Републички натпревар 2023

I година

1. Пресметај го остатокот кој се добива при делење на $2^{4n+2}+2^4$ со $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ за секој природен број $n\geq 2$.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}2^{4n+2}+2^4 &= (2^{2n+1})^2+16=(2^{2n+1})^2+2\cdot 2^{2n+1}+1-2\cdot 2^{2n+1}+15\\ &=(2^{2n+1}+1)^2-2^{2n+2}+15=(2^{2n+1}+1)^2-(2^{n+1})^2+15\\ &=(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)+15.\end{aligned}$$

Сега, бидејќи за $n\geq 2$ важи $2^{2n+1}+2^{n+1}+1\geq 2^5+2^3+1=41$ следува дека при делење на $2^{4n+2}+2^4$ со $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ добиваме количник $2^{2n+1}-2^{n+1}+1$ и остаток 15.

2. Определи ги сите природни броеви n така што секоја од цифрите 0, 1, 2, ..., 9, се појавува точно еднаш во записите на броевите n^3 или n^4, но не и во двата броја истовремено.

Пример. Ако треба да се искористат само цифрите 1, 2, 7 и 8, тогаш решение е бројот 3. Секоја од цифрите 1, 2, 7 и 8 се појавува точно еднаш во $3^3=27$ или во $3^4=81$, но не и во двата броја истовремено.

Решение. Ако n е едноцифрен број, тогаш $n^3\leq 9^3=729$ и $n^4\leq 9^4=6561$, односно потребни се најмногу 7 цифри за да се напишат броевите n^3 и n^4. Ако n има повеќе од две цифри, тогаш $n^3\geq 100^3=10^6$ и $n^4\geq 100^4=10^8$, па за да се запишат броевите n^3 и n^4 потребни се најмалку 16 цифри. Значи, n е двоцифрен број, па n^3 е најмалку четирицифрен, а n^4 е најмалку петцифрен. Може да заклучиме дека мора n^3 да е четирицифрен, а n^4 да е шестцифрен број (не може двата броја да се петцифрени броеви кога n е двоцифрен број). Тогаш $1000\leq n^3\leq 9999$, од каде $10\leq n\leq 21$, а од $100000\leq n^4\leq 999999$, имаме дека $18\leq n\leq 31$. Тоа значи дека $n\in\{18,19,20,21\}$. Бидејќи секој од броевите 20^3 и 20^4 завршуваат на 0, а секој од 21^3 и 21^4 завршуваат 1, во овие случаи имаме повторување на цифрите во записите на броевите, па броевите 20 и 21 не се решенија на задачата. Во записот на бројот $19^4=130321$ има повторување на цифри, па и бројот 19 не е решение на задачата. Бидејќи $18^3=5832$ и $18^4=104976$ единствениот број кој го задоволува бараното својство е бројот 18.

3. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{2}{2022}} < \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2022} < \sqrt{\frac{3}{2023}}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2} > \frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot\frac{7^2-1}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2-1}{2022^2}$$
$$= \frac{2\cdot4}{4^2}\cdot\frac{4\cdot6}{6^2}\cdot\frac{6\cdot8}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2020\cdot2022}{2022^2} = \frac{2}{2022}$$

и

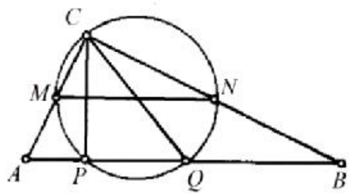
$$\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2} < \frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\frac{7^2}{8^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2-1}$$
$$= \frac{3^2}{3\cdot5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot7}\cdot\frac{7^2}{7\cdot9}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2021\cdot2023} = \frac{3}{2023}.$$

Конечно, со коренување на горните неравенства се добива бараното неравенство.

4. Во правоаголен триаголник во кој катетите се однесуваат како $5:12$, кружницата со дијаметар MN каде M и N се средините на катетите, ја сече хипотенузата во точките P и Q. Определи го односот во кој точките P и Q ја делат хипотенузата.

