LI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

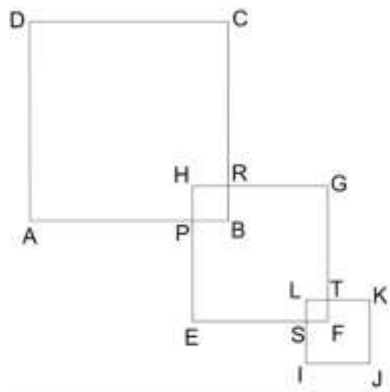
1. Четирицифрениот број n е содржател на бројот 5. Сите цифри на бројот n се различни меѓу себе и се различни од нула. Ако од записот на бројот n се избришат цифрите на стотките и десетките, се добива двоцифрен број делив со 9. Ако пак, од записот на бројот n се избришат цифрите на десетките и единиците, се добива двоцифрен број делив со 4. Определи го најголемиот четирицифрен број n за кој важат сите горенаведени својства.

Решение. Нека $n=\overline{abcd}$. Од условот дека бројот n е содржател на 5, следува дека неговата последна цифра мора да биде 0 или 5. Бидејќи сите цифри на n се различни од нула, заклучуваме дека $d=5$, па $n=\overline{abc5}$. Ако од записот на бројот $n=\overline{abc5}$ ги избришеме цифрата на стотките b и цифрата на десетките c, го добиваме двоцифрениот број $\overline{a5}$. Според условот, овој број е делив со 9, па следува дека 9 е делител на збирот на неговите цифри $a+5$. Ова е задоволено единствено за $a=4$, од каде следува $n=\overline{4bc5}$. Ако сега, од записот на бројот $n=\overline{4bc5}$ ги избришеме цифрата на десетките c и цифрата на единиците $d=5$, го добиваме двоцифрениот број $\overline{4b}$. Според условот, овој број е делив со 4, па затоа $b\in\{0,4,8\}$. Но, сите цифри на треба да се различни меѓу себе и различни од нула, па следува дека $b=8$. Според тоа, $n=\overline{48c5}$. Бидејќи цифрата c мора да биде различна од веќе употребените цифри 4, 8 и 5, и различна од нула, добиваме дека $c\in\{1,2,3,6,7,9\}$. Според тоа, најголемиот четирицифрен број n за кој важат сите наведени услови е $n=4895$.

2. Во ходник се наредени 20 светилки во редица и се означени со броевите од 1 до 20. На почетокот, сите светилки се исклучени. Секоја светилка има само едно копче за вклучување или исклучување, така што ако светилката е исклучена, со притискање на копчето, таа се вклучува, а ако светилка е вклучена, со притискање на копчето таа се исклучува. Низ ходникот поминуваат 20 луѓе, еден по еден. Секој човек го притиска копчето на светилките означени со броеви кои се деливи со неговиот реден број на влегување (така, човекот кој влегува петти во ходникот има реден број 5 и го притиска копчето на светилките означени со броевите 5, 10, 15 и 20). Образложи зошто откако ќе поминат сите 20 луѓе, светилката означена со број 20 ќе биде исклучена.

Решение. Според условот на задачата копчето на светилката означена со бројот 20 ќе го притиснат луѓето чиј реден број на влегување е делител на бројот 20. Делители на 20 се: 1, 2, 4, 5, 10 и 20, па копчето на светилката со број 20 ќе го притиснат луѓето со реден број 1, 2, 4, 5, 10 и 20, односно првиот, вториот, четвртиот, петтиот, десеттиот и дваесеттиот човек. Бидејќи на почетокот сите светилки се исклучени, првиот ќе ја вклучи, вториот ќе ја исклучи, четвртиот ќе ја вклучи, петтиот ќе ја исклучи, десеттиот ќе ја вклучи, а 20-тиот човек ќе ја исклучи светилката со број 20. Значи, на крај, откако низ ходникот ќе поминат сите 20 луѓе, светилката со број 20 ќе биде исклучена.

3. Страните на квадратите *ABCD, EFGH* и *IJKL*, дадени на цртежот, се однесуваат како $3:2:1$, соодветно. Должината на страната на квадратот *PBRH* е 5 *cm*, а должината на страната на квадратот *SFTL* е 3 *cm*. Ако периметарот на фигурата *APESIJKTGRCDA* е еднаков на 208 *cm*, пресметај ја нејзината плоштина.



