**Општински натпревар 2026**

**I година**

**1А.** Аце вложил $n$ денари на сметка, каде $n$ е природен број. Банката му одбила $k$ проценти провизија, $k \in \mathbb{N}$. Така на сметката на Аце сега има 847 денари. Колку денари вложил Аце на сметката, ако се знае дека провизијата е помала од 30%?

**Решение.** Аце вложил $n$ денари, а банката му одбила $k$ проценти провизија, па според условот може да запишеме $n-\frac{k}{100}n=847$, односно $n(100-k)=84700$. Од $n(100-k)=84700$ имаме дека $n$ и $100-k$ се делители на $84700=2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 11$.

По услов, провизијата е помала од 30%, па за процентот на средствата кој останува на сметката на Аце важи $70<100-k<100$. Значи, треба да ги најдеме делителите на 84700 во тој интервал. Со проверка добиваме дека единствено решение е $7\cdot 11=77$. Значи $100-k=77$, т.е. $k=23\%$. Јасно, Аце вложил

$$n=\frac{84700}{100-k}=\frac{84700}{100-23}=1100 \text{ денари.}$$

**1Б.** Во понеделник Зоки напишал голем природен број на таблата. Во вторник тој ја запишал цифрата 2 до секоја непарна цифра во бројот. Во среда ја запишал цифрата 3 до секоја парна цифра. Во тој момент вкупниот број на цифри на таблата бил за 2025 поголем од бројот на цифри на бројот запишан во понеделникот. Колку е вкупниот број на цифри запишани на таблата во вторник?

**Решение.** Нека $x$ е бројот на непарни цифри, а $y$ е бројот на парни цифри на почетниот број запишан во понеделникот на таблата. Значи, во понеделник на таблата се запишани вкупно $x+y$ цифри. Во вторник, Зоки ја запишал цифрата 2 до секоја непарна цифра, односно ја запишал цифрата 2 точно $x$ пати на таблата. Бидејќи 2 е парен број, во вторник на таблата има запишано $x$ непарни и $y+x$ парни цифри или вкупно $y+2x$ цифри. Во среда, Зоки ја запишал цифрата 3 до секоја парна цифра, т.е. ја запишал $y+x$ пати. Бидејќи 3 е непарна цифра, на таблата во среда има $x+(x+y)=2x+y$ непарни и $y+x$ парни цифри или вкупно $(2x+y)+(y+x)=3x+2y$ цифри. По условите, овој број има 2025 цифри повеќе од почетниот број на цифри запишан во понеделникот, па оттука ја добиваме равенката $3x+2y=(x+y)+2025$, односно $2x+y=2025$. Но, ова воедно е и вкупниот број на цифри запишани на таблата во вторник. Значи, во вторник на таблата имало запишано вкупно 2025 цифри.

**2АБ.** За целите броеви $a\neq 0$ и $b\neq 0$, за кои $a\neq b$, важи

$$\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{3}.$$

Пресметај го збирот $a+b$.

**Решение.** Нека $x=\frac{1}{a}$ и $y=\frac{1}{b}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ и $a\neq b$. Дадената релација добива облик

$$\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)\cdot(x-y)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{2}{3}$$

или еквивалентно

$$\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}\cdot(x-y)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{x+y}=\frac{2}{3}.$$

Значи, $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{3}$, т.е. $\frac{ab}{a+b}=\frac{2}{3}$. Последното равенство е еквивалентно со

$$\begin{aligned}&3ab=2a+2b,\\&3ab-2a-2b=0 \quad /\cdot 3,\\&9ab-6a-6b=0,\\&9ab-6a-6b+4=4,\\&3b(3a-2)-2(3a-2)=4,\\&(3a-2)(3b-2)=4.\end{aligned}$$

Сега $a\neq b$, па од причини на симетрија, може да земем дека $a>b$. Бидејќи делителите на 4 во производот погоре се цели броеви, а $4=1\cdot 4=(-1)(-4)$, разгледуваме два случаи:

- кога $3a-2=4$ и $3b-2=1$, тогаш $a=2$ и $b=1$, па збирот $a+b=3$,
- кога $3a-2=-1$ и $3b-2=-4$, тогаш $a$ и $b$ не се цели броеви, па во овој случај нема решение.

Јасно, бараниот збир е $a+b=3$.