Решение. Нека за катетите на триаголникот ABC важи $\overline{AC}:\overline{BC}=5:12$, од каде $\overline{AC}=5k$ и $\overline{BC}=12k$, за некој $k>0$ (цртеж десно) Тогаш

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{25k^2+144k^2}=13k.$$



Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ABC, имаме $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{13}{2}k$. Кружницата со дијаметар MN минува низ темето C, затоа што аголот кај темето C е прав агол. Точката која е симетрична на точката C во однос на дијаметарот MN исто така е точка од кружницата со дијаметар MN. Нека е тоа точката P'. Од $CP'\perp MN$ и $MN \parallel AB$ следува дека $CP'\perp AB$. Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ABC, заклучуваме дека точката P' припаѓа и на страната AB. Оттука следува дека $P'\equiv P$ и CP е висина на триаголникот ABC повлечена кон хипотенузата. За плоштината на триаголникот имаме $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CP}}{2}$, од каде наоѓаме $\frac{5k\cdot12k}{2}=\frac{13k\cdot\overline{CP}}{2}$, односно $\overline{CP}=\frac{60}{13}k$. Тогаш, од правоаголниот триаголник APC имаме $\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{25k^2-\frac{3600}{169}k^2}=\frac{25}{13}k$.

За втората пресечна точка Q од $\measuredangle QPC=90^\circ$, следува дека CQ е дијаметар на кружницата, па затоа $\overline{CQ}=\frac{13}{2}k$. Сега, од правоаголниот триаголник QPC имаме

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{\frac{169}{4}k^2-\frac{3600}{169}k^2}=\frac{119}{26}k\ .$$

Тогаш,

$$\overline{QB}=\overline{AB}-\overline{AP}-\overline{PQ}=13k-\frac{25}{13}k-\frac{119}{26}k=\frac{13}{2}k\ .$$

Конечно, $\overline{AP}:\overline{PQ}:\overline{QB}=\frac{25}{13}k:\frac{119}{26}k:\frac{13}{2}k=50:119:169$.

II година

1. Нека парот (1,1) е решение на равенката $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, каде што a и b се ненулти реални параметри. Определи ги a и b ако $a^2+b^2=\frac{45}{4}$.

Решение. Од $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ следува $a+b=ab$. Значи,

$$\frac{45}{4}=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(ab)^2-2ab\ .$$

Решенијата на квадратната равенка $(ab)^2-2ab-\frac{45}{4}=0$ се $1\pm\frac{7}{2}$, па затоа $ab=\frac{9}{2}$ или $ab=-\frac{5}{2}$. Според тоа, $a+b=ab=\frac{9}{2}$ или $a+b=ab=-\frac{5}{2}$. Затоа, a и b се решенија на квадратните равенки $z^2-\frac{9}{2}z+\frac{9}{2}=0$ или $z^2+\frac{5}{2}z-\frac{5}{2}=0$. Решенијата на првата равенка се $z_{1,2}=\frac{9\pm3}{4}$, а на втората равенка се $z_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}$.

Конечно, $(a,b)=(3,\frac{3}{2}),(\frac{3}{2},3),(\frac{-5+\sqrt{65}}{4},\frac{-5-\sqrt{65}}{4}),(\frac{-5-\sqrt{65}}{4},\frac{-5+\sqrt{65}}{4})$.

2. Нека z е комплексен број за кој важи $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}$ и $\operatorname{Im}z\neq0$. Докажи дека $|z|=1$

Решение. Имаме, $\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}=\frac{1-z+z^2+2z}{1-z+z^2}=1+2\frac{z}{1-z+z^2}$, па затоа

$$\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \frac{z}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \frac{1-z+z^2}{z}\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{z}-1+z\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{z}+z\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{z}+z=\frac{1}{\overline{z}}+\overline{z}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}=\overline{z}-z$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\overline{z}-z}{|z|^2}=\overline{z}-z\ \Leftrightarrow\ \overline{z}-z=|z|^2(\overline{z}-z)$$

$$\Leftrightarrow\ (|z|^2-1)(\overline{z}-z)=0.$$

Но, според условот на задачата $\operatorname{Im}z\neq0$, што значи дека $\overline{z}-z\neq0$, па од последното равенство следува $|z|^2-1=0$, т.е. $|z|=1$.

3. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x^2 = y^3 \\ x + y + \sqrt[5]{xy} = 155. \end{cases}$$

Решение. Јасно $y > 0$. Воведуваме смена $y = z^2$, од каде добиваме $x = \pm z^3$. За $x = z^3$, со замена во втората равенка ја добиваме равенката $z^3 + z^2 + z = 155$, која последователно е еквивалентна на равенките:

$$z^3 - 125 + z^2 - 25 + z - 5 = 0,$$
$$(z-5)(z^2 + 5z + 25) + (z-5)(z+5) + (z-5) = 0,$$
$$(z-5)(z^2 + 6z + 31) = 0,$$
$$(z-5)((z+3)^2 + 22) = 0.$$

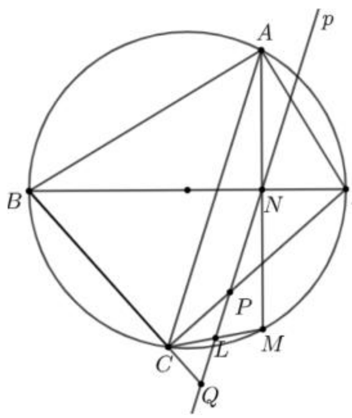
Сега, од $(z+3)^2 + 22 \geq 22 > 0$ следува $z - 5 = 0$, т.е. $z = 5$. Конечно, едно решение на системот е $x = 5^3 = 125,\ y = 5^2 = 25$. За $x = -z^3$, со замена во втората равенка ја добиваме равенката $-z^3 + z^2 - z = 155$, која последователно е еквивалентна на равенките:

$$z^3 - z^2 + z + 155 = 0,$$
$$z^3 + 125 - z^2 + 25 + z + 5 = 0,$$
$$(z+5)(z^2 - 5z + 25) - (z-5)(z+5) + (z+5) = 0,$$
$$(z+5)(z^2 - 6z + 31) = 0,$$
$$(z+5)((z-3)^2 + 22) = 0.$$

Сега, од $(z-3)^2 + 22 \geq 22 > 0$ следува $z + 5 = 0$, т.е. $z = -5$, при што добиваме $x = -(-5)^3 = 125$, $y = (-5)^2 = 25$.

Конечно, единствено реално решение на дадениот систем е $x = 125$, $y = 25$.

4. Четириаголникот $ABCD$, чии дијагонали не се заемно нормални, е впипан во кружница со дијаметар BD. Нека M е симетричната точка на точката A во однос на правата BD и $\{N\} = AM \cap BD$. Нека p е правата низ N, паралелна со правата AC, и нека p ги сече правите CD и BC во точките P и Q, соодветно. Докажи дека точките P, C, Q и M се темиња на правоаголник.



Решение. Нека p ја сече CM во точка L. Од $NL \parallel AC$ и N е средина на AM, следува дека NL е средна линија во триаголникот ACM, па затоа L е средина на CM. Од тоа што четириаголникот е тетивен, осната симетрија и теоремата за аглите на трансферзалата следува

$$\measuredangle PCL = \measuredangle DCM = \measuredangle DBM = \measuredangle DBA = \measuredangle DCA = \measuredangle PCA = \measuredangle CPL,$$

што значи дека триаголникот CLP е рамнокрак и важи $\overline{CL} = \overline{LP}$. Од истите причини добиваме

$$\measuredangle LCQ = \measuredangle MCQ = 90^\circ - \measuredangle MCD = 90^\circ - \measuredangle MAD = \measuredangle BDA = \measuredangle BCA = \measuredangle CQL,$$