Решение. Нека ддолжините на страните на квадратите *ABCD, EFGH* и *IJKL*, ги означиме со a, b и c, соодветно. Од условот на задачата следува $a:b:c=3:2:1$, па затоа постои $k>0$ таков што $a=3k, b=2k, c=k$. Периметарот на фигурата *APESIJKTGRCDA* е еднаков на разликата на збирот на периметрите на квадратите *ABCD, EFGH, IJKL* и збирот на периметрите на квадратите *PBRH, SFTL.* Според тоа, $4(a+b+c)-4(5+3)=208$, од каде последователно добиваме

$$4(3k+2k+k)-32=208,$$
$$24k=240,$$
$$k=10.$$

Значи, должините на страните на квадратите *ABCD, EFGH* и *IJKL* се $a=30\,cm, b=20\,cm$ и $c=10\,cm$.

Плоштината на фигурата *APESIJKTGRCDA* е еднаква на разликата на збирот на плоштините на квадратите *ABCD, EFGH, IJKL* и збирот на плоштините на квадратите *PBRH*, *SFTL*. Оттука за плоштината на фигурата *APESIJKTGRCDA* добиваме

$$\begin{aligned} P &= a^2+b^2+c^2-(5^2+3^2)=30^2+20^2+10^2-(5^2+3^2) \\ &=30^2+20^2+10^2-(5^2+3^2)=1366\,cm^2. \end{aligned}$$

4. Ана подготвувала лимонада мешајќи лимонов концентрат и вода. Притоа, водата зафаќала 10% од вкупниот волумен на нејзината мешавина. Бидејќи лимонадата била прекисела, таа одлучила да ја разреди и додала уште 200 *ml* вода. Во новата разредена мешавина, водата зафаќа 50% од вкупниот волумен. Колку милилитри изнесувал волуменот на лимонадата пред Ана да ја разреди?

Решение. Нека волуменот (изразен во милилитри) на првичната мешавина е V. Од оваа мешавина, 10% биле вода, значи имало $0,1V$ *ml* вода, а $0,9V$ *ml* лимонов концентрат. Потоа, Ана додала 200 *ml* вода, па новата разредена мешавина има волумен $V+200$ *ml*. Притоа водата зафаќа волумен $0,1V+200$ *ml*, а од условот на задачата тоа е 50% од вкупниот волумен на новата разредена мешавина, па имаме

$$0,1V+200=0,5(V+200).$$

Од последната равенка добиваме $V=250$. Првичната мешавина, односно неразредената лимонада зафаќала волумен од 250 *ml*.

VII одделение

1. Туристичка агенција нуди патување со следните попусти:

- 10% поевтино, ако се уплати од 7 до 13 дена пред денот на тргнување,
- 25% поевтино, ако се уплати од 14 до 29 дена пред денот на тргнување и
- 40% поевтино, ако се уплати 30 и повеќе дена пред денот на тргнување.

Патник уплатил 21000 денари за тоа патување. Ако уплатил еден ден подоцна, патувањето ќе го чинело 4200 денари повеќе. Колку дена пред денот на тргнување, патникот ја направил уплатата?

Решение. Нека со x ја означиме цената на патувањето без попуст. Според условите на задачата, можеме да заклучиме дека патникот искористил некој од попустите. Да ги разгледаме поединечно трите случаи.

Ако патникот уплатил 7 дена пред денот на тргнување, тогаш важи $0,9x = 21000$, т.е. за цената без попуст би имале $x = \frac{7000}{3} = 2333,(3)$. Но, спред условот на задачата, ако уплатил ден покасно, односно шестиот ден пред тргнувањето, ќе требало да уплати $21000 + 4200 = 25200$ и тоа треба да е цената без попуст. Но таа цена е различна од цената без попуст која ја добиваме под оваа претпоставка, што значи дека претпоставката е грешна, односно не е можно патникот да уплатил 7 дена пред денот на тргнување.

Ако патникот уплатил 14 дена пред денот на тргнување, тогаш важи $0,75x = 21000$, т.е. за цената без попуст би имале $x = 28000$. Тогаш, според условот на задачата, ако уплатил ден покасно, односно тринаесеттиот ден пред тргнувањето, ќе требало да уплати $0,9 \cdot 28000 = 25200$ денари, што е точно за 4200 денари повеќе од 21000, колку што го чинело патувањето. Заклучуваме дека патникот го уплатил патувањето 14 дена пред денот на тргнување, што го исклучува третиот случај.

2. Определи го бројот на природни броеви помали или еднакви на 2026 кои не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15?

