III РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика 1976-1985
подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Со кој најмал природен број треба да се помножи бројот 2520 за да се добие точен квадрат?

2. Дадено е множеството

$$A = \{x \mid x = \frac{60+n}{n}, n \in N\}$$

а) Формирај подмножество B од множеството A, елементите на кое да бидат сите можни природни броеви;

б) Формирај подмножество C од множеството B, елементите на кое да бидат сите можни прости броеви.

3. Колку литри дестилирана вода треба да се помеша со 4 литри 5%-тен раствор на оцетна киселина за да се добие 1%-тен раствор на оцетна киселина.

4. Две кружници со еднакви радиуси се сечат во точките A и B. Низ точката A е повлечена правата a, која дадените кружници ги сече во точките P и S. Докажи дека $\triangle PBS$ е рамнокрак, независно од положбата на правата a.

5. Во конвексен четириаголник ABCD, должината на едната дијагонала е 1 cm, а на другата 2 cm. Должините на отсечките што ги сврзуваат средините на спротивните страни се меѓусебно еднакви.

а) Докажи дека дијагоналите на четириаголникот ABCD се заемно нормални;

б) Пресметај ја плоштината на четириаголникот ABCD.

10. (1978.VII.1)

I. Ќе го разложиме бројот 2520 на прости множители:

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

За еден број да биде точен квадрат треба неговите прости множители да бидат на парни степени.

Значи, бројот 2520 треба да се помножи со $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ (тоа е најмалиот природен број) и ќе се добие:

$$2520 \cdot 70 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2$$
$$= 420^2 = 176400.$$

Одговор: со 70.

11. (1978.VII.2)

I. Изразот $\frac{60+n}{n} = \frac{n}{n} + \frac{60}{n} = 1 + \frac{60}{n}$ е природен број, ако n е делител на бројот 60, т.е.

$n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Тогаш

$\frac{60}{n} \in \{60, 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$ а

$\frac{n+60}{n} \in \{61, 31, 21, 16, 13, 11, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$

Значи: $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 16, 21, 31, 61\}$

и $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 31, 61\}$

Одговор: $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 16, 21, 31, 61\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 31, 61\}$

12. (1978.VII.3)

I. При решавањето на оваа задача може и вака да се резонира (размислува): наместо 4 литра од 5%-тен раствор да земеме 1 литар од 5%-тен раствор и во него да додадеме 4 литри дестилирана вода, па тогаш ќе добиеме 5 литри со 1%-тен раствор оцетна киселина. За 4 литри тогаш ќе требаат $4 \cdot 4 = 16$ литри дестилирана вода, па ќе се добие 1%-тен раствор оцетна киселина.

II. (со равенка) Ваквите задачи, со раствори, можат многу лесно (велиме „шаблонски") да се решат со помош на равенка.

$$4\,\frac{5}{100} = (x+4)\cdot\frac{1}{100},$$

од каде што е

$$20 = x + 4$$
$$x = 16$$

III. Оваа задача може да се реши и со помош на пропорции:

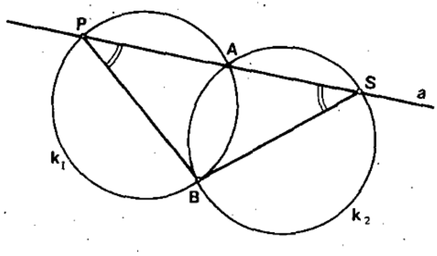
$$\begin{array}{ll} \downarrow 4 \text{ л.} & \uparrow 5\% \\ (x+4) \text{ л.} & 1\% \\ \hline \end{array}$$

$$4 : (x+4) = 1 : 5$$
$$x + 4 = 20$$
$$x = 16$$

Одговор: 16 литри.

