VI ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019

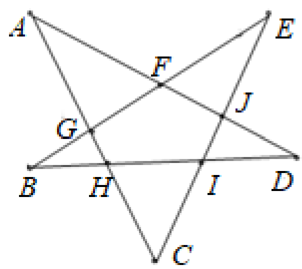
IV одделение

1. Во едно буре има 14 литри сок од портокали, а во друго буре 8 литри ист таков сок. Сокот се пакува во шишиња од по 2 литри. Колку вкупно шишиња се наполнети од сокот во двете буриња?

Решение. *Прв начин.* Ако во првото буре има 14 литри сок, а во второто 8 литри од истиот сок, тогаш во двете буриња има вкупно $14+8=22$ литри сок. Бидејќи сокот се пакува во шишиња од по 2 литри, потребни ни се вкупно $22:2=11$ шишиња.

Втор начин. Од првото буре ќе се наполнат $14:2=7$ шишиња, а од второто буре ќе се наполнат $8:2=4$ шишиња со сок. Значи, вкупно ќе се наполнат $7+4=11$ шишиња.

2. Изброј колку триаголници и колку отсечки се прикажани на цртежот десно. Именувај ги триаголниците и отсечките со помош на нивните темиња. Што има повеќе и за колку пати?



Решение. Триаголници има вкупно 10 и тоа:

$$AGF,\ BGH,\ CIH,\ DIJ,\ EJF,$$
$$ACJ,\ BDF,\ CEG,\ DAH,\ EIB$$

а отсечки има вкупно 30 и тоа:

$$AG, AH, AC, GH, GC, HC, AF, AJ, AD, FD, FJ, JD, BG, BF,$$
$$BE, GF, GE, FE, BH, BI, BD, HI, HD, ID, CI, CJ, CE, IJ, IE, JE$$

Повеќе се отсечки, и тоа 3 пати повеќе од триаголниците.

3. Ако домаќинката Маре купи од пазар 20 јајца, ќе и останат 30 денари од сумата што ја понела, а за да купи 30 јајца, и недостасуваат 20 денари. Колку денари понела Маре на пазар?

Решение. *Прв начин*. Разликата во јајца е 10, а тие би чинеле $30+20=50$ денари. Значи, едно јајце чинело 5 денари. Па, сумата пари што ја носела Маре со себе на пазар е $20\cdot 5+30=130$ денари.

Втор начин. Ако едно јајце чинело x денари, тогаш имаме:

$$20x+30=30x-20$$
$$30+20=30x-20x$$

$$10x = 50$$
$$x = 50:10$$
$$x = 5$$

Значи, едно јајце чинело 5 денари. Па, сумата пари што ја носела домаќинката со себе на пазар е $20 \cdot 5 + 30 = 130$ денари.

4. Ана, Марија и Јанко заедно имале 1200 денари и одлучиле да купат роденденски поклон на нивната другарка Елена. Откако за поклонот дале: Ана 210, Марија 186 и Јанко 174 денари, на секој од нив му останала еднаква сума пари. Колку пари пред купувањето на поклонот имал секој од нив?

Решение. За поклонот Ана, Марија и Јанко заедно дале

$$210 + 186 + 174 = 570 \text{ денари.}$$

Според тоа, од сумата кои тие заедно ја имале пред купувањето на поклонот им останале $1200 - 510 = 630$ денари. Бидејќи после купувањето на поклонот сите имале иста сума пари, добиваме дека секој од нив имал по $630 : 3 = 210$ денари.

Значи, пред купувањето на поклонот Ана имала $210 + 210 = 420$ денари, Марија имала $210 + 186 = 396$ денари и Јанко имал $210 + 174 - 384$ денари.

V одделение

1. Од цифрите 0, 1, 5 и 6, без повторување на цифра, состави го најголемиот непарен број делив со 5, а потоа состави го најмалиот број поголем од 1000 кој што е делив со 5. Кои се тие броеви? Колкава е нивната разлика?