**3А.** Најди ги сите вредности на параметарот $a$ за кои равенката

$$3\cdot|x-2|+a\cdot|3-x|=a+4-x$$

има целобројно решение.

**Решение.** Ќе разгледаме три случаи.

1. Нека $x\le 2$, тогаш $|x-2|=-(x-2), |3-x|=3-x$, па дадената равенка може да се запише како $-3x+6+3a-ax=a+4-x$. Решавајќи по $x$, се добива $x=\frac{2a+2}{a+2}=2-\frac{2}{a+2}$. Оттука, $x$ е целоброен само ако $a+2\in\{-2,-1,1,2\}$, т.е. ако $a\in\{-4,-3,-1,0\}$. Меѓутоа, $x\le 2$ само за $a\in\{-1,0\}\}$.

2. За $2<x<3$, $x$ не е цел број.

3. Конечно, кога $x\ge 3$ важи $|x-2|=x-2, |3-x|=x-3$, па дадената равенка може да се запише како $3x-6+ax-3a=a+4-x$. Решавајќи по $x$, добиваме $x=\frac{4a+10}{a+4}=4-\frac{6}{a+4}$. Сега, $x$ е цел број за $a+4\in\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$ т.е. ако $a\in\{-10,-7,-6,-5,-3,-2,-1,2\}$. Но, $x\ge 3$ за $a\in\{-10,-7,-6,-5,2\}$.

Значи бараните вредности на параметарот за кои дадената равенка има целобројно решение се $a\in\{-10,-7,-6,-5,-1,0,2\}$.

**3Б.** Одреди ги вредностите на реалните броеви $a$ и $b$ за кои системот равенки:

$$\begin{cases} x+(a+3b)y=\frac{b}{3} \\ 3x+24y=2a-9 \end{cases}$$

има бесконечно многу решенија.

**Решение.** Прво коефициентите пред $x$ во двете равенки ги сведуваме на иста вредност така што првата равенка ја множиме со 3. Се добива следниот систем кој е еквивалентен на дадениот:

$$\begin{cases} 3x+3(a+3b)y=b \\ 3x+24y=2a-9 \end{cases}$$

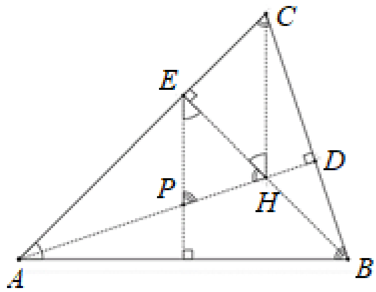
За овој систем да има бесконечно многу решенија треба коефициентите пред $y$ на левата страна да бидат еднакви и слободните членови на десната страна исто така да бидат еднакви. Се добива следниот систем линеарни равенки:

$$\begin{cases} 3(a+3b)=24 \\ b=2a-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=8 \\ b=2a-9 \end{cases}.$$

Решенија на овој систем се $a=5$ и $b=1$. Значи, дадениот систем има бесконечно многу решенија кога $a=5$ и $b=1$.

**4АБ.** Во триаголникот *ABC*, $\measuredangle BAC = 45^\circ$, $\overline{AB} = 4$ и $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$ . Нека *AD* и *BE* се висините на триаголникот и нека *P* е точка на *AD* така што правата *EP* е нормална на *AB*. Која е должината на отсечката *EP* ?

**Решение.** Триаголникот *AEB* е правоаголен рамнокрак триаголник. Бидејќи $\overline{AB} = 4$ , од Питагоровата теорема се добива дека




$$\overline{AE} = \overline{BE} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ .}$$

Тогаш,

$$\overline{EC} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ .}$$

Нека *H* е ортоцентарот на $\triangle ABC$. Тогаш, $\measuredangle CHE = \measuredangle BAC = 45^\circ$ (како агли со заемно нормални краци) . Затоа, $\triangle HCE$ е рамнокрак правоаголен и $\overline{EH} = \overline{EC} = \sqrt{2}$ .Триаголниците *EPH* и *ABC* се слични ( $\measuredangle EPH = \measuredangle ABC$ и $\measuredangle PHE = \measuredangle ACB$ - како агли со заемно нормални краци). Од сличноста важи следнава пропорција: $\frac{\overline{EP}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ , па оттука $\overline{EP} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3}$ .

