

LVI олимпијада

1. Конечното множество S точки во рамнината го нарекуваме урамнотежено ако за секои две различни точки A и B од множеството S постои точка C во множеството S таква што $\overline{AC} = \overline{BC}$. Множеството S го нарекуваме бесцентрично ако за никои три точки A, B и C од множеството S не постои точка P во S таква што $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

а) Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ постои урамнотежено множество кое се состои од n точки.

б) Определи ги сите природни броеви $n \geq 3$ за кои постои урамнотежено бесцентрично множество.

Решение. а) Избираме различни точки $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m, C_1$ на кружница k со центар O такви што триаголниците OA_iB_i ($i = 1, 2, \dots, m$) и OB_1C_1 се рамнострани. Множествата

$$\{O, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \text{ и}$$

$$\{O, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m, C_1\}$$

се урамнотежени и имаат $2m+1$ и $2m+2$, $m \in \mathbb{N}$ елементи.

б) Одговор: сите непарни броеви.

За непарен n множеството темиња на правилен n -аголник е урамнотежено и бесцентрично множество. Останува да докажеме дека за парен n такво множество S не постои.

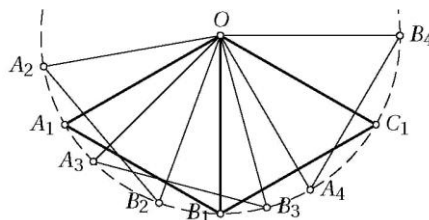
Нека го претпоставиме спротивното. На секој од $\frac{n(n-1)}{2}$ подредени парови (A, B) точки од S му соодветствува точка P таква што $\overline{PA} = \overline{PB}$, па според принципот на Дирихле постои точка P на која и соодветствуваат најмалку $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ парови точки од S . Бидејќи ниту еден од ови парови не ја соржи точката P некои два пара имаат заедничка точка: нека се тоа (A, B) и (A, C) . Тогаш $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, што противречни на бесцентричноста на множеството S .

2. Определи ги сите тројки природни броеви (a, b, c) такви што секој од броевите

$$ab - c, bc - a, ca - b$$

е степен на бројот 2.

Решение. Нека претпоставиме дека $a = b$. Тогаш $b(c-1)$ и $b^2 - c$ се степени



на бројот 2, па затоа $b = 2^k$ и $c = 2^l + 1$ за некои $k, l \in \mathbb{N}_0$ и $b^2 - c = 2^{2k} - 2^l - 1$ е степен на бројот 2, што е можно единствено за $k = 1$ и $l \in \{0, 1\}$.
Одовде ги добиваме решенијата $(2, 2, 2)$ и $(2, 2, 3)$.

Понатаму, заради симетрија можеме да сметаме дека $a < b < c$. Јасно, мора да важи $a > 1$. Да означиме

$$bc - a = 2^\alpha, ca - b = 2^\beta \text{ и } ab - c = 2^\gamma.$$

Тогаш $\alpha > \beta > \gamma$.

Броевите

$$2^\alpha + 2^\beta = (c-1)(b+a) \text{ и } 2^\alpha - 2^\beta = (c+1)(b-a)$$

се деливи со 2^β . Но, барем еден од броевите $c \pm 1$ не е делив со 4, па затоа $2(a+b)$ или $2(a-b)$ е делив со 2^β . Според тоа,

$$2^\beta = ca - b \leq 2(a+b), \text{ т.е. } a(b+1) \leq ac \leq 2a+3b < a+4b,$$

па затоа $ab < 4b$, т.е. $a < 4$.

1) Нека $a = 3$. Претходно видовме дека 2^β е делител на $2(b+3)$ или на $2(b-3)$. Но, $2^\beta = 3c - b > \max\{2(b-3), b+3\}$, па единствена можност е $3c - b = 2(b+3)$, т.е. $c = b + 2$. Сега $2^\alpha = bc - a = (b-1)(b+3)$, што значи дека $b-1$ и $b+3$ се степени на бројот 2 чија разлика е еднаква на 4. Оттука следува дека $b = 5$, што го дава решението $(3, 5, 7)$.

2) Нека $a = 2$. Имаме $2c - b = 2^\beta$ и $2b - c = 2^\gamma$. Ако $\gamma > 0$, тогаш броевите b и c се парни, па затоа $bc - 2 = 2^\alpha$ не е делив со 4, што не е можно. Според тоа, $\gamma = 0$ и $c = 2b - 1$. Од $2^\beta = 2c - b = 3b - 2$ следува

$$b = \frac{2^\beta + 2}{3} \text{ и } 2^\alpha = b(2b - 1) - 2 = \frac{2^{2\beta+1} + 5 \cdot 2^\beta - 16}{9}.$$

Ако $\beta > 4$, последниот израз не е делив со 2^5 , па затоа не е делив со 2^α , што е противречност. Според тоа, $\beta \leq 4$. Со проверка на можните случаи го добиваме решението $(2, 6, 11)$.

Конечно, решенија на задачата се подредените тројки $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 6, 11)$ и $(3, 5, 7)$ и нивните пермутации.

Втор начин. Како и при првиот начин на решавање ако $a = b$, ги определуваме решенијата $(2, 2, 2)$ и $(2, 2, 3)$. Нека a, b, c се различни природни броеви. Во зависност од нивната парност ги разликуваме следниве случаи.

1) a, b, c се парни. Нека $2^x \parallel a$, $2^y \parallel b$ и $2^z \parallel c$, при што $1 \leq x \leq y \leq z$. Од $2^x \parallel bc - a$ и $2^y \parallel ac - b$, следува $bc - a = 2^x \leq a$ и $ac - b = 2^y \leq b$. Ако ги собереме последните две неравенства добиваме $(a+b)(c-1) \leq a+b$, од каде добиваме $c = 2$ и $x = y = z = 1$, односно $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.

2) a, b, c се непарни. Нека $a < b < c$ и $bc - a = 2^x$ и $ac - b = 2^y$. Тогаш $x > y$ и затоа 2^y е делител на $a(bc - a) - b(ac - b) = (b + a)(b - a)$. Едниот од множителите на $b \pm a$ не е делив со 4, па затоа другиот е делив со 2^{y-1} и важи $4b > 2(a + b) \geq 2^y = ac - b > (a - 1)b$. Оттука следува дека $a = 3$, па од $2(b + 3) \geq 3c - b$ добиваме $c \leq b + 2$, т.е. $c = b + 2$. Сега, $bc - a = (b - 1)(b + 3)$ е степен на бројот 2, па мора да е $b = 5$ и $(a, b, c) = (3, 5, 7)$.

3) c е непарен, а ab е парен. Мора да е $c = ab - 1$, па затоа

$$ab^2 - a - b = bc - a = 2^x \text{ и } a^2b - a - b = ac - b = 2^y.$$

Нека $a < b$. Не може да е $y = 0$, па затоа $x > y \geq 1$ и a и b се парни. Бидејќи $2^x + 2^y = (a + b)(ab - 2)$ и $4 \nmid ab - 2$, добиваме $2^{y-1} \parallel a + b$ и оттука $2^{y-1} \parallel a^2b$ и $2^{y-1} \parallel ab^2$. Сега добиваме $a = 2^k A, b = 2^k B, y = 3k + 1$ и $A + B = 2^{2k} C \geq 4C$ за некој $k \in \mathbb{N}$ и непарни A, B, C . Понатаму, $2^{3k+1} = 2^{3k}(A^2B - C)$, па затоа $A^2B - C = 2$ и оттука

$$8 \geq 4A^2B - A - B \geq A^2(3B - 1),$$

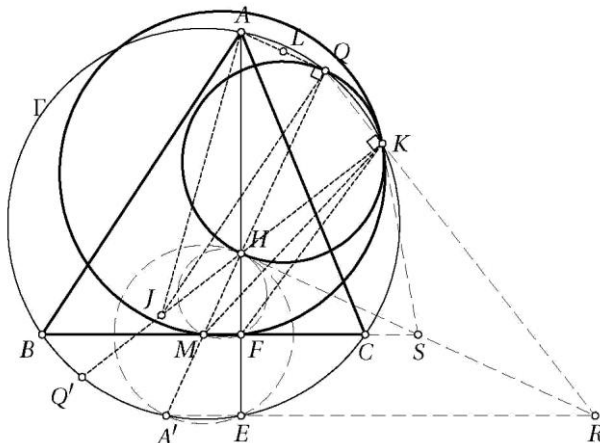
што е можно само за $A = 1, B = 3$ и $k = 1$. Така го добиваме решението $(a, b, c) = (2, 6, 11)$.

3. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој $\overline{AB} > \overline{AC}$, Γ е неговата опишана кружница, H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и F е подножјето на висината повлечена од темето A . Точката M е средина на отсечката BC . Нека Q е точка на кружницата Γ таква што $\angle HQA = 90^\circ$, а K е точка на кружницата Γ таква што $\angle HKQ = 90^\circ$. Сметаме дека точките A, B, C, K и Q се меѓу себе различни и лежат на кружницата Γ во овој редослед.