Решение. Најголемиот непарен број делив со 5 е бројот 6105. Најмалиот број поголем од 1000 кој што е делив со 5 е бројот 1065. Нивната разлика е бројот $6105 - 1065 = 5040$.

2. Двајца работници завршиле една работа и добиле 1632 денари вкупно. Кога првиот работник од својата заработувачка потрошил 360 денари, а вториот 72 денари, тогаш на секој му останува иста сума пари. По колку заработил секој работник?

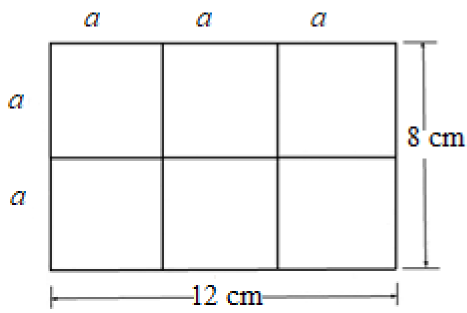
Решение. Ако од 1632 извадиме $360 + 72 = 432$ добиваме колку пари вкупно им останале на работниците. Тоа е $1632 - 432 = 1200$ денари. Бидејќи им останале исти суми пари заклучуваме дека секој работни му останале по $1200:2=600$ денари. Според тоа, првиот работник заработил $600+360=960$ денари, а вториот работник $600+72=672$ денари.

3. На писмена работа треба да се решат 20 задачи. За секоја решена задача ученикот добива по 4 бода, а за секоја нерешена задача губи 3 бода. Ако на крајот ученикот имал 38 бода, колку задачи решил.

Решение. Ако со x го означиме бројот на задачи кои ученикот ги решил, му останале $20-x$ нерешени задачи. Според условот на задачата може да ја составиме равенката $4x-3(20-x)=38$ чие решение е $x=14$. Значи, ученикот решил 14 задачи.

4. Ако едната страна на квадратот ја зголемиме трипати, а другата ја зголемиме двапати, ќе добиеме правоаголник со плоштина $96cm^2$. Определи ја разликата меѓу периметрите на правоаголникот и квадратот.

Решение. Со a да ја означиме страната на квадратот. Тогаш страните на правоаголникот се еднакви на $3a$ и $2a$ (види цртеж). Значи плоштината на правоаголникот е $P=2a\cdot 3a=6a\cdot a$.



Од друга страна $P=96cm^2$, и затоа $6a\cdot a=96$, т.е. $a\cdot a=16=4\cdot 4$. Според тоа, страната на квадратот е $a=4cm$. Значи, периметарот на квадратот е $L=4a=4\cdot 4=16cm$, а периметарот на правоаголникот е $L_1=2(3a+2a)=10a=10\cdot 4=40cm$. Конечно, разликата меѓу периметрите е еднаква на $L_1-L=40-16=24cm$.

VI одделение

1. Еден воз имал 159 патници кога застанал на една станица. Две третини од патниците слегле, а 38 патници се качиле во возот. Колку патници имал возот кога ја напуштал оваа железничка станица? Ако возот имал шест вагони со ист број на патници, по колку патници имало во секој вагон?

Решение. На станицата од возот слегле $159\cdot\frac{2}{3}=53\cdot 2=106$ патници. Бидејќи се качиле 38 патници, кога тргнал од таа станица, во возот имало

$106+38=144$ патници. Оттука, во секој вагон имало по $144:6=24$ патници.

2. Часовникот на Марија првиот ден доцни 0,16 минути, а секој нареден ден доцни за 0,02 минути повеќе. Колку ќе доцни часовникот на Марија по 10 дена, ако не се подесува неговата точност?

Решение. Прво ќе определиме за колку доцнел часовникот во секој од 10-те дена.

