) Да претпоставиме дека $g: M_1 \longrightarrow M_2$ е исто така изоморфизам. Ќе покажеме дека $f=g$. За таа цел S нека е подмножество од M_1, определено со:

$$x \in S \Longleftrightarrow f(x) = g(x).$$

Јасно е дека $f(a_1) = g(a_1) = a_2$, па значи $a_1 \in S$. Да претпоставиме дека $[a,x) \subsetneq S$. Тоа значи дека $f(y) = g(y)$ за секој y од $[a,x)$. Нека $f(x)=x'$, $g(x)=x''$ и притоа $x' < x''$. Постои елемент $x_1 \in M_1$, таков што $g(x_1) = x'$. Од $g(x_1) < g(x)$, следува дека $x_1 < x$, т.е. $x_1 \in [a,x)$, а од претпоставката $[a,x) \subseteq S$, следува дека $f(x_1) = g(x_1) = x'$, т.е. $f(x) = f(x_1)$, па значи $x = x_1$. Ова противречи на претпоставката $x_1 < x$, па значи имаме $f(x)=g(x)$, односно $x \in S$.

Според принципот на трансфинитната индукција, имаме $S = M_1$, па значи:

$$(\forall x \in M_1)\ f(x) = g(x), \text{ т.е. } f = g.$$

5.31. Нека Φ е непразно подмножество од $\mathcal{P}(M)$, такво што $A \in \Phi$ ако и само ако Φ ги содржи сите конечни подмножества од A. Да се покаже дека во Φ постои барем еден максимален елемент.

Решение. Множеството Φ е подредено по инклузија. Нека фамилијата $\{A_i \mid i \in I\}$ е верига во Φ и нека $B = \bigcup_i A_i$. Ако C е конечно подмножество од B, тогаш $C \subseteq A_i$ за некој $i \in I$, па, бидејќи $A_i \in \Phi$, следува дека и $C \in \Phi$. Значи, секое конечно подмножество од множеството B му припаѓа на Φ, па $B \in \Phi$. Но, B е мајорант за веригата $\{A_i \mid i \in I\}$, т.е. секоја верига во Φ има мајорант. Според лемата на Цорн, во Φ постои барем еден максимален елемент.

5.32. Ако A и B се две произволни множества, да се покаже дека еден од следниве услови е исполнет: $|A|=|B|$, $|A|<|B|$, $|B|<|A|$.

Решение. Бидејќи, според аксиомата на Цермело, секое множество може добро да се подреди, множествата A и B можеме да ги сметаме за добро подредени. Според AII,3.19^{o}, две добро подредени множества или се изоморфни или пак едното од нив е изоморфно со некој почетен сегмент на другото. Ако A и B се изоморфни, тогаш постои биекција од A во B, па $|A|=|B|$. Ако е A изоморфно со некој почетен сегмент од B, тогаш постои инјекција од A во B, па $|A|\leqslant|B|$, а ако е B изоморфно со некој почетен сегмент на A, тогаш $|B|\leqslant|A|$. Според тоа, ако $|A|\neq|B|$, тогаш или $|A|<|B|$ или $|B|<|A|$.

5.33. Нека $a,b\in A$, $a\neq b$, и нека Φ е множеството од сите еквивалентности на A што ги раздвојуваат елементите a и b, т.е.

$$\alpha\in\Phi \Longleftrightarrow a\alpha' b .$$

Со помош на лемата на Цорн, а потоа и директно, да се покаже дека во Φ има барем еден максимален елемент. Во случај да $A=\{a,b,c\}$, да се најде множеството Φ.

Решение. Релацијата

$$\beta_a = \{(a,a)\}\cup(B\times B),\quad B = A\setminus\{a\}, \tag{1}$$

е еквивалентност во A што ги раздвојува елементите a и b, па значи множеството Φ не е празно. За да покажеме дека во Φ има барем еден максимален елемент, користејќи ја лемата на Цорн, треба да покажеме дека секоја верига во Φ е мајорирана. Нека $\{\alpha_i \mid i\in I\}$ е верига во Φ и $\alpha = \bigcup_i\alpha_i$. Бидејќи $\{\alpha_i \mid i\in I\}$ е верига, следува дека α е еквивалентност во A, а бидејќи $a\alpha_i'b$ за секој $i\in I$, следува дека $\alpha\in\Phi$. Но, α е мајорант за веригата $\{\alpha_i \mid i\in I\}$, па значи во Φ има барем еден максимален елемент.

Ова може да се покаже и директно. На пример, еквивалентноста β_a, дефинирана со (1), е максимален елемент во Φ. Во Φ максимален елемент е и секоја еквивалентност α, таква што $\Phi/\alpha = \{a^{\alpha}, b^{\alpha}\}$ е двоелементно множество.

Ако $A = \{a,b,c\}$, тогаш елементите на Φ се:

$$\alpha_1 = \Delta_A,\quad \alpha_2 = \Delta_A \cup \{(a,c),(c,a)\},\quad \alpha_3 = \Delta_A \cup \{(b,c),(c,b)\}.$$

5.34. Секое подредување на множеството М може да се прошири до потполно подредување на М.

Упатство. Следува од 5.4, 5.15 и лемата на Цорн.

5.35. Да се покаже дека унијата од верига на филтри над множеството М е филтер над М.

Решение. Нека $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ е верига од филтри над множеството М и нека $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_i$. Бидејќи $\emptyset \notin \mathcal{F}_i$ за секој $i \in I$, следува дека $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Нека $A,B \in \mathcal{F}$. Тогаш постојат $i,j \in I$, така што $A \in \mathcal{F}_i$, $B \in \mathcal{F}_j$. Но, $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ е верига, па имаме $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ или $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$. Ако $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$, тогаш и $A \in \mathcal{F}_j$, па бидејќи $\mathcal{F}_j$ е филтер следува дека и $A \cap B \in \mathcal{F}_j$, т.е. $A \cap B \in \mathcal{F}$. На крајот, нека $A \in \mathcal{F}$ и нека $A \subseteq X \subseteq M$. Тогаш, $A \in \mathcal{F}_j$ за некој $j \in I$, па $X \in \mathcal{F}_j$, т.е. $X \in \mathcal{F}$.

5.36. Да се докаже дека секој филтер над М се содржи во некој максимален филтер над М. (Секој максимален филтер се вика ултрафилтер.)

Упатство. Да се примени лемата на Цорн и претходната задача.

5.37. Филтерот $\mathcal{F}$ над М е ултрафилтер ако и само ако

$$(\forall A \subseteq M)\ A \in \mathcal{F} \text{ или } A' \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Решение. Да претпоставиме дека филтерот $\mathcal{F}$ над М го задоволува условот (1) и нека $\mathcal{D}$ е филтер над М што го содржи филтерот $\mathcal{F}$. Ако $A \in \mathcal{D}$, $A \notin \mathcal{F}$, тогаш, според (1), имаме $A' \in \mathcal{F}$, а бидејќи $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$, следува $A' \in \mathcal{D}$, па значи $A \cap A' = \emptyset \in \mathcal{D}$, спротивно на претпоставката дека $\mathcal{D}$ е филтер. Значи, $\mathcal{F}$ е ултрафилтер.

Обратно, нека $\mathcal{F}$ е ултрафилтер над М и нека $A \subseteq M$. Ако постои

$X \in \mathscr{F}$, така што $A \cap X = \emptyset$, тогаш $A' \supseteq X$, па $A' \in \mathscr{F}$. Затоа, да претпоставиме дека $A \cap X \neq \emptyset$ за секое $X \in \mathscr{F}$. Ако $\mathscr{D} = \mathscr{F} \cup \{A\}$, тогаш, лесно се проверува дека $\mathscr{D}$ е филтер над M што го содржи $\mathscr{F}$, а бидејќи $\mathscr{F}$ е ултрафилтер, следува $\mathscr{D} = \mathscr{F}$. Значи, $A \in \mathscr{F}$, т.е. $\mathscr{F}$ го задоволува условот (1).

5.38. Еден главен филтер $\mathscr{F}(A)$ над множеството M е ултрафилтер ако и само ако $A = \{a\}$ е едноелементно множество.

Решение. Јасно е дека секој главен филтер $\mathscr{F}(\{a\})$, $a \in M$, е ултрафилтер.

Нека $\mathscr{F}(A)$ е главен филтер при што A содржи барем два елемента a, b. Тогаш главниот филтер $\mathscr{F}(\{a\})$ го содржи $\mathscr{F}(A)$, што значи $\mathscr{F}(A)$ не е ултрафилтер.

5.39. Ако α е бесконечен кардинален број, тогаш $\alpha + \alpha = \alpha$.

Решение. Нека A е бесконечно множество, такво што $|A| = \alpha$. Множествата $A \times \{0\}$ и $A \times \{1\}$ се дисјунктни и еквивалентни со A, а бидејќи нивната унија е еднаква со $A \times \{0,1\}$ (кое понатаму ќе го означуваме со $A \times 2$), доволно ќе биде да докажеме дека множествата $A \times 2$ и A се еквивалентни.

