МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 3 (2018), 43 – 54
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-3.html

ЗА НОРМАЛНИТЕ И АБНОРМАЛНИТЕ РЕАЛНИ БРОЕВИ

Емилија Целакоска [1]

1. ВОВЕД

Идејата за нормалност на број прв ја вовел Борел во 1909 година при обид за формализирање на поимот за случаен реален број, [4]. Според таа идеја, реален број x е *просто-нормален во бројна база со основа* $b \geq 2$ ако во неговото претставување во таа база сите цифри по основната запирка се појавуваат, во асимптотска смисла, еднакво често, т.е. со релативна честота $\lim_{n\to\infty} \frac{N(\{i\},n)}{n} = \frac{1}{b}$, $i \in \{0,1,\ldots,b-1\}$. Ако пак, за секој природен број m, различните b^m низи со должина m се појавуваат еднакво често, тогаш бројот x се вика *нормален во базата со основа* b, т.е. за секоја низа s, $\lim_{n\to\infty} \frac{N(s,n)}{n} = b^{-m}$. Притоа, $N(s,n)$ е бројот на појави на низата s со должина m во првите n цифри по основната запирка од бројот x претставен во базата со основа b, [25]. За број кој е просто-нормален, или пак, соодветно, нормален во сите бази, не ја споменуваме базата и го викаме *апсолутно просто-нормален* (или само *просто-нормален*), односно соодветно, *апсолутно нормален* (или само *нормален*) *број*. *Апсолутно абнормални броеви* се оние кои не се нормални, ниту барем просто-нормални, во ниедна база, [15].

Од просто-нормалноста на бројот во дадена база не следува и нормалност на бројот во истата база. Еве еден пример: Во бинарната база бројот конструиран со наизменично допишување на 0 и 1, т.е. бројот a = 0,1010101010.... е очигледно просто-нормален (0 и 1 се рамномерно распределени), но не е нормален во истата база, бидејќи, на пример, од низите со должина 2, само „10“ и „01“ се повторуваат еднакво често, но „00“ и „11“ ги нема. Дури и ако ги допишеме „00“ и „11“ некаде во низата конечно многу пати, можеме да речеме дека скоро ги нема, бидејќи лимесот од дефиницијата за „00“ и „11“ дава 0, а за „10“ и „01“ дава 1/2. Во случај на нормалност, според дефиницијата, лимесот треба да даде 2^{-2} = 1/4 за секоја од овие низи со должина 2.

Некој ќе ја забележи врската на формулата од дефиницијата на Борел со законот на големите броеви во теоријата на веројатност, но и тоа дека формулата е запишана како да се подразбира дека лимесот секогаш постои. Всушност, овде се работи за силниот закон на големите броеви кој се однесува на конвергенција со веројатност 1 или скоро сигурна конвергенција. Законот искажува дека аритметичката средина на независните и еднакво распределени случајни променливи X_1, X_2, …, X_n конвергира кон нивното математичко очекување. Кај Бореловата дефиниција, броевите $N(s,\ n)$ за соодветната низа од случајни променливи за кои е искажан законот имаат вредности во множеството од природни броеви и 0, а означуваат колку пати низата s (со должина m) се појавила до n–тата цифра по основната запирка од разгледуваниот број, па така, $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{N(s,n)}{n}=b^{-m}\right)=1$. Овде b^{-m} очигледно е математичкото очекување на појавувањето на низата s со должина m во систем со основа b. Истата формула, но при различни услови во теоремата која го искажува овој закон се користи во сите негови варијанти (наједноставната од нив е Бореловата) и можат да се најдат во [22].

Кои се овие броеви – нормални во некоја или секоја база? Какви се тие кои не се нормални во некоја или во сите бази? Дали дефиницијата преку елементи од теоријата на веројатност значи дека имаме работа со случајност, или пак, и покрај таквата дефиниција треба да се обратиме на друга теорија, можеби на теоријата на хаос?

2. СКОРО СИТЕ РЕАЛНИ БРОЕВИ СЕ НОРМАЛНИ, НО...

Една теорема на Борел во [4] вели дека скоро сите реални броеви се нормални. Некаде оваа теорема се наоѓа во облик дека скоро сите реални броеви во (0,1) се нормални, со оглед дека всушност сме заинтересирани само за развојот по основната запирка. Оваа теорема навидум сугерира дека е лесно да се најдат нормални броеви. Но, засега не знаеме некој неконструиран број за кој сме сигурни дека е макар просто-нормален во некоја дадена бројна база!