Докажи дека опишаните кружници на триаголниците KQH и FKM се допираат.

Решение. *Прв начин.* Нека A' и Q' се точки на Γ дијаметрално спротивни на точките A и Q , соодветно. Од $\angle AQH = \angle AQA' = 90^\circ$ следува дека точките A', H и Q се колинеарни. Слично, точките Q', H и K се колинеарни. Нека E е вториот пресек на правата AF со кружницата Γ . Точките F и M се средини на отсечките HE и HA' , соодветно. Со J да ја означиме средината на отсечката HQ' . За произволна точка T на тангентата на кружницата KQH во K таква што Q и T се од различни страни на правата HK важи $\angle HKT = \angle HQK = 90^\circ - \angle A'HQ'$. Треба да докажеме дека KT е тангента на кружницата KFM , т.е. дека важи $\angle MKT = \angle CFK$, што е еквивалентно со

$$90^\circ - \angle A'HQ' = \angle CFK + \angle HKM. \quad (1)$$



Од $\triangle KHE \sim \triangle ANQ$ следува $\triangle KHF \sim \triangle AHJ$, па затоа

$$\angle CFK = 90^\circ - \angle KFH = 90^\circ - \angle AJH.$$

Слично, $\triangle HKM \sim \triangle HQJ$ и оттука $\angle HKM = \angle JQH$. Така равенството (1) се сведува на равенството $\angle A'HQ' = \angle AJH - \angle JQH$.

Четириаголникот $AQA'Q'$ е правоаголник, а точката J е еднакво оддалечена од правите AQ' и QH , од каде што следува $\overline{JA} = \overline{JQ}$. Затоа, ако L е средина на отсечката AQ , тогаш $JL \parallel AQ'$ и конечно

$$\angle JQH = \angle QJL = \angle AJL = \angle AJH - \angle A'HQ'.$$

Втор начин. Како во првиот начин на решавање ги дефинираме точките A' и Q' и докажуваме дека точките A', M, H, Q се колинеарни.

Кружниците KQH и $EA'H$ имаат колинеарни дијаметри QH и $A'H$, што значи дека имаат заедничка тангента t во точката H нормална на правата MH . Радијалните оски на кружниците $KQH, EA'H$ и ABC по парови се $QK, A'E$ и t , и сите минуваат низ нивниот радикален центар R . Четириаголникот $HERK$ е тетивен бидејќи $\angle QKH = \angle HEA' = 90^\circ$, а негов центар на опишаната кружница е средината S на отсечката HR . Точката S припаѓа на симетралата на отсечката HE , а тоа е правата BC . Бидејќи кружницата HFM исто така ја допира правата t во точката H , важи $\overline{SF} \cdot \overline{SM} = \overline{SH}^2 = \overline{SK}^2$, што значи дека правата SK ја допира кружницата KFM . Според тоа, SK е заедничка тангента на кружниците KQH и KFM .

4. Нека Ω е опишаната кружница околу триаголникот ABC , а O е нејзиниот центар. Кружница Γ со центар во точката A ја сече отсечката BC во точ-

ките D и E така што точките B, D, E, C се различни меѓу себе и лежат на правата BC во овој редослед. Нека F и G се пресечните точки на кружниците Γ и Ω , при што точките A, F, B, C, G лежат на кружницата Ω во овој редослед. Нека K е втората пресечна точка на опишаната кружница околу триаголникот BDF и отсечката AB . Нека L е втората пресечна точка на опишаната кружница околу триаголникот CGE и отсечката CA .

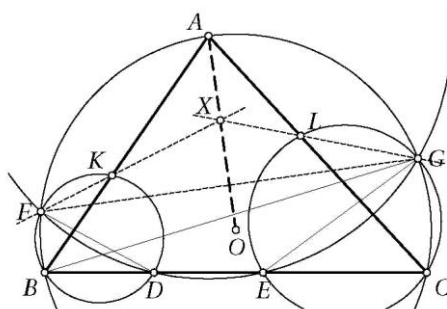
Да претпоставиме дека правите FK и GL се различни и дека се сечат во точката X . Докажи дека точката X припаѓа на правата AO .

Решение. Правите AF и AQ се симетрични во однос на AO . Доволно е да докажеме дека правите FK и GL се симетрични во однос на AO , т.е. дека

$$\angle AFK = \angle AGL.$$

Последното равенство следува од

$$\begin{aligned} \angle AFK &= \angle GFD + \angle AFG - \angle DFK \\ &= \angle GEC + \angle ABG - \angle DBK \\ &= \angle GEC - \angle GBC \\ &= \angle GLC - \angle GAC \\ &= \angle AGL. \end{aligned}$$



5. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x), \quad (*)$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Во (*) ставаме $y = 1$ и добиваме $f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1)$, за секој $x \in \mathbb{R}$, што значи дека $g_x = x + f(x + 1)$ е фиксна точка за функцијата f . Разликуваме два случаја.