па затоа и триаголникот CQL е рамнокрак и важи $\overline{CL} = \overline{LQ}$. Понатаму, од $\overline{CL} = \overline{LP}$ и $\overline{CL} = \overline{LQ}$ следува $\overline{LP} = \overline{LQ}$. Според тоа, дијагоналите на четириаголникот $PCQM$ се преполовуваат, што значи дека тој е паралелограм и како $\measuredangle PCQ = 90^\circ$, заклучуваме дека $PCQM$ е правоаголник.

III година

1. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} \log_{y-x^3}(x^3+y) = 2^{y-x^3}, \\ \frac{1}{9}\log_{x^3+y}(y-x^3) = 6^{x^3-y}. \end{cases}$$

Решение. Од дефиницијата на логаритамската функција следува $y - x^3 > 0$, $y - x^3 \neq 1$, $x^3 + y > 0$ и $x^3 + y \neq 1$. Понатаму, ако искористиме дека $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, добиваме дадениот систем е еквивалентен на системот:

$$\begin{cases} 2^{y-x^3}\log_{y+x^3}(y-x^3) = 1, \\ 2^{y-x^3}3^{y-x^3}\log_{x^3+y}(y-x^3) = 9. \end{cases}$$

Ако од првата равенка замениме во втората, последователно добиваме:

$$\begin{cases} 2^{y-x^3}\log_{y+x^3}(y-x^3) = 1, \\ 2^{y-x^3}3^{y-x^3}\log_{x^3+y}(y-x^3) = 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{y-x^3}\log_{y+x^3}(y-x^3) = 1, \\ 3^{y-x^3} = 3^2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{y-x^3}\log_{y+x^3}(y-x^3) = 1, \\ y - x^3 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2\log_{y+x^3} 2 = 1, \\ y - x^3 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{y+x^3} 2^4 = 1, \\ y - x^3 = 2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + x^3 = 16, \\ y - x^3 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 18, \\ 2x^3 = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9, \\ x^3 = 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9, \\ x = \sqrt[3]{7}. \end{cases}$$

Конечно, бидејќи за најдените вредности на x и y се исполенти условите

$$y-x^3>0\,,\ y-x^3\neq 1\,,\ x^3+y>0 \text{ и } x^3+y\neq 1$$

системот има единствено решение $x=\sqrt[3]{7}$, $y=9$.

2. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^{5-x}=(6-x)^{1-x}\,.$$

Решение. Лесно се проверува дека за $x<7$, решенија на дадената равенка се $x=1$ и $x=5$. Нека $x\geq 7$. Ако x е парен број, тогаш $(6-x)^{1-x}<0$ и $x^{5-x}>0$, што не е можно. Значи, мора да е x непарен број. Нека $x=2k+1, k\geq 3$. Тогаш дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$(2k+1)^{4-2k}=(5-2k)^{-2k},$$
$$(2k+1)^{2k-4}=(5-2k)^{2k},$$
$$(2k+1)^{2k-4}=(5-2k)^{2k-4}(5-2k)^4,$$
$$(\tfrac{2k+1}{5-2k})^{2k-4}=(2k-5)^4,$$
$$(1+\tfrac{6}{2k-5})^{2k-4}=(2k-5)^4.$$

Според тоа, $2k-5\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$. Но, $2k-5$ е непарен број, па затоа мара $2k-5\in\{\pm1,\pm3\}$. Ако $2k-5\in\{-1,-3\}$, тогаш $2k+1<7$. Ако $2k-5\in\{1,3\}$, тогаш $2k+1\in\{7,9\}$. Со непосредна проверка добиваме дека во овој случај само $x=2k+1=9$ е решение на почетната равенка.

Конечно, решенија на дадената равенка се: $x=1, x=5$ и $x=9$.