Нека Φ е фамилијата од сите функции f од $A \times 2$ во A, чиј домен има облик $X \times 2$ за некое подмножество X од A, такви што $f : X \times 2 \to X$ е биекција. Ако X е преброиво подмножество од A, тогаш $X \times 2 \sim X$, па значи $\Phi \neq \emptyset$. Φ е (делумно) подредено по проширување (2.23):

$$f_i \leqslant f_j \iff f_i : X_i \times 2 \to X_i,\ f_j : X_j \times 2 \to X_j \text{ се биекции,}$$

$$X_i \subseteq X_j,\ f_j|X_i \times 2 = f_i.$$

Нека $\{f_i \mid i\in I\}$ е верига во Φ и нека $X = \bigcup_i X_i$. Ако $x\in X$, тогаш $x=x_i$ за некој $i\in I$, па пресликувањето $f:X\times 2\longrightarrow X$, дефинирано со

$$f((x,k)) = f_i((x_i,k)),\quad x=x_i,$$

е биекција и притоа $f_i\leqslant f$ за секој $i\in I$. Значи, f е мајорант за веригата $\{f_i \mid i\in I\}$, т.е. секоја верига во Φ е мајорирана. Според лемата на Цорн, Φ содржи барем еден максимален елемент, па нека тој е функцијата $f_0:A\times 2\longrightarrow A$, којашто е биекција од $X_0\times 2$ во X_0.

Да го разгледаме множеството $A\setminus X_0$. Ако $A\setminus X_0$ е бесконечно, тогаш тоа би содржело преброиво подмножество Y, па нека $g:Y\times 2\to Y$ е биекција. Ставајќи

$$h((a,k)) = \begin{cases} f_0((a,k)), & a\in X_0\\ g((a,k)), & a\in Y,\end{cases}$$

добиваме биекција од $(X\cup Y)\times 2$ во $X\cup Y$. Значи, $h\in\Phi$ и притоа $f_0<h$, спротивно на претпоставката дека f_0 е максимален елемент во Φ. Од ова следува дека множеството $A\setminus X_0$ е конечно, па бидејќи $A = X_0\cup(A\setminus X_0)$, добиваме $|A| = |X_0| + |A\setminus X_0| = |X_0|$. Од условот $|X_0|+|X_0| = |X_0|$, добиваме и $|A|+|A| = |A|$, т.е. важи равенството $\alpha+\alpha=\alpha$.

5.40. Ако α и β се кардинални броеви од кои барем еден е бесконечен, тогаш

$$\alpha+\beta=\max\{\alpha,\beta\}.$$

Решение. Нека A и B се дисјунктни множества, $\alpha=|A|$, $\beta=|B|$, $\alpha\leqslant\beta$, β бесконечен. Од $\alpha\leqslant\beta$ следува $\alpha+\beta\leqslant\beta+\beta=\beta$, а бидејќи $\beta\leqslant|A\cup B|$, следува $\beta\leqslant\alpha+\beta$. Значи, $\alpha+\beta=\beta=\max\{\alpha,\beta\}$.

5.41. Ако α е бесконечен кардинален број, тогаш $\alpha\alpha=\alpha$.

Решение. Нека A е бесконечно множество, $\alpha=|A|$. Треба да покажеме дека множествата $A\times A$ и A се еквивалентни. За таа цел, нека Φ е фамилијата функции f од $A\times A$ во A, со домен $X\times X$, за некое $X\subseteq A$, така што $f: X\times X\longrightarrow X$ е биекција. Ако X е пребројиво подмножество од A, тогаш $X\times X\sim X$, па значи $\Phi\neq\emptyset$. Множеството Φ е подредено по проширување (2.23), па како во 5.39 се проверува дека претпоставките од лемата на Цорн за Φ се задоволени; значи Φ има барем еден максимален елемент f_0 со досег (множество вредности) X. Бидејќи $|X|\,|X|=|X|$, доказот ќе биде комплетиран ако покажеме дека $|X|=|A|$.

Да претпоставиме дека $|X|<|A|$. Од $X\cup(A\setminus X)=A$ следува $|X|+|A\setminus X|=|A|$ и, според 5.40, $|A\setminus X|=|A|$, па значи $|X|<|A\setminus X|$. Следствено, $A\setminus X$ содржи подмножество Y еквивалентно со X. Множествата $X\times Y$, $Y\times X$ и $Y\times Y$ се дисјунктни и еквивалентни со $X\times X$, па значи се еквивалентни и со X и со Y, а од тоа следува дека нивната унија е еквивалентна со Y. Ако g е биекција од $(X\times Y)\cup(Y\times X)\cup(Y\times Y)$ во Y, тогаш, бидејќи $(X\cup Y)\times(X\cup Y)=$ $=(X\times X)\cup(X\times Y)\cup(Y\times X)\cup(Y\times Y)$, ако ставиме:

$$h((a,b))=\begin{cases} f_0((a,b)), & (a,b)\in X\times X,\\ g((a,b)), & (a,b)\in(X\times Y)\cup(Y\times X)\cup(Y\times Y)\end{cases}$$

добиваме биекција од $(X\cup Y)\times(X\cup Y)$ во $X\cup Y$, што значи $h\in\Phi$. Но $h>f_0$, што е во спротивност со максималноста на f_0. Следствено, претпоставката $|X|<|A|$ е неодржлива и затоа $|X|=|A|$.

5.42. Ако α е бесконечен, а n конечен кардинален број, тогаш $\alpha^n=\alpha$.

5.43. Ако α и β се кардинални броеви од кои барем еден е бесконечен и $\alpha,\beta\neq 0$, тогаш $\alpha+\beta=\alpha\beta$.

Упатство. Со директна примена на 5.40 и 5.41.

6. МРЕЖИ

6.1. За подреденото множество М велиме дека е *мрежа* ако за секое негово двоелементно подмножество $\{x,y\}$ постојат $\sup_M\{x,y\}$ и $\inf_M\{x,y\}$ кои ќе ги означуваме со $x\vee y$ и $x\wedge y$ соодветно.

Нека $\leqslant$ е подредување на $\mathbb{N}$ определено со:

$$x\leqslant y \iff (\exists k\in \mathbb{N})\ y=kx.$$

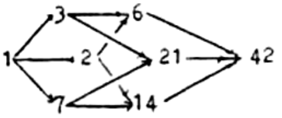
Да се провери дали е мрежа следново подмножество од $\mathbb{N}$:

а) $M=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$;

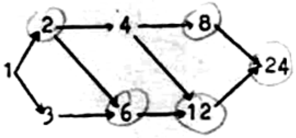
б) $M=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

Решение. Дијаграмот на подреденото множество М е:

а)



б)



Од дијаграмите се гледа дека во двата случаја М е мрежа.

6.2. За подмножеството А од мрежата М велиме дека е *подмрежа* од М ако е исполнет условот:

$$a,b\in A \Longrightarrow a\vee b,\ a\wedge b\in A.$$

Да се покаже дека:

а) ако А е подмрежа од мрежата М, тогаш А е мрежа;

б) едно подмножество А од една мрежа М не мора да биде подмрежа од М.

в) едно подмножество А од една мрежа М може да биде мрежа, но сепак да не е подмрежа од М.

Решение. а) Ако А е подмрежа и ако $a,b\in A$, $a\vee b=c$, $a\wedge b=d$, тогаш $c=\sup_A\{a,b\}$, $d=\inf_A\{a,b\}$, т.е. А е мрежа.

б) Ако $М=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ е мрежата од 6.1, тогаш, на пример, подмножеството $\{2,3,4,6\}$ не е подмрежа од М.

в) Ако М е мрежата од б), тогаш подмножеството $А=\{2,6,8,12,24\}$ е мрежа, но не е подмрежа од М, зашто, на пример, $2=\inf_A\{8,12\}$, а $\inf_М\{8,12\}=4$.

6.3. Ако М е мрежа и А конечно подмножество од М, тогаш постојат $\sup A$ и $\inf A$.

Решение. Нека М е мрежа и $А=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ конечно подмножество од М. Тогаш постојат елементите:

$$b_2=a_1\wedge a_2,\quad b_3=b_2\wedge a_3,\dots,\ b_n=b_{n-1}\wedge a_n,$$

и притоа $b_n\leqslant a_i$, за секој $i=1,2,\dots,n$, т.е. b_n е минорант за А. Ако с е друг минорант за множеството А, тогаш имаме:

$$c\leqslant a_1\wedge a_2=b_2,\ c\leqslant b_2\wedge a_3=b_3,\dots,\ c\leqslant b_{n-1}\wedge a_n=b_n,$$

т.е. b_n е најголемиот минорант. Значи, имаме $\inf A=b_n$.

Слично се покажува дека постои и $\sup A$.

6.4. Во секоја конечна мрежа постои најголем и најмал елемент.

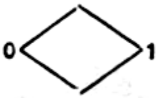
Упатство. Директна последица од 6.3.

6.5. Нека М и М$'$ се две изоморфни подредени множества. Да се покаже дека ако едното од нив е мрежа, тогаш и другото е мрежа.

6.6. Да се најдат сите мрежи со: три, четири и пет елементи; притоа изоморфните мрежи не се сметаат за различни.

Решение. Нека М е мрежа со три елементи. Според 6.4, М има и најголем и најмал елемент, па третиот елемент мора да е споредлив со нив. Значи, постои само една мрежа со три елементи и тоа кога М е потполно подредено множество.

