Општински натпревар 2020

I година

1А.2Б. Пресметај ја разликата на изразите $A=1^2+2^2+3^2+...+2020^2$ и $B=1\cdot 3+2\cdot 4+...+2019\cdot 2021$.

Решение. *Прв начин*. Ќе го трансформираме вториот израз на следниот начин:

$$\begin{aligned} B &= 1\cdot 3+2\cdot 4+...+2019\cdot 2021= \\ &= (2-1)\cdot(2+1)+(3-1)\cdot(3+1)+...+(2020-1)\cdot(2020+1) \\ &= 2^2-1+3^2-1+...+2020^2-1 \\ &= 1^2+2^2+...+2020^2-2020. \end{aligned}$$

Јасно, сега разликата на двата изрази е еднакава на

$$\begin{aligned} A-B &= 1^2+2^2+\cdots+2020^2-(1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2019\cdot 2021) \\ &= 1^2+2^2+\cdots+2020^2-(1^2+2^2+\cdots+2020^2-2020)=2020. \end{aligned}$$

*Втор начин***.** Ги групираме собироците и извлекуваме заеднички множител пред заграда, па имаме

$$\begin{aligned} A-B &= 1^2+2^2+\cdots+2019^2+2020^2-(1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2019\cdot 2021) \\ &= (1^2-1\cdot 3)+(2^2-2\cdot 4)+...+(2019^2-2019\cdot 2021)+2020^2 \\ &= 1\cdot(1-3)+2\cdot(2-4)+\cdots+2019\cdot(2019-2021)+2020^2 \\ &= -2\cdot(1+2+\cdots+2019)+2020^2=-2\cdot\tfrac{2019\cdot 2020}{2}+2020^2 \\ &= 2020\cdot(-2019+2020)=2020. \end{aligned}$$

1Б. Во два сада има вкупно 35 литри вода. Ако од првиот сад претуