Регионален натпревар 2026

I година

1АБ. Петмина другари нашле ковчег со златни парички. Решиле да си ги поделат на следниов начин:

- Андреј зел половина од паричките и уште една паричка.
- Бојан зел третина од преостанатите парички и уште две парички.
- Виктор зел четвртина од оние парички што останале и уште три парички.
- Горан зел петтина од она што останало и уште четири парички.
- Дамјан ги зел сите преостанати парички.

Со ваквата поделба секој од нив добил цел број парички и Дамјан добил помалку парички од Виктор. Кој од другарите добил најмалку парички и колку?

Решение. Нека во ковчегот имало n парички. Според условот следува дека:

- Андреј зел $\frac{n}{2}+1$ парички, за другите останале уште $\frac{n}{2}-1$.
- Бојан зел $\frac{1}{3}(\frac{n}{2}-1)+2=\frac{n+10}{6}$ парички, за другите останале уште $\frac{n}{2}-1-\frac{n+10}{6}=\frac{n-8}{3}$.
- Виктор зел $\frac{1}{4}\cdot\frac{n-8}{3}+3=\frac{n+28}{12}$ парички, за другите останале уште $\frac{n-8}{3}-\frac{n+28}{12}=\frac{n-20}{4}=\frac{n}{4}-5$.
- Горан зел $\frac{1}{5}\cdot\frac{n-20}{4}+4=\frac{n}{20}+3$ парички, па останале уште $\frac{n}{4}-5-\frac{n}{20}-3=\frac{n}{5}-8$.
- Дамјан ги зел останатите $\frac{n}{5}-8$ парички.

Според бројот на парички што ги зеле Андреј, Горан, Дамјан и Виктор, следува дека бројот на парички n е делив со 20 (делив е со 4 и со 5). Од условот Дамјан зел помалку парички од Виктор се добива $\frac{n}{5}-8<\frac{n+28}{12}$, од каде следи $n<\frac{620}{7}=88\frac{4}{7}$. Заклучуваме дека $n\in\{20,40,60,80\}$. Вредностите 20 и 40 ги елиминираме затоа што во тој случај бројот на парички што ги зел Дамјан не е позитивен број. Со проба за останатите две можности се утврдува дека бројот на парички изнесува $n=80$ и дека најмалку парички зел Горан и тоа 7 парички.

2АБ. Докажи дека ако важат равенствата

$$x+y+z=a \tag{1}$$

и

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}, \tag{2}$$

тогаш барем еден од броевите x,y,z е еднаков на a.

Решение. Од (1) следува $z=a-x-y$, а од (2) следува дека за $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ и

$$ayz+axz+axy-xyz=0$$
$$ay(a-x-y)+ax(a-x-y)+axy-xy(a-x-y)=0$$
$$x(a^2-ay-ax+xy)+y(a^2-ay-ax+xy)=0$$
$$(a^2-ay-ax+xy)(x+y)=0$$
$$(a(a-y)-x(a-y))(x+y)=0$$
$$(a-x)(a-y)(x+y)=0\,.$$

Последново значи дека барем еден од множителите од левата страна е еднаков на нула, па $x=a$ или $y=a$ или $x=-y.$ Од $x=-y$ и $z=a-x-y$, добиваме $z=a$. Значи, барем еден од x, y и z е еднаков на a.

3А. Нека A е множество од сите производи на три последователни природни броеви, а B е множество од сите производи на два последователни природни непарни броеви. Дали множеството A содржи број кој е за 2027 поголем од некој број од множеството B.

Решение. Од три последователни природни броеви еден е делив со 3, па секој број $a\in A$ е од облик $3k,\ k\in\mathbb{N}$. Секој број од множеството $b\in B$ е од облик $(2n-1)(2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$. Според условот во задачата бараме броеви a,b такви што $a=b+2027$. Оттука имаме

$$3k=(2n-1)(2n+1)+2027,$$
$$3k=(2n)^2-1^2+2027,$$
$$(2n)^2=3k-2026,$$
$$(2n)^2=3k-(3\cdot 675+1),$$
$$(2n)^2=3(k-675)-1=3(k-676)+2.$$

Бројот $(2n)^2$ е точен квадрат на природен број, а квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Од последното равенство следува дека бројот $(2n)^2$ при делење со 3 треба да има остаток 2, што е противречност. Значи не постојат броеви што го исполнуваат дадениот услов.

3Б. Најди го најголемиот природен број чии цифри се различни меѓу себе и кој се намалува 5 пати кога ќе се избрише неговата прва цифра.