- 1) $f(0) \neq 0$. Ако во (*) ставиме $x = 0$ добиваме $f(f(y)) = f(y) + (y - 1)f(0)$.

Ако y е фиксна точка, оттука следува дека $y = 1$. Значи, $x + f(x + 1) = 1$, т.е. $f(x) = 2 - x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

- 2) $f(0) = 0$. Тогаш $g_{-1} = -1$ е фиксна точка, т.е. $f(-1) = -1$. Во (*) ставаме $(x, y) = (1, -1)$ и добиваме $f(1) = 1$. Со замена $(x + 1, 0)$ во (*) добиваме $f(g_x + 1) = g_x + 1$. Значи, за $x = 1$ во (*) имаме:

$$f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + y. \quad (1)$$

Оттука заклучуваме дека ако y и $y + 1$ се фиксни точки на функцијата f , тогаш и $y + 2$ е фиксна точка на функцијата f . Меѓу другото, $g_x + 2$ е фиксна точка, а со самото тоа и $g_{x-2} + 2 = x + f(x - 1)$. Сега во (*) ставаме $y = -1$ и добиваме $f(-x) = -f(x)$. Ако во (*) замениме $(-1, -y)$ добиваме $f(-1 + f(-y - 1)) + f(y) = f(-y - 1) + y - 1$, што се сведува на

$$-f(1+f(y+1))+f(y)=-f(y+1)+y-1.$$

Конечно, од последното равенство и од (1) добиваме $f(y) = y$.

Од досега изнесеното следува дека единствени решенија на (*) се $f(x) = f$ и $f(x) = 2 - x$.

6. Низата цели броеви a_1, a_2, \dots ги задоволува условите

$$1) \quad 1 \leq a_j \leq 2015 \text{ за секој } j \geq 1,$$

$$2) \quad k + a_k \neq l + a_l \text{ за секои } 1 \leq k < l.$$

Докажи дека постојата природни броеви b и N такви што важи

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

за секои природни броеви m и n такви што $n > m \geq N$.

Решение. Дефинираме $c_n = n + a_n$, за $n \in \mathbb{N}$. Нека претпоставиме дека сите членови на низата $\{c_n\}$ се различни и $n + 1 \leq c_n \leq n + 2015$.

Да го разгледаме множеството $M = \mathbb{N} \setminus \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. За секој $n \in \mathbb{N}$, множеството $\{1, 2, \dots, n + 2015\}$ ги содржи членовите на низата c_1, c_2, \dots, c_n , па во овој случај има најмногу 2015 елементи на множеството M . Според тоа, $|M| \leq 2015$ и како $1 \notin M$ важи $|M| \geq 1$. Ќе докажеме дека броевите $b = |M|$ и $N = \max M$ ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $k \geq N$. Од претходните разгледувања следува дека множеството $I_k = M \cup \{c_1, \dots, c_k\}$ е подмножество од множеството $\{1, 2, \dots, k + 2015\}$ и ги содржи броевите $1, 2, \dots, k + 1$. Тоа значи $I_k = \{1, 2, \dots, k + 1\} \cup \{k + 1 + i \mid i \in R_k\}$, за некое $(b - 1)$ -елементно подмножество од $R_k \subset \{1, 2, \dots, 2014\}$. Со $S(X)$ да го означиме збирот на елементите на множеството X . Од една страна важи $S(I_k) = S(M) + \sum_{i=1}^k (i + a_i)$, а од друга $S(I_k) = \sum_{i=1}^k i + b(k + 1) + S(R_k)$, па со одземање на последните равенства добиваме

$$\sum_{i=1}^k (a_i - b) = S(R_k) + b - S(M),$$

па затоа

$$\sum_{i=m+1}^n (a_i - b) = S(R_n) - S(R_m), \text{ за } n > m \geq N.$$

Притоа за секој $k \geq N$ важи

$$1 + 2 + \dots + (b - 1) \leq S(R_k) \leq 2014 + 2013 + \dots + (2016 - b),$$

па затоа

$$|S(R_n) - S(R_m)| \leq (b - 1)(2 - 15 - b) \leq \frac{1}{4}((b - 1) + (2015 - b))^2 = 1007^2.$$