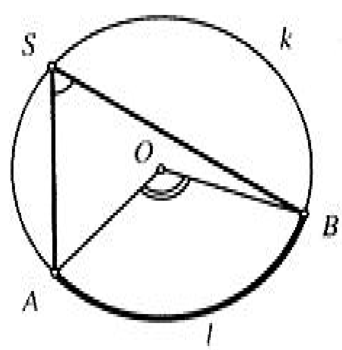
Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1996/97 година

ЈЕДНА ЈЕДНОСТАВНА ТЕОРЕМА

Војислав Петровић, Нови Сад

Постоје у математици теореме које због своје једноставности и очигледности, како формулације, тако и доказа, не привлаче посебну пажњу. И тако оне, најчешће неоправдано, бивају потискиване на маргине и препуштене неумољивом дејству заборава. А онда се изненада и сасвим неочекивано појаве ситуације за које су та запостављена и заборављена тврђења прави, а често и једини лек. Једном таквом тврђењу посвећен је овај чланак.

Свима је позната веза између периферијских и централних углова кружнице дата кроз теорему: *"Периферијски угао кружнице је два пута мањи од одговарајућег централног."* Тако је $\angle ASB = \frac{1}{2}\angle AOB$ (сл. 1).



Слика 1

Ако се за меру централног угла узме дужина кружног лука који лежи унутар угла, последња једнакост добија облик

$$\angle ASB = \frac{1}{2}\, l\,, \tag{1}$$

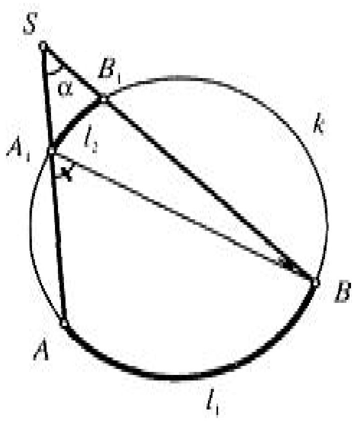
где је $l = \overset{\frown}{AB}$. (Овде треба нагласити да сви лукови којима се мере централни углови леже на једној утврђеној кружници. У противном формула (1) губи смисао. При томе сви углови подударни одређеном центалном углу имају исту лучну меру као и тај угао.)

Али шта ако теме угла није на кружници, а његови краци или њихови продужеци секу или додирују кружницу? Да ли и тада постоји слична формула која би се у случају периферијског угла свела на (1)? Питања сасвим природна. А одговор? Испоставиће се да је много простији него што на први поглед изгледа. Он се налази у наредне две теореме.

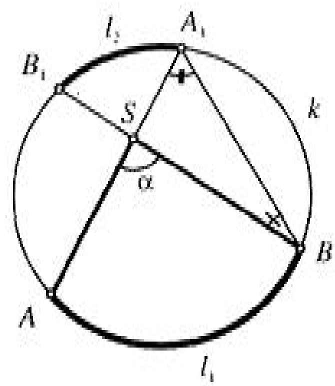
Теорема 1. *Ако краци a и b угла $\alpha = \angle aSb$ секу кружницу k у тачкама A, A_1 и B, B_1 (сл. 2), тада је*

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(l_1 - l_2\right), \tag{2}$$

где су l_1 и l_2 луци AB и A_1B_1 који леже унутар $\angle aSb$.



Слика 2.



Слика 3.

Доказ. $\angle AA_1B$ је спољашњи угао у $\triangle SA_1B$, па је $\angle AA_1B = \alpha + \angle A_1BS$. Отуда је $\alpha = \angle AA_1B - \angle A_1BS$. Како је, па основу (1), $\angle AA_1B = \frac{1}{2}\, l_1$ и $\angle A_1BS = \frac{1}{2}\, l_2$, следи $\alpha = \frac{1}{2}\left(l_1 - l_2\right)$. □

Теорема 2. *Ако теме S угла $\alpha = \angle aSb$ лежи у унутрашњости кружнице k, а његови краци a и b и њихови продужеци секу k у тачкама A, A_1 и B, B_1 (сл.3), тада је*