Нека М е мрежа со четири елементи и нека 0 е најмалиот, а 1 најголемиот елемент. За другите два елемента постојат само две можности: или се меѓусебно споредливи - во тој случај М е потполно подредено, или се меѓусебно неспоредливи - во тој случај мрежата е претставена со дијаграмот

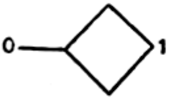


Д.0

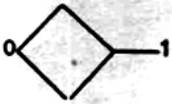
Значи, постојат две мрежи со четири елементи.

Со слична дискусија се добива дека постојат пет мрежи со пет елементи; тие се претставени со следниве дијаграми:

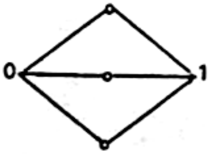
Д.1



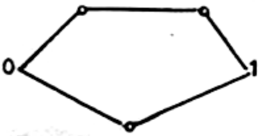
Д.2



Д.3



Д.4



Д.5

6.7. Нека М = {1,2,3,4}. Да се нацрта дијаграмот на мрежата од сите еквиваленности на множеството М.

Решение. Според 4.62, постојат 15 еквиваленности на М. Тоа се $\alpha_1 = \Delta_М$, $\alpha_{15} = М\times М$ и:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cup \{(1,2),(2,1)\}, \qquad \alpha_3 = \alpha_1 \cup \{(1,3),(3,1)\},$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 \cup \{(1,4),(4,1)\}, \qquad \alpha_5 = \alpha_1 \cup \{(2,3),(3,2)\},$$

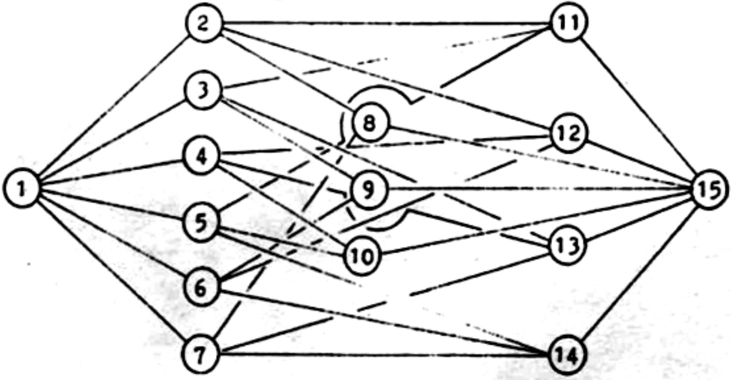
$$\alpha_6 = \alpha_1 \cup \{(2,4),(4,2)\}, \qquad \alpha_7 = \alpha_1 \cup \{(3,4),(4,2)\},$$

$$\alpha_8 = \alpha_2 \cup \alpha_7\ , \quad \alpha_9 = \alpha_3 \cup \alpha_6, \quad \alpha_{10} = \alpha_4 \cup \alpha_5,$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_5\ , \qquad \alpha_{12} = \alpha_2 \cup \alpha_4 \cup \alpha_6\ ,$$

$$\alpha_{13} = \alpha_3 \cup \alpha_4 \cup \alpha_7\ , \qquad \alpha_{14} = \alpha_5 \cup \alpha_6 \cup \alpha_7\ .$$

Ставајќи к наместо $\alpha_к$, дијаграмот е следниов:



<u>6.8</u>. Ако М е мрежа, тогаш $a\vee b\vee c = a\wedge b\wedge c \Longrightarrow a = b = c.$

<u>Решение</u>. За елементот а имаме:

$$a \leqslant a\vee b\vee c = a\wedge b\wedge c,$$

а од друга страна $a\wedge b\wedge c \leqslant a$. Значи, имаме

$$a = a\vee b\vee c = a\wedge b\wedge c,$$

а слично се добиваат и равенствата $b = a\vee b\vee c = a\wedge b\wedge c = c$, т.е. $a = b = c$.

<u>6.9</u>. Во секоја мрежа М е точно равенството

$$[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)] = a\wedge b. \qquad (1)$$

Решение. Поради $a\wedge b\leqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ и $a\wedge b\leqslant(a\wedge b)\vee(b\wedge c)$, имаме:

$$a\wedge b\leqslant[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)]. \qquad (2)$$

Од друга страна имаме:

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leqslant a\wedge(b\vee c), \quad (a\wedge b)\vee(b\wedge c)\leqslant b\wedge(a\vee c),$$

па значи

$$[(a\wedge b)\vee(a\wedge c)]\wedge[(a\wedge b)\vee(b\wedge c)]\leqslant(a\wedge b)\wedge(b\vee c)\wedge(a\vee c)=$$
$$=a\wedge b. \qquad (3)$$

Од (2) и (3) се добива равенството (1).

6.10. Да се покаже дека секој максимален елемент m од една мрежа M е и најголем елемент во M.

Решение. Ако $x\in M$, тогаш имаме $m\leqslant x\vee m$, од каде што следува $m=x\vee m$, т.е. $x\leqslant m$. Значи, m е најголем елемент во M.

6.11. Ако M има барем два елемента, тогаш множеството Φ од:

а) сите подредувања на M;

б) сите потполни подредувања на M,

не е мрежа.

Решение. а) Нека $a,b\in M$ и нека $a\neq b$. Тогаш $\alpha=\Delta_M\cup\{(a,b)\}$ и $\beta=\Delta_M\cup\{(b,a)\}$ се две различни подредувања на M, но не постои подредување γ на M, такво што $\alpha,\beta\subseteq\gamma$. Значи, Φ не е мрежа.

б) Според 5.34, подредувањата α и β од а) можат да се прошират до потполни подредувања α_1 и β_1 на M. Значи, Φ содржи барем два различни елемента. Според 5.15, кои било две потполни подредувања на M се неспоредливи, па значи Φ е потполно неподредено множество, т.е. Φ не е мрежа.

6.12. За подреденото множество M велиме дека е комплетна мрежа ако за секое подмножество A од M постои $\inf_M A$ и $\sup_M A$.

Да се покаже дека секоја конечна мрежа е комплетна.

Решение. Ако M е конечна мрежа, тогаш секое подмножество A од M е конечно, па според 6.3, постојат $\sup A$ и $\inf A$.

6.13. Нека M е фамилијата од сите претподредувања на едно множество A. Да се покаже дека M е комплетна мрежа.

Решение. Релацијата $A \times A$ е претподредување на A и притоа е најголем елемент во M. Ако $\Phi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ е произволна фамилија претподредувања на A, тогаш и $\bigcap_i \alpha_i$ е претподредување на A; притоа имаме $\inf \Phi = \bigcap_i \alpha_i$. Следствено, според AII,4.14°, M е комплетна мрежа.

6.14. Ако M е мрежа и ако $a,b \in M$, $a \leqslant b$, тогаш $[a,b]$ се определува со:

$$[a,b] = \{x \mid x \in M,\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

а) Да се покаже дека $[a,b]$ е подмрежа од M и дека, ако M е комплетна мрежа, тогаш $[a,b]$ е нејзина комплетна подмрежа.

б) Нека пресликувањата $f,g: M \longrightarrow [a,b]$ се определени со:

$$f(x) = (x \wedge b) \vee a, \quad g(x) = (x \vee a) \wedge b.$$

Да се покаже дека $gf = f^2 = f$, $fg = g^2 = g$.

Решение. а) Нека $x,y \in [a,b]$; тоа значи дека $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. Затоа

$$a \leqslant x \leqslant x \vee y, \quad b \geqslant x \geqslant x \wedge y.$$

Понатаму, од $x \leqslant b$ и $y \leqslant b$, имаме $x \vee y \leqslant b \vee b = b$, а од $a \leqslant x$ и $a \leqslant y$, имаме $a = a \wedge a \leqslant x \wedge y$. Значи, имаме

$$a \leqslant x \vee y \leqslant b \quad \text{и} \quad a \leqslant x \wedge y \leqslant b,$$

т.е. $[a,b]$ е подмрежа од M.

Да претпоставиме дека мрежата M е комплетна и A подмножество од $[a,b]$. Нека $\sup_M A = c$, $\inf_M A = d$. За секој $x \in A$ имаме

$a \leqslant x \leqslant b$, па значи a е еден минорант, а b е еден мајорант за A во M. Но, c е најмалиот мајорант на A во M, па $c \leqslant b$, а јасно е дека $a \leqslant c$. Значи, $c \in [a,b]$. Слично, добиваме дека $d \in [a,b]$, т.е. $[a,b]$ е комплетна подмрежа од M.

б) Ако $x \in [a,b]$, тогаш имаме:

$$f(x) = (x \wedge b) \vee a = x \vee a = x, \quad g(x) = (x \vee a) \wedge b = x \wedge b = x.$$

Нека сега x е произволен елемент од M. Тогаш имаме:

$$gf(x) = g((x \wedge b) \vee a) = (x \wedge b) \vee a = f(x),$$
$$f^2(x) = f((x \wedge b) \vee a) = (x \wedge b) \vee a = f(x),$$
$$fg(x) = f((x \vee a) \wedge b) = (x \vee a) \wedge b = g(x),$$
$$g^2(x) = g((x \vee a) \wedge b) = (x \vee a) \wedge b = g(x),$$

т.е. $gf = f^2 = f$, $fg = g^2 = g$.

6.15. Нека M е комплетна мрежа и нека f е монотоно пресликување од M во M.

а) Да се покаже дека множеството

$$A = \{ x \mid x \in M,\ x \leqslant f(x) \}$$

е непразно.