Борел дал хипотеза во 1950 г. според која сите ирационални алгебарски броеви се нормални. Хипотезата сѐ уште нема доказ. Така, иако можеме да најдеме многу цифри по основната запирка во која било бројна база на пример на бројот $\sqrt{2}$, ние нормалноста можеме само емпириски да ја насетуваме, без конечен заклучок. Во првите милион цифри на $\sqrt{2}$ во десетичната база може компјутерски да се провери дека 0 се јавува 99814 пати, 1 се јавува 99925 пати, 2 – 100436 пати; 3 – 100190 пати, 4 – 100024 пати; 5 – 100155, 6 – 99886 , 7 – 100008, 8 – 100441, 9 – 100121 пати, [27]. Секој пар цифри (низи со дожина 2) би се јавувал околу 10000 пати, секоја тројка цифри (низи со должина 3) би се јавувала околу 1000 пати, итн. Со други зборови, можеме да го генерираме бројот со конечно многу цифри во развојот по основната запирка, да му ги броиме цифрите од базата и да поделиме со вкупниот број на цифри што сме ги генерирале, за на крај само да речеме „личи како да е нормален во избраната база“.

За поголем успех во броењето цифри, измислени се таканаречените spigot алоритми (во слободен превод – „капка по капка“ алгоритми), кои генерираат цифра по цифра доста брзо и независно од претходната цифра, наместо да го генерираат бројот како целина. Овие алгоритми се всушност базирани на приближни нумерички конструкции кои бесконечно можат да се уточнуваат. Всушност, тие се специфични редови „преведени“ во облик на вгнездени низи од собироци и множители. Од нив произлегува итеративен алгоритам кој се програмира со само два вгнездени циклуси до дадена точност. Брзината на конвергирање кон точните цифри е зачудувачка во однос на редовите пронајдени до крајот на 19-тиот век. Математичкиот гениј Рамануџан (1887-1920), може да го сметаме за човекот без кој не би можеле да бидат измислени „капка по капка“ алгоритмите. Неговиот начин на размислување успеваме да го претпоставиме до пред почетоков на веков (по наоѓањето на познатата „загубена тетратка на Рамануџан“, [2]) и да го имитираме со сличен облик на формули (читателот може да ги побара алгоритмите на истражувачите S. Rabinowitz, S. Wagon, P. Borwin, D. Bailey, R. Gosper, J. Gibbons и браќата Chudnovsky). Компјутерите се приближуваат колку што е во нивна моќ до точните вредности на алгебарските ирационални и на нашите одомаќени трансцендентни броеви како што се π, e, ln 2, ln 10 и слични. Сепак, во контекст на математички доказ за нормалноста, макар во десетичната база, барем за $\sqrt{2}$ на пример, овој правец на истражување не изгледа ветувачки.

Оксфордскиот професор Д. Шампернон во времето на своите додипломски студии на Кембриџ, конструира број за кој во 1933 г. докажал дека е нормален во десетичната база, [10]. Тој „вештачки“ број се добива со запишување на природните броеви од десетичната база еден по друг, „залепени“ еден со друг, по децималната запирка: 0,12345678910111213141516… Рускиот математичар А. Безикович во 1935 г. покажал во [3] дека бројот 0,149162536496481100121144..., конструиран од квадратите на природните броеви во десетичната база, е нормален број во таа база. Во 1992 г. е докажано дека запишувањето еден-до-друг на природни броеви по основната запирка во произволна база, а добиени како цел дел од вредностите на позитивна полиномна неконстантна функција со реални коефициенти и со аргументи - последователните природни броеви (во 1997 г. и за последователните прости броеви), дава нормален број во таа база, [18]. Сепак останува отворено прашањето дали така конструираните броеви во една бројна база се нормални во друга база.

Константата на Копланд-Ердеш 0,23571113171923293137414З... е конструирана со запишување еден-до-друг на простите броеви во десетичната база и во 1946 г. е докажано дека е нормален број во таа база, [11]. Истите автори, А. Копланд и П. Ердеш, покажале дека бројот конструиран како 0, $f(1)f(2)f(3)$..., каде што $f(n)$ е n-тиот прост број запишан во една бројна база, е нормален во истата база. Слично, Х. Давенпорт и П. Ердеш во [12] докажале ваква теорема во десетичната база: Ако $f(n)$ е кој било полином од n кој за $n = 1, 2, 3,...$ дава вредности кои се природни броеви, тогаш бројот 0, $f(1)f(2)f(3)$... е нормален во десетичната база. Оваа група автори покажува и уште поопшта теорема од која следи нормалноста на специјално конструираните броеви во дадена база.