Решение. Нека бараниот број има n, $n \geq 2$ цифри. Од условот следува дека

$$\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n} = 5 \cdot \overline{a_2 a_3 \ldots\ldots a_n} \,,$$

т.е.

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + \overline{a_2 a_3 \ldots\ldots a_n} = 5 \cdot \overline{a_2 a_3 \ldots\ldots a_n} \,.$$

Воведуваме ознака $A = \overline{a_2 a_3 \ldots\ldots a_n}$. Тогаш

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + A = 5A \,,$$

$$4A = a_1 \cdot 10^{n-1} \,. \qquad (1)$$

Ако $n = 2$, тогаш A е едноцифрен број и од (1) следува $2A = 5a_1$. Според тоа, $5 \mid A$, па затоа $A = 5$ и $a_1 = 2$. Значи, бројот $25 = 5 \cdot 5$ ги исполнува условите на задачата.

Ако $n = 3$, тогаш A е двоцифрен број и од (1) следува $A = 25a_1$. Понатаму, за $a_1 \geq 4$ добиваме $A \geq 4 \cdot 25 = 100$, што противречи на фактот дека A е двоцифрен број. За $a_1 = 3$ добиваме $A = 3 \cdot 25 = 75$. Значи, бројот $375 = 5 \cdot 75$ ги исполнува условите на задачата. За $a_1 = 2$, добиваме $A = 2 \cdot 25 = 50$. Значи, бројот $250 = 5 \cdot 50$ ги исполнува условите на задачата. За $a_1 = 1$, добиваме $A = 1 \cdot 25 = 25$. Значи, бројот $125 = 5 \cdot 25$ ги исполнува условите на задачата.

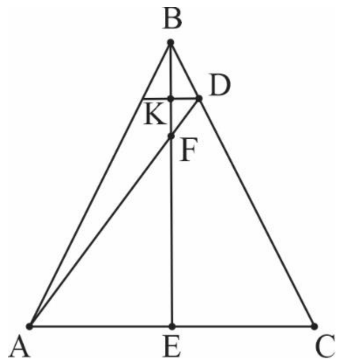
Ако $n = 4$, тогаш A е трицифрен број и од (1) следува $A = 250a_1$. Понатаму, за $a_1 \geq 4$ добиваме $A \geq 4 \cdot 250 = 1000$, што противречи на фактот дека A е трицифрен број. За $a_1 = 3$ добиваме $A = 3 \cdot 250 = 750$. Значи, бројот $3750 = 5 \cdot 750$ ги исполнува условите на задачата. За $a_1 = 2$, добиваме $A = 2 \cdot 250 = 500$, но бројот $2500 = 5 \cdot 500$ не е запишан со различни цифри. За $a_1 = 1$, добиваме $A = 1 \cdot 250 = 250$. Значи, бројот $1250 = 5 \cdot 250$ ги исполнува условите на задачата.

Ако $n \geq 5$, тогаш од (1) следува $A = 2500a_1 \cdot 10^{n-5}$, па затоа последните две цифри на бројот A, што значи и на бараниот број се нули, што противречи на условот на задачата.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека сите броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се: 25, 125, 250, 375, 1250 и 3750. Значи, бараниот број е 3750.

4А. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак при што важи $\overline{AB} = \overline{BC}$. Нека D е точка на страната BC така што важи $\overline{CD} = 4 \cdot \overline{DB}$ и нека E е точка на страната AC така што BE е висина. Ако F е точката во која се сечат AD и BE, тогаш пресметај го односот $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}}$.

Решение. Нека K е точка на BE таква што $DK \| AC$. Тогаш $\triangle BCE$ и $\triangle BDK$ се слични, па оттука следува:



$$\frac{\overline{BK}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = \frac{1}{5},$$

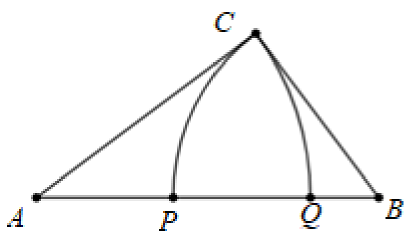
односно: $\overline{BK} = \frac{1}{5}\overline{BE}$ и $\overline{DK} = \frac{1}{5}\overline{CE}$. Од друга страна, и $\triangle DKF$ и $\triangle AEF$ се слични, па следува:

$$\frac{\overline{KF}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{KD}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{1}{5}\overline{CE}}{\overline{CE}} = \frac{1}{5}.$$

Да означиме $k = \overline{KF}$. Тогаш $\overline{EF} = 5k$. Од равенството $\overline{BE} = \overline{BK} + \overline{KF} + \overline{FE}$ се добива дека $\overline{BK} = \frac{3}{2}k$, а од друга страна имаме $\overline{BF} = \overline{BK} + \overline{KF} = \frac{5}{2}k$. Така, следува дека важи $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = 2$.