б) Нека $a = \sup A$. Да се покаже дека $f(a) = a$.

в) Нека

$$S = \{ a \mid a \in M,\ f(a) = a \}.$$

Дали S е мрежа?

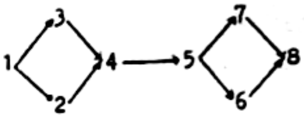
Решение. а) Бидејќи M е комплетна мрежа, постои најмал елемент на M; да го означиме со 0. Тогаш $0 \leqslant f(0)$, па, значи, $A \neq \emptyset$.

б) Јасно е дека $a = \sup A$ постои, зашто мрежата M е комплетна. Според тоа, за секој елемент $x \in A$ важи $x \leqslant a$, па поради монотоноста на f имаме $f(x) \leqslant f(a)$. Значи, $x \leqslant f(x) \leqslant f(a)$, т.е. $f(a)$ е мајорант на A. Бидејќи a е најмалиот мајорант на A следува дека $a \leqslant f(a)$, т.е. $a \in A$. Од $a \leqslant f(a)$ добиваме $f(a) \leqslant f(f(a))$, т.е. $f(a) \in A$, а тоа значи дека $f(a)\leqslant a$. Од $a\leqslant f(a)$ и $f(a)\leqslant a$ следува $f(a)=a$.

в) Множеството S, во општ случај, не е подмрежа од M. За таа цел ќе дадеме еден пример. Нека $M=\{1,2,\dots,8\}$, а подредувањето во M нека е дадено со дијаграмот. Јасно е дека M е комплетна мрежа. Пресликувањето $f:M\to M$, дефинирано со :

$f:1\to 2,\ 2\to 2,\ 3\to 3,\ 4\to 5,\ 5\to 6,\ 6\to 6,\ 7\to 7,\ 8\to 8,$

е монотоно и притоа имаме $S=\{2,3,6,7,8\}$. Множеството S не мрежа, зашто $\inf\{2,3\}=1\notin S$. Значи, S не е подмрежа од M.



Да забележиме дека S може да биде мрежа во однос на подредувањето индуцирано од подредувањето во M, но сепак S да не е подмрежа од M. На пример, ако M е мрежата од претходниот пример и $f:M\to M$ е дефинирано со:

$f:1\to 1,\ 2\to 2,\ 3\to 3,\ 4\to 5,\ 5\to 5,\ 6\to 6,\ 7\to 7,\ 8\to 8,$

тогаш $S=\{1,2,3,5,6,7,8\}$. Лесно се проверува дека S е мрежа во однос на подредувањето индуцирано од подредувањето во M, но S не е подмрежа од M, зашто $\sup_S\{2,3\}=5$, а $\sup_M\{2,3\}=4$.

<u>6.16</u>. Нека M е подредено множество. За секое $A\subseteq M$ да го означиме со $\bar{A}$ множеството миноранти на множеството мајоранти од A, а со Φ фамилијата од сите тие множества $\bar{A}$. Да се покаже дека Φ, подредено по инклузија, е комплетна мрежа.

<u>Решение</u>. Да забележиме дека $\bar{A}=(A^*)_*$ од 5.12, од каде што следува дека

$$A\subseteq\bar{A},\quad A\subseteq B\Longrightarrow\bar{A}\subseteq B,\quad \bar{\bar{A}}=\bar{A}\,. \qquad (1)$$

Бидејќи $\overline{M} = M$, следува дека $M \in \Phi$. Нека $\{B_i \mid i \in I\}$ е произволна фамилија елементи од Φ (значи, $\overline{B}_i = B_i$) и нека $S = \bigcap_i B_i$. Од (1) следува дека $S \subseteq \overline{S}$ и, поради $S \subseteq B_i$, $\overline{S} \subseteq \overline{B}_i = B_i$ за секој $i \in I$. Значи, $\overline{S} \subseteq \bigcap_i B_i = S$, па $S = \overline{S}$. Од тоа следува дека $S \in \Phi$, па според AII,4.14°, Φ е комплетна мрежа.

6.17. Нека M е подредено множество. Да се покаже дека фамилијата $\mathcal{L}(M)$ од сите почетни сегменти на M е комплетна мрежа и дека пресликувањето $f : M \longrightarrow \mathcal{L}(M)$ дефинирано со

$$f(x) = (-\infty, x]$$

е монотона инјекција и притоа

$$a = \bigvee_i a_i \text{ во } M \Longrightarrow \bigcup_i f(a_i) = f(a) \text{ во } \mathcal{L}(M),$$

$$b = \bigwedge_i a_i \text{ во } M \Longrightarrow \bigcap_i f(a_i) = f(b) \text{ во } \mathcal{L}(M).$$

Решение. Дека $\mathcal{L}(M)$ е комплетна мрежа следува од 6.16, зашто

$$(-\infty, x] = \overline{\{x\}}.$$

Јасно е дека f е инјекција. Ако $x \leqslant y$, тогаш $x \in (-\infty, y]$, па значи $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$, т.е. $f(x) \leqslant f(y)$. Значи, f е монотона инјекција.

Нека $a = \bigvee_i a_i$ во M; тогаш, бидејќи $a_i \leqslant a$, добиваме дека $(-\infty, a_i] \subseteq (-\infty, a]$, т.е.

$$\bigcup_i f(a_i) = \bigcup_i (-\infty, a_i] = (-\infty, a] = f(a).$$

Слично и за $b = \bigwedge_i a_i$.

6.18. Да се покаже дека секое подредено множество може изоморфно да се внесе во комплетна мрежа.

Решение. Според претходната задача, следува дека пресликувањето $f : M \longrightarrow \mathcal{L}(M)$ дефинирано со $f(x) = (-\infty, x]$ е монотона инјекција. $\mathcal{L}(M)$ е комплетна мрежа, па значи M е изоморфно внесено во комплетна мрежа.

6.19. Секоја мурова фамилија Ф над едно множество М (1.36), подредена по инклузија, е комплетна мрежа.

Упатство. Следува од дефиницијата на мурова фамилија и од AII,4.14°.

6.20. Нека М е множество. Да се покаже дека фамилијата Ф, чии елементи се $\mathcal{P}(M)$ и сите филтри над М, е комплетна мрежа.

6.21. Кои од мрежите Д.1 – Д.5 од 6.6 се:

а) модуларни;

б) дистрибутивни?

Решение. За мрежата М велиме дека е модуларна ако и само ако е исполнет еден од следниве услови:

$$x\leqslant z \Longrightarrow x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge z, \tag{1}$$

$$y\leq z,\ x\wedge y = x\wedge z,\ x\vee y = x\vee z \Longrightarrow y = z, \tag{1'}$$

а дистрибутивна ако и само ако е исполнет еден од условите:

$$x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z), \tag{2}$$

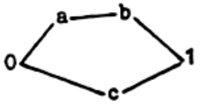
$$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z). \tag{2'}$$

(Да напоменеме дека ако е исполнет едниот од тие услови, тогаш е исполнет и другиот.)

а) Само мрежата Д.5 не е модуларна, зашто $a<b$, но

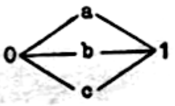
$$c\wedge a = c\wedge b = 0,\quad c\vee a = c\vee b = 1,$$

$$a\vee(c\wedge b) = a \neq b = (a\vee c)\wedge b\ .$$



б) Бидејќи Д.5 не е модуларна, таа не е ни дистрибутивна. Но и Д.4 не е дистрибутивна, зашто

$$a\vee(b\wedge c) = a \neq 1 = (a\vee b)\wedge(a\vee c).$$



6.22. Секоја мрежа со два, три или четири елементи е дистрибутивна (па значи и модуларна).

6.23. Да се покаже дека множеството $\mathbb{N}$, во кое е дефинирано подредување $\leqslant$ со:

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x|y,$$

е дистрибутивна мрежа. Дали таа мрежа е комплетна?

<u>Решение</u>. $\mathbb{N}$ со $\leqslant$ е мрежа, бидејќи за секои $x, y \in \mathbb{N}$ постои $x \vee y = [x,y]$ – најмалиот заеднички содржател на x и y, а постои и $x \wedge y = (x,y)$ – најголемиот заеднички делител на x и y.

Бидејќи важат равенствата

$$[x,(y,z)] = ([x,y],[x,z]), \quad (x,[y,z]) = [(x,y),(x,z)],$$

мрежата $\mathbb{N}$ е дистрибутивна. Оваа мрежа не е комплетна.

6.24. Мрежата M е модуларна ако и само ако е исполнет еден од условите:

(i) $a \vee [b \wedge (a \vee c)] = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(ii) $[a \vee (b \wedge c)] \wedge (b \vee c) = [a \wedge (b \vee c)] \vee (b \wedge c)$.

<u>Решение</u>. Да претпоставиме дека мрежата M е модуларна. Тогаш, од $a \leqslant a \vee c$, следува

$$a \vee [b \wedge (a \vee c)] = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Значи, точен е условот (i). Бидејќи $b \wedge c \leqslant b \vee c$, имаме

$$[a \vee (b \wedge c)] \wedge (b \vee c) = [a \wedge (b \vee c)] \vee (b \wedge c),$$

т.е. точен е условот (ii).