**II година**

**1А.** Ако коефициентите на квадратните равенки $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ го исполнуваат условот $q + q_1 = \frac{pp_1}{2}$, тогаш решенијата на барем една од равенките се реални. Докажи!

**Решение.** Претпоставуваме спротивно, нека решенијата на двете равенки се комплексни броеви. Тогаш нивните дискриминанти се негативни, што значи важи $p^2 - 4q < 0$ и $p_1^2 - 4q_1 < 0$. Заради ова, собирајќи ги, добиваме $p^2 + p_1^2 - 4(q + q_1) < 0$. Од условот на задачата за коефициентите важи $q + q_1 = \frac{pp_1}{2}$, па последната неравенка добива облик $p^2 + p_1^2 - 4\frac{pp_1}{2} < 0$ односно $p^2 + p_1^2 - 2pp_1 < 0 \Leftrightarrow (p - p_1)^2 < 0$. Последното не е можно, па следува дека решенијата на барем една од дадените равенки се реални.

**1Б.** Еден ученик, од равенката $(x+3)(2-x) = 4$ заклучил дека $x + 3 = 4$ или $2 - x = 4$, односно $x = 1$ или $x = -2$. Но, иако заклучокот е погрешно изведен, решението е сепак точно. Определете реален број $r\,(r \neq 0)$, така што за дадени броеви $p$ и $q$ со заклучок изведен на ист начин како погоре, за равенката $(x+p)(q-x)=r$ да се добијат точните решенија.

**Решение.** Дадената квадратна равенка има облик

$$x^2-(q-p)x+r-pq=0 .$$

Од заклучокот на ученикот би добиле или $x+p=r$ или $q-x=r$, односно решенија на равенката би биле $x_1=r-p$ и $x_2=q-r$. За да бидат овие добиени вредности решенија на горната квадратна равенка треба да важат Виетовите формули, па оттаму се добива $x_1+x_2=q-p$ и $x_1x_2=r-pq$. Следува, $(r-p)(q-r)=r-pq,$ или запишано во еквивалентен облик $r(p+q-r-1)=0$. Бидејќи, $r\neq 0$ имаме дека $p+q-r-1=0$, од каде добиваме дека бараниот реален број е $r=p+q-1$.

**2АБ.** Нека $x,y$ и $z$ се позитивни реални броеви такви што

$$xyz=1,\ x+\tfrac{1}{z}=5,\ y+\tfrac{1}{x}=29 \text{ и } z+\tfrac{1}{y}=\tfrac{m}{n},$$

каде што $m$ и $n$ се заемно прости броеви. Најди ја вредноста на збирот $m+n$.

**Решение.** Ако ги помножиме $x+\frac{1}{z}=5,\ y+\frac{1}{x}=29$ и $z+\frac{1}{y}=\frac{m}{n},$ добиваме:

$$(x+\tfrac{1}{z})(y+\tfrac{1}{x})(z+\tfrac{1}{y})=145\tfrac{m}{n} .$$

Со средување на левата страна на горната равенка, добиваме

$$xyz+x+y+z+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{xyz}=145\tfrac{m}{n}$$

Ако ги замениме дадените услови во задачата, имаме:

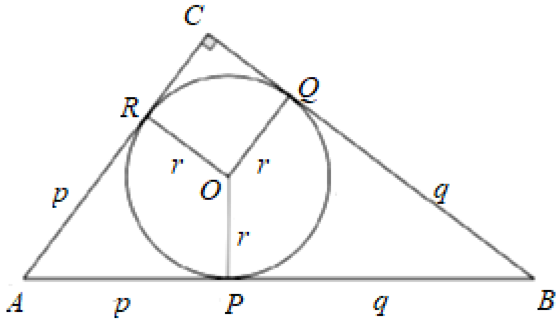
$$36+\tfrac{m}{n}=145\tfrac{m}{n} \Leftrightarrow \tfrac{m}{n}=\tfrac{36}{144} \Leftrightarrow \tfrac{m}{n}=\tfrac{1}{4} .$$

Значи, вредноста на бараниот збир е $m+n=5$.