4Б. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен со прав агол во темето C. Во триаголникот се нацртани кружните лаци CQ и CP со центри во темињата A и B соодветно. Докажи дека важи: $\frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{BQ}$.

Решение. Нека $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$. Бидејќи триаголникот е правоаголен, согласно Питагоровата теорема важи $a^2 + b^2 = c^2$. Уште, $\overline{AQ} = \overline{AC} = b$



и $\overline{BP}=\overline{BC}=a$. Сега $\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}=c-a$ и $\overline{BQ}=\overline{AB}-\overline{AQ}=c-b$, па се добива:

$$\overline{AP}\cdot\overline{BQ}=(c-a)(c-b)=c^2-ac-bc+ab$$

За должината $\overline{PQ}$ имаме:

$$\overline{PQ}=\overline{AB}-\overline{AP}-\overline{BQ}=c-(c-a)-(c-b)=a+b-c,$$

од каде:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\overline{PQ}^2&=\tfrac{1}{2}(a+b-c)^2=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc)\\&=\tfrac{1}{2}(2c^2+2ab-2ac-2bc)\\&=c^2+ab-ac-bc=\overline{AP}\cdot\overline{BQ},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

II година

1А. За позитивните рационални броеви a,b и c е исполнето равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажи дека $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ е рационален број.

Решение. Равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ можеме да го запишеме во облик $ac+bc=ab$, односно $ab-ac-bc=0$. Тогаш

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc)=(a+b-c)^2.$$

Сега,

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b-c)^2}=|a+b-c|.$$

Но a,b и c се позитивни рационални броеви, и затоа $|a+b-c|\in\mathbb{Q}^+$, односно $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ е (позитивен) рационален број.

1Б. За $x,y\in\mathbb{N}_0$, најди ги двоцифрените броеви $\overline{xy}$ кои го исполнуваат условот $\overline{xy}=x^2+y^2+xy$.

Решение. Од $\overline{xy}=10x+y$, со замена во условот добиваме дека дадената равенка е еквивалентна со

$$10x+y=x^2+y^2+xy \Leftrightarrow x^2+(y-10)x+y^2-y=0.$$

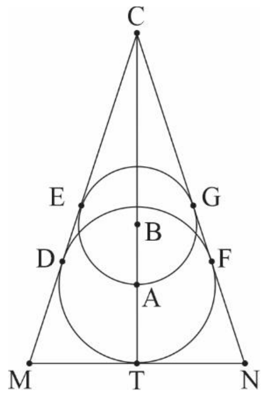
Ако ја гледаме последната квадратна равенка по x, имаме

$$x=\frac{10-y\pm\sqrt{(y-10)^2-4(y^2-y)}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{10-y\pm\sqrt{-3y^2-16y+100}}{2}$$

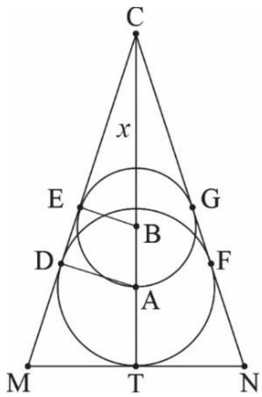
Заради $x, y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, забележуваме дека дискриминантата на квадратната равенка е позитивна за $y\in\{0,1,2,3\}$. Решенија добиваме за $y=3 \Rightarrow x=1\vee x=6$, и за $y=1\Rightarrow x=9$.

Според тоа бараните двоцифрени броеви се 13, 63 и 91.

2А. Дадена е кружницата со центар во точката A и радиус 4cm, при што точката A лежи на друга кружница со центар во точка B и радиус 3cm. Дијаметрите на двете кружници лежат на правата која минува низ точките A и B, при што правата AB е нормална на правата MN повлечена во точката T. Исто така, MN е тангента на поголемата кружница, а MC и NC се заеднички тангенти на двете кружници во точките D,E,F и G, како што е прикажано во цртежот. Одреди ја плоштината на триаголникот MNC.



