STUDENTSKA RUBRIKA

Metode izračunavanja determinanti matrica n-tog reda

DAMIRA KEČEK*

Sažetak. *U članku su opisane metode izračunavanja determinanti matrica n-tog reda. Svaka od njih je ilustrirana primjerima.*

Ključne riječi: *determinante, algebarski komplement, Laplaceov razvoj determinante*

Methods of computing determinants of the n-th order

Abstract. *In the paper are described methods of computing determinants of the n-th order. Each of them is illustrated by examples.*

Key words: *determinants, cofactor, Laplace expansion of the determinant*

1. Uvod

Determinantu kvadratne matrice $A = [a_{ij}]$ reda n definiramo kao broj

$$detA = \sum (-1)^{i(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} ... a_{np(n)}$$

gdje $p(1)$, $p(2)$, ..., $p(n)$ prolaze svih $n!$ mogućih permutacija brojeva $1, 2, ..., n$. Predznak svakog sumanda u $detA$ ovisi o broju inverzija u permutaciji, $i(p)$, tj. o broju situacija kad u permutaciji vrijedi $i < j$ i $p(i) > p(j)$.

Determinantu matrice obično označavamo sa

$$detA = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Veleučilište u Varaždinu Jurja Križanića 33, 42000 Varaždin, damira.kecek@velv.hr

Ako je $n = 1$, $detA = |a| = a$.

Za $n = 2$ imamo $2! = 2$ permutacije, $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Kako je $i(p_1) = 0$, a $i(p_2) = 1$ imamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Za $n = 3$ račun postaje kompliciraniji, imamo $3! = 6$ permutacija,

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dobivamo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Primijetimo da računanje determinante pomoću definicije nije jednostavno. Zato postoje razne metode kojima se determinanta brže izračuna, a najopćenitija metoda je Laplaceov razvoj determinante.
Laplaceov razvoj determinante može se provoditi po bilo kojem retku ili stupcu matrice. Neka je A matrica reda n. Ako u toj matrici izostavimo i-ti redak i j-ti stupac dobit ćemo matricu čiju determinantu zovemo subdeterminanta ili minora i označavamo sa M_{ij}.
Algebarski komplement ili kofaktor elementa a_{ij} je broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Laplaceov razvoj po i-tom retku:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Laplaceov razvoj po j-tom stupcu:

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Zadatak 1. *Izračunajte determinantu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ *Laplaceovim razvojem po* *a) trećem retku,*

b) drugom stupcu.

Rješenje:

$$a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$
$$+ 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot [0 - (-8)] - 5 \cdot [-1 - (-12)] + 1 \cdot (4 - 0)$$
$$= -27.$$

$$b) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+ 5 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 0 + 4 \cdot [1 - (-6)] - 5 \cdot [-1 - (-12)]$$
$$= -27.$$

Kod računanja determinante matrice najbolje je izabrati onaj redak ili stupac koji sadrži najviše nula jer je tada račun kraći.

Navedimo sada neka svojstva determinanti koja ćemo koristiti u izračunavanju determinanti višeg reda:

1. Dodamo (oduzmemo) li nekom retku (stupcu) elemente nekog drugog retka (stupca) ili njihovu linearnu kombinaciju, vrijednost determinante se ne mijenja.

2. Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog njenog retka (stupca) brojem c, tada je $det(B) = c \cdot det(A)$.

3. Ako se neki redak ili stupac matrice sastoji samo od nula, determinanta te matrice jednaka je nuli.

4. Ako je A trokutasta matrica, tada joj je determinanta jednaka produktu elemenata njezine glavne dijagonale.

5. Ako su u matrici dva retka (stupca) proporcionalna, determinanta joj je jednaka nuli.

6. Zamjenom dvaju stupaca determinanta mijenja predznak.

7. Neka se matrice A i B razlikuju samo u elementima i-tog retka (stupca). Suma determinanti $det(A)+det(B)$ je determinanta čiji je i-ti redak (stupac) suma odgovarajućih članova i-tih redova (stupaca) u $det(A)$ i $det(B)$, a ostali elementi su jednaki odgovarajućim elementima tih determinanti.

8. Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, tada vrijedi $det(AB) = det(A)det(B)$ (Binet-Cauchyjev teorem).

2. Metode izračunavanja determinanti matrica n-tog reda

2.1. Svođenje matrice na trokutasti oblik

Ova metoda se sastoji u transformiranju matrice transformacijama sličnosti u oblik u kojem su svi elementi s jedne strane glavne dijagonale matrice jednaki nuli. Tada primjenom Cauchy–Binetove formule slijedi da je vrijednost determinante matrice jednaka produktu elemenata na glavnoj dijagonali.

Zadatak 2. *Izračunajte determinantu*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 1 & 2 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Pomnožimo prvi redak sa -1 i dodamo drugom, trećem, ..., n-tom, to nam daje

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 1 & 2 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 2-x_{12} & x_{23}-x_{13} & \dots & x_{2n}-x_{1n} \\ 0 & 2-x_{12} & 3-x_{13} & \dots & x_{3n}-x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2-x_{12} & 3-x_{13} & \dots & n-x_{1n} \end{vmatrix}$$

nastavimo li analogno postupak, tj. pomnožimo drugi redak sa -1 i dodamo trećem, četvrtom, ..., n-tom, i tako sve do $(n-1)$. retka, dobivamo

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 2-x_{12} & x_{23}-x_{13} & \dots & x_{2n}-x_{1n} \\ 0 & 0 & 3-x_{23} & \dots & x_{3n}-x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-x_{n-1,n} \end{vmatrix} \\ &= (2-x_{12})\cdot(3-x_{23})\cdots(n-x_{n-1,n}). \end{aligned}$$

Zadatak 3. *Izračunajte determinantu*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 & x_1 - y_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 - y_2 & x_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} - y_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ x_n - y_n & x_n & \dots & x_n & x_n & x_n \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Pomnožimo prvi redak sa $-x_1$ i dodamo drugom, pomnožimo prvi redak sa $-x_2$ i dodamo trećem, ..., pomnožimo prvi redak sa $-x_n$ i dodamo n-tom retku.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 & x_1 - y_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 - y_2 & x_2 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} - y_{n-1} & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} \\ x_n - y_n & x_n & \dots & x_n & x_n & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -y_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -y_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -y_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

= razvoj po (n+1). stupcu

$$= (-1)^{1+n+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & \dots & -y_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -y_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ -y_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+n+1} \cdot (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & \dots & y_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ y_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

= u ovoj determinanti će "preživjeti" jedino sumand koji odgovara permutaciji

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} y_1 \cdot y_2 \cdots y_n.$$

2.2. Metoda promjene elemenata u determinanti

Neka je $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ determinanta kvadratne matrice A, a

$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$ determinanta u kojoj svakom elementu determinante D dodamo broj x. Primjenom svojstva 7, rastavimo determinantu $\widetilde{D}$ po prvom retku na zbroj dvije determinante, zatim svaku od njih rastavimo na zbroj dvije determinante po drugom retku, analogno nastavimo rastavljati dalje od trećeg do n-tog retka. Determinante s dva ili više redaka koji se sastoje samo od elemenata x, jednake su nuli prema svojstvu 5, a nad one koje sadrže jedan redak s elementima x primjenimo svojstvo 2 i razvijemo Laplaceovim pravilom po tom retku. Imamo

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}}_{=0}$$

=dalje nastavljamo analogno rastavljati od 3. do n-tog retka=

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ x & x & \dots & x \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= D + \sum_{i=1}^{n} x \cdot \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = D + x \cdot \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij},$$

gdje je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij}.

Zadatak 4. *Izračunajte determinantu* $D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$.