**3А.** Впишаната кружница во правоаголен триаголник, со допирната точка, ја дели хипотенузата на две отсечки со должини $p$ и $q$. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

**Решение.** Нека $ABC$ е правоаголен триаголник со катети $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, хипотенуза $c=\overline{AB}$ и нека $k$ е впишаната кружница во него. Нека кружницата $k$ ги допира страните $AB,BC$ и $CA$ во точки $P,Q$ и $R$, соодветно. Тогаш, $\overline{AP}=\overline{AR}=p,\ \overline{BP}=\overline{BQ}=q$ и $\overline{CR}=\overline{CQ}=r$, каде што $r$ е радиус на впишаната кружница $k$.

Од фигурите кои го сочинуваат триаголникот, јасно е дека плоштината на триаголникот е $P_{\Delta ABC} = pr + qr + r^2$.




Од друга страна,

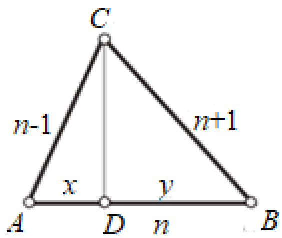
$$P_{\Delta ABC} = \tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}(q+r)(p+r) = \tfrac{1}{2}(pq + pr + qr + r^2) = \tfrac{1}{2}(pq + P_{\Delta ABC}).$$

Конечно, од последното равенство следува дека $P_{\Delta ABC} = pq$.

**3Б.** Должините на страните на еден триаголник се три последователни природни броеви, не помали од 3. Докажи дека висината на триаголникот, спуштена кон страната со средна должина, ја дели таа страна на отсечки чии должини се разликуваат за 4.

**Решение.** Нека $\Delta ABC$ е дадениот триаголник со должини на страни

$$\overline{CA} = n-1,\ \overline{AB} = n,\ \overline{BC} = n+1.$$




Нека $h = \overline{CD}$ е должината на висината спуштена кон страната $AB$ и нека $x$ и $y$ се должините на отсечките на кои точката $D$ ја дели страната $AB$, како на цртежот. Оттука добиваме дека $x + y = n$. Од правоаголните триаголници $ADC$ и $BDC,$ користејќи ја Питагоровата теорема добиваме: $(n-1)^2 - x^2 = h^2$ и $(n+1)^2 - y^2 = h^2$, од каде следува еднаквоста

$$(n-1)^2 - x^2 = (n+1)^2 - y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = (n+1)^2 - (n-1)^2.$$

Значи, $y^2 - x^2 = 4n \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 4n$, а од тоа што $x + y = n$, следува дека $y - x = 4$.

**4АБ.** Реши го системот во множеството реални броеви

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 20 \\ 2x^2 + 2xy - y^2 = 11 \end{cases}$$

**Решение.** Јасно е дека $x=0$ не е решение и затоа двете равенки на системот може да се поделат со $x^2$, па системот го трансформираме до облик

$$\begin{cases} 1-3\frac{y}{x}+2(\frac{y}{x})^2=\frac{20}{x^2} \\ 2+2\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2=\frac{11}{x^2} \end{cases}$$

и ставаме смена $\frac{y}{x}=t$. Оттука, ако првата равенка на системот ја поделиме со втората равенка, ја добиваме равенката $\frac{1-3t+2t^2}{2+2t-t^2}=\frac{20}{11}$, која е определена за $2+2t-t^2\neq 0$, т.е. за $t\neq 1\pm\sqrt{3}$. Од последната равенка добиваме $42t^2-73t-29=0$, а нејзини решенија се $t_1=-\frac{1}{3}$ и $t_2=\frac{29}{14}$. Ако замениме $t_1=-\frac{1}{3}$ во првата равенка од системот, добиваме $x^2=9$ и оттука следува $x_1=-3, x_2=3$ и затоа $y_1=1, y_2=-1$. Ако замениме $t_2=\frac{29}{14}$ во првата равенка од системот, добиваме $x^2=\frac{196}{33}$ и оттука $x_3=-\frac{14\sqrt{33}}{33}$, $x_4=\frac{14\sqrt{33}}{33}$ и затоа $y_3=-\frac{29\sqrt{33}}{33}, y_4=\frac{29\sqrt{33}}{33}$. Конечно, бараните решенија се $(-3,1),(3,-1)$, $(-\frac{14\sqrt{33}}{33},-\frac{29\sqrt{33}}{33})$ и $(\frac{14\sqrt{33}}{33},\frac{29\sqrt{33}}{33})$.