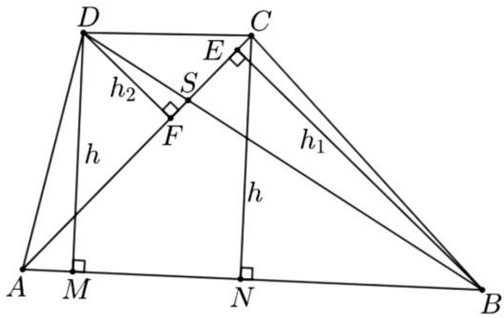
Решение. Да ги поврземе точките B со E и A со D. MC е тангента на кружниците со центри во A и B повлечена во точките D и E соодветно, од каде AD и BE се нормални на MC и уште $\overline{AD}=\overline{AT}=4$ cm и $\overline{AB}=\overline{BE}=3$ cm. Нека $\overline{CB}=x$ и $\overline{MT}=y$. Да забележиме дека триаголниците CEB, CDA и CTM се сите слични. Од тоа што $\triangle CEB$ и $\triangle CDA$ се слични имаме $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AD}}$, а со тоа имаме $\frac{x}{x+3}=\frac{3}{4}$. Од тука следува $4x=3x+9$ односно $x=9$ cm. Од Питагоровата теорема, $\overline{CE}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{81-9}=6\sqrt{2}$ cm. Од тоа што $\triangle CEB$ и $\triangle CTM$ се слични имаме $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{MT}}{\overline{CT}}$, а со тоа важи $\frac{3}{6\sqrt{2}}=\frac{y}{9+3+4}$. Од тука добиваме $y=4\sqrt{2}$ cm. Од друга страна, од сличноста на $\triangle CEB$ и $\triangle CGB$ следува дека $\measuredangle BCE=\measuredangle GCB$ и со тоа и $\overline{MT}=\overline{TN}$. Конечно за плоштината на триаголникот MNC имаме



$$P_{\triangle MNC} = \frac{1}{2}\overline{MN} \cdot \overline{CT} = 64\sqrt{2} \text{ cm}^2 .$$

2Б. Нека S е пресечната точка на дијагоналите кај трапезот $ABCD$. Ако $P_{SDA} = a, P_{ABS} = b$ и $P_{CDS} = c$, тогаш докажи дека $a = \sqrt{bc}$.

Решение. Нека N и M се подножните точки на висините спуштени од точките C и D на AB, соодветно и нека E и F се подножните точки на нормалите спуштени од точките B и D кон AC, соодветно. Нека $\overline{DM} = \overline{CN} = h$, $\overline{BE} = h_1$, $\overline{DF} = h_2$. Тогаш



$$P_{ABS} + P_{DAS} = P_{ABD} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS} .$$

Значи, $P_{BCS} = P_{DAS} = a$. Така

$$bc = P_{ABS} \cdot P_{CDS} = \frac{\overline{SA} \cdot h_1}{2} \cdot \frac{\overline{SC} \cdot h_2}{2} = \frac{\overline{SC} \cdot h_1}{2} \cdot \frac{\overline{SA} \cdot h_2}{2},$$

$$bc = P_{BCS} \cdot P_{DAS} = a \cdot a = a^2,$$

$$a = \sqrt{bc},$$

што требаше да се докаже

3АБ. Равенките $ax^2 + bx + c = cx + b$ и $\frac{cx+b}{cx+a} = cx + b$ имаат заедничко (реално) решение кое и за двете равенки е единствено. Броевите a, b и c се ненулти и меѓусебно различни реални броеви. Определи ги a, b и c.

Решение. Од првата равенка ја добиваме квадратната равенка

$$ax^2 + (b-c)x - (b-c) = 0$$

која има единствено решение ако дискриминантата и е еднаква на нула, т.е. $(b-c)^2 + 4a(b-c) = 0$, па оттука добиваме $(b-c)(b-c+4a) = 0$. Бидејќи $b \neq c$ следува $b - c = -4a$. Го заменуваме овој услов во квадратната равенка и добиваме еквивалентна равенка $ax^2 - 4ax + 4a = 0$, а како $a \neq 0$, последната е еквивалентна со равенката $x^2 - 4x + 4 = 0$ чие што решение е $x = 2$. Втората равенка од условот е еквивалентна со $(cx+b)(cx+a-1) = 0$

и притоа $x \neq -\frac{a}{c}$. Таа има единствено решение, па затоа $x = -\frac{b}{c} = -\frac{a-1}{c}$ и од условот во задачата следува $x = -\frac{b}{c} = -\frac{a-1}{c} = 2$. Имаме, $b = a-1$ па тогаш $c = b + 4a = 5a - 1$. Заменуваме во $-\frac{a-1}{c} = 2$ и добиваме дека $a = \frac{3}{11}$. Оттука $b = -\frac{8}{11}$ и $c = \frac{4}{11}$ и притоа $-\frac{a}{c} \neq 2$. Значи $a = \frac{3}{11}$, $b = -\frac{8}{11}$, $c = \frac{4}{11}$ е бараното решение.