Да претпоставиме сега дека е исполнет условот (i) и нека $a \leqslant c$. Тогаш имаме:

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee [b \wedge (a \vee c)] =$$
$$= (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c,$$

што значи мрежата M е модуларна. Ако пак е исполнет условот (ii) и ако $a \leqslant c$, тогаш имаме:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)] =$$
$$= [b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c,$$

т.е. мрежата M е модуларна.

6.25. Нека мрежата M е модуларна. Да се покаже дека:

а) $(a\vee b)\wedge c \leqslant b \Longrightarrow a\wedge(b\vee c) = a\wedge b$;

б) $a\leqslant c\leqslant a\vee b \Longrightarrow a\vee(b\wedge c) = c$;

в) $a\leqslant c,\ d\leqslant b \Longrightarrow a\vee[b\wedge(c\vee d)] = [(a\vee b)\wedge c]\vee d$.

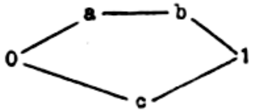
Решение. а) Прво имаме:

$$a\wedge(b\vee c) = [a\wedge(a\vee b)]\wedge(b\vee c) = a\wedge[(a\vee b)\wedge(b\vee c)],$$

а потоа, користејќи ја модуларноста и $(a\vee b)\wedge c\leqslant b$, добиваме:

$$a\wedge(b\vee c) = a\wedge[(a\vee b)\wedge(b\vee c)] = a\wedge\{b\vee[(a\vee b)\wedge c]\} = a\wedge b.$$

6.26. Да се покаже дека мрежата M е модуларна ако и само ако M не содржи подмрежа изоморфна со мрежата A претставена со дијаграмот:



Решение. Мрежата A не е модуларна, па ако M содржи подмрежа изоморфна со A, тогаш и мрежата M не е модуларна.

Да претпоставиме сега дека мрежата M не е модуларна; тогаш M содржи три елемента x, y, z, такви што $x<y$, $x\neq z$, $y\neq z$, $x\wedge z = y\wedge z$, $x\vee z = y\vee z$. Ако ставиме $u=x\wedge z=y\wedge z$, $v=x\vee z=y\vee z$, тогаш множеството $\{u,x,y,z,v\}$ формира подмрежа од M изоморфна со мрежата A.

6.27. Да се докаже дека следниве услови за мрежата M се еквивалентни:

(i) M е дистрибутивна;

(ii) $(\forall a,b,c\in M)\ (a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$;

(iii) $a\vee c = b\vee c,\ a\wedge c = b\wedge c \Longrightarrow a = b$.

Решение. Доказот ќе го спроведеме покажувајќи дека:

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii).$$

Натаму, во оваа задача, ќе пишуваме xy наместо $x \wedge y$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Ако мрежата M е дистрибутивна, тогаш имаме:

$$\begin{aligned} ab \vee bc \vee ca = ab \vee [bc \vee ca] &= (a \vee bc \vee ca)(b \vee bc \vee ca) = \\ &= (a \vee bc)(b \vee ca) = (a \vee b)(a \vee c)(b \vee c)(b \vee a) = \\ &= (a \vee b)(b \vee c)(c \vee a). \end{aligned}$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$. Ако $a \leqslant c$, тогаш $ab \leqslant c$, па имаме:

$$\begin{aligned} ac \vee bc = ab \vee bc \vee ca = (a \vee b)(b \vee c)(c \vee a) &= \\ = c(a \vee b)(b \vee c) &= c(a \vee b). \end{aligned}$$

Да ставиме:

$$x = ab \vee bc \vee ca, \quad y = (a \vee b)(b \vee c)(c \vee a).$$

По претпоставка имаме $x=y$, па следствено $cx=cy$. Според претходно докажаното имаме:

$$\begin{aligned} cx &= c(ab \vee bc \vee ca) = cab \vee c(bc \vee ca) = \\ &= cab \vee (cbc \vee caa) = abc \vee bc \vee ca = ac \vee bc; \\ cy &= c(a \vee b)(b \vee a)(c \vee a) = c(a \vee b). \end{aligned}$$

Значи, $c(a \vee b) = ca \vee cb$, т.е. (i).

$(i) \Longrightarrow (iii)$. Да претпоставиме дека $a \vee c = b \vee c$, $ac = bc$. Бидејќи мрежата M е дистрибутивна, имаме:

$$\begin{aligned} a = a(a \vee c) = a(b \vee c) = ab \vee ac &= \\ = ab \vee bc = (a \vee c)b = (a \vee b)b &= b. \end{aligned}$$

$(iii) \Longrightarrow (ii)$. Да ставиме: $x=ab \vee bc \vee ca$, $y=(a \vee b)(b \vee c)(c \vee a)$, $p=ac \vee b(a \vee c)$, $q=bc \vee a(b \vee c)$, $r=ab \vee c(a \vee b)$. Од условот (iii) следува дека мрежата M е модуларна (AII,4.4°), па користејќи го тоа имаме:

$$p \vee r = ac \vee b(a \vee c) \vee ab \vee c(a \vee b) =$$
$$= b(a \vee c) \vee c(a \vee b) = (a \vee b)(\,b(a \vee c) \vee c\,) =$$
$$= (a \vee b)(a \vee c)(b \vee c) = y,$$

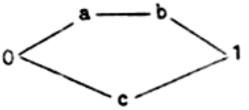
$$q \vee r = bc \vee a(b \vee c) \vee ab \vee c(a \vee b) =$$
$$= a(b \vee c) \vee c(a \vee b) = (a \vee b)(\,a(b \vee c) \vee c\,) =$$
$$= (a \vee b)(b \vee c)(c \vee a) = y,$$

а слично добиваме дека е и $pr = x = qr$. Од (iii) имаме $p=q$. Но тогаш

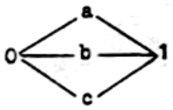
$$p = p \vee q = ac \vee b(a \vee c) \vee bc \vee a(b \vee c) =$$
$$= b(a \vee c) \vee a(b \vee c) = (a \vee c)(\,b \vee a(b \vee c)\,) =$$
$$= (a \vee c)(b \vee c)(a \vee b) = y,$$

а слично и $p=x$, т.е. $x=y$.

6.28. Да се покаже дека мрежата М е дистрибутивна ако и само ако М не содржи подмрежа изоморфна со мрежата А претставена со дијаграмот Д.1 или Д.2:



Д.1



Д.2

Решение. Ниедна од мрежите Д.1, Д.2 не е дистрибутивна, па ако мрежата М содржи подмрежа изоморфна со една од нив, тогаш мрежата М не е дистрибутивна.

Да претпоставиме дека мрежата М не е дистрибутивна. Тогаш М содржи три меѓусебно различни елементи x, y, z, такви што $x \wedge z = y \wedge z$, $x \vee z = y \vee z$. Ниеден од x, y не е споредлив со z, зашто, на пример, ако $x \leq z$, тогаш имаме $y \vee z = x \vee z = z$, т.е. $y \leq z$, па значи $x \wedge z = x \neq y = y \wedge z$. Елементите x, y можат да бидат споредливи или пак неспоредливи. Да ставиме:

$$u = x\wedge z = y\wedge z, \quad v = x\vee z = y\vee z;$$

тогаш, ако x и y се споредливи, $\{u,x,y,z,v\}$ е подмрежа од M изоморфна со Д.1, а ако x и y се неспоредливи, тогаш $\{u,x,y,z,v\}$ е подмрежа од M изоморфна со Д.2.

6.29. Мрежата M е дистрибутивна ако и само ако е исполнет условот:

(i) $a\leqslant b \Longleftrightarrow (\exists c\in M)\ a\wedge c\leqslant b\wedge c,\ a\vee c\leqslant b\vee c;$

(ii) $(a\vee b)\wedge[c\vee(a\wedge b)] = (a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a).$

Решение. Нека мрежата M е дистрибутивна и нека $a\wedge c\leqslant b\wedge c$, $a\vee c\leqslant b\vee c$ за некој $c\in M$. Тогаш имаме:

$$a = a\wedge(a\vee c)\leqslant a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leqslant$$
$$\leqslant(a\wedge b)\vee(b\wedge c) = b\wedge(a\vee c)\leqslant b\wedge(b\vee c) = b.$$

Ако пак $a\leqslant b$, тогаш ставајќи $c=b$, имаме $a\wedge c\leqslant b\wedge c$, $a\vee c\leqslant b\vee c$, независно дали мрежата M е дистрибутивна или не. Значи, исполнет е условот (i).

Да претпоставиме сега дека е исполнет условот (i) и нека $x\wedge y = x\wedge z$, $x\vee y = x\vee z$. Според (i), добиваме $y\leqslant z$ и $z\leqslant y$, т.е. $y = z$, што значи мрежата M е дистрибутивна.

Слично се покажува дека и условот (ii) е еквивалентен со тоа мрежата M да е дистрибутивна.

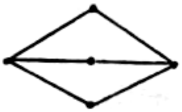
6.30. Да се покаже дека мрежата $\mathcal{E}$ од сите еквивалентности на множеството M е:

а) дистрибутивна ако и само ако M нема повеќе од два елемента;

б) модуларна ако и само ако M нема повеќе од три елементи.

Решение. а) Ако $M = \{a\}$ е едноелементно множество, тогаш $\mathcal{E} = \{\Delta_M\}$. Ако пак $M = \{a,b\}$ е двоелементно множество, тогаш $\mathcal{E} = \{\Delta_M, M\times M\}$. И во двата случаја $\mathcal{E}$ е дистрибутивна мрежа (5.22).