Првата апстрактна конструкција за апсолутна нормалност е дадена од Лебег (1909 г.), а објавена во истиот број на списанието во 1917 г. во кој В. Шерпињски, независно од Лебег, дава поекспилицитна конструкција, [21]. А. Тјуринг, во 1938 г. (годината се претпоставува, бидејќи трудот [24] останал необјавен сè дури до 1992 г., по пронаоѓањето на неговите ракописи), дава сосем експлицитна конструкција на нормален број во сите бази со основа природен број. Во 2002 г., врз основа на таа конструкција во [1] е направен општ алгоритам за конструирање на апсолутно нормален број.

Дали знаеме броеви кои не се просто-нормални во произволна база? Такви сигурно знаме – тоа се рационалните броеви, бидејќи цифрите периодично се повторуваат по основната запирка. Дури и периодичниот број 0,(123456789), како и нему сличните кои се конструирани со сите цифри од десетичната база се само просто-нормални во таа база, но не и во друга база. Затоа можеме да кажеме дека ниеден рационален број не е апсолутно просто-нормален, а и не е апсолутно нормален, но може да биде просто-нормален во некоја база. Се разбира, ова не кажува ништо за пребројливоста на броевите кои не се нормални. Всушност има непребројливо многу броеви кои се апсолутно абнормални и тоа првпат е укажано во [17] и даден е и конструктивен доказ за тоа во [20]. Се разбира, тоа е затоа што постојат непребројливо многу трансцендентни броеви кои се апсолутно абнормални. Примери на такви броеви се конструирани во [15]. Имено, ако се стави $d_i = i^{\frac{d_{i-1}}{i-1}}$, почнувајќи за $d_2 = 2^2$, тогаш $a_k = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{d_i}\right)$ е ирационален, апсолутно абнормален број по конструкција.

Денес, кога различните делови од математиката соработуваат (теорија на мери и веројатност, теорија на броеви и теорија на алгортамски и нумерички техники), се пронаоѓаат интересни својства кои сепак, само ја загребуваат површината на проблемот на докажување дека еден број е (или не е) нормален. Во тој правец се поставува и прашањето за нашето (не)знаење: Дали една низа ни изгледа непредвидлива затоа што не секогаш имаме доволно знаење за да го увидиме законот за појавување на секоја следна цифра, или пак, има низи кои се објективно случајни? Со тоа, во однос на случајните низи, каде спаѓаат нормалните броеви?

3. ИМА ЛИ „ТАЈНА“ ИНФОРМАЦИЈА КАЈ СЛУЧАЈНОСТА?

Фрлањето паричка или коцка се класични почетни примери за илустрација на техниките на теоријата на веројатност. Да забележиме дека тие се експерименти кои физички може да се случат и на нивниот исход влијаат физички закони. Тогаш, некој исклучително (можеби овде треба да се рече – совршено) педантен, совесен и упорен набљудувач може да ги измери и пресмета сите сили и влијанија и да го предвиди исходот. Тоа веќе не е теорија на веројатност, туку е физика – можеби и со елементи дури и од квантна физика – на пример, малите промени на моментумот на коцката во лет заради радиоактивното испуштање на честичка од трагите на некој изотоп во коцката, можат да влијаат на акумулирање на ефектот на промена на моментумот и да го променат исходот, како ефектот на пеперутка (butterfly effect) од теоријата на хаосот. Објективно, ниту помалку педантни набљудувања не прави никој, освен некои професори и студенти од Беркли (за рулет) и Институтот за технологија на Масачусетс (за игрите со карти), кои по користењето на така добиените информации од набљудувањата добивале забрани за влез во коцкарниците (филмот „21“ од 2008 г. е заснован на вистинити настани, а случаите со рулет се споменуваат во книги од статистика, на пример во некои книги од професорот по економија Gary Smith). Стандардно, во игрите на среќа се применува теоријата на веројатност и статистика. Сепак, од секојдневното искуство во нашата неапстрактна, обична реалност гледаме дека стручњаците или талентите во некоја област имаат поголема моќ на предвидување на некои типично непредвидливи исходи, отколку неупатените. На пример, талентиран и стручен метеоролог понекогаш може да предвиди со 80% сигурност, на пример, ураган од петта категорија 48 часа пред да се случи гледајќи ги визуелните метеоролошки извештаи, искусен магионичар може да биде 90% сигурен дека следното фрлање паричка ќе резултира со „петка“, итн. Поседувањето на таканаречена внатрешна информација секако помага за подобро предвидување на исходот.

