XII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1969

1.(II,69). Во едно маало живеат четири добри другари: Горан, Зоран, Јован и Стојан. Секој од нив има постар брат што се вика како еден од неговите другари. Исто така, и името на таткото на секој од нив е име на некој од неговите другари. Се разбира дека секој татко и неговите двајца синови имаат различни имиња.

Таткото на Стојан и братот на Јован го носат името на детето чиј брат се вика Јован. Братот на детето што го носи името на Зорановиот брат се вика како детето чиј татко е Горан. Чиј татко се вика Стојан?

Решение. Да ги означиме децата со првите букви од нивните имиња, т.е. со: Г, З, Ј и С. Ако Х е едно од децата, тогаш со Б(Х) да го означиме името на неговиот брат, а со Т(Х) - името на неговиот татко. Со помош на овие ознаки, условите на задачата можат да се формулираат на следниов начин:

(i) $X \neq Б(X) \neq T(X) \neq X$;

(ii) $Б(X) = J \Longleftrightarrow T(C) = Б(J) = X$;

(iii) $X = Б(З) \Longleftrightarrow T(Б(X)) = Г$.

Бидејќи $T(C) \neq C$, $Б(J) \neq J$, можни се следниве два случаја:

а) $T(C) = Б(J) = Г$; б) $T(C) = Б(J) = З$.

а) Нека $T(C) = Б(J) = Г$; според (ii), имаме $Б(Г) = J$, па мора да биде Б(З) = С. Но, според (iii), имаме:

$$Т(Б(С)) = Т(З) = Г,$$

што не е можно, зашто Т(С) = Г.

б) Нека Т(С) = Б(Ј) = З; тогаш, според (ii), имаме Б(З) = = Ј, а, според (iii),

$$Т(Б(Ј)) = Т(З) = Г.$$

Значи, имаме Б(Ј) = З, Б(З) = Ј, па мора да биде Б(Г) = С, Б(С) = = Г. Потоа имаме Т(З) = Г, Т(С) = З, па мора да биде Т(Г) = Ј и Т(Ј) = С.

Од сето тоа следува дека е можен само случајот Т(С) = Б(Ј) = = З, т.е. таткото на Јован се вика Стојан.

2.(II,69). Да се докаже дека равенката

$$x^4 + 3x^3 + 6x^2 + (6+к)x + 4 - к^2 = 0 \qquad (1)$$

не може да има четири реални корени за ниеден реален број к. За кои к таа има два пара *конјугирано комплексни корени*?

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} & x^4 + 3x^3 + 6x^2 + (6+к)x + 4 - к^2 = \\ & = (x^4 + x^3 + 2x^2 + кx^2) + (2x^3 + 2x^2 + 4x + 2кx) + \\ & \quad + (2x^2 + 2x + 4 + 2к) - (кx^2 + кx + 2к + к^2) = \\ & = x^2(x^2 + x + 2 + к) + 2x(x^2 + x + 2 + к) + \\ & \quad + 2(x^2 + x + 2 + к) - к(x^2 + x + 2 + к) = \\ & = (x^2 + x + 2 + к)(x^2 + 2x + 2 - к). \end{aligned}$$

Значи, равенаката (1) е еквивалентна со следниве две квадратни равенки:

$$x^2 + x + 2 + к = 0, \qquad (2)$$

$$x^2 + 2x + 2 - к = 0. \qquad (3)$$

Равенката (2) има реални решенија за $к \leqslant -\frac{7}{4}$, а равенката (3) за

$к \geqslant 1$. Значи, кога една од равенките има реални решенија другата има чисто комплексни, т.е. равенката (1) не може да има четири реални решенија за ниеден број к.

Сите четири решенија на равенката (1) се чисто комплексни броеви ако и само ако $-\frac{7}{4} < к < 1$.

3.(II,69). Да се конструира триаголник ако се зададени: едно теме, ортоцентарот и центарот на опишаната кружница.