Нека сега M содржи барем три елемента a, b, c. Тогаш $\mathcal{E}$ ги содржи барем елементите: Δ_M, $\Delta_M \cup \{(b,c),(c,b)\}$, $\Delta_M \cup \{(a,b),(b,a)\}$, $\Delta_M \cup \{(a,c),(c,a)\}$, $\Delta_M \cup \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$ и овие елементи формираат подмрежа од $\mathcal{E}$ чиј дијаграм е:



Д.1

Значи, според 6.28, мрежата $\mathcal{E}$ не е дистрибутивна, т.е. мрежата $\mathcal{E}$ е дистрибутивна ако и само ако M нема повеќе од два елемента.

б) Ако M има само еден или само два елемента, тогаш $\mathcal{E}$ е модуларна, зашто е дистрибутивна. Ако M има само три елемента, тогаш $\mathcal{E}$ има точно пет елемента, и дијаграмот на $\mathcal{E}$ е Д.1, па мрежата $\mathcal{E}$ е модуларна (6.21). Нека сега M има барем четири елементи. Тогаш $\mathcal{E}$ ја содржи мрежата од 6.7, како своја подмрежа, којашто не е модуларна, па значи и мрежата $\mathcal{E}$ не е модуларна.

6.31. Мрежата од сите филтри над едно множество M (во смисла на 6.20) е дистрибутивна.

Решение. Ако Φ_1, Φ_2, Φ_3 се филтри над M, тогаш

$$\Phi_1 \wedge (\Phi_2 \vee \Phi_3) = \{ A_1 \cup (A_2 \cap A_3) \mid A_1 \in \Phi_1, \ i=1,2,3\}.$$

Но, секој елемент $A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$ му припаѓа на $(\Phi_1 \wedge \Phi_2) \vee (\Phi_1 \wedge \Phi_3)$. Значи:

$$\Phi_1 \wedge (\Phi_2 \vee \Phi_3) \subseteq (\Phi_1 \wedge \Phi_2) \vee (\Phi_1 \wedge \Phi_3), \qquad (1)$$

а бидејќи обратната инклузија важи во секоја мрежа, добиваме дека во (1) важи равенство, т.е. мрежата од сите филтри над множеството M е дистрибутивна.

6.32. Нека M е мрежа со најмал елемент 0 и со најголем елемент 1. За елементот $y \in M$ велиме дека е комплемент на $x \in M$ ако

$$x\wedge y = 0 \text{ и } x\vee y = 1.$$

Ако секој елемент $x\in M$ има комплемент, тогаш мрежата M се вика <u>комплементарна</u>.

Кои од мрежите со пет елементи (6.6) се комплементарни?

<u>Решение</u>. Мрежите претставени со дијаграмите Д.1, Д.2 и Д.3 не се комплементарни, зашто елементите, различни од 0 и 1, немаат комплемент. Мрежите претставени со дијаграмите Д.4 и Д.5 се комплементарни. Да забележиме дека некои од елементите имаат два комплемента, како, на пример, елементите во Д.4, различни од 0 и 1.

6.33. Нека мрежата M е дистрибутивна, со најмал елемент 0 и со најголем елемент 1. Да се покаже дека, ако елементот $x\in M$ има комплемент, тогаш тој е еднозначно определен.

<u>Решение</u>. Нека y и z се комплементи на x. Тогаш

$$x\wedge y = x\wedge z = 0, \quad x\vee y = x\vee z = 1. \qquad (1)$$

Бидејќи мрежата M е дистрибутивна, од (1) следува $y = z$.

6.34. Секоја мрежа што е дистрибутивна и комплементарна се вика <u>булова мрежа</u> или <u>булова алгебра</u>.

Која од мрежите во 6.1 е булова?

<u>Одговор</u>. Мрежата под а) е булова, а под б) не е булова, зашто не е дистрибутивна (ни комплементарна).

6.35. Нека M е дадено множество и Φ непразно подмножество од $\mathcal{P}(M)$ што ги задоволува условите:

(i) $A,B\in\Phi \Longrightarrow A\cup B\in\Phi$,

(ii) $A\in\Phi \Longrightarrow A' = M\setminus A\in\Phi$.

Сметајќи дека Φ е подредено по инклузија, да се покаже дека Φ е булова мрежа.

Решение. Нека $A\in\Phi$. Од (i) и (ii) следува дека A', $M = A\cup A'$, $\emptyset = M\setminus M$ му припаѓаат на Φ. Ако $A,B\in\Phi$, тогаш

$$A\cap B = M\setminus(A\cap B)' = M\setminus(A'\cup B'),$$

па од (i) и (ii) следува дека $A\cap B\in\Phi$.

Значи, ако $A,B\in\Phi$, тогаш нивниот супремум $A\cup B$ и инфимум $A\cap B$ му припаѓаат на Φ, т.е. Φ е мрежа; јасно е дека таа е дистрибутивна. Бидејќи во Φ постои најмал елемент $\emptyset$, најголем елемент M и за секој $A\in\Phi$ постои $A'\in\Phi$: $A\cap A' = \emptyset$, $A\cup A' = M$, мрежата M е комплементарна. Следствено, Φ е булова мрежа.

6.36. Нека M е множество со барем три елементи, а C нека е подмножество од M со барем два елемента. Ако

$$\Phi = \{X \mid X\subseteq M,\ (X\cap C = \emptyset \text{ или } X\cap C = C)\},$$

да се покаже дека Φ, подредено по инклузија, е булова мрежа.

Решение. Според 6.35, доволно е да покажеме дека

$$A,B\in\Phi \Longrightarrow A\cup B,\ A' = M\setminus A\in\Phi.$$

Нека $A\in\Phi$; ако $A\cap C = \emptyset$, тогаш $A'\cap C = C$, а ако $A\cap C = C$, тогаш $A'\cap C = \emptyset$, па значи $A'\in\Phi$. Нека $A,B\in\Phi$; имаме:

$$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C) = \begin{cases}\emptyset & \text{за } A\cap C = B\cap C = \emptyset\\ C & \text{во друг случај,}\end{cases}$$

што значи $A\cup B\in\Phi$.

Да забележиме дека, ако C е празното или едноелементно множество, тогаш $\Phi = \mathcal{P}(M)$.

6.37. Нека Φ е множеството од сите конечни подмножества од некое бесконечно множество M. Да се покаже дека Φ, подредено по инклузија, не е булова мрежа.

6.38. Да се покаже дека ниедна од мрежите со пет елементи (6.6) не е булова мрежа.

6.39. Дали може една булова мрежа да биде потполно подредена?

Решение. Нека М е булова мрежа при што М е потполно подредено множество. Ако $a \in M$, тогаш постои $a' \in M$, таков што

$$a \wedge a' = 0, \quad a \vee a' = 1. \qquad (1)$$

Бидејќи М е потполно подредено, можеме да сметаме дека $a \leqslant a'$, па

$$a \wedge a' = a, \quad a \vee a' = a'. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $a=0$ и $a'=1$, т.е. М се состои само од два елемента.

Значи, една булова мрежа М е потполно подредена ако и само ако $M = \{0,1\}$.

6.40. Да се покаже дека бројот на елементите во една конечна булова мрежа е парен.

Решение. Нека М е конечна булова мрежа. За секој $x \in M$ постои еднозначно определен елемент $x' \in M$, $x' \neq x$, па значи елементите се јавуваат по парови. Следствено, бројот на елементите во М е парен.

6.41. Буловите мрежи $\Phi_1 = \mathcal{P}(M_1)$ и $\Phi_2 = \mathcal{P}(M_2)$ се изоморфни ако и само ако $|M_1| = |M_2|$.

Решение. Ако $|M_1| = |M_2|$, тогаш постои биекција $f : M_1 \longrightarrow M_2$. Да ставиме

$$(\forall A \in \Phi_1)\ g(A) = f(A).$$

Лесно се проверува дека g е монотона биекција (т.е. изоморфизам) меѓу Φ_1 и Φ_2.

Обратно, ако g е изоморфизам меѓу Φ_1 и Φ_2, тогаш пресликувањето $f : M_1 \longrightarrow M_2$ дефинирано со:

$$(\forall x \in M_1)\ f(x) = g(\{x\})$$

е биекција, т.е $|M_1| = |M_2|$.

6.42. Да се покаже дека $\mathcal{P}(\{0,1\})$, подредено по инклузија, и мрежата Д.0 од 6.6 се булови мрежи, меѓусебно изоморфни.

6.43. Нека К(М) е множеството карактеристични функции на сите подмножества од дадено множество М и нека во К(М) е дефинирано подредување со:

$$\chi_A \leqslant \chi_B \iff A \subseteq B.$$

Да се покаже дека К(М) е булова мрежа изоморфна со буловата мрежа $\mathcal{P}(M)$.

√**6.44.** Нека М е дистрибутивна мрежа со најмал елемент 0 и најголем елемент 1 и нека А ги содржи оние елементи од М што имаат комплемент. Да се покаже дека А е подмрежа од М и дека А е булова.