13. (1978.VII.4)

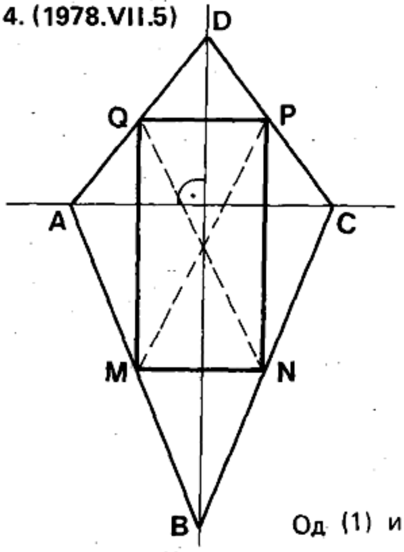
I. Нека се дадени кружниците k_1 и k_2, коишто се сечат во точките A и B, и правата a што минува низ точката A, нека ги сече кружниците во точките P и S. (црт. 8).



Црт. 8

Тетивата AB е заедничка тетива за овие две складни кружници, затоа $\measuredangle APB = \measuredangle ASB$, како перифериски агли над иста тетива. Од тоа следува дека $\triangle PBS$ е рамнокрак, со основа PS и со краци $\overline{BP} = \overline{BS}$.

14. (1978.VII.5)



Црт. 9

I. ABCD нека е кој и да е конвексен четириаголник. Ќе покажеме дека средините на неговите страни се темиња на паралелограм.

За триаголникот ABC отсечката MN е средна линија, затоа е:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ и } MN \parallel AC \qquad (1)$$

За триаголникот ACD, отсечката QP е средна линија, затоа е:

$$\overline{QP} = \frac{1}{2}\overline{AC} \text{ и } QP \parallel AC \qquad (2)$$

Од (1) и (2) $\Rightarrow \overline{MN} = \overline{QP}$ и $MN \parallel QP$ (3)

Аналогно се покажува дека е:

$$\overline{MQ} = \overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{BD} \text{ и } MQ \parallel NP \qquad (4)$$

Од (3) и (4) следува дека четириаголникот MNPQ е *паралелограм чиишто страни се паралелни и еднакви на половина од дијагоналите на четириаголникот* ABCD.

а) Бидејќи според условот на задачата е:

$$\overline{MP} = \overline{NQ},$$

следува дека паралелограмот MNPQ е правоаголник. Бидејќи страните на овој правоаголник се паралелни со дијагоналите AC и BD на четириаголникот ABCD, следува дека дијагоналите се нормални меѓу себе, т.е.

$$AC \perp BD.$$

б) Бидејќи четириаголникот ABCD има нормални дијагонали, тогаш неговата плоштина е:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Одговор: $P = 1\ cm^2$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Докажи дека разликата од квадратите на два сукцесивни непарни броја е делива со 8.

2. Еден резервоар може да прими 9117 m^3 вода и може да се полни низ три цевки. Низ првата цевка за 4 часа протекуваат 231 m^3 вода; низ втората за 3 часа 143 m^3, а низ третата за 5 часа исто толку колку што протекуваат низ првата за 4 часа. За колку време ќе се наполни резервоарот, ако истовремено се полни со трите цевки?

3. Триаголникот ABC е формиран од апцисната оска и од правите на кои равенките им се: $3x - 4y = -24$ и $2x - 1{,}5y = -9$. Пресметај ја плоштината на телото што се добива кога триаголникот ABC ротира околу апцисната оска.

4. Две точки A и B се гледаат под агол од 30^o и од точката C и од точката D, а меѓу нив растојанието е 300 m. Правите AC и BD се нормални меѓу себе. Пресметај го растојанието AB.

5. Основните рабови на права тристрана призма се: $a = 9$ cm, $b = 10$ cm и $c = 17$ cm, а нејзината висина е $H = 3 \cdot h_a$, каде што h_a е висина на страната a во $\triangle ABC$.

Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата.

15. (1978.VIII.1)

I. Ако $k \in N$, тогаш $2k-1$ е непарен број, неговиот следбеник $2k$ е парен, а $2k+1$ е непарен. Значи $2k-1$ и $2k+1$, се два сукцесивни непарни броја. Разликата на нивните квадрати е: $(2k+1)^2-(2k-1)^2=(4k^2+4k+1)-(4k^2-4k+1)=8к$, од каде што е јасно дека е делива со 8.