3. Нека x,y,z се реални броеви.

а) Докажи дека, ако $x+y+z=0$, тогаш

$$|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|\geq 1\,.$$

б) Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|+|\cos(x-y)|+|\cos(y-z)|+|\cos(z-x)|\,.$$

Решение. а) Користејќи ги адиционите формули, неравенството на триаголник, својствата на апсолутната вредност и неравенствата $|\sin a|\leq 1, |\cos a|\leq 1$ добиваме

$$\begin{aligned}1&=|\cos(x+y+z)|=|\cos x\cos(y+z)-\sin x\sin(y+z)|\\&\leq|\cos x|\cdot|\cos(y+z)|+|\sin x|\cdot|\sin(y+z)|\\&\leq|\cos x|+|\sin(y+z)|=|\cos x|+|\sin y\cos z+\cos y\sin z|\\&\leq|\cos x|+|\sin y|\cdot|\cos z|+|\cos y|\cdot|\sin z|\\&\leq|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|\,.\end{aligned}$$

б) Од неравенството под а), применето на тројките

$$(-x,y,x-y),\ (-y,z,y-z),\ (-z,x,z-x) \text{ и } (x-y,y-z,z-x),$$

и парноста на функцијата $\cos t$, добиваме

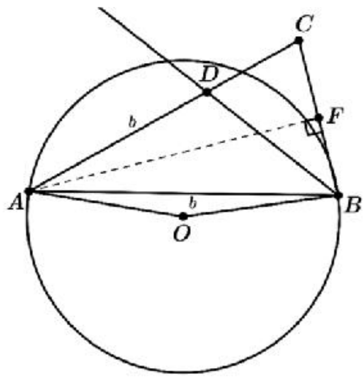
$$1 \le |\cos x| + |\cos y| + |\cos(x-y)|,$$
$$1 \le |\cos(y-z)| + |\cos y| + |\cos z|,$$
$$1 \le |\cos x| + |\cos(z-x)| + |\cos z|,$$
$$1 \le |\cos(x-y)| + |\cos(y-z)| + |\cos(z-x)|.$$

Ако ги собереме последните четири равенства, добиваме

$$4 \le 2(|\cos x| + |\cos y| + |\cos z| + |\cos(x-y)| + |\cos(y-z)| + |\cos(z-x)|),$$
$$2 \le |\cos x| + |\cos y| + |\cos z| + |\cos(x-y)| + |\cos(y-z)| + |\cos(z-x)|.$$

Јасно, најмалата вредност на изразот е 2 и истата се достигнува за тројката $(0,\frac{®}{2},\frac{3®}{2})$.

4. Нека A и B се различни точки накружницата k, такви што AB не е дијаметар на k. Нека C е точка различна од B таква што $\overline{AB}=\overline{AC}$ и BC е тангента на k. Ако симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече отсечката AC во точката D и D е во внатрешноста на кружницата k, тогаш $\measuredangle ABC > 72^\circ$. Докажи!



Решение. Нека O е центарот на кружницата k, $\overline{AB}=\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$, $\measuredangle ABC =$. Од правоаголниот триаголник BFA имаме $\cos\ = \frac{a}{2b}$. Понатаму, BC е тангента па затоа $\measuredangle ABO = 90^\circ -$, а BD е симетрала на аголот , од каде следува $\measuredangle OBD = 90^\circ - \frac{}{2}$. Од рамнокракиот триаголник AOB следува $\overline{OB} = \frac{\overline{AB}}{2\cos\measuredangle ABO} = \frac{b}{2\sin}$. Бидејќи BD е симетрала на $\measuredangle ABC$, добиваме $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$, т.е. $\frac{b}{a} = \frac{b-\overline{CD}}{\overline{CD}}$, од каде следува $\overline{CD} = \frac{ab}{a+b}$.