Ден 1: 0,16 минути

Ден 2: $0{,}16+0{,}02=0{,}18$ минути

Ден 3: $0{,}16+0{,}02\cdot 2=0{,}20$ минути

Ден 4: $0{,}16+0{,}02\cdot 3=0{,}22$ минути

Ден 5: $0{,}16+0{,}02\cdot 4=0{,}24$ минути

Ден 6: $0{,}16+0{,}02\cdot 5=0{,}26$минути

Ден 7: $0{,}16+0{,}02\cdot 6=0{,}28$ минути

Ден 8: $0{,}16+0{,}02\cdot 7=0{,}3$ минути

Ден 9: $0{,}16+0{,}02\cdot 8=0{,}32$ минути

Ден 10: $0{,}16+0{,}02\cdot 9=0{,}34$минути

Збирот од сите доцнења е

$$0{,}16+0{,}18+0{,}20+0{,}22+0{,}24+0{,}26+0{,}28+0{,}3+0{,}322+0{,}34=2{,}5$$

од каде добиваме дека после 10 дена часовникот на Марија ќе доцни 2,5 минути.

3. Збирот на аглите α ,β и γ е еднаков на 180° . Ако α е два пати поголем од β, а β е три пати поголем од γ, определи ги аглите α ,β и γ .

Решение. Од условот на задачата имаме $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, $\alpha=2\beta$, $\beta=3\gamma$. Според тоа, $\alpha=2\beta=2(3\gamma)=6\gamma$ и $6\gamma+3\gamma+\gamma=180^\circ$, односно $10\gamma=180^\circ$, од каде добиваме $\gamma=18^\circ$. Значи, $\alpha=108^\circ,\beta=54^\circ,\gamma=18^\circ$.

4. Алекса за 4 дена прочитал книга од 114 страници. Вториот ден прочитал 10 страници повеќе отколку првиот, а третиот ден прочитал 5 страници помалку отколку што прочитал првиот и вториот ден заедно. Четвртиот ден Алекса прочитал онолку страници колку што прочитал вториот и третиот ден заедно. Колку страници читал Алекса секој ден?

Решение. Нека првиот ден Алекса прочитал x страници. Тогаш вториот ден прочитал $x+10$, третиот ден прочитал $x+(x+10)-5=2x+5$ и четвртиот ден прочитал $(x+10)+(2x+5)=3x+15$ страници. Според тоа, треба да ја решиме равенката

$$x+(x+10)+(2x+5)+(3x+15)=114.$$

Решение на последната равенка е $x=12$, што значи дека Алекса првиот ден прочитал 12 страници, вториот ден прочитал 22 страници, третиот ден прочитал 29 страници и четвртиот ден прочитал 51 страница.

VII одделение

1. Виктор има пакување од 24 бонбони. Тој 25% од бонбоните му ги дал на својот брат. Потоа Виктор изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите бонбони. Бонбоните што му останале и ги дал на сестра му. Колкав процент од пакувањето добила сестрата на Виктор?

Решение. Виктор на својот брат му дал $\frac{25}{100}\cdot 24=6$ бонбони. Потоа тој изел $\frac{1}{3}(24-6)=\frac{18}{3}=6$ бонбони. На сестра му и дал $24-(6+6)=12$ бонбони, што е 50% од пакувањето.

2. Пресметај ја вредноста на изразот

$$6:\frac{1}{3}-0,8:\frac{1,5}{\frac{3}{2}\cdot 0,4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}+\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{1+2,2\cdot 10}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}6:\frac{1}{3}-0,8:\frac{1,5}{\frac{3}{2}\cdot 0,4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}+\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{1+2,2\cdot 10}}&=6\cdot 3-\frac{8}{10}:\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{50}{2}}+\frac{1}{4}+\frac{1+\frac{1}{2}\cdot 4}{6-\frac{46}{1+22}}\\&=18-\frac{4}{5}:\frac{\frac{3}{2}}{15}+\frac{1}{4}+\frac{1+2}{6-2}\\&=18-\frac{4}{5}:\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\\&=18-\frac{4}{5}\cdot 10+1=18-8+1=11.\end{aligned}$$

3. Во рамнокракиот триаголник ABC со основа AB, кракот AC е продолжен преку темето C до точка D. Периметарот на триаголникот BCD е

$18\,cm$, а на триаголникот ABD е $32cm$. Пресметај ја должината на основата AB.