16. (1978.VIII.2)

I. Од првата цевка за 4 часа истекуваат 231 m^3 вода, а за 1 час ќе истечат четирипати помалку, т.е. $\frac{231}{4}$ m^3 вода.

Од втората цевка за 1 час истекуваат $\frac{144}{3}$ m^3 вода, а од третата $\frac{231}{5}$ m^3 вода.

За 1 час, од трите цевки ќе истечат:

$$\frac{231}{4}+\frac{144}{3}+\frac{231}{5}=\frac{15\cdot 231+20\cdot 144+12\cdot 231}{60}=$$

$$=\frac{3465+2880+2772}{60}=\frac{9117}{60}.$$

За x часа од трите цевки ќе истечат $\frac{9117}{60}x$ m^3 вода.

Од равенството $\frac{9117}{60}x=9117$

добиваме $x=60$, т.е. трите цевки заедно би го наполниле резервоарот за 60 часа.

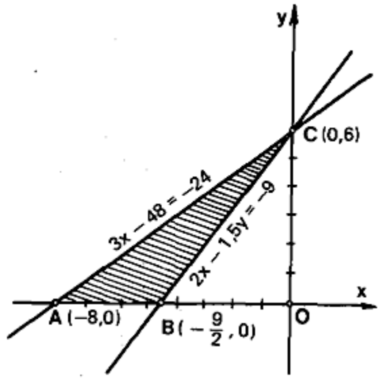
Одговор: 60 часа.

17. (1978.VIII.3)

I. Нулите на функциите т.е. нивните пресеци со x-оската се:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\ (-8,\ 0)$$

$$\begin{cases} 2x - 1{,}5y = -9 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\ (-\frac{9}{2},\ 0)$$



Црт. 10

Со тоа ги добиваме двете темиња A и B на триаголникот. Третото теме C ќе го најдеме во пресекот на двете прави. За таа цел ќе го решиме системот:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ 2x - 1{,}5y = -9 \end{cases}$$

Ако првата равенка ја помножиме со 3, а втората со − 8, ќе добиеме:

$$\begin{cases} 9x - 12y = -72 \\ -16x + 12y = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 12y = -72 \\ -7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 12y = -72 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = o \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow C\ (0,\ 6)$$

(види црт. 10.)

При ротација на $\triangle ABC$ околу x-оската се добива конус, од кој е „изваден" друг конус, со заеднички радиус и со помала висина. Плоштината на телото се состои од двете обвивки на тие конуси. Да ги пресметаме изводниците AC и BC и радиусот r. Ќе имаме:

$$s_1 = \overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$s_2 = \overline{BC} = \sqrt{(-\frac{9}{2})^2 + 6^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 36} = \sqrt{20{,}25 + 36} = \sqrt{56{,}26} = 7{,}5$$

$$r = \overline{OC} = 6$$

Тогаш плоштината на ротационото тело е:

$$P = \pi r s_1 + \pi r s_2 = \pi r\ (s_1 + s_2) = \pi \cdot 6\ (10 + 7{,}5) =$$
$$= 17{,}5 \cdot 6 \cdot \pi = 105\pi$$

Одговор: $P = 105\pi$ квадратни единици.

18. (1978.VIII.4)

I. Нека се дадени точките A, B, C и D, но така што да е: $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = 30^\circ$; $AD \perp BC$ и $\overline{CD} = 300$ (види цртеж 11.).

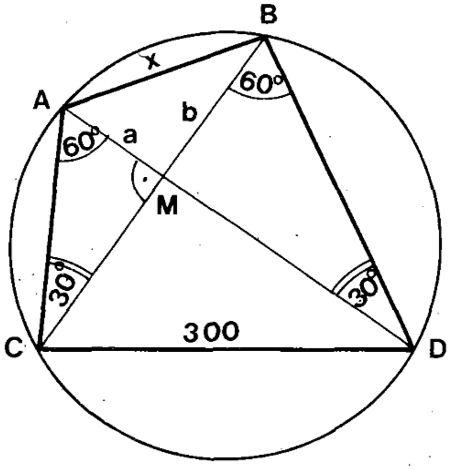
Нека ставиме: $\overline{MA} = a$; $\overline{MB} = b$; $\overline{AB} = x$.