Решение. Ако А ги содржи оние елементи од М што имаат комплемент, да покажеме дека А е подмрежа од М. Јасно е дека $0,1 \in A$. Ако $x,y \in A$ и ако x', y' се комплементи на x и y соодветно, тогаш имаме:

$$(x\wedge y)\wedge(x'\vee y') = (x\wedge y\wedge x')\vee(x\wedge y\wedge y') = 0,$$
$$(x\wedge y)\vee(x'\vee y') = (x\vee x'\vee y')\wedge(y\vee x'\vee y') = 1,$$

па значи $x\wedge y$ има комплемент, т.е. $x\wedge y\in A$. Слично, добиваме дека и елементот $x\vee y$ има комплемент $x'\wedge y'$, т.е. $x\vee y\in A$, па значи А е подмрежа од М. Дека А е булова следува од дефиницијата.

6.45. Нека Ф е фамилија подмножества од $\mathbb{N}$, дефинирана со:

$$A\in\Phi \iff A \text{ е конечно или } A'=\mathbb{N}\setminus A \text{ е конечно.}$$

Да се покаже дека Ф е булова подмрежа од $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, но не е комплетна.

Решение. Нека $A,B\in\Phi$; ако А и В се конечни, тогаш и $A\cap B$, $A\cup B$ се конечни, па $A\cap B, A\cup B\in\Phi$. Ако A' и B' се конечни, тогаш

$(A\cap B)'=A'\cup B'$, $(A\cup B)'=A'\cap B'$ се конечни, па значи $A\cap B, A\cup B\in\Phi$. Нека A е конечно и B' е конечно. Тогаш $A\cap B$ и $(A\cup B)'$ е конечно, па значи и во овој случај $A\cap B, A\cup B\in\Phi$. Освен тоа, $\emptyset, \mathbb{N}\in\Phi$ и, ако $A\in\Phi$, тогаш $A'\in\Phi$. Од сето тоа следува дека Φ е булова подмрежа од $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Нека $\mathcal{A}=\{\{2,4,\dots,2n\}\mid n\in\mathbb{N}\}$. Ако A е мајорант на фамилијата $\mathcal{A}$ ($\mathbb{N}$ е секако мајорант), тогаш $2\mathbb{N}\subset A$, па значи A' е конечно, т.е. A содржи барем еден непарен број, на пример, p. Множеството $B=A\setminus\{p\}$ е бесконечно, но B' е конечно па $B\in\Phi$. Притоа имаме $2\mathbb{N}\subset B$, што значи B е исто така мајорант на фамилијата $\mathcal{A}$. Од ова следува дека фамилијата $\mathcal{A}$ нема супремум, т.е. буловата мрежа Φ не е комплетна.

Во задачите 6.46 - 6.49 станува збор за булови мрежи, при што е пишувано xy наместо $x\wedge y$.

6.46. Ако $a\vee x=b\vee x$, $a\vee x'=b\vee x'$, тогаш $a=b$.

Решение. Имаме:

$$(a\vee x)(a\vee x')=a\vee xx'=a\vee 0=a,$$
$$(b\vee x)(b\vee x')=b\vee xx'=b\vee 0=b.$$

Од $a\vee x=b\vee x$, $a\vee x'=b\vee x'$ следуа $(a\vee x)(a\vee x')=(b\vee x)(b\vee x')$, т.е. $a=b$.

6.47. Да се докаже дека:

а) $xy\vee[(x\vee y')y]'=1$;

б) $\{[(x'y')'\vee z](x\vee z)\}'=x'z'$;

в) $[x\vee(x'\vee y)'][x\vee(y'z')']=x$.

Решение. а) Имаме:

$$xy\vee[(x\vee y')y]'=xy\vee[(x\vee y')'\vee y']=xy\vee(x'y\vee y')=$$
$$=xy\vee(x'\vee y')(y\vee y')=xy\vee(x'\vee y')=xy\vee(xy)'=1.$$

6.48. Да се упростат изразите:

а) $(x\vee y)x'y'$; б) $xyz\vee x'\vee y'\vee z'$;

в) $(x\vee x'y)(y\vee yz)$; г) $((x'y')'\vee z)(x\vee y')'$;

д) $(x\vee y')(x'\vee y)(x'\vee y')$; ѓ) $(x\vee y)(z\vee y')\vee y(x'\vee z')$.

Одговор. а) 0. б) 1. в) y. г) $x'y$. д) $x'y'$. ѓ) $x\vee y$.

6.49. Да се реши системот равенки:

а) $x = yz,\ y = x\vee z',\ z = x'y'$;

б) $x = xz,\ y = x\vee z,\ z = x'y'$.

Решение. а) Имаме:

$$z = x'y' = (yz)'y' = (y'\vee z')y' = y',$$

а потоа и $x = yz = yy' = 0$. Од ова следува дека секоја тројка $(0,y,y')$ е решение на системот.

б) Како и во а), добиваме $z = y'$, $x = 0$. Од $y = x\vee z$ следува $y = y'$, што не е можно, па значи системот нема решение.

7. ИСТОРИСКИ ЗАБЕЛЕШКИ И НЕКОИ ПАРАДОКСИ

Почетоците на теоријата на множествата е тесно сврзана со името на германскиот математичар Георг Кантор (1847 - 1918). Во периодот од 1874 до 1897 година Кантор публикувал редица трудови во кои ги изложувал основите од теоријата на множествата, вклучувајќи ја и теоријата на трансфинитните броеви (т.е. кардиналните и ординалните броеви). За докажување на основните теореми од оваа теорија, тој вовел расудување од нов тип. За правина, и дотогаш биле применувани аналогни принципи при разгледувањето на конечни множества, но Кантор бил првиот што ги применил експлицитно и систематски во теоријата на бесконечните множества.

Во текот на 1874 година Кантор ја објавил својата прва работа во врска со овие проблеми. Испитувајќи ја "низата" од алгебарските броеви, тој открил дека множеството на природните броеви содржи "толку" елементи колку и "бесконечно поширокото" множество на алгебарските броеви (т.е. дека меѓу тие множества може да се воспостави обратноеднозначна кореспонденција), а тој факт за тоа време, благо речено, бил зачудувачки. Изразувајќи се со денешната терминологија, Канторовиот заклучок дека множеството на алгебарските броеви е еквивалентно со множеството на природните броеви - значи, еквивалентно со свое вистинско подмножество - беше прва од многуте неочекувани особини на бесконечните множества.

Природни броеви има бесконечно многу, а и реални броеви има бесконечно многу. Кантор докажал подоцна дека таква кореспонденција, од $\mathbb{N}$ на $\mathbb{R}$, не постои, т.е. множеството на реалните броеви е "битно пошироко" од множеството на природните броеви. Слободно зборувајќи, тука се поставува прашањето "колку е голема бесконечноста?"

Добиените резултати веќе можеле да се применат на некои конкретни, порано поставени проблеми. На пример, докажувањето дали некој број е трансцендентен (со тоа и прашањето за егзистенцијата на такви броеви) било многу тешка задача (а и денес е; имено не постои општа метода за утврдување на трансцендентноста на броевите). Откако докажал дека алгебарски броеви има преброиво многу, а реални - непреброиво многу, Кантор лесно заклучил дека трансцендентни броеви постојат и ги има непреброиво многу.

Но, скоро во исто време кога биле поставени темелите на теоријата на множествата и кога таа почнала да врши влијание на други математички дисциплини,биле откриени некои противречности во самата теорија. Тие противречности или контрадикции се наречени парадокси на теоријата на множествата. Првиот од нив, кој е објавен од Бурали-Форти 1897 година, се однесува на ординалните броеви (имено, поимот "множеството од сите ординални броеви" води до противречност), а потоа следувале и други парадокси, во врска со други прашања.

Овде ќе разгледаме некои од нив (7.1 -7.4), главно такви што се во врска со теоремата на Кантор (3.25):

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| , \qquad (1)$$

за кое било множество A.

7.1. Множество од сите множества (Канторов парадокс). Нека S се состои од сите множества. Бидејќи секое подмножество од S е елемент на S, следува дека $\mathcal{P}(S)\subseteq S$, т.е.

$$|\mathcal{P}(S)| \leqslant |S|. \tag{2}$$

Од друга страна, според теоремата на Кантор, имаме:

$$|S| < |\mathcal{P}(S)|. \tag{3}$$

Но, резултатите (2) и (3) се противречни еден на друг! Значи, поимот "множество од сите множества" доведува до контрадикција.

7.2. Раселов парадокс. Елементите на партитивното множество $\mathcal{P}(A)$ од некое множество A се множества. Бидејќи $\mathcal{P}(A)$ не е подмножество од A, следува дека $\mathcal{P}(A)$ не е елемент на $\mathcal{P}(A)$. Значи, постои множество X чии елементи се пак множества, но притоа $X\notin X$. Раселовиот парадокс се состои во следното:

Нека S се состои од сите множества со спомената особина, т.е.

$$X\in S \iff (X \text{ е множество и } X\notin X). \tag{4}$$

Сосема природно се наметнува прашањето: дали S е елемент на S? Ако претпоставиме дека $S\in S$, тогаш, според (4), добиваме дека $S\notin S$; ако пак $S\notin S$, тогаш,пак според (4), добиваме дека $S\in S$.

Овој апсурден резултат е наречен Раселов парадокс, по името на англискиот филозоф и математичар Бертран Расел, кој го открил во 1901 година.