4АБ. Одреди ги сите реални броеви x, y, z за кои важи:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1 = \frac{31}{xy} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 = \frac{-9}{yz} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + 1 = \frac{-5}{zx} \end{cases}.$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} xy + x + y = 31 \\ yz + y + z = -9 \\ zx + z + x = -5 \end{cases},$$

при што $x, y, z \neq 0$. Во секоја од равенките додаваме 1 во двете страни и добиваме нов систем:

$$\begin{cases} xy + x + y + 1 = 32 \\ yz + y + z + 1 = -8 \\ zx + z + x + 1 = -4 \end{cases}$$

Со факторизирање на левата страна, добиваме:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 32 \\ (y+1)(z+1) = -8 \\ (z+1)(x+1) = -4 \end{cases}$$

Со множење на сите три равенки се добива $((x+1)(y+1)(z+1))^2 = 1024$, од каде што ги добиваме следните две можности

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 32 \text{ и } (x+1)(y+1)(z+1) = -32.$$

Прв случај. Ако $(x+1)(y+1)(z+1) = 32$, тогаш со делење на оваа равенка со првата равенка во почетниот систем $(x+1)(y+1) = 32$, се добива $z + 1 = 1$, односно $z = 0$. Согласно условите во задачата, ова не е решение на дадениот систем.

Втор случај. Ако $(x+1)(y+1)(z+1)=-32$, тогаш со делење на оваа равенка со првата равенка во почетниот систем $(x+1)(y+1)=32$, се добива $z+1=-1$, односно $z=-2$. Тогаш од втората и третата равенка добиваме $y=7, x=3$. Значи, решение на системот е $x=3, y=7, z=-2$.

III година

1АБ. Во множеството на реалните броеви реши ја неравенката

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+...+\frac{1}{\log_x 2^{2024}\cdot\log_x 2^{2025}}\leq 2024\cdot\log_2 x.$$

Решение. Од дефиниционата област на логаритамската функција имаме дека $x>0$ и $x\neq 1$. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенките

$$\frac{1}{\log_x 2{\cdot}2\log_x 2}+\frac{1}{2\log_x 2{\cdot}3\log_x 2}+...+\frac{1}{2024\log_x 2{\cdot}2025\log_x 2}\leq 2024\cdot\log_2 x,$$

$$(\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+...+\tfrac{1}{2024\cdot 2025})\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}\leq 2024\log_2 x,$$

$$(\tfrac{2-1}{1\cdot 2}+\tfrac{3-2}{2\cdot 3}+...+\tfrac{2025-2024}{2024\cdot 2025})\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}\leq 2024\log_2 x,$$

$$(\tfrac{2}{1\cdot 2}-\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{3}{2\cdot 3}-\tfrac{2}{2\cdot 3}+...+\tfrac{2025}{2024\cdot 2025}-\tfrac{2024}{2024\cdot 2025})\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}\leq 2024\log_2 x,$$

$$(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+...+\tfrac{1}{2024}-\tfrac{1}{2025})\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}\leq 2024\log_2 x,$$

$$(1-\tfrac{1}{2025})\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}\leq 2024\log_2 x,$$

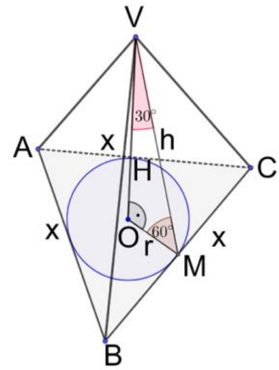
$$\tfrac{2024}{2025}\cdot\frac{1}{\log_x^2 2}\leq 2024\log_2 x,$$

$$\log_2^2 x\leq 2025\log_2 x.$$

Со воведување на смената $\log_2 x=y$, последната неравенка се сведува на квадратна неравенка $y^2-2025y\leq 0$. Нулите на содветната квадратна функција $f(y)=y^2-2025y$ се $y_1=0$ и $y_2=2025$, па така добиваме дека $0\leq y\leq 2025$, односно $0\leq\log_2 x\leq 2025$, од каде следува дека $1\leq x\leq 2^{2025}$. Но, од дефиниционата област имаме $x\neq 1$, па затоа решенијата на дадената неравенка се $1<x\leq 2^{2025}$.