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(l_1 + l_2\right), \tag{3}$$

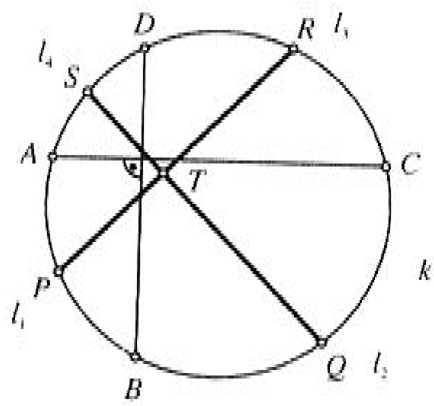
где су l_1 и l_2 луци AB и A_1B_1 који леже унутар угла α, односно њему унакрсног угла.

Доказ. Слично доказу претходне теореме, α је спољашњи угао за $\triangle A_1SB$, одакле је $\alpha = \angle SA_1B + \angle SBA_1$, односно $\alpha = \frac{1}{2}\left(l_1 + l_2\right)$. □

У случају периферијског угла, а то значи $S \in k$ и $l_2 = 0$, обе формуле, и (2) и (3), своде се на $\alpha = \frac{1}{2}\, l_1$, тј. на (1). Дакле формуле (2) и (3) су заиста уопштења формуле (1).

Све у свему, ништа импресивно. Нарочито када се имају у виду докази теорема који не иду даље од збира углова у троуглу. Међутим први утисци су по правилу варљиви. Потврда за то су примери који следе, у којима су формуле (2) и (3) главно оружје. Најпре пар једноставнијих примера.

Пример 1. *Нека су AC и BD две узајамно нормалне тетиве кружнице k и нека су P, Q, R, S редом средине лукова AB, BC, CD, DA (сл.4). Доказати да је $PR \perp QS$.*



Слика 4.

Решење. Означимо са T пресек тетива PR и QS и са l_1, l_2, l_3, l_4 редом лукове AB, BC, CD, DA кружнице k. Како је $AC \perp BD$, на основу (3) је

$$\frac{1}{2}(l_1 + l_3) = \frac{1}{2}(l_2 + l_4) = 90^\circ .$$

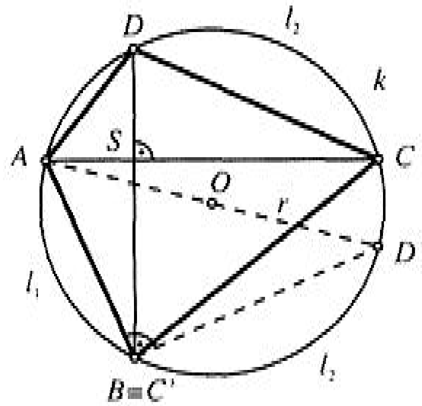
(Ради јаснијег излагања комбиноваће се обе врсте мера за углове, лучна и степена.) Следи $\angle PTQ = \frac{1}{2}(\widehat{PQ} + \widehat{RS}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(l_1+l_2) + \frac{1}{2}(l_3+l_4)\right) = \frac{1}{4}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$. □

Пример 2. *Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао чије су дијагонале узајамно нормалне и секу се у тачки S. Ако је r полупречник описане кружнице, доказати да је*

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 = SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 = 4r^2 .$$

Решење. Довољно је да се докаже да је $AB^2 + CD^2 = 4r^2$. За други збир доказ је сличан, док трећи следи из прва два и Питагорине теореме.

Обележимо са l_1 и l_2 лукове AB и CD кружнице k описане око четвороугла $ABCD$ (сл. 5). На основу (3) је $\angle ASB = 90^\circ = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, односно



Слика 5.