До пред стотина години физичарите биле сложни дека „тајните“ информации од универзумот само треба да ги извлечеме, па со тоа да предвидиме што сакаме. Со слична мотивација, во последните шеесетина години нагло се разви теоријата на хаосот која непредвидливоста на исходот практично ја припишува на чувствителноста на почетните услови во некои системи. Сепак, и теоријата на хаосот се засновува на каузалноста: има причини за исходот, но тешко е да ги контролираме почетните услови. Во последниве нецели сто години, пак, со развојот на квантната физика се покажа дека на ред е да сфатиме многу тежок концепт, а тоа е концептот за вистинска, објективна случајност која, како што се претпоставува, се случува на квантно ниво. Концептот на случајност е многу потежок за сфаќање од бесконечноста која во принцип ја сфаќаме индуктивно. За разбирање на поимот случајност мораме да се откажеме од каузалноста, бидејќи случајноста не признава причина за ниеден исход. Од една страна развиените веројатност и статистика се среќна околност за квантната физика, која својот математички апарат го базира на нивните техники. Но, во исто време овие математички техники ја „запоседнуваат“ и суштината на квантната физика - веќе ништо суштински не може да се објасни на квантно ниво, само се применува математичката анализа и теоријата на мери со моделите од веројатноста и статистиката. Овие модели, пак, од своја страна, внимателно одбегнуваат токму поимање на случајноста, заменувајќи го концептот за случајност со изразување на колкава веројатност треба да се припише на тврдење кое вклучува случајни низи од настани, [13].

Формулата од дефиницијата на Борел за нормалност на број, секако е поврзана со теоријата на веројатност, но тоа некого може да го наведе на размислување дека цифрите во секој нормален број се појавуваат случајно. Тоа не е сосем така и всушност може да се припише на грешка во терминологијата. Зборот „случајност“ би требало да се користи многу внимателно и ретко, речиси никогаш без филозофски аспект, бидејќи стриктно гледано, случајноста поединечно не може да се докаже, бидејќи ако може да се докаже, тогаш за неа има шема, правило, па затоа нема да биде случајност. Случајноста понекогаш погрешно се користи наместо поимот за хаос или псевдослучајност. Најмногу што може да се заклучи за случајните низи, во стил на Геделовата теорема за некомплетност, е дека има конечно множество случајни низи за кои, со некој специјален конзистентен аксиоматски систем, може да се докаже нивната случајност, [9]. Иако објективно може и да не постои, сепак, не е контрадикторно случајноста да се дефинира.

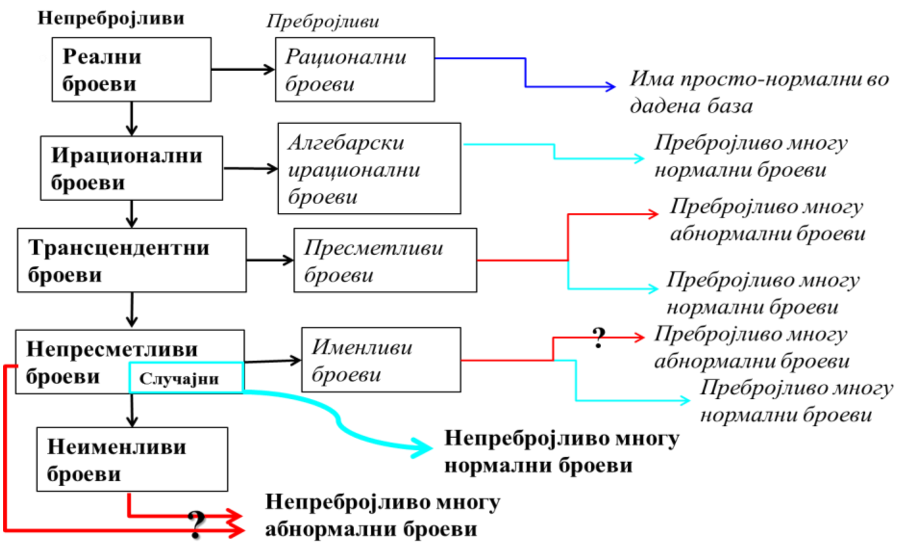
Во математиката сме навикнати прво да имаме дефиниција за поимот. Направени се многу обиди за дефинирање на случајноста и една дефиниција е онаа на познатиот руски математичар Колмогоров