Решение. За да преброиме колку од природните броеви кои се помали или еднакви на 2026, не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9, и 15, прво ќе ги преброиме сите природни броеви помали или еднакви на 2026 што се деливи со тие броеви.

Броеви деливи со 6 има 337, бидејќи 2026 : 6 = 337 и остаток 4.

Броеви деливи со 9 има 225, бидејќи 2026 : 9 = 225 и остаток 1.

Броеви деливи со 15 има 135, бидејќи 2026 : 15 = 135 и остаток 1.
Ако ги собереме сите овие броеви, некои броеви сме ги изброиле повеќе-пати.
Броевите деливи и со 6 и со 9, односно со НЗС(6, 9) = 18, сме ги броеле двапати. Исто така, броевите деливи со НЗС(6, 15) = 30 сме ги броеле двапати, а двапати сме ги броеле и броевите деливи со НЗС(9, 15) = 45.
Броевите кои истовремено се деливи со 6, 9 и 15, т.е. со НЗС(6, 9, 15) = 90 сме ги броеле трипати.
Броеви деливи со 18 има 112, бидејќи 2026 : 18 = 112 и остаток 10.
Броеви деливи со 30 има 67, бидејќи 2026 : 30 = 67 и остаток 16.
Броеви деливи со 45 има 45, бидејќи 2026 : 45 = 45 и остаток 1.
Броеви деливи со 90 има 22, бидејќи 2026 : 90 = 22 и остаток 46.
Добиваме дека природни броеви помали или еднакви на 2026 што се деливи со 6, 9 или 15 има

$$337+225+135-(112+67+45)+22=697-224+22=495.$$

Тогаш, бројот на бараните броеви е: $2026-495=1531$.

3. Определи ги сите парови природни броеви m и n за кои важи равенството $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{17}$.

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно на равенствата

$$\frac{n-m}{mn}=\frac{1}{17},$$

$$17(n-m)=mn,$$

$$17n-17m-mn=0,$$

$$17(n+17)-m(n+17)=17^2,$$

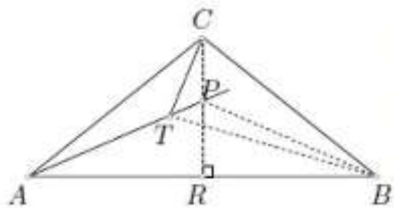
$$(n+17)(17-m)=17^2.$$

Единствени делители на бројот 17^2 се 1, 17 и 17^2. Но, n природен број, што значи $n+17>17$, па од последната равенка следува

$$n+17=289, 17-m=1,$$

од каде добиваме $n=289-17=272, m=17-1=16$.

4. Даден е рамнокрак триаголник $ABC\ (\overline{AC}=\overline{BC})$ со агол при врвот од 100°. Нека T е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што $\measuredangle TAC=10^\circ$, $\measuredangle ACT=20^\circ$. Определи ја мерката на $\measuredangle CTB$.



Решение. Триаголникот ABC е рамнокрак и $\measuredangle ACB = 100^\circ$, па затоа

$$\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ .$$

Нека точката R е подножјето на висината спуштена од темето C кон основата AB и нека точката P е пресечната точка на полуправата AT и висината CR. Триаголникот ABC е рамнокрак, па затоа CR е висина и симетрала на $\measuredangle ACB$, што значи $\measuredangle ACR = \measuredangle BCR = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = 50^\circ$. Според тоа,

$$\measuredangle TCR = \measuredangle ACR - \measuredangle ACT = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ ,$$

и како $\measuredangle PTC = \measuredangle ACT + \measuredangle CAT = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$ (надворешен агол за триаголникот ACT), добиваме дека триаголникот TPC е рамнокрак $(\overline{PT} = \overline{PC})$ и $\measuredangle TPC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$. Понатаму, триаголникот ABP е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle APB = 2\measuredangle APR = 2(180^\circ - \measuredangle APC) = 2(180^\circ - 120^\circ) = 120^\circ .$$

Сега,

$$\measuredangle BPC = 360^\circ - \measuredangle APC - \measuredangle APB = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ = \measuredangle BPT$$

и како $\overline{BP} = \overline{BP}, \overline{PT} = \overline{PC}$ од признакот САС следува дека $\triangle PTB \cong \triangle PCB$.