$l_1 + l_2 = 180°$. Ако се лук l_2 ротира око центра кружнице k, све док се не "настави" на лук l_1, тј. дође у положај $C'D'$, где се тачка C' поклапа са B, добиће се полукружница са пречником AD'. Како је $\angle ABD' = 90°$, из Питагорине теореме следи

$$AB^2 + CD^2 = AB^2 + BD'^2 = AD'^2 = 4r^2\,. \square$$

Пример 3. *Нека је S тачка у унутрашњости оштроуглог $\triangle ABC$, таква да је $\angle ASB = \gamma + 60°$ и $\angle BSC = \alpha + 60°$, где је $\alpha = \angle BAC$ и $\gamma = \angle ACB$. Обележимо са A_1, B_1, C_1 тачке у којима праве AS, BS, CS по други пут секу кружницу k описану око $\triangle ABC$. Доказати да је $\triangle A_1B_1C_1$ једнакостраничан.*

Решење. Обележимо са l лук AB кружнице k који садржи тачку C_1 и са l_1 лук A_1B_1 који садржи тачку C (сл. 6).

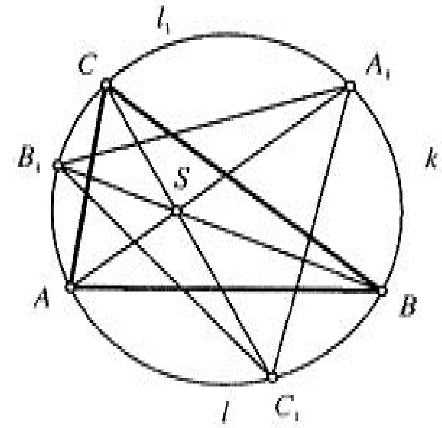
На основу (3) је $\angle ASB = \frac{1}{2}(l + l_1)$, из чега следи

$$l_1 = 2\angle ASB - l = 2(\gamma + 60°) - 2\gamma = 120°.$$

На сличан начин показује се да и сваки од лукова B_1C_1 и C_1A_1 износи $120°$, одакле следи да је $\triangle A_1B_1C_1$ једнакостраничан. $\square$

Ево сада једног сложенијег задатка. Док за претходне примере постоје и друга решења, у шта се читаоци сами могу уверити, за наредни, колико је аутору познато, то није случај.

Пример 4. *Кружница k пролази кроз теме C правог угла aCb и сече краке a и b још у тачкама A и B, редом (сл. 7). На луковима AB, BC, CA уочене су редом тачке R, P, Q са следећим особинама. Тангента у тачки R сече краке a и b у тачкама R_1 и R_2 и R је средина дужи R_1R_2; тангента у тачки P сече крак b и продужетак крака a у тачкама P_1 и*



Слика 6.

P_2 и P је средина P_1P_2; тангента у тачки Q сече крак a и продужетак крака b у тачкама Q_1 и Q_2 и Q је средина Q_1Q_2.

Доказати да је $\triangle PQR$ једнакостраничан.

Решење. Уведимо следеће ознаке: $l_1 = \overset{\frown}{BP}$, $l_2 = \overset{\frown}{PC}$, $l_3 = \overset{\frown}{CQ}$, $l_4 = \overset{\frown}{QA}$, $l_5 = \overset{\frown}{AR}$, $l_6 = \overset{\frown}{RB}$, $\alpha = \angle CR_1R_2$, $\beta = \angle CR_2R_1$, $\gamma = \angle CP_1P_2$.

С обзиром да је P средина хипотенузе P_1P_2 правоуглог $\triangle P_1P_2C$, то је $\gamma = \angle CP_1P_2 = \angle PCP_1$. Из (2) и (1) је $\gamma = \frac{1}{2}(l_2 - l_1) = \frac{1}{2}l_1$, односно $l_2 = 2l_1$. Слично је $l_3 = 2l_4$. Из $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = l_5 + l_6 = 180°$ (јер је $\angle ACB = 90°$), следи $l_2 + l_3 = 120°$, односно $\angle PRQ = 60°$.