2АБ. Основниот раб на правилна тристрана пирамида е со должина x, а бочниот ѕид зафаќа со рамнината на основата агол од 60°. Определи го x, ако мерниот број на плоштината на пирамидата е еднаков на мерниот број на волуменот на пирамидата.

Решение. Нека $\overline{OM}=r$ е радиусот на впишаната кружница на основата (рамностран триаголник), $\overline{OV}=H$ е висината на пирамидата со врв V, $\overline{MV}=h$ е апотемата на бочниот ѕид на пирамидата (види цртеж). Од правоаголниот триаголник OMV со остри агли $30^\circ, 60^\circ$ имаме дека $h=2r$. Од друга страна, радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ е $r=\frac{x\sqrt{3}}{6}$. Значи, $h=2r=\frac{x\sqrt{3}}{3}$. Користејќи ја дефиницијата за синус добиваме $\sin 60^\circ=\frac{\overline{OV}}{\overline{MV}}=\frac{H}{h}$. Така добиваме



$$H=h\cdot\sin 60^\circ=\frac{x\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{2}.$$

За плоштината на пирамидата добиваме дека

$$P=B+M=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{x\cdot h}{2}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3x}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2.$$

За волуменот на пирамидата добиваме

$$V=\frac{B\cdot H}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{24}x^3.$$

Од еднаквоста на плоштината и волуменот на пирамидата според условот на задачата имаме дека $P=V \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{\sqrt{3}}{24}x^3 \Leftrightarrow 3=\frac{x}{6} \Leftrightarrow x=18.$

3А.4Б. Определи за кое $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, изразот

$$A=\operatorname{tg}x+\frac{1+\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}^4 x}{1+\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}x}+\operatorname{ctg}x+\frac{1+\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}^4 x}{1+\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}x}$$

достигнува минималната вредност.

Решение. Дадениот израз го трансформираме во облик

$$A=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\frac{1+\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}+1+\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}}{1+\sin x\cdot\cos x}=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\frac{2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^6 x+\sin^6 x}{\sin^2 x\cos^2 x(1+\sin x\cos x)}$$

$$=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\frac{2\sin^2 x\cos^2 x+(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)}{\sin^2 x\cos^2 x(1+\sin x\cos x)}$$

$$= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{2\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x(1+\sin x\cos x)}$$
$$= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x(1+\sin x\cos x)} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1-\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x(1+\sin x\cos x)}$$
$$= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{(1-\sin x\cos x)(1+\sin x\cos x)}{\sin^2 x\cos^2 x(1+\sin x\cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1-\sin x\cos x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin^3 x\cos x+\sin x\cos^3 x+1-\sin x\cos x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin x\cos x+1-\sin x\cos x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x} = 2 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \operatorname{tg}^2 x - 2 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 4 = (\operatorname{tg} x - \tfrac{1}{\operatorname{tg} x})^2 + 4.$$

Според тоа, минималната вредност се достигнува ако $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$, односно кога $\operatorname{tg}^2 x = 1$. За $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\operatorname{tg} x < 0$, па добиваме дека $x = \frac{3\pi}{4}$, односно за $x = \frac{3\pi}{4}$ дадениот израз достигнува минимална вредност и таа е еднаква на 4.

3Б. Определи ги сите можни вредности на реалниот параметар a, за кои равенката $x^4 - (5a+6)x^2 + 4a^2 + 6a = 0$ има точно две реални решенија?

Решение. Воведуваме смена $y = x^2$. Тогаш, дадената равенка преминува во квадратна равенка од облик

$$y^2 - (5a+6)y + 4a^2 + 6a = 0.$$

За квадратната равенка по y, дискриминантата е еднаква на

$$D = (5a+6)^2 - 4(4a^2 + 6a) = 9(a+2)^2.$$

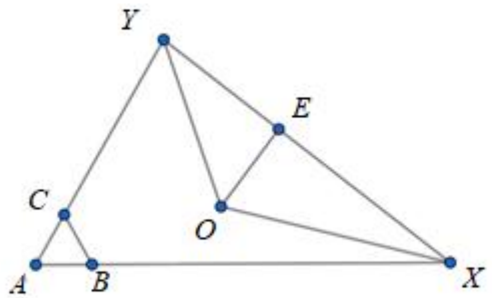
Ако $D = 0$, тогаш $a = -2$. Па, $y = \frac{5a+6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$, од каде следува дека почетната равенка нема реални решенија. Според тоа, вредноста на параметарот $a = -2$ не ги задоволува условите на задачата.