Rješenje:

$$D_n = \begin{vmatrix} (1-n)+n & 0+n & 0+n & \dots & 0+n & 0+n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0+n & (2-n)+n & 0+n & \dots & 0+n & 0+n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}}_{=0}$$

Nastavimo li analogno postupak rastavljanja determinanti, dobivamo

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = \text{primjena svojstva 4} \\ &= (1-n)(2-n)\cdots(-1)\cdot n \\ &= (-1)^{n-1}\cdot n!. \end{aligned}$$

Zadatak 5. *Izračunajte determinantu* $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ y & x & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned} \textit{Rješenje: } D_n &= \begin{vmatrix} (x-y)+y & 0+y & 0+y & \dots & 0+y & 0+y \\ y & x & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & y & y & \dots & y & y \\ y & x & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
= \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & y & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} y & y & y & \dots & y & y \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} y & y & y & \dots & y & y \\ y & y & y & \dots & y & y \\ y & y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}}_{=0}
$$

$$
= \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & y & y & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & y & y & \dots & y & y \\ 0 & 0 & x-y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & y & y & \dots & y & y \\ y & y & y & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}}_{=0}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} y & y & y & \dots & y & y \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} y & y & y & \dots & y & y \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & y & y & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y & y & y & \dots & x & y \\ y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}}_{=0} = \cdots =
$$

$$= \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-y \end{vmatrix} + y \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \hat{A}_{ij}$$

$$= (x-y)^n + y \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \hat{A}_{ij}$$

$$= \begin{cases} \hat{A}_{ij} = 0, \quad za \quad i \neq j \\ \hat{A}_{ii} = (-1)^{i+i} \cdot \begin{vmatrix} x-y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x-y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x-y \end{vmatrix} = (x-y)^{n-1}, \quad za \quad i = j \end{cases}$$

$$= (x-y)^n + y \cdot n \cdot (x-y)^{n-1}$$

$$= (x-y)^{n-1}[x + y \cdot (n-1)].$$

2.3. Metoda rekurzivnih relacija

Neka je

$$D_n = pD_{n-1} + rD_{n-2}, \quad n \geq 3 \tag{1}$$

dvočlana rekurzija s konstantnim koeficijentima.

Razlikujemo 2 slučaja:

1. $r = 0$, onda je

$$D_n = pD_{n-1} = p(pD_{n-2}) = p^2 D_{n-2} = \cdots = p^{n-1} D_1. \tag{2}$$

2. $r \neq 0$
   Rekurziji (1) pridružujemo karakteristični polinom $k(x) = x^2 - px - r$. Neka su x_1 i x_2 korijeni karakteristične jednadžbe $x^2 - px - r = 0$.

   Imamo slučajeve:

   (a) $x_1 \neq x_2$, onda je

$$D_n = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

   gdje se konstante k_1 i k_2 odrede pomoću poznatih D_1 i D_2, tj.

$$k_1 = \frac{D_2 - x_2 D_1}{x_1(x_1 - x_2)}, \tag{4}$$

$$k_2 = -\frac{D_2 - x_1 D_1}{x_2(x_1 - x_2)}. \tag{5}$$

(b) $x_1 = x_2$, onda je

$$D_n = x_1^{n-1} D_1 + (n-1) x_1^{n-2} (D_2 - x_1 D_1), n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Zadatak 6. *Izračunajte determinantu:*

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} = \{\text{razvoj po 1. retku}\}$

$= 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$

$= 5 \cdot D_{n-1} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix} = \{\text{razvoj po 1. stupcu}\}$

$= 5 \cdot D_{n-1} - 4 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$

$= 5 \cdot D_{n-1} - 4 D_{n-2},$

$D_1 = |5| = 5, D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 21.$

Rješenja karakteristične jednadžbe $x^2 - 5x + 4 = 0$ su $x_1 = 4$ i $x_2 = 1$.
Pomoću formula (4) i (5) odredimo koeficijente k_1 i k_2 koje uvrstimo u formulu (3)

zajedno sa rješenjima x_1 i x_2. Konačno slijedi

$D_n = \frac{4}{3} \cdot 4^n + (-\frac{1}{3}) \cdot 1^n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$.

Literatura

[1] K. HORVATIĆ, *Linearna algebra*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1999.

[2] I.V. PROSKURYAKOV, *Problems in Linear Algebra*, Mir, Moskva, 1978.