Од правоаголниот $\triangle MAC$ имаме $\overline{AC} = 2a$; $\overline{MC} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. Аналогно, од правоаголниот $\triangle MBD$ имаме $\overline{BD} = 2b$, $\overline{MD} = b\sqrt{3}$. Од правоаголниот $\triangle MCD$ имаме:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{DM}^2$$

$$90000 = 3\,(a^2 + b^2)$$

$$30000 = a^2 + b^2.$$



Црт. 11

Најпосле од правоаголниот $\triangle MAB$ го добиваме бараното растојание $\overline{AB}$.

$$\overline{AB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$$

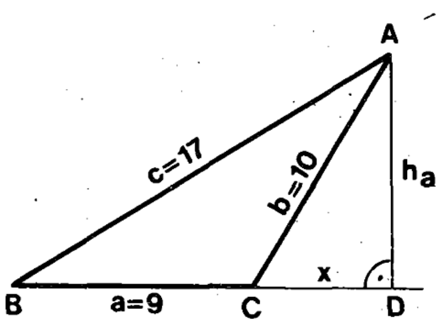
$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 = 30000$$

или

$$\overline{AB} = \sqrt{3 \cdot 10000} = 100\sqrt{3}.$$

Одговор: $\overline{AB} = 100\sqrt{3}$ m.

19. (1978.VIII.5)



Црт. 12

I. Ќе ја пресметаме првин плоштината на основата на призмата, т.е. на $\triangle ABC$.

Бидејќи $17^2 > 9^2 + 10^2$, т.е. $c^2 > a^2 + b^2$, следува дека $\triangle ABC$ е тапоаголен, со тап агол кај темето C. Тогаш подножјето на висината ha, точката D, е надвор од $\triangle ABC$. (види црт. 12.)

Од правоаголните триаголници ABD и ACD имаме

$$h_a^2 = 17^2 - (9 + x)^2$$

$$h_a^2 = 10^2 - x^2$$

од каде што е

$$17^2 - (9 + x)^2 = 10^2 - x^2$$

$$289 - (81 + 18x + x^2) = 100 - x^2$$

$$108 = 18x$$

$$x = 6$$

Во било која и да е од равенките, ако замениме за $x = 6$, ќе добиеме:

$$h_a^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$h_a = 8 \Rightarrow H = 3 \cdot h_a = 24$$

Плоштината на основата (базисот) е

$$B = \frac{1}{2}\ 9 \cdot 8 = 36,$$

а плоштината на обвивките е

$$M = L \cdot H = (a + b + c) \cdot 24 =$$

$$= (9 + 10 + 17) \cdot 24 = 864.$$

Плоштината на целата призма е

$$P = 2 \cdot B + M = 2 \cdot 36 + 864 = 936.$$

Волуменот на призмата е

$$V = B \cdot H = 36 \cdot 24 = 864.$$

Одговор: $P = 936\ cm^2$
$V = 864\ cm^3$.

II. Плоштината на $\triangle ABC$ со страни a, b и c се пресметува по т.н. ХЕРОНОВА ФОРМУЛА (Херон) која гласи:

$$P = \sqrt{s\ (s - a)\ (s - b)\ (s - c)}, \text{ каде што } s = \frac{a + b + c}{2},$$

Со примена на оваа формула можеме лесно да ја пресметаме плоштината на основата, т.е. на $\triangle ABC$.

Прво го наоѓаме s, полупериметарот.

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{9 + 10 + 17}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Тогаш плоштината на базисот е

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{18 \cdot (18-9)(18-10)(18-17)} =$$
$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8} =$$
$$= \sqrt{9^2 \cdot 4^2} = 9 \cdot 4 = 36$$

Значи, за основата добиваме $B = 36$. Од друга страна е

$B = \frac{a \cdot h_a}{2}$, т.е. $36 = \frac{9 \cdot h_a}{2}$, од каде што добиваме $h_a = 8$. Понатаму, задачата ја решаваш како погоре...