Сега, од синусната теорема применета на $\triangle BCD$ следува $\frac{\overline{CD}}{\sin\frac{}{2}} = \frac{\overline{BD}}{\sin}$, па затоа $\overline{BD} = \frac{2ab\cos\frac{}{2}}{a+b}$. Понатаму, од косинусната теорема применета на $\triangle OBD$ следува

$$\overline{OD}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{OB}\cdot\overline{BD}\cos(90^\circ - \frac{}{2}).$$

Оттука следува дека $\overline{OD}^2 < \overline{OB}^2$ ако и само ако

$$\overline{BD}^2 < 2\overline{OB}\cdot\overline{BD}\cos(90^\circ - \frac{}{2})$$

Според тоа, точката D е во внатрешноста на кружницата ако и само ако важи

$$\overline{BD} < 2\overline{OB}\cos(90^\circ - \frac{\ }{2}) = 2\overline{OB}\sin\frac{\ }{2},$$

т.е. ако и само ако

$$\frac{2ab\cos\frac{\ }{2}}{a+b} < 2\frac{b}{2\sin\ }\sin\frac{\ }{2}.$$

Но, $a = 2b\cos\ $, па со замена во последното неравенство последователно добиваме

$$\frac{4b^2\cos\ \cos\frac{\ }{2}}{b(2\cos\ +1)} < \frac{b\sin\frac{\ }{2}}{2\sin\frac{\ }{2}\cos\frac{\ }{2}},$$

$$4\cos\ \cdot 2\cos^2\frac{\ }{2} < 2\cos\ +1,$$

$$4\cos\ \cdot(1+\cos\ ) - 2\cos\ - 1 < 0,$$

$$4\cos^2\ + 2\cos\ - 1 < 0.$$

Од последното неравенсвтво следува $\cos\ \in (\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4})$, односно

$$\cos\ < \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Ќе докажеме дека $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Имаме,

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}$$

и

$$\sin 18^\circ - \cos 36^\circ = \cos 72^\circ - \cos 36^\circ = -2\sin\frac{72^\circ+36^\circ}{2}\sin\frac{72^\circ-36^\circ}{2}$$

$$= -2\sin 54^\circ \sin 18^\circ = -2\sin 18^\circ \cos 36^\circ = -\frac{1}{2},$$

па затоа $\cos 36^\circ = \frac{1}{2} + \sin 18^\circ$. Според тоа, $\sin 18^\circ(\sin 18^\circ + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ и како $\sin 18^\circ > 0$, добиваме $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Значи, $\cos\ < \sin 18^\circ = \cos 72^\circ$ и како функцијата $\cos x$ монотоно опаѓа на интервалот $(0, \frac{\text{®}}{2})$ и $\ < \frac{\text{®}}{2}$, добиваме дека $\ > 72^\circ$.

IV година

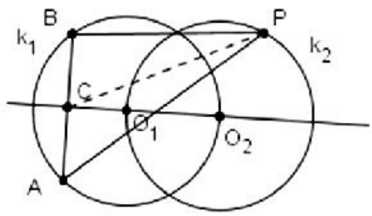
1. Природниот број n го нарекуваме добар ако и само ако постојат точно пет природни броеви k_i за кои важи $n + k_i \mid n - k_i^3$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Докажи дека бројот 29 е добар број.

Решение. Нека n е добар број. Бидејќи за секој $x \in \mathbb{N}$ важи $n + x \mid n^3 + x^3$, следува дека за точно пет природни броеви x важи $n + x \mid (n - x^3) + (n^3 + x^3)$, т.е. $n + x \mid n + n^3$. Според тоа, бројот n е добар ако и само ако бројот $n^3 + n$ има точно пет природни делители поголеми од n.

Бидејќо $29^3+29=2\cdot 29\cdot 421$, добиваме дека 29^3+29 има точно пет природни делители поголеми од 29 и тоа се броевите $2\cdot 29, 421, 2\cdot 421, 29\cdot 421, 2\cdot 29\cdot 421$. Значи, бројот 29 е добар број, а единствени пет природни броеви k_i за кои важи $n+k_i \mid n-k_i^3,\ i=1,2,3,4,5$ се 29, 392, 813, 12180 и 24389.