7.3. Множество од сите кардинални броеви. И поимот "множество од сите кардинални броеви" води до контрадикција. Навистина, нека $\mathcal{A}$ се состои од сите кардинални броеви. За секој кардинален број $\alpha\in\mathcal{A}$ постои множество A_α , такво што $\alpha = |A_\alpha|$. Да ставиме

$$A = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$$

и да го разгледаме партитивното множество $\mathcal{P}(A)$. Нека $\gamma = |\mathcal{P}(A)|$.

Бидејќи $\gamma \in \mathcal{A}$, постои множество A_γ кое е подмножество од А и еквивалентно со $\mathcal{P}(A)$. Од тоа следува дека $|\mathcal{P}(A)| \leqslant |A|$, а од друга страна, според теоремата на Кантор, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Значи, признавањето на множество од сите кардинални броеви доведува до контрадикција.

7.4. Фамилија од сите множества еквивалентни со дадено множество. Нека А и I се две произволни непразни множества. Да ги формираме, за секој $k \in I$, множествата:

$$A_k = \{(a,k) \mid a \in A\},$$

и да ја разгледаме фамилијата од тие множества, $\Phi = \{A_k \mid k \in I\}$. Да забележиме дека секое од множествата A_k $(k \in I)$ е еквивалентно со А и, исто така, $|\Phi| = |I|$.

Нека сега α е фамилијата од сите множества еквивалентни со множеството А. Да го разгледаме партитивното множество $\mathcal{P}(\alpha)$ од α и да ја дефинираме фамилијата $\Gamma = \{A_k \mid k \in \mathcal{P}(\alpha)\}$ како погоре. Бидејќи секое $A_k \sim A$, заклучуваме дека $\Gamma \subsetneq \alpha$. Од тоа следува дека

$$|\mathcal{P}(\alpha)| = |\Gamma| \leqslant |\alpha|,$$

а според теоремата на Кантор $|\alpha| < |\mathcal{P}(\alpha)|$. Значи, и допуштањето "фамилија од сите множества еквивалентни со дадено множество" доведува до противречност.

Со откривањето на парадоксите беа разнишани темелите на теоријата на множествата, но сепак со тоа не се намали нејзината важност за развитокот на другите гранки од математиката. Појавата на парадоксите укажа само на тоа дека разгледувањето на фундаменталните прашања од оваа теорија не може да се потпре само на интуицијата. Тоа ја наметна потребата за јасно издвојување на расудувањата што доведуваат до парадокси и за уточнување на претставите што се во основите на теоријата на множествата. Тој период е карактеристичен по зголемениот интерес за аксиоматизирање на геометријата и аритметиката, па затоа бил сосема природен обидот да се решат настанатите проблеми во теоријата на множествата со изнаоѓање на некој погоден систем аксиоми. Првиот успешен обид строго да се формализираат методите на Кантор (кои биле користени во скриена форма) е направен со системот аксиоми на Цермело, објавен во 1908 година, а дополнуван подоцна од други математичари. Една од најмногу употребуваните варијанти на Цермеловиот систем аксиоми е системот на Цермело-Френкел-Сколем (скратено: ЦФС).

Со Канторовата теорија на множествата искрснаа и многу проблеми, меѓу кои видно место зазема т.н. проблем на континуумот. Еве во што се состои тој проблем.

Според теоремата на Кантор имаме:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

Се поставува прашањето: дали постои множество S чиј кардинален број е поголем од $|\mathbb{N}|$, а помал од $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, т.е.

$$|\mathbb{N}| < |S| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \ ? \qquad (5)$$

Или, имајќи предвид дека $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ е еквивалентно со множеството на реалните броеви (т.е. со множеството точки од една права), прашањето може да се постави и вака: дали постои кардинален број α , таков што

$$\aleph_0 < \alpha < c \ ?$$

Кантор претпоставувал дека такво множество S со особината (5) не постои, но ни тој ни други математичари подоцна не успеале да го докажат или да го побијат тоа. Таа претпоставка е наречена <u>континуум-хипотеза</u>. (Името доаѓа од терминот "континуум" што се употребува за кардиналниот број c на $\mathbb{R}$ и поради тоа што $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$.)

Подоцна е формулирана и поопшта хипотеза:

Ако M е кое било бесконечно множество, тогаш не постои множество S со особината:

$$|M| < |S| < |\mathcal{P}(M)| \; ; \qquad (6)$$

таа е наречена обопштена континуум-хипотеза.

Како што споменавме погоре, и денеска не се знае дали е точна или лажна самата континуум-хипотеза, но прашањето за тоа дали може формално да се докаже или побие во споменатиот систем аксиоми ЦФС е наполно решено. Прв во таа смисла дал придонес австрискиот логичар Курт Гедел кој докажал (во 1938 година) дека:

> Ако системот аксиоми ЦФС е непротивречен, тогаш и обопштената континуум-хипотеза е формално непротивречна со аксиомите на ЦФС.

(Примери на тврдења од таков вид има во врска со аритметиката и геометријата. Имено, Риман докажал дека: "Ако евклидската геометрија е непротивречна, тогаш и неевклидската геометрија е непротивречна", а Хилберт докажал дека: "Ако аритметиката е непротивречна, тогаш и евклидската геометрија е непротивречна".)

Паул Коен во 1963 год. докажал дека негацијата на обопштената континуум-хипотеза (дури и негацијата на специјалната континуум-хипотеза) е непротивречна во ЦФС.

Од тие резултати следува дека континуум-хипотезата е независна од аксиомите на ЦФС. Со други зборови, континуум-хипотезата не може да биде докажана ни да биде побиена во ЦФС или, би рекле, аксиомите на ЦФС не се доволно "јаки" за да го решат проблемот на континуумот. Така, ситуацијата со проблемот на континуумот е аналогна со таа на евклидовиот постулат за паралелните прави.

Уште еден интересен и важен резултат за "независност" се јавува во врска со аксиомата на избор. Гедел покажал дека аксиомата на избор не може да се побие во ЦФС, а Коен - дека таа не може да се докаже во ЦФС, па според тоа и аксиомата на избор е независна од аксиомите на ЦФС. Коен покажал, исто така, дека дури и кога би се приклучила аксиомата на избор кон аксиомите на ЦФС, сѐ уште не би било можно да се докаже континуум-хипотезата.

Значи, дали континуум-хипотезата е точна или лажна - всушност не знаеме, барем не во системот ЦФС. Иако проблемот на континуумот останува во основа нерешен, сепак тој претставува една од најсветлите точки во поновата математика, зашто обидите да се докаже или да се побие континуум-хипотезата ги води математичарите длабоко во суштината на математичката мисла.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЛЯПИН Е.С., АИЗЕНШТАТ А.Я., ЛЕСОХИН М.М.: Упражнения по теории групп, Москва 1967
2. МАЛЬЦЕВ А.И.: Алгебраические системы Москва 1970
3. ОЧАН Ю.С.: Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного, Москва 1965
4. САМАРЏИСКИ А., ЦЕЛАКОСКИ Н.: Решени задачи по алгебра I, Скопје 1968 (второ издание 1972)
5. СКОРНЯКОВ Л.А.: Элементы теории структур, Москва 1970
6. ХАО В., МАК-НОТОН Р.: Аксиоматические системы теории множеств, Москва 1963
7. ЦЕЛАКОСКИ Н.: Задачи по линеарна алгебра, Скопје 1972
8. ЧУПОНА Ѓ.: Предавања по алгебра I, Скопје 1968 (второ издание 1972)
9. ЧУПОНА Ѓ., ТРПЕНОВСКИ Б.: Предавања по алгебра II, Скопје 1973
10. BELL E.T.: Men of Mathematics, New York 1965 (превод на хрватско-српски: Veliki matematičari, Zagreb 1972)
11. COHN P.M.: Universal Algebra, Harper and Row, New York 1965 (превод на руски: Универсальная алгебра, Москва 1968)

12. DUBREIL P., DUBREIL-JACOTIN M.L.: Leçons d'algèbre moderne, Dunod, Paris 1961

13. EVES H., NEWSOM C.: An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York 1964

14. HALMOS P.: Naive Set Theory, Van Nostrand Company, New York 1960

15. LIPSCHUTZ S.: Theory and Problems of Set Theory and Related Topics, McGrow-Hill Company, New York 1964

16. SMULLYAN M.R.: "The Continuum Hypothesis", A Collection of Essays , The Mathematical Sciences , MIT (1969), 252 - 260

ИНДЕКС

ОЗНАКИ

$\mathbb{N}$ - множеството природни броеви
$\mathbb{N}^0$ - множеството природни броеви и нулата
$\mathbb{Z}$ - множеството цели броеви
$\mathbb{Z}^+$ - множеството позитивни цели броеви
$\mathbb{Z}^-$ - множеството негативни цели броеви
$\mathbb{Q}$ - множеството рационални броеви
$\mathbb{Q}^+$ - множеството позитивни рационални броеви
$\mathbb{Q}^-$ - множеството негативни рационални броеви
$\mathbb{R}$ - множеството реални броеви
$\mathbb{R}^+$ - множеството позитивни реални броеви
$\mathbb{R}^-$ - множеството негативни реални броеви
$\mathbb{R}^*$ - множеството ненулти реални броеви; аналогно: $\mathbb{Q}^*$
$\mathbb{C}$ - множеството комплексни броеви
$\wp(M)$ - партитивното множество на множеството M
$|M|$ - кардиналниот број на множеството M

СОДРЖИНА