[14], преку алгоритми. Имено, според него, една низа е случајна ако не може да се компримира во пократка низа. На пример, програмата што се сместува во компјутерот како бинарен код (низа) да не може да биде пократка од случајниот број што таа го генерира. Во суштина оваа дефиниција вели дека не постои пократок начин да се генерира случајна низа од задавањето на сите нејзини цифри. Спротивно на тоа, периодичните низи, на пример, лесно се компримираат иако се бесконечни: периодичните децимални броеви ги претставуваме со конечна низа од цифри кои ги пишуваме во заграда. За конечните низи воопшто не станува збор за случајност. Има и други дефиниции за случајна низа дефинирани преку покривки во Канторов простор ([16]) и преку непостоење стратегија за коцкање така што коцкарот би добил бесконечна сума ([19]). Секоја од овие дефиниции може да се зајакнува и ослабува и соодветно, па сите три да се доведат до еквивалентност.

Имајќи ја предвид која било дефиниција за случајна низа, со сигурност може да се тврди дека скоро сите броеви во интервалот (0,1) се случајни, [8]. Да се потсетиме прво дека алгебарските ирационални броеви се пресметуваат по одамна познат алгоритам за пресметување корен кој има конечно многу инструкции, а со тоа и конечно знаци, што значи дека е секако пократок од низата на цифри по основната запирка, т.е. не ја задоволуваат дефиницијата (на Колмогоров) за случајна низа. Нив ги има пребројливо многу. Но, и трансцендентните броеви кои може да се пресметаат (пресметливи трансцендентни броеви) ги има пребројливо многу и уште, алгоритамски напишани изнесуваат само неколку десетици реда од инструкции (обичните редови за нив или spigot алгоритмите до некоја точност). Значи, сите алгебарски ирационални броеви и пресметливите трансцендентни броеви се компримабилни (и постои добитничка коцкарска стратегија за генерирање цифра). Хипотезата за нив е дека и тие се нормални броеви. Накратко, појавување на цифра во алгебарски ирационален или пресметлив трансцендентен број не е случајна, а хипотезата е дека и таквиот број е нормален. Значи, нормалноста на броевите не е еквивалентна со поимот случајност.

Нормалните броеви се одликуваат со исклучителна симетрија по дефиниција, а пак, од која било дефиниција на случајна низа може да се изведе таа симетрија. Релативно лесно математички се гледа дека сите случајни броеви (низи од цифри по основната запирка во интервалот (0,1)) се нормални, [6], дури и доказот се задава за домашна работа по предметот теорија на веројатност на факултетите, на пример во [26]. Но, уште поинтересно, и кај броевите кои се абнормални, и кои ги има во иста мера – непребројливо многу како и нормалните, повторно само пребројливо многу од нив се пресметливи! Тогаш кои се другите абнормални броеви до непребројливост? Со таква асиметрија во дефиницијата, можеме ли воопшто да помислиме дека во тоа множество има макар и еден случаен број? Сепак, да не заборавиме дека интервалот (0,1) е исполнет и со непребројливо многу неименливи (кои не можат да се дефинираат) броеви! Како за таков број воопшто може да се испитува нормалност или абнормалност!?

Да резимираме, знаеме од една страна дека има непребројливо многу трансцендентни броеви, а од нив, непребројливо многу непресметливи броеви, [23], (најпознатиот непресметлив број е константата на Чајтин, **Ω**, [7]) меѓу кои спаѓаат непребројливо многу случајни броеви. Од друга страна, има непребројливо многу нормални и непребројливо многу абнормални броеви. Броевите со случајни низи од цифри по запирката се тие кои го прават множеството од нормални броеви непребројливо.



Слика 1. Дијаграм за класите од пребројливи и непребројливи множества од реални броеви. Прашалник на некои гранки означува нерасчистено прашање во литературата.

4. ЗАКЛУЧОК

Колку ситуацијата со реалните броеви е парадоксална се покажува во една (иронична) забелешка на Е. Борел во [5], во дискусија за континуумот, дека всушност има „сезнаечки“ броеви! Преведена на македонски, со прескокнувања кај ознаката „...“, Бореловата забелешка отприлика гласи вака: „Може да се дефинира број, така што секоја наредна цифра од неговиот децимален развој е 0 или 1, зависно од тоа дали одговорот на некое прашање е позитивен или негативен. Уште повеќе, би било возможно да се подредат сите прашања...како што тоа се прави во речниците. Само прашањата со да/не одговор се земаат предвид. Така, самото знаење на бројот би ни ги дало сите одговори за минатото, сегашноста, иднината во науката, историјата...“ .