2. Растојанието меѓу центрите на кружниците k_1 и k_2, чии радиуси се еднакви на r, е еднакво на r. На k_1 се избрани точки A и B кои се симетрични во однос на правата која ги поврзува центрите на кружниците. На кружницата k_2 е избрана точка P различна од A и B. Докажи дека $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2 \ge 2r^2$.

Решение. Нека O_1 и O_2 се соодветно центри на кружниците k_1 и k_2, а точката C е средина на отсечката AB. Нека $\measuredangle BCP =$ ¨ .



Ако $P\equiv O_1$, тогаш важи

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2r^2 \qquad (1)$$

Нека $P\not\equiv O_1$. Од косинусната теорема, применета на $\triangle PBC$, следува

$$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{PC}\cdot\overline{BC}\cos \text{¨} . \qquad (2)$$

Аналогно, од $\triangle PAC$ имаме

$$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2+\overline{AC}^2-2\overline{PC}\cdot\overline{AC}\cos(180^\circ-\text{¨})=\overline{PC}^2+\overline{AC}^2+2\overline{PC}\cdot\overline{AC}\cos \text{¨} . \qquad (3)$$

Ако ги собереме равенствата (2) и (3) и искористиме дека $\overline{AC}=\overline{BC}$, добиваме

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PC}^2+2\overline{AC}^2 . \qquad (4)$$

Ако точката C не припаѓа на отсечката O_1O_2, од неравенството на триаголлник следува дека $\overline{CO_1}+r=\overline{CO_2}<\overline{O_2P}+\overline{PC}=\overline{PC}+r$, т.е. $\overline{CO_1}<\overline{PC}$. Ако точката C е меѓу точките O_1 и O_2, тогаш $\overline{CO_1}=r-\overline{CO_2}=\overline{PO_2}-\overline{CO_2}<\overline{PC}$. Сега, ако искористиме дека $\overline{CO_1}<\overline{PC}$, од равенството (4) и Питагоровата теорема следува

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2>2\overline{CO_1}^2+2\overline{AC}^2=2\overline{CO_1}^2=2r^2 .$$

Конечно, од последното неравенство и равенството (1) следува $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2\ge 2r^2$, за секој избор на точките A, B и P.

3. Природните броеви ги означуваме со некој од броевите 0, 1 или 2, според следново правило: Ако бројот n е означен со $j\in\{0,1,2\}$, тогаш бројот $n+j$ се означува со 0. Нека S е збирот на броевите со кои се означен првите 2023 природни броја. Определи ја максималната можна вредност на S.

Решение. Нека е дадена произволна шема на означување на броевите, согласно правилото за означување дадено во условот на задачата. Нека k е бројот на елементите од множеството $\{1,2,...,2023\}$ кои се означени со 2, l е бројот на елементите од $\{1,2,...,2023\}$ кои се означени со 1, а m е бројот на елементите од $\{1,2,...,2023\}$ кои се означени со 0. Тогаш $S=2k+l$. Според условот на задачата, за секој $i\in\{1,2,...,2023\}$ означен со 2, бројот $i+2$ е означен со 0. Оттука следува дека бројот на броевите кои се помали од 2021 и кои се означени со 2, мора да е помал или еднаков на m. Ако ги земеме предвид и последните два броја 2022 и 2023, заклучуваме дека $k\le m+2$. Според тоа,

$$S=2k+l=k+k+l\le k+(m+2)+l=2023+2=2025.$$

Но, во означувањето

$$210\,|\,210\,|\,210\,|\,\underbrace{2200\,|\,2200\,|\,...\,|\,2200}_{503\text{ блокови }2200}\,|\,22$$

имаме $S=3\cdot3+4\cdot503+2\cdot2=2025$, па како $S\le2025$, заклучуваме дека 2025 е најголемата можна вредност на S.