Според тоа, $\measuredangle PTB = \measuredangle PCB = 50^\circ$, па затоа

$$\measuredangle CTB = \measuredangle CPT + \measuredangle PTB = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ .$$

VIII одделение

1. Пресметај $x^{2026}+2026y$, ако за реалните броеви x и y важи

$$x^2+4y^2-2x+20y+26=0.$$

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно на равенствата

$$x^2-2x+1+4y^2+20y+25=0,$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+(2y)^2+2\cdot 2y\cdot 5+5^2=0,$$
$$(x-1)^2+(2y+5)^2=0.$$

Сега, ако искористиме дека збир на квадрати на два реални броја е еднаков на 0 ако и само ако броевите се еднакви на нула, добиваме $x-1=0$ и $2y+5=0$, односно $x=1$ и $y=-\frac{5}{2}$. Конечно,

$$x^{2026}+2026y=1^{2026}+2026\cdot(-\tfrac{5}{2})=1-1013\cdot 5=-5064.$$

2. Нека p, q и r се прости броеви и нивниот производ е еднаков на природниот број n. Определи ги сите можни вредности на n, за кои важи равенството $(p+1)q(r+1)=n+138$.

Решение. Бидејќи $n=pqr$, последователно добиваме

$$(p+1)q(r+1)=pqr+138,$$
$$pqr+pq+qr+q=paqr+138,$$
$$q(p+r+1)=138,$$
$$q(p+q+1)=2\cdot 3\cdot 23.$$

Сега, бидејќи q е прост број, можни се следниве случаи:

1) $q=2,\ p+r+1=69$, од каде следува $p+r=68$. Збирот на два прости броја е парен број, па затоа p и r се непарни прости броеви, кои се помали од 68. Непарни прости броеви кои се помали од 68 се: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 и 67. Притоа, равенството $p+r=68$ е исполчнето за паровите броеви: (7, 61), (61,7), (31, 37) и (37, 31). Сега, бидејќи $n=pqr$ ги добиваме решенијата $n=7\cdot 2\cdot 61=61\cdot 2\cdot 7=854$ и $n=31\cdot 2\cdot 37=37\cdot 2\cdot 31=2294$.

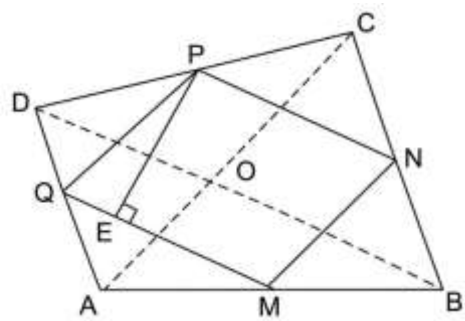
2) $q=3,\ p+r+1=46$, од каде следува $p+r=45$. Збирот на два прости броја е непарен број, па затоа еден од броевите мора да е 2. Притоа добиваме дека другиот број е 43 и затоа $n=2\cdot 3\cdot 43=43\cdot 3\cdot 2=258$.

3) $q = 23,\ p + r + 1 = 6$, од каде следува $p + r = 5$. Збирот на два прости броја е непарен број, па затоа еден од броевите мора да е 2. Притоа добиваме дека другиот број е 3 и затоа $n = 2 \cdot 23 \cdot 3 = 3 \cdot 23 \cdot 2 = 138$.

3. Даден е четириаголникот $ABCD$ со дијагонали $\overline{AC} = 18\,cm$ и $\overline{BD} = 24\,cm$ и аголот меѓу нив е 30°. Нека M, N, P и Q се средините на страните AB, BC, CD и DA, соодветно.

а) Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

б) Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.



Решение. а) Бидејќи M, N, P и Q се средините на страните AB, BC, CD и DA, соодветно заклучуваме дека MN е средна линија на триаголникот ABC, па затоа $MN \parallel AC$ и $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Понатаму, PQ е средна линија на триаголникот ACD, па затоа $PQ \parallel AC$ и $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Според тоа, спротивните страни MN и PQ на четриаголникот $MNPQ$ се паралелни и еднакви, па затоа тој е паралелограм.

б) Од решението под а) следува $\overline{MN} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 9\,cm$. Аналогно се добиваме дека $\overline{PN} = \overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 12\,cm$. Панатаму, $PQ \parallel AC$ и $QM \parallel DB$, па затоа $\measuredangle PQM = \measuredangle COM = 30^\circ$. Сега, ако E е подножјето на висината повлечена од точката P кон страната MQ, добиваме дека $\measuredangle PEQ = 90^\circ$, па затоа $\measuredangle QPE = 60^\circ$.