Очигледно ни е потребна теорема-признак за нормалност, која нема да испитува цифра по цифра од еден број, но и нема да ги проучува броевите преку множества во стил на Канторовата теорија или Геделовите методи, бидејќи со таков „авионски поглед“ веќе доста лесно носиме заклучоци. Таквата теорема би бил цивилизациски напредок на човековата мисла, бидејќи со неа би се пробил обрачот на детерминизмот, т.е. ограничувањата на каузалноста. Реалните броеви според изложениов аспект се патоказ кон тој пробив, бидејќи треба да се соочиме со навидум парадоксалните факти за нив, дека скоро сите се трансцендентни и скоро сите се непресметливи, случајни или неименливи...

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Becher, S. Figueira, *An example of a computable absolutely normal number*, Theoretical Computer Science 270 (2002) 947 –958.

[2] B. C. Berndt, *Ramanujan's notebooks*, Springer-Verlag, 1985.

[3] A. S. Besicovitch, *The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers,* Mathematische Zeitschrift, 39 (1935) 146 – 156.

[4] É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques,* Supplemento di Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 27 (1909) 247– 271.

[5] É. Borel, *A propos de la récente discussion entre M. R. Wavre et M. P. Lévy,* Revue de Métaphysique et de Morale, 34 (1927) 271 – 276.

[6] C. S. Calude, *Randomness and Complexity: From Leibniz to Chaitin*, World Scientific Publishing Company, 2007, p.5.

[7] G. Chaitin, *A Theory of Program Size Formally Identical to Information Theory*, Journal of the Association for Computing Machinery, 22 (1975) 329 – 340.

[8] G. Chaitin, *Meta Math! The Quest for Omega*, Vintage Books, 2006.

[9] G. Chaitin, *Information-theoretic limitations of formal systems*, , Journal of the Association for Computing Machinery, 21 (1974) 403 – 424.

[10] D. G. Champernowne, *The construction of decimals normal in the scale of ten*, Journal of the London Mathematical Society, 8(4) (1933) 254 – 260.

[11] A. H. Copeland, P. Erdös, *Note on normal numbers*, Bulletin of the American Mathematical Society, 52(10) (1946) 857 – 860.

[12] H. Davenport, P. Erdös, *Note on normal decimals*, Canadian Journal of Mathematics, 4 (1952) 58 – 63.

[13] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming Volume 2*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981, p. 149.

[14] A. Kolmogorov, *On Tables of Random Numbers*, Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A, 25 (1963) 369 – 375.

[15] G. Martin, *Absolutely Abnormal Numbers*, The American Mathematical Monthly, 108(8) (2001) 746 – 754.

[16] P. Martin-Löf, *The definition of random sequences*, Information and Control, 9(6) (1966) 602 – 619.

[17] J. E. Maxfield, *Normal k-tuples*, Pacific Journal of Mathematics, 3 (1953) 189–196.

[18] Y. Nakai, I. Shiokawa, *Discrepancy estimates for a class of normal numbers*, Acta Arithmetica, 62(3) (1992) 271 – 284.

[19] C.P. Schnorr, A unified approach to the definition of random sequences, Mathematical Systems Theory, 5 (1971) 246 – 258.

[20] W. M. Schmidt, *Über die Normalität von Zahlen zu verschiedenen Basen*, Acta Arithmetica 7 (1961/1962) 299 – 309.

[21] W. Sierpiński, *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 45 (1917) 127 – 132.

[22] A. Spanos, *Probability theory and statistical inference: econometric modelling with observational data*, Cambridge University Press, 1999.

[23] A. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society II, 42 (1937) 230 – 265.

[24] A. Turing, *A note on normal numbers*, Collected Works of A. M. Turing, Pure Mathematics, in: J.L. Britton (Ed.), North-Holland, (1992) 117 – 119.

[25] S. Wagon, *Is pi normal*, The Mathematical Intelligencer 7 (1985) 65 – 67.

[26] *UCLA College Mathematics, Math 170B Probability theory II*, http://www.math.ucla.edu/~heilman/teach/170bhw7.pdf.

[27] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences https://oeis.org/A002193

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје
Машински факултет,
Карпош II, бб (1000) Скопје, Р. Македонија
e-mail: emilija.celakoska@mf.edu.mk

Примен: 14. 01. 2018
Поправен: 13. 03. 2018
Одобрен: 14. 03. 2018

Објавен на интернет: 28.08.2018