## III година

**1АБ.** Определи ги решенијата на системот

$$\begin{cases} \log_y x-2\log_x y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$$

**Решение.** Ако воведеме смена $\log_y x=a\,(\neq 0)$, тогаш $\log_x y=\frac{1}{a}$, $x,y>0$ и $x,y\neq 1$. Со замена во првата равенка од системот ја добиваме равенката $a-\frac{2}{a}=1$ која се трансформира во квадратна равенка $a^2-a-2=0$. Решенијата на оваа квадратна равенка се $a_1=-1$ и $a_2=2$.

1) За $a_1=-1$ добиваме $\log_y x=-1$, односно $x=\frac{1}{y}$. Со замена во втората равенка од системот ја добиваме квадратната равенка $y^2+2y-1=0$, чии

решенија се $y_1=-1-\sqrt{2}<0$ и $y_2=-1+\sqrt{2}>0$. Од нив само $y=\sqrt{2}-1$ е во дефиниционата област, па тогаш $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

2) За $a_2=2$ добиваме $\log_y x=2$, односно $x=y^2$. Со замена во втората равенка од системот ја добиваме квадратната равенка $y^2-y-2=0$ чии решенија се $y_1=-1<0$ и $y_2=2>0$. Позитивно е само второто решение, па за $y=2$ добиваме решение $x=4$.

Конечно, решенијата на системот се паровите $(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-1)$ и (4,2).

**2А.** Пресметај ја вредноста на изразот

$$(\sqrt{3}+\operatorname{tg}1^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}2^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}3^\circ)\cdot\ldots\cdot(\sqrt{3}+\operatorname{tg}29^\circ).$$

**Решение.** Да забележиме дека $\sqrt{3}=\operatorname{tg}60^\circ$. Тогаш, дадениот израз можеме да го запишеме како

$$\begin{aligned}A&=(\sqrt{3}+\operatorname{tg}1^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}2^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}3^\circ)...(\sqrt{3}+\operatorname{tg}29^\circ)\\&=(\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}1^\circ)(\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}2^\circ)(\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}3^\circ)...(\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}29^\circ)\end{aligned}$$

Користејќи дека $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$, добиваме дека

$$\begin{aligned}A&=\frac{\sin(60^\circ+1^\circ)}{\cos60^\circ\cos1^\circ}\cdot\frac{\sin(60^\circ+2^\circ)}{\cos60^\circ\cos2^\circ}\cdot\frac{\sin(60^\circ+3^\circ)}{\cos60^\circ\cos3^\circ}\cdots\frac{\sin(60^\circ+29^\circ)}{\cos60^\circ\cos29^\circ}\\&=\frac{\sin61^\circ\cdot\sin62^\circ\cdot\sin63^\circ\cdot\ldots\cdot\sin89^\circ}{(\cos60^\circ)^{29}\cdot\cos1^\circ\cdot\cos2^\circ\cdot\cos3^\circ\cdot\ldots\cdot\cos29^\circ}\\&=\frac{\cos29^\circ\cdot\cos28^\circ\cdot\cos27^\circ\cdot\ldots\cdot\cos1^\circ}{(\cos60^\circ)^{29}\cdot\cos1^\circ\cdot\cos2^\circ\cdot\cos3^\circ\cdot\ldots\cdot\cos29^\circ}\\&=\frac{1}{(\cos60^\circ)^{29}}=2^{29}.\end{aligned}$$

**2Б.** Определи ги сите можни вредности на изразот $5\sin x-3\cos x$, ако $3\sin x+5\cos x=5$. За кои вредности на променливата се достигнуваат?

**Решение.** Нека $S=5\sin x-3\cos x$ и $3\sin x+5\cos x=5$. Тогаш

$$S^2=(5\sin x-3\cos x)^2=25\sin^2 x-30\sin x\cos x+9\cos^2 x$$

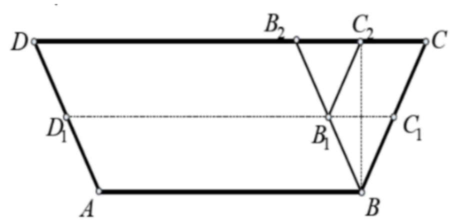
и

$$5^2=(3\sin x+5\cos x)^2\Leftrightarrow 25=9\sin^2 x+30\sin x\cos x+25\cos^2 x.$$

Со собирање на левите и десните страни на равенствата, добиваме дека $S^2+25=34(\sin^2 x+\cos^2 x)$. Значи, $S^2+25=34\Leftrightarrow S^2=9\Leftrightarrow S=\pm3$. Според тоа, сите можни вредности на изразот $5\sin x-3\cos x$ се $-3$ и $3$, а се достигнуваат за $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ и $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, соодветно **(5 п.)**.