4. Нека функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$ е дефинирана на следниов начин:

1) $f(1)=0$,

2) $f(p)=1$, за секој прост број p,

3) $f(ab)=af(b)+bf(a)$, за секои $a,b\in\mathbb{N}$.

Определи ги сите броеви $n\in\mathbb{N}$ такви што $f(n)=n$.

Решение. Со индукција по бројот на множителите $k\ge2$ во записот на природниот број n како производ на природни броеви во облик $n=a_1a_2...a_k$ ќе докажеме дека

$$f(n)=f(a_1a_2...a_k)=\tfrac{n}{a_1}f(a_1)+\tfrac{n}{a_2}f(a_2)+...+\tfrac{n}{a_k}f(a_k). \qquad (1)$$

Нека $n=ab$. Тогаш од 3) следува

$$f(n)=f(ab)=bf(a)+af(b)=\tfrac{ab}{a}f(a)+\tfrac{ab}{b}f(b)=\tfrac{n}{a}f(a)+\tfrac{n}{b}f(b).$$

што значи дека формулата (1) важи за $k=2$. Нека претпоставиме дека формулата (1) важи за некој $k\ge2$. Тогаш, ако број n е запишан како производ на $k+1$ природни броеви, т.е. $n=a_1a_2...a_ka_{k+1}$, од индуктивната претпоставка и од 3) следува

$$\begin{aligned}f(n)&=f(a_1a_2...a_{k-1}a_ka_{k+1})=\tfrac{n}{a_1}f(a_1)+\tfrac{n}{a_2}f(a_2)+...+\tfrac{n}{a_{k-1}}f(a_{k-1})+\tfrac{n}{a_ka_{k+1}}f(a_ka_{k+1})\\&=\tfrac{n}{a_1}f(a_1)+\tfrac{n}{a_2}f(a_2)+...+\tfrac{n}{a_{k-1}}f(a_{k-1})+\tfrac{n}{a_ka_{k+1}}(a_{k+1}f(a_k)+a_kf(a_{k+1}))\\&=\tfrac{n}{a_1}f(a_1)+\tfrac{n}{a_2}f(a_2)+...+\tfrac{n}{a_{k-1}}f(a_{k-1})+\tfrac{n}{a_k}f(a_k)+\tfrac{n}{a_{k+1}}f(a_{k+1}),\end{aligned}$$

т.е. формулата (1) важи и за $k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $k \in \mathbb{N}$.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n = p_1^{a_1} p_1^{a_2} ... p_k^{a_k}$ е каноничниот запис на n. Тогаш од формулата (1) и од условот 2) следува

$$f(n) = f(p_1^{a_1} p_1^{a_2} ... p_k^{a_k}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n}{p_i} f(p_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n}{p_i} \cdot 1 = n \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p_i}. \qquad (2)$$

Сега, ако $f(n) = n$, тогаш од (2) следува $\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p_i} = 1$. Ако $k > 1$, тогаш е јасно дека $0 < \frac{a_i}{p_i} < 1$ за секој $i = 1, 2, ..., k$. Но, тоа значи дека $p_i \nmid a_i$ за секој $i = 1, 2, ..., k$. Имаме $\frac{a_1}{p_1} = 1 - \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i}{p_i} = \frac{N}{p_2 p_3 \cdots p_k}$, за некој $N \in \mathbb{N}$, па затоа $a_1 p_2 p_3 ... p_k = p_1 N$, што е противречност бидејќи десната страна последното равенство е делива со p_1, а левата не е делива со p_1. Од добиената противречност следува дека $k = 1$, што значи дека $\frac{a}{p} = 1$, т.е. $a = p$. Но, тоа значи дека единствени броеви за кои важи $f(n) = n$ се броевите од видот $n = p^p$, каде p е прост број.