Решение. Да претпоставиме дека триаголникот ABC е конструиран и нека е H ортоцентарот, T - тежиштето и O - центарот на опишаната кружница (црт.1.69). Ако A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA и AB соодветно, тогаш имаме:

$$\overrightarrow{TA} = -2\overrightarrow{TA_1}, \quad \overrightarrow{TB} = -2\overrightarrow{TB_1}, \quad \overrightarrow{TC} = -2\overrightarrow{TC_1}.$$

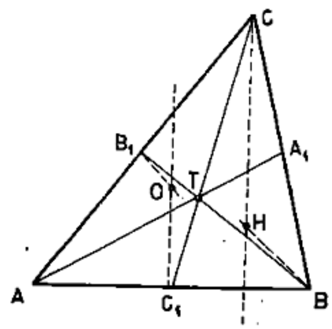
Значи, при хомотетијата χ со центар T и коефициент $-\frac{1}{2}$ имаме:

$$\chi(A) = A_1, \ \chi(B) = B_1, \ \chi(C) = C_1,$$

т.е. триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични со коефициент на сличност $-\frac{1}{2}$. Ортоцентарот на триаголникот $A_1B_1C_1$ е точката O, а ортоцентарот на триаголникот ABC е H. Значи, имаме $\chi(H) = O$, т.е.

$$\overrightarrow{TH} = -2\overrightarrow{TO}. \qquad (1)$$

Од сето тоа следува дека точките T, O и H се колинеарни и точката T ја дели отсечката HO во однос 2 : 1.



Црт.1.69

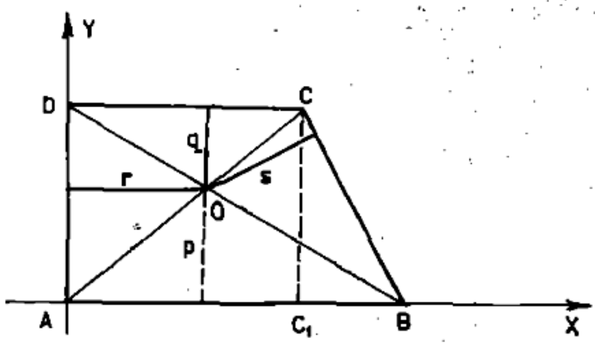
Нека, сега, се дадени темето A, ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница. Темињата B и C ќе лежат на кружницата $(O,\overline{OA})$. Точката T може да се најде, зашто лежи на правата HO и го задоволува условот (1). На правата AT ја наоѓаме точката A_1 од условот $TA=-2TA_1$. Ако низ A_1 повлечеме права p нормална на правата AH, тогаш на правата p лежат темињата B и C.

Значи, темињата B и C се пресечните точки на правата p со кружницата $(O,\overline{OA})$.

4.(II,69). Зададен е правоаголен трапез со основи a и b и помал крак c. Да се најдат растојанијата од пресекот O на дијагоналите до сите страни на трапезот.

Решение. За оваа задача ќе дадеме две решенија и тоа едно аналитичко, а друго чисто геометриско.

I) Нека дадениот трапез е ABCD, со основи $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$ и помал крак $\overline{AD}=c$, при што $\measuredangle BAD=90^\circ$ (црт.2.69). Ако воведеме координатен систем со почеток во точката A, x-оска правата AB, а y-оска правата AD, тогаш имаме: $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(b,c)$, $D(0,c)$.



Црт.2.69

Равенките на правите AC, BD и BC се:

$$AC:\ y=\frac{c}{b}x;\quad BD:\ y=-\frac{c}{a}(x-a);\quad BC:\ y=\frac{c}{b-a}(x-a).$$

Точката O е пресек на правите AC и BD, па е $O(\frac{ab}{a+b}, \frac{ac}{a+b})$. Од ова следува дека:

$$p = \frac{ac}{a+b}, \quad r = \frac{ab}{a+b}, \quad q = c - \frac{ac}{a+b} = \frac{bc}{a+b}. \qquad (1)$$

Останува да го најдеме уште растојанието s од O до правата BC. Ако равенката на правата BC ја напишеме во обликот

$$cx + (a-b)y - ac = 0,$$

тогаш добиваме:

$$s = \frac{c\frac{ab}{a+b} + (a-b)\frac{ac}{a+b} - ac}{-\sqrt{c^2 + (a-b)^2}} = \frac{abc}{(a+b)\sqrt{c^2+(a-b)^2}}. \qquad (2)$$

II) Плоштината на еден триаголник XYZ ќе ја означуваме со P_{XYZ}. Имаме:

$$P_{AOB} + P_{AOD} = P_{ABD}, \quad P_{AOD} + P_{DOC} = P_{ADC};$$

т.е., според црт.2.69,

$$ap + cr = ac, \quad cr + bq = bc.$$

Од друга страна имаме $p+q=c$, па, значи, p, q и r се решенија на системот

$$\begin{aligned} ap + cr &= ac, \\ cr + bq &= bc, \\ p + q &= c, \end{aligned}$$

од каде што ги добиваме растојанијата p, q и r дадени со (1).