Ако $D > 0$, $a \neq -2$, па добиваме дека $y_{1,2} = \frac{5a+6\pm 3|a+2|}{2}$, односно $y_1 = a$ и $y_2 = 4a + 6$. Од тоа што $y = x^2$ и се бара равенката да има точно две реални решенија, тие мора да се со спротивни знаци. Според тоа, треба да важи $y_1 \cdot y_2 < 0$, односно $a(4a+6) < 0$. Со решавање на квадратната неравенка $4a^2 + 6a < 0$, добиваме дека $a \in (-\frac{3}{2}, 0)$.

Конечно, добиваме дека почетната равенка има точно два реални корени за $a \in (-\frac{3}{2}, 0)$.

4А. Нека ABC е рамностран триаголник со должина на страна 1. Точките X и Y се избрани на полуправите AB и AC соодветно, така што должините на отсечките AX и AY се природни броеви. Дали може радиусот на опишаната кружница на $\triangle AXY$ да е еднаков на $\sqrt{2026}$?

Решение. Да претпоставиме дека постои избор на точките X и Y што го задоволуваат условот на задачата, така што радиусот на опишаната кружница со центар O (види цртеж) околу $\triangle AXY$ е $\sqrt{2026}$. Нека E е подножје на висината во триаголникот OXY повлечена од точката O. Бидејќи $\measuredangle XAY = 60^\circ$, $\measuredangle XOY = 120^\circ$, како централен агол и уште повеќе бидејќи $\triangle XOY$ е рамнокрак, $\measuredangle YOE = \measuredangle XOE = 60^\circ$. Значи, $\overline{YE} = \overline{XE} = \frac{1}{2}\overline{XY} = \overline{OY}\sin 60^\circ = \sqrt{2026}\frac{\sqrt{3}}{2}$, па $\overline{XY} = \sqrt{2026} \cdot \sqrt{3}$.



Нека $\overline{AX} = m, \overline{AY} = n$, каде m, n се природни броеви. Од косинусната теорема за $\triangle AXY$

$$\overline{XY}^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos 60^\circ = m^2 + n^2 - mn,$$

односно

$$m^2 + n^2 - mn = 2026 \cdot 3.$$

Десната страна на равенката е парен број, па мора и левата. Ако m, n се со различна парност или двата се непарни тогаш $m^2 + n^2 - mn$ е непарен број, па останува m, n да се парни. Тогаш, 4 е делител $m^2 + n^2 - mn$, а не е делител $2026 \cdot 3$, што е контрадикција.

Значи, не е можно радиусот на опишаната кружница на ΔAXY да биде еднаков на $\sqrt{2026}$.

IV година

1А. Броевите $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}$ се заменуваат со нивниот збир и нивниот производ. За новите броеви $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{25}$ се применува истата операција итн. Докажи дека во секој чекор добиените броеви се помали од $\frac{1}{2}$.

Решение. Нека $a_1 = b_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ и $b_{n+1} = a_n b_n$, за $n \geq 1$. Со индукција ќе докажеме дека $a_n < \frac{12}{25}$ и $b_n \leq \frac{1}{25 \cdot 2^{n-2}}$, за $n \geq 2$. Притоа, да забележиме дека во тој случај $\frac{12}{25}, \frac{1}{25 \cdot 2^{n-2}} < \frac{1}{2}$.

Јасно, за $n = 2$ тврдењето важи. Да претпоставиме дека тврдењето важи за некој $n > 2$. Тогаш:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + b_n = \ldots = a_2 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\ &\leq \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) < \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25}, \end{aligned}$$

$$b_{n+1} = a_n b_n < \frac{b_n}{2} = \frac{1}{25 \cdot 2^{n-1}}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

1Б. Нека $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$, за $n \in \mathbb{N}$. Пресметај го збирот на првите 1000 членови на низата.

Решение. Со рационализација на именителот на општиот член на низата a_n, се добива

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2)} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(n+1-n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{999} + a_{1000} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{999}} - \frac{1}{\sqrt{1000}} + \frac{1}{\sqrt{1000}} - \frac{1}{\sqrt{1001}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1001}}. \end{aligned}$$

2Б. На еден кошаркарски турнир учествувале 8 екипи и секоја екипа одиграла по еден натпревар со секоја друга екипа. За победа се добиваат 2 поени, а поразената екипа добива 0 поени (нема нерешени натпревари). Екипите го завршиле турнирот со следниот број поени: 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2. Колку вкупно натпревари, последните четири екипи изгубиле од првите четири екипи на турнирот?