Значи, триаголникот PEQ е половина од рамностран триаголник со страна $\overline{PQ} = 9\,cm$ и висина QE. Затоа, $\overline{PE} = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{9}{2}\,cm$. Конечно, за плоштината на четириаголникот $MNPQ$ е $P = \overline{MQ} \cdot \overline{PE} = 12 \cdot \frac{9}{2} = 54\,cm^2$.

4. Аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија е за 20 поголема од аритметичката средина на годините на Петар и неговите сестри. Колку сестри има Петар, ако аритметичката средина на годините на Петар, неговите сестри, Јаков, Калина и Евгенија е за 10 помала од аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија?

Решение. Аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија да ја означиме со x. Тогаш збирот на нивните години е $3x$. Нека Петар има $m-1$ сестри, и нека аритметичката средина на годините на Петар и неговите сестри е y. Тогаш збирот на нивните години е my. Од условот на задачата имаме $x=y+20$ и $x=\frac{3x+my}{3+m}+10$. Со замена за x од првата во втората равенка ја добиваме равенката $y+20=\frac{3y+60+my}{3+m}+10$. Оттука следува $(y+10)(3+m)=3y+60+my$, од каде добиваме $m=3$. Значи, Петар има 3 сестри.

IX одделение

1. Нека $a_1, a_2, ..., a_{2026}$ се природни броеви и нека

$$x = (a_1 + a_2 + ... + a_{2025})(a_2 + a_3 + ... + a_{2026}),$$
$$y = (a_1 + a_2 + ... + a_{2026})(a_2 + a_3 + ... + a_{2025}).$$

Што е точно $x < y, x = y$ или $x > y$?

Решение. Нека $A = a_1 + a_2 + ... + a_{2026}$. Тогаш

$$x = (A - a_{2026})(A - a_1) \text{ и } y = A(A - a_1 - a_{2026}),$$

па затоа

$$\begin{aligned} x - y &= (A - a_{2026})(A - a_1) - A(A - a_1 - a_{2026}) \\ &= A^2 - A(a_1 + a_{2026}) + a_1 a_{2026} - A^2 + A(a_1 + a_{2026}) \\ &= a_1 a_{2026} > 0, \end{aligned}$$

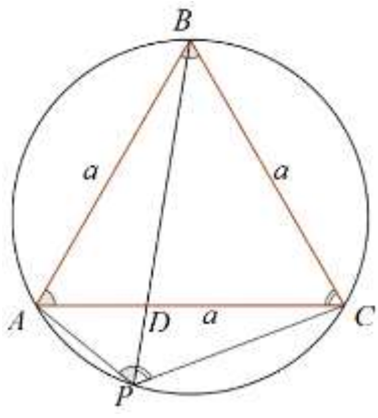
бидејќи $a_1, a_{2026} \in \mathbb{N}$. Според тоа, $x > y$.

Забелешка. На потполно ист начин се докажува дека $x > y$ и ако означиме $A = a_2 + a_3 + ... + a_{2026}$ или пак ако означиме $A = a_1 + a_2 + ... + a_{2025}$.

2. Даден е рамностран триаголник *ABC* со страна *a*. Нека *P* е произволна точка од помалиот кружен лак *AC* од опишаната кружница околу триаголникот *ABC*. Докажи дека $\overline{AP} + \overline{CP} = \overline{BP}$.

Решение. Нека $D = AC \cap BP$. Тогаш

$$\measuredangle APB = \measuredangle ACB = \measuredangle CAB = 60^\circ.$$



Бидејќи

$$\measuredangle APB = \measuredangle DAB \text{ и } \measuredangle ABP = \measuredangle ABD$$

триаголниците APB и DAB се слични, па затоа $\overline{AP} : \overline{AD} = \overline{BP} : \overline{BA}$, т.е.

$$\overline{AP} = \overline{AD} \cdot \frac{\overline{BP}}{a}.$$

На потполно ист начин наоѓаме дека

$$\overline{CP} = \overline{DC} \cdot \frac{\overline{BP}}{a},$$

Сега, од последните две равенства следува

$$\overline{AP} + \overline{CP} = \overline{AD} \cdot \frac{\overline{BP}}{a} + \overline{DC} \cdot \frac{\overline{BP}}{a} = (\overline{AD} + \overline{DC}) \cdot \frac{\overline{BP}}{a} = a \cdot \frac{\overline{BP}}{a} = \overline{BP}.$$

3. Нека n е природен број. Претстави го бројот $m=6^{8n}+6^{4n+1}+1$ како збир на квадрати на три различни природни броеви.