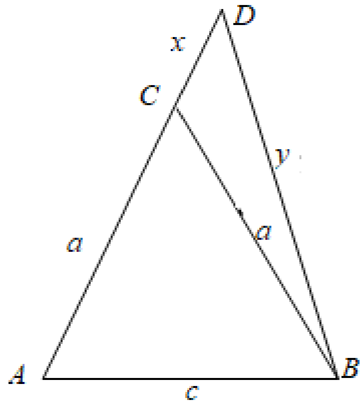
Решение. Нека $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=\overline{BC}=a$, $\overline{CD}=x$ и $\overline{BD}=y$ (види цртеж) Од условот на задачата за периметарот на триаголникот BDC имаме

$$a+x+y=18,$$

додека за периметарот за триаголникот ABD имаме

$$c+a+x+y=32.$$

Со замена на првата равенка во втората равенка, добиваме $c+18=32$, од каде $\overline{AB}=c=14\,cm$.



4. Докажи дека не постојат 22 последователни природни броеви чијшто збир е делив со 22.

Решение. Еден од 22 последователни природни броеви е делив со 22, а останатите, при делењето со 22, даваат различни остатоци, од 0 до 21. Ако збирот на било кои 22 природни броеви го делиме со 22, збирот на одделните остатоци е:

$$0+1+2+3+...+20+21=231=10\cdot 22+11.$$

Значи, делејќи го збирот на 22 последователни природни броеви со 22, секогаш ќе се добива остаток 11, односно тој збир не е делив со 22.

VIII одделение

1. Цената на еден стол е намалена за 30%. Намалувањето изнесува 450 денари. Колкава е намалената цена на столот? Семејството Марковски сака да купи 6 стола. Но, тогаш добиваат нов попуст од 5%. Колку платиле на крајот за шесте стола?

Решение. Нека цената на столот пред намалувањето е x денари. Тогаш $\frac{30}{100}\cdot x=450$, од каде $x=1500$ денари. Цената на столот после намалувањето е $1500-450=1050$ денари. Значи, шесте стола чинат $6\cdot 1050=6300$ денари, а по вториот попуст чинат $6300-\frac{5}{100}\cdot 6300=\frac{95}{100}\cdot 6300=5985$ денари и тоа е сумата што ја платило семејството Маркоски.

2. Дадени три неколинеарни точки A, O_1 и O_2. Нека A_1 е централно симетрична на A во однос на O_1, а A_2 е централно симетрична на A во однос на O_2. Ако $\overline{O_1O_2} = 2019m$, да се пресмета должината на отсечката A_1A_2.

Решение. Од тоа што точките A, O_1 и O_2 се неколинеарни следува дека точките A, A_1 и A_2 формираат триаголник. Точката A_1 е централно симетрична на точката A во однос на точката O_1 следува дека O_1 е средина на страната AA_1. Аналогно O_2 е средина на страната AA_2. Значи, O_1O_2 е средна линија во $\triangle AA_1A_2$ и $\overline{O_1O_2} = \frac{\overline{A_1A_2}}{2}$, т.е.

$$\overline{A_1A_2} = 2\overline{O_1O_2} = 2 \cdot 2019 = 4038m.$$

3. Ако двоцифрениот број го поделиме со збирот на неговите цифри добиваме количник 6 и остаток 2. Ако истиот тој двоцифрен број го поделиме со производот на неговите цифри добиваме количник 5 и остаток 2. Кој е тој број?

Решение. Нека $\overline{ab}$ е бараниот двоцифрен број. Од условот на задачата следува $10a+b=6(a+b)+2$ и $10a+b=5ab+2$. Ако ги одземеме дадените равенки добиваме $6(a+b)=5ab$. Бидејќи левата страна на последното равенство е делива со 6, треба и десната страна да е делива со 6, а тоа е можно само ако подредениот пар (a,b) е еден од паровите $(1,6),(2,3),(3,2)$ и $(6,1)$.