Решение. Последните четири екипи одиграле меѓусебно $\binom{4}{2}=6$ натпревари и на нив се освоени вкупно $6\cdot 2=12$ поени. Секој од овие поени припаднал на една од последните четири екипи. Бидејќи според резултатите тие вкупно освоиле $6+4+2+2=14$ поени, следува дека тие во натпреварите против првите четири екипи освоиле $14-12=2$ поени, т.е. последните четири екипи ги победиле првите четири екипи само во еден натпревар, односно изгубиле во останатите $4\cdot 4-1=15$ натпревари (вкупниот број натпревари кои последните четири екипи ги одиграле против првите четири екипи е $4\cdot 4=16$).

3АБ. Нека a,b и c се позитивни реални броеви така што $abc\geq 1$. Докажи дека $\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}\leq a+b+c$.

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$a+b+c-(\tfrac{1+a}{1+b}+\tfrac{1+b}{1+c}+\tfrac{1+c}{1+a})\geq 0,$$
$$(1+a)+(1+b)+(1+c)-(\tfrac{1+a}{1+b}+\tfrac{1+b}{1+c}+\tfrac{1+c}{1+a})\geq 3,$$
$$(1+a)(1-\tfrac{1}{1+b})+(1+b)(1-\tfrac{1}{1+c})+(1+c)(1-\tfrac{1}{1+a})\geq 3,$$
$$\frac{b(1+a)}{1+b}+\frac{c(1+b)}{1+c}+\frac{a(1+c)}{1+a}\geq 3.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и условот на задачата следува дека

$$\frac{b(1+a)}{1+b}+\frac{c(1+b)}{1+c}+\frac{a(1+c)}{1+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b(1+a)}{1+b}\cdot\frac{c(1+b)}{1+c}\cdot\frac{a(1+c)}{1+a}}=3\sqrt[3]{abc}\geq 3\cdot 1=3.$$

Лесно се добива дека знак за еднаквост важи ако и само ако $a=b=c=1$.

3А4Б. Конечен број на реални броеви се распоредени во круг, при што секој од броевите е обоен во бело, зелено или црно. Секој број обоен во бело е еднаков на збирот од неговите два соседни броја, секој зелен број е два пати поголем од збирот на неговите два соседни броја, а секој црн број е два пати помал од збирот на неговите два соседни броја. Ако $B\neq 0$ е збирот на сите бели броеви и $Z \neq 0$ е збирот на сите зелени броеви, определи го количникот $\frac{B}{Z}$.

Решение. Да го означиме со C збирот на сите црни броеви и зададените броеви со $x_1, x_2, \dots, x_n$. Бидејќи броевите се наредени во круг, ќе забележиме дека x_1 и x_n се соседни броеви, па може да сметаме дека $x_{n+1} = x_1$ и $x_{-1} = x_n$.

Од условите на задачата имаме:

- Ако x_i е бел број, тогаш $x_{i-1} + x_{i+1} = x_i$;
- Ако x_i е зелен број, тогаш $x_{i-1} + x_{i+1} = \frac{1}{2} x_i$;
- Ако x_i е црн број, тогаш $x_{i-1} + x_{i+1} = 2x_i$.

Собирајќи ги сите равенства за $i = 1, 2, \dots n$, добиваме:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} = B + \frac{Z}{2} + 2C \ .$$

односно:

$$2(B + Z + C) = B + \frac{Z}{2} + 2C \ .$$

Од тука следи дека $B = -\frac{3}{2} Z$, односно $\frac{B}{Z} = -\frac{3}{2}$.

4А. Одреди ја максималната вредност на функцијата

$$f(x) = | x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) |, \text{ за } x \in [2,3].$$

Решение. Од $x \in [2,3]$ следува дека

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(3-x)(4-x)(5-x) .$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{x+(5-x)}{2} \geq \sqrt{x(5-x)}, \quad \text{т.е.} \quad x(5-x) \leq (\tfrac{5}{2})^2 .$$

Слично добиваме дека важи

$$(x-1)(4-x) \leq (\tfrac{(x-1)+(4-x)}{2})^2 = (\tfrac{3}{2})^2, \quad (x-2)(3-x) \leq (\tfrac{(x-2)+(3-x)}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x = 5 - x$, $x - 1 = 4 - x$ и $x - 2 = 3 - x$, т.е. ако и само ако $x = \frac{5}{2} \in [2,3]$ Тогаш,

$$\max\{ f(x) \big| x \in [2,3]\} = f(\tfrac{5}{2}) = (\tfrac{5}{2})^2 (\tfrac{3}{2})^2 (\tfrac{1}{2})^2 = \frac{225}{64} \ .$$