Решение. *Прв начин*. Имаме,

$$\begin{aligned} m=6^{8n}+6^{4n+1}+1&=(6^{4n})^2+6\cdot 6^{4n}+1\\ &=(6^{4n})^2+2\cdot 6^{4n}+1+4\cdot 6^{4n}\\ &=(6^{4n}+1)^2+4\cdot 6^{4n}\\ &=(6^{4n}-2\cdot 6^{2n}+1+2\cdot 6^{2n})^2+4\cdot 6^{4n}\\ &=((6^{2n}-1)^2+2\cdot 6^{2n})^2+4\cdot 6^{4n}\\ &=(6^{2n}-1)^2)^2+4(6^{2n}-1)^2 6^{2n}+(2\cdot 6^{2n})^2+4\cdot 6^{4n}\\ &=((6^{2n}-1)^2)^2+4(6^{4n}-2\cdot 6^{2n}+1)6^{2n}+4\cdot 6^{4n}+4\cdot 6^{4n}\\ &=((6^{2n}-1)^2)^2+4\cdot 6^{6n}-8\cdot 6^{4n}+4\cdot 6^{2n}+8\cdot 6^{4n}\\ &=((6^{2n}-1)^2)^2+(2\cdot 6^{3n})^2+(2\cdot 6^{n})^2. \end{aligned}$$

Јасно, броевите $(6^{2n}-1)^2,\ 2\cdot 6^{3n},\ 2\cdot 6^{n}$ се различни меѓу себе.

Втор начин. Знаеме дека

$$(a\pm 1)^4=a^4\pm 4a^3+6a^2\pm 4a+1,$$

па ако земеме $a=6^{2n}$, добиваме

$$(6^{2n}\pm 1)^4=(6^{2n})^4\pm 4\cdot(6^{2n})^3+6\cdot(6^{2n})^2\pm 4\cdot 6^{2n}+1,$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned} m=6^{8n}+6^{4n+1}+1&=(6^{2n})^4+6\cdot(6^{2n})^2+1\\ &=(6^{2n}\pm 1)^4\mp 4\cdot(6^{2n})^3\mp 4\cdot 6^{2n}. \end{aligned}$$

Сега, бидејќи се бара m да се запише како збир на квадрати на три различни природни броеви, добиваме

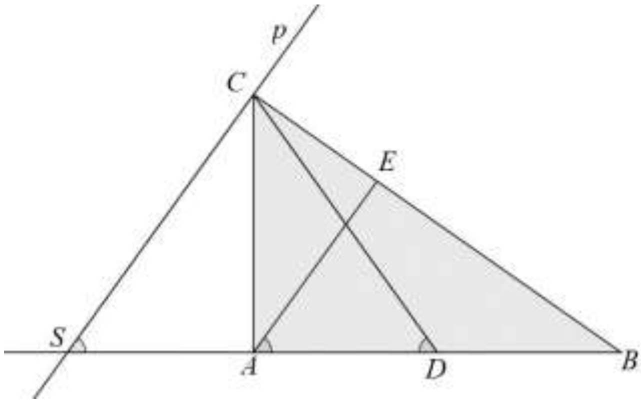
$$m=(6^{2n}-1)^4+4\cdot(6^{2n})^3+4\cdot 6^{2n}=((6^{2n}-1)^2)^2+(4\cdot 6^{3n})^2+(2\cdot 6^{n})^2.$$

Јасно, броевите $(6^{2n}-1)^2,\ 2\cdot 6^{3n},\ 2\cdot 6^{n}$ се различни меѓу себе.

4. Нека ABC е триаголник, точката D е средина на страната AB и E е точка на страната BC таква што $\overline{BE}=2\overline{EC}$. Ако $\measuredangle CDA=\measuredangle BAE$, тогаш $\measuredangle BAC=90^\circ$. Докажи!

Решение. Нека p е права низ точката C паралелна со правата AE и нека S е пресечна точка на p со правата BA. Имаме дека

$$\measuredangle ASC=\measuredangle BAE=\measuredangle CDA.$$



Значи, триаголникот DCS е рамнокрак и $\overline{CD} = \overline{CS}$. Од триаголникот BCS, според Талесовата теорема за пропорционални отсечки добиваме

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AS}}.$$

Сега, од условот на задачата следува $2 = \frac{2 \cdot \overline{AD}}{\overline{AS}}$, од каде наоѓаме $\overline{AD} = \overline{AS}$. Значи, AC е тежишна лин ија во рамнокракиот триаголник DCS, па затоа $\measuredangle BAC = 90^\circ$.