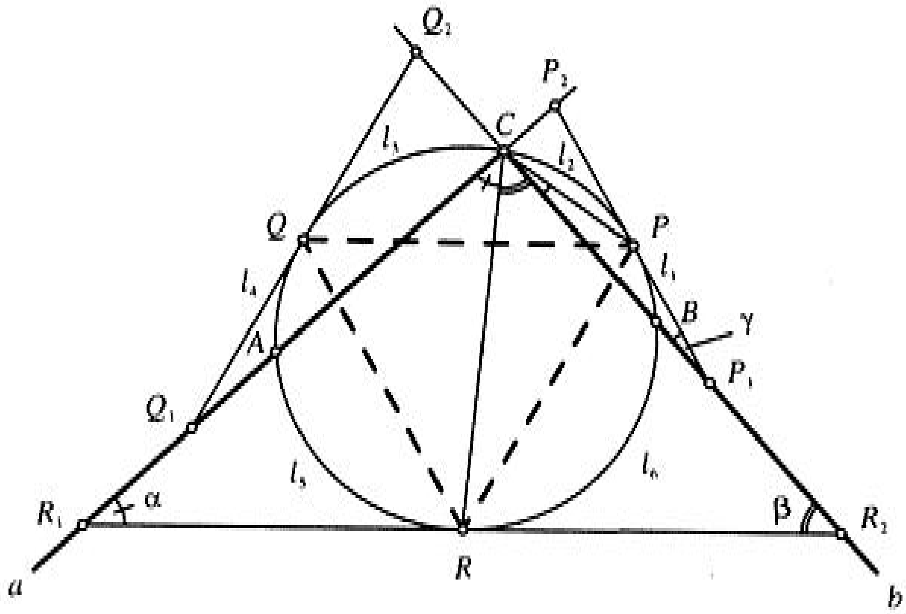
Из $l_2 + l_3 = 120°$, $l_2 = 2l_1$ и $l_3 = 2l_4$ следи $l_1 + l_4 = 60°$. Отуда је

$$l_4 + l_5 + l_6 + l_1 = 240°. \qquad (*)$$

R је средина хипотенузе R_1R_2 правоуглог $\triangle R_1R_2C$, па је $\angle R_1CR = \alpha$ и $\angle R_2CR = \beta$. Из (1) и (2) следи $\alpha = \frac{1}{2}((l_6 + l_1 + l_2) - l_5) = \frac{1}{2}l_5$ и $\beta = \frac{1}{2}((l_5 + l_4 + l_3) - l_6) = \frac{1}{2}l_6$, односно

$$\begin{aligned} l_6 + l_1 + l_2 &= 2l_5 \\ 2l_6 &= l_5 + l_4 + l_3 \,. \end{aligned}$$

Сабирајући леве и десне стране и имајући у виду да је $l_2 = 2l_1$, $l_3 = 2l_4$, добијамо $l_6 + l_1 = l_5 + l_4$. А то, с обзиром на (*), даје $l_6 + l_1 = l_5 + l_4 = 120°$. Користећи опет (3) добијамо $\angle RQP = \frac{1}{2}(l_6 + l_1) = 60°$ и $\angle RPQ = \frac{1}{2}(l_5 + l_4) = 60°$. $\triangle PQR$ је једнакостраничан. □



Слика 7.

ЗАДАЦИ

1. Из тачке S која лежи у спољашњости кружнице k повучене су тангента ST и сечица SAB, $T, A, B \in k$. Симетрала $\angle TSA$ сече тетиве TA и TB у тачкама C и D. Доказати да је $TC = TD$.

(*Упутство.* Показати да је $\angle TCD = \angle TDC$.)

2. Нека је $ABCD$ четвороугао уписан у кружницу k и нека је S средина лука AB који не садржи тачке C и D. Тетиве SC и SD секу страницу AB у тачкама E и F. Доказати да је четвороугао $FECD$ тетиван.

(*Упутство.* Показати да је $\angle EFD + \angle ECD = 180°$.)

3. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Праве AB и CD секу се у тачки E, а праве AD и BC у тачки F. Симетрала $\angle BEC$ сече странице BC и AD у тачкама L и M, док симетрала $\angle CFD$ сече странице AB и CD у тачкама K и N. Доказати да је $KLMN$ ромб.

(*Упутство.* Уочити описану кружницу и показати да су поменуте симетрале узајамно нормалне. Затим искористити једнакокраке троуглове KEM и NLF.)