**3АБ.** Канал за вода со должина $5\text{ m}$ може да прими вода со волумен $1440\text{ m}^3$. Напречниот пресек на каналот е рамнокрак трапез чиј крак е $52\text{ cm}$ и висина $48\text{ cm}$. Колку вода може да прими каналот ако се наполни до половина од својата висина?

**Решение.** На цртежот, трапезот $ABCD$ го претставува пресекот на каналот, $BB_2\parallel AD$, $B_1$ е средина на $BB_2$, $B_1C_1\parallel AB$ и $C_2$ е подножје на висината спуштена од темето $B$. Бидејќи $BCB_2$ е рамнокрак триаголник, точката $C_2$ е средина на $CB_2$. Според тоа, $B_1C_1\parallel B_2C$ и




$\overline{CC_2}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{C_2B}^2}=\sqrt{0,52^2-0,48^2}=0,2\text{ m}$.

Нека $V$ е волуменот на водата кога каналот е наполнет со вода до половина на висината, а $V_1=1440\text{ m}^3$. Бидејќи трапезите $ABC_1D_1$ и $D_1B_1C_2D$ се складни, волумените кои ги определуваат како делови од каналот се еднакви, па волуменот на каналот е $V_1=2V+V_2$. Притоа $V_2$ е волуменот на призмата со основа паралелограмот $B_1C_1CC_2$ чија плоштината е $P$, а висина е должината на каналот и изнесува $5\text{m}$. Значи $V_2=5P$, при што $P=\overline{CC_2}\cdot\frac{\overline{C_2B}}{2}=0,2\cdot0,24=0,048\text{m}^2$. Според тоа,

$$V=\frac{1440-0,048\cdot5}{2}=719,88\text{m}^3.$$

**4А.** Во множеството на реалните броеви, реши ја равенката

$$\sin(2026x)+\sin^2 x=2.$$

**Решение.** Јасно е дека важат следниве оценки $-1\le\sin(2026x)\le1$ и $0\le\sin^2(x)\le1$, па за да важи $\sin(2026x)+\sin^2(x)=2$, мора да се достигнат горните граници поединечно, односно мора $\sin(2026x)=1$ и $\sin^2(x)=1$. Од второто, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ за цел број $k$, па тогаш

$$\sin(2026x) = \sin(2026(\tfrac{\pi}{2} + k\pi)) = \sin(\pi(1013 + 2026k)) = 0 \neq 1,$$

бидејќи $1013 + 2026k$ е цел број. Ова значи дека равенката нема реално решение.

**4Б.** За кои вредности на параметарот $a \in \mathbb{R}$, равенката

$$(a-1)\cdot 4^x + (2a-3)\cdot 6^x = (3a-4)\cdot 9^x$$

има единствено решение во множеството на реалните броеви?

**Решение.** Дадената равенка можеме да ја запишеме во облик

$$(a-1)\cdot \frac{4^x}{9^x} + (2a-3)\cdot \frac{6^x}{9^x} = 3a-4 \iff (a-1)\cdot (\tfrac{2}{3})^{2x} + (2a-3)\cdot (\tfrac{2}{3})^x = (3a-4).$$

Воведуваме смена $(\frac{2}{3})^x = t$. Тогаш дадената равенка се трансформира во квадратна равенка од облик

$$(a-1)t^2 + (2a-3)t - (3a-4) = 0.$$

Квадратната равенка има единствено решение, односно двоен корен, ако дискриминантата е еднаква на нула, па затоа ги бараме оние вредности на $a \in \mathbb{R}$, за кои $D = 0$, односно ја добиваме следната равенка

$$(2a-3)^2 + 4(a-1)(3a-4) = 0 \iff 16a^2 - 40a + 25 = 0 \iff (4a-5)^2 = 0,$$

од каде следува дека бараната вредност е $a = \frac{5}{4}$

**IV година**

**1АБ.** Дадена е аритметичка прогресија со 2025 члена кај која првиот член е 25, а последниот член е 2025. Одреди ја вредноста на изразот

$$A = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}}+\sqrt{a_{2025}}}.$$

**Решение**. Од условот на задачата имаме дека $a_1 = 25, a_{2025} = 2025$, па така според формулата за општ член на аритметичка прогресија, $a_{2025} = a_1 + 2024d$, добиваме дека $2025 = 25 + 2024d$, односно $d = \frac{2000}{2024}$.