Ако $a=1, b=6$, тогаш $10 \cdot 1+6 \neq 6 \cdot (1+6)+2$, што значи дека бројот 16 не е решение на задачата

Ако $a=2, b=3$, тогаш $10 \cdot 2+3 \neq 6 \cdot (2+3)+2$, што значи дека бројот 23 не е решение на задачата.

Ако $a=3, b=2$, тогаш $10 \cdot 3+2 = 6 \cdot (3+2)+2$ и $10 \cdot 3+2 = 5 \cdot 3 \cdot 2+2$, т.е. бројот 32 е решение на задачата.

Ако $a=6, b=1$, тогаш $10 \cdot 6+1 \neq 6 \cdot (10+1)+2$, што значи дека бројот 61 не е решение на задачата.

Според тоа, единствен двоцифрен број кој ги задоволува условите на задачата е бројот 32.

4. Докажи дека бројот $7^{2020}-1$ е делив со 10.

Решение. Бројот 7^2 завршува на цифрата 9, па затоа бројот 7^4 завршува на цифрата 1.

Понатаму, бидејќи $7^{2020} = (7^4)^{505}$ заклучуваме дека бројот 7^{2020} завршува на цифрата 1, што значи дека бројот $7^{2020} - 1$ завршува на цифрата 0, па затоа тој е делив со 10.

IX одделение

1. Златко се натпреварува во една велосипедска трка. Патеката е долга $125km$. Првите $85km$ ги извозил за $2\frac{1}{2}h$. Останатиот дел од патот го извозил за $2h$. Кога возел побрзо, во првиот дел од патеката или во вториот и за колку?

Решение. Должината на првиот дел од патеката е $85km$, а на вториот е $125 - 85 = 40km$. Значи, брзината во првиот дел е $v_1 = 85 : 2\frac{1}{2} = 34km/h$, а во вториот дел е $v_2 = 40 : 2 = 20km/h$. Според тоа, Златко побрзо возел во првиот дел од патеката и тоа за $14km$.

2. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}) &= \\ &= [(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - \sqrt{5}^2]\cdot[(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 - \sqrt{5}^2] \\ &= (2+2\sqrt{6}+3-5)(2-2\sqrt{6}+3-5) \\ &= 2\sqrt{6}(-2\sqrt{6}) = (\mathbf{5}) = -4\cdot 6 = -24.\end{aligned}$$

3. Во кружницата $k(O,r)$ е впишан триаголник ABC таков што $\measuredangle A : \measuredangle B : \measuredangle C = 2:3:4$. Определи ги мерните броеви на аглите $\measuredangle AOB$, $\measuredangle AOC$ и $\measuredangle BOC$.

Решение. Од условот $\measuredangle A : \measuredangle B : \measuredangle C = 2:3:4$, имаме $\measuredangle A = 2k$, $\measuredangle B = 3k$ и $\measuredangle C = 4k$. Од $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$ имаме $2k + 3k + 4k = 180°$, односно $9k = 180°$, од каде $k = 20°$. Значи $\measuredangle A = 40°$, $\measuredangle B = 60°$ и $\measuredangle C = 80°$. Од односот помеѓу периферен и централен агол во кружница имаме дека $\measuredangle AOB = 160°$, $\measuredangle AOC = 120°$ и $\measuredangle BOC = 80°$.

4. Докажи дека, ако краците на еден трапез се заемно нормални, тогаш збирот од квадратите на неговите дијагонали е еднаков на збирот од квадратите на основите.

Решение. Нека со M го означиме пресекот на краците на трапезот.

Од правоаголниот триаголник ACM имаме $\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2$.

Од правоаголниот триаголник BMD имаме $\overline{BD}^2=\overline{BM}^2+\overline{DM}^2$.

Со собирање на двете равенства добиваме дека

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2+\overline{BM}^2+\overline{DM}^2,$$

односно

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{MC}^2+\overline{DM}^2. \qquad (*)$$

Од правоаголниот триаголник ABM имаме $\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2$.

Од правоаголниот триаголник DCM имаме $\overline{DC}^2=\overline{DM}^2+\overline{CM}^2$.

Со замена во (*) добиваме $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{DC}^2$, што и требаше да се докаже.