Да го најдеме и растојанието s. Од $\triangle CC_1B$ имаме

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CC_1}^2 + \overline{C_1B}^2} = \sqrt{c^2 + (a-b)^2}.$$

Од друга страна имаме:

$$P_{BOC} + P_{COD} = P_{BDC}, \text{ т.е. } \overline{BC}\cdot s + bq = bc,$$

од каде што го добиваме и растојанието s, дадено со (2).

1.(III,69). Задача 1.(II,69).

2.(III,69). Да се реши неравенката

$$\log_2\left(\log_3 \frac{x-1}{x+1}\right) < \log_{1/2}\left(\log_{1/3} \frac{x+1}{x-1}\right). \qquad (1)$$

Решение. Користејќи го равенството

$$\log_{1/a} \frac{1}{x} = \log_a x ,$$

добиваме:

$$\log_{1/2}\left(\log_{1/3} \frac{x+1}{x-1}\right) = \log_2\left(\frac{1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}}\right).$$

Значи, неравенката (1) е еквивалентна со неравенката

$$\log_2\left(\log_3 \frac{x-1}{x+1}\right) < \log_2\left(\frac{1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}}\right). \qquad (2)$$

Логаритамската функција $y = \log_a x$ монотоно расте за $a > 1$, па од (2) добиваме:

$$\log_3 \frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}}. \qquad (3)$$

Но, $\log_3 \frac{x-1}{x+1}$ е логаритманд во $\log_2(\log_3 \frac{x-1}{x+1})$, па мора да биде $\log_3 \frac{x-1}{x+1} > 0$, што значи неравенката (3) е еквивалентна со неравенката

$$(\log_3 \frac{x-1}{x+1})^2 < 1,$$

т.е.

$$1 < \frac{x-1}{x+1} < 3,$$

од каде што добиваме $x < -2$.

3.(III,69). За кои вредности на a равенката

$$2\sin^2 x + 2a\sin^2 2x = 1$$

има решенија?

Решение. Јасно е дека за $a=0$ равенката (1) има решенија. Затоа, да претпоставиме дека $a\neq 0$. Во овој случај равенката (1) може да се напише во обликот

$$8a\sin^4 x-2(1+4a)\sin^2 x+1=0,$$

од каде што добиваме:

$$\sin^2 x=\frac{1+4a+\sqrt{1+16a^2}}{8a}, \qquad (2)$$

$$\sin^2 x=\frac{1+4a-\sqrt{1+16a^2}}{8a}. \qquad (3)$$

Равенката (1), за $a\neq 0$, е еквивалентна со равенките (2) и (3), па затоа ќе испитаме за кои вредности на a овие равенки имаат решенија.

Да претпоставиме дека $a>0$, т.е. $a=c^2$. Тогаш имаме:

$$1+4c^2+\sqrt{1+16c^4}>4c^2+4c^2=8c^2,$$

т.е.

$$\frac{1+4c^2+\sqrt{1+16c^4}}{8c^2}>1.$$

Понатаму:

$$1+4c^2-\sqrt{1+16c^4}>0,$$

$$1+4c^2-\sqrt{1+16c^4}<1+4c^2-1=4c^2<8c^2,$$

т.е.

$$0<\frac{1+4c^2-\sqrt{1+16c^4}}{8c^2}<1.$$

Значи, равенката (2) нема решенија за ниеден $a>0$, а равенката (3) има решенија за секој $a<0$.