Така сега, со рационализација, изразот го трансформираме до:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}}+\sqrt{a_{2025}}} \\ &= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2} + \frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{a_4-a_3} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{2025}}-\sqrt{a_{2024}}}{a_{2025}-a_{2024}} \\ &= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d} + \frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{d} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{2025}}-\sqrt{a_{2024}}}{d} \end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{a_{2025}}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{25}}{2000}\cdot 2024=\frac{1012}{25}.$$

**2Б.** Одреди ги сите подредени тројки $(x,y,z)$ од реални броеви, за кои што важи равенството

$$x^2+y^2+z^2+y^2z^2+16x^2z^2+81x^2y^2=28xyz\,.$$

**Решение.** Равенството е еквивалентно со

$$(x-yz)^2+(y-4xz)^2+(z-9xy)^2=0\,,$$

што е исполнето ако и само секој од горните собироци е 0, односно ако важи

$$\begin{cases} x=yz \\ y=4xz. \\ z=9xy \end{cases}$$

Очигледно е дека тројката $x=y=z=0$ го задоволува даденото равенство. Исто така, ако еден од броевите $x,y$ и $z$ е еднаков на 0, тогаш и останати два броја се еднакви на 0. Затоа да претпоставиме дека $x,y$ и $z$ се броеви различни од 0.

Да забележиме, од почетното равенство следува дека трите броја се или сите позитивни, или два се негативни и еден позитивен (левата страна е секогаш позитивна).

Ако ја помножиме првата равенка во последниот системот со $x$, втората со $y$, а третата со $z$, и ги изедначиме равенките, добиваме дека важи $x^2=\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9}=k$, за некој позитивен реален број $k$. Оттука, $x^2=k, y^2=4k$ и $z^2=9k.$ Квадрирајќи ја првата равенка во системот и заменувајќи ги изразите за $x,y$ и $z$, добиваме дека важи $k=36k^2$, односно, $k(36k-1)=0.$ Бидејќи $k$ е позитивен број, следува дека $k=\frac{1}{36}.$ Оттука добиваме дека $x^2=\frac{1}{36}, y^2=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ и $z^2=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, односно $x=\pm\frac{1}{6}, y=\pm\frac{1}{3}$ и $z=\pm\frac{1}{2}.$ Поради претходната забелешка, добиваме дека

$$(x,y,z)\in\{(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{6},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{2}),(-\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{2}),(-\tfrac{1}{6},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{2})\}.$$

Конечно, сите тројки од реални броеви што го задоволуваат даденото равенство се:

$$(x,y,z)\in\{(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{6},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{2}),(-\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{2}),(-\tfrac{1}{6},-\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{2}),(0,0,0)\}.$$

**2А.4Б.** Дадено е множество од 7 различни цели броеви. Докажи дека во множеството мора да постојат 2 цели броја чиј збир или разлика се деливи со 10.

**Решение.** Нека со $A$ го означиме множеството од седумте различни цели броеви. Да разгледаме шест групи броеви (0,0), (1,9), (2,8), (3,7), (4,6), (5,5). Бидејќи секој цел број е конгруентен со еден елемент од множеството {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} по модул 10, ако бројот од $A$ е конгруентен со $k$ или $10-k$, ќе го ставиме во групата $(k,10-k)$. Имаме 7 различни броеви, а 6 групи, па според принципот на Дирихле, постои една група $(k,10-k)$ во која има барем два броја, $x$ и $y$. Притоа за овие $x$ и $y$ важи:

1) Ако $x$ и $y$ се конгруентни со $k$ по модул 10, тогаш $x-y\equiv 0(\mathrm{mod}10)$.