Да претпоставиме, сега, дека $a<0$, т.е. $a=-c^2$ и да ги разгледаме равенките:

$$\sin^2 x=\frac{-1+4c^2+\sqrt{1+16c^4}}{8c^2}, \qquad (4)$$

$$\sin^2 x = \frac{-1+4c^2-\sqrt{1+16c^4}}{8c^2}. \qquad (5)$$

Имаме:

$$-1+4c^2-\sqrt{1+16c^4} < -1+4c^2-4c^2=-1,$$

т.е.

$$\frac{-1+4c^2-\sqrt{1+16c^4}}{8c^2} < 0,$$

од каде што следува дека равенката (5) нема решенија за ниеден c, т.е. равенката (3) нема решенија за ниеден $a<0$. Понатаму имаме:

$$-1+4c^2+\sqrt{1+16c^4} < -1+4c^2+1+4c^2=8c^2,$$

т.е.

$$\frac{-1+4c^2+\sqrt{1+16c^4}}{8c^2} < 1,$$

па равенката (4) ќе има решенија ако и само ако

$$-1+4c^2+\sqrt{1+16c^4} \geqslant 0,$$

коешто неравенство е исполнето за кој било c. Значи равенката (4) има решенија за кој било c, т.е. равенката (2) има решенија за кој било $a<0$.

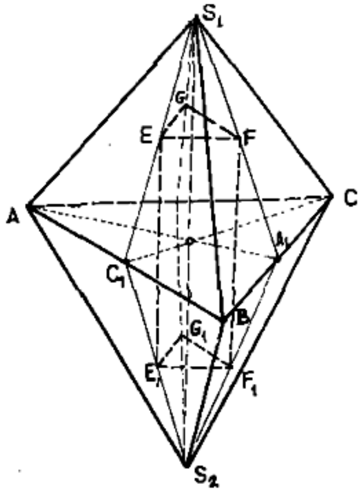
Од сето тоа следува дека, ако $a \neq 0$, тогаш барем една од равенките (2) и (3) има решенија, т.е. равенката (1) има решенија за секој реален број a.

4.(III,69). Две исти правилни тристрани пирамиди, со основен раб a, слепени се со основите. Плоштината на осниот пресек (на добиеното тело) што минува низ еден бочен раб е еднаква со плоштината на основата на пирамидите. Средините на бочните висини од пирамидите се темиња на тристрана призма. Да се најде плоштината и волуменот на таа тристрана призма.

Решение. Основата на призмата е рамностран триаголник. Страната $\overline{EF}$ е средна линија на триаголникот $S_1A_1C_1$, па имаме $\overline{EF}$ =

$= \frac{1}{2}\overline{A_1C_1}$ (црт.3.69). $\overline{A_1C_1}$ е средна линија во триаголникот ABC, па имаме $\overline{A_1C_1} = \frac{1}{2}\,\overline{AC} = \frac{1}{2}a$. Значи, основниот раб на призмата е $\frac{1}{4}a$.

Висината на призмата е еднаква со висината H на една од пирамидите, зашто, на пример, $\overline{EE_1}$ е средна линија во триаголникот $S_1C_1S_2$. Да ја најдеме висината H.



Црт. 3.69

Плоштината на осниот пресек што минува низ бочниот раб AS_1 е $\overline{AA_1}\cdot H$. Но, $\overline{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па, значи, плоштината на тој осен пресек е

$$\frac{1}{2}aH\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Плоштината на основата на пирамидите е

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \qquad (2)$$

По услов плоштините (1) и (2) се еднакви, па добиваме $H = \frac{a}{2}$.

За волуменот и плоштината на призмата добиваме:

$$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{128}, \quad P = \frac{a^2}{32}(12 + \sqrt{3}).$$

1.(IV,69). Задача 1.(II,69).

2.(IV,69). Во една младинска работна бригада има 32 младичи и 20 девојки. На колку начини може да се одреди дневно дежурство од 12 бригадири, ако меѓу нив мора да се барем 5 девојки?

Решение. Севозможните комбинации од по 12 бригадири може да се разделат по групи според бројот на девојките во нив. Да разгледаме една група во која секоја комбинација има к девојки и $12-к$ младичи, при што $5 \leqslant к \leqslant 12$. Од 20 девојки можат да се изберат к девојки на $\binom{20}{к}$ начини. Кон овие можат да се приклучат $12-к$ младичи на $\binom{32}{12-к}$ начини. Значи, оваа група содржи

$$\binom{20}{к}\binom{32}{12-к}$$

различни комбинации.

Ако се има предвид дека $5 \leqslant к \leqslant 12$, тогаш бараниот број на дежурствата ќе биде:

$$\sum_{к=5}^{12}\binom{20}{к}\binom{32}{12-к}.$$

3.(IV,69). Во прав кружен конус е впишана топка. Плоштината на осниот пресек на конусот е P.

а) Да се изрази плоштината на топката како функција од аголот при врвот на конусот.

б) Да се испита оваа функција и да се нацрта нејзиниот график.

Решение. За плоштината y на топката имаме $y=4\pi R^2$. Од триаголникот COD (црт.4.69) имаме $R=(H-R)\sin\frac{x}{2}$, т.е.

$$R=\frac{H\sin\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}. \qquad (1)$$

За плоштината P на осниот пресек на конусот имаме $P=rH$. Од триаголникот СЕВ имаме $r = H\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, па, значи, имаме

$$H^2 = \frac{P}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} . \tag{2}$$

Заменувајќи во (1) добиваме:

$$R^2 = \frac{P\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sin\frac{x}{2})^2\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{P\sin x}{2(1+\sin\frac{x}{2})^2} .$$

На крајот добиваме:

$$y = 2\pi P\frac{\sin x}{(1+\sin\frac{x}{2})^2} . \tag{3}$$

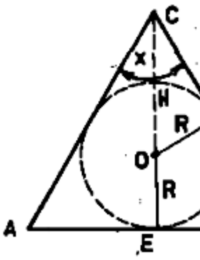
б) Од геометриски причини е јасно дека мора да биде $0<x<\pi$. Равенката $1+\sin\frac{x}{2} = 0$ нема решение во интервалот $(0,\pi)$, па, значи, дефиниционата област на функцијата е интервалот $(0,\pi)$. Во овој интервал функцијата е позитивна, а кога $x \to 0$ или $x \to \pi$, тогаш $y \to 0$. Првиот извод на функцијата е

$$y' = 2\pi P\frac{\cos x - \sin\frac{x}{2}}{(1+\sin\frac{x}{2})^3} .$$

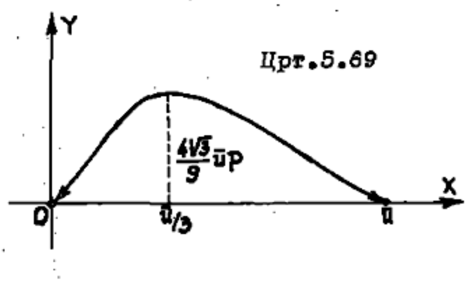
Првиот извод е нула ако $\cos x - \sin\frac{x}{2} = 0$, од каде што добиваме $x = \frac{\pi}{3}$. За $x = \frac{\pi}{3}$ имаме

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi P,$$

т.е. $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi P$ е максимум на функцијата. Графикот е претставен приближно на црт.5.69.



Црт.4.69



Црт.5.69

4.(IV,69). Ако $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се членови на аритметичка прогресија, $a_i > 0$, да се докаже дека:

а) $S_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$;

б) $S_2 = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$.

в) Да се пресмета $\lim\limits_{n\to\infty} S_2$.

Решение. а) Имаме:

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}{-a_1+a_2} + \frac{-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}{-a_2+a_3} + \ldots + \frac{-\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}{-a_{n-1}+a_n} =$$

$$= \frac{1}{d}(-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}-\ldots-\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}) =$$

$$= \frac{1}{d}(-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}) = \frac{a_n-a_1}{d(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n})} = \frac{(n-1)d}{d(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n})} =$$

$$= \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

б) Бидејќи $\frac{1}{a_{k-1}a_k} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right)$, $k=2,3,\ldots,n$, добиваме:

$$S_2 = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right) + \ldots + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n-a_1}{da_1a_n} = \frac{a_1+(n-1)d-a_1}{da_1a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} S_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{a_1 a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{a_1(a_1+(n-1)d)} =$

$$= \frac{1}{a_1} \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{(n-1)d+a_1} = \frac{1}{a_1 d} \ .$$