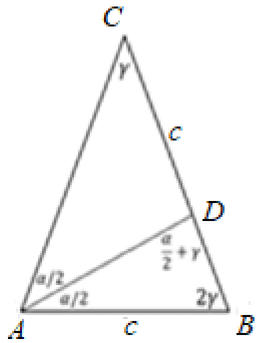
2) Ако $x$ и $y$ се конгруентни со $10-k$ по модул 10, тогаш $x-y\equiv 0(\mathrm{mod}10)$

3) Ако едниот е конгруентен со $k$, а другиот со $10-k$ по модул 10, тогаш $x+y\equiv 0(\mathrm{mod}10)$.

**3А.** Симетралата на $\measuredangle BAC$, во триаголникот $ABC$, ја сече страната $BC$ во точка $D$, така што $\overline{AB}=\overline{CD}$. Ако $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BCA$, одреди го $\measuredangle CAB$.

**Решение.** Нека

$$\alpha=\measuredangle CAB, \gamma=\measuredangle BCA \text{ и } \overline{AB}=\overline{CD}=c.$$




Тогаш $\measuredangle CAD=\measuredangle BAD=\frac{\alpha}{2}$, т.е. $\measuredangle BDA=\frac{\alpha}{2}+\gamma$. Со примена на синусната теорема за триаголниците $ADC$ и $ABD$, добиваме дека важи

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\overline{AD}}{c} \quad \text{и} \quad \frac{\sin 2\gamma}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)}=\frac{\overline{AD}}{c}.$$

Изедначувајќи ги двете горни равенства, добиваме

$$\sin\gamma\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)=\sin 2\gamma\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\gamma\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)=2\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\gamma+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\gamma=2\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\gamma=\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$\alpha=2\gamma.$$

Бидејќи од условот на задачата имаме $\beta = \measuredangle ABC = 2\gamma$, добиваме

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\gamma + 2\gamma + \gamma = 180°,$$

од каде следува дека $\gamma = \frac{180°}{5} = 36°$ и $\measuredangle CAB = \alpha = 2\gamma = 72°$.

**Забелешка.** Задачата може да се реши и со користење на сличност на триаголници.

**3Б.** Дадени се точките $A(2,4)$ и $B(6,0)$. Одреди ги координатите на точките од $x$-оската, чие растојание до правата $AB$ е двојно поголемо од растојанието до правата $x + y = 4$.

**Решение.** Равенката на правата што минува низ точките $A(2,4)$ и $B(6,0)$ е $y = \frac{4-0}{2-6}(x-6)$, односно $x + y - 6 = 0$. Точките што лежат на $x$- оската имаат координати од обликот $(x,0)$. Растојанието на точката $(x,0)$ до правата $AB$ е $d_1 = \frac{|x-6|}{\sqrt{2}}$, а растојанието до правата $x + y = 4$ е $d_2 = \frac{|x-4|}{\sqrt{2}}$. Според условот на задачата имаме дека $d_1 = 2d_2$, односно $\frac{|x-6|}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{|x-4|}{\sqrt{2}}$. Оттука добиваме дека важи $(x-6)^2 = 4(x-4)^2$, односно $3x^2 - 20x + 28 = 0$. Горната квадратна равенка има две реални решенија, $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{14}{3}$.

Според тоа, постојат две точки со бараните својства, $(2,0)$ и $(\frac{14}{3},0)$.

**4А.** Нека $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ е полином од $n$-ти ред со ненегативни коефициенти кој има $n$ реални нули. Докажи дека за сите $x \geq 0$ важи $P(x) \leq P(x+1)$.

**Решение.** Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се $n$ реални нули на полиномот $P(x)$. Тогаш полиномот може да се претстави како $P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i),\ a_n > 0.$ Бидејќи коефициентите на полиномот се ненегативни, следува дека за секое позитивно $x$ вредноста на полиномот ќе биде позитивна. Затоа за сите реални нули $x_i$, $i = \overline{1,n}$ мора да важи $x_i \leq 0.$ Сега, за $x \geq 0$ и за секој $x_i$ важи $0 \leq \frac{x - x_i}{x + 1 - x_i} \leq 1$, па добиваме дека $\frac{P(x)}{P(x+1)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{x + 1 - x_i} \leq 1$. Бидејќи $P(x)$ и $P(x+1)$ се ненегативни за $x \geq 0$, заклучуваме дека $P(x) \leq P(x+1)$. што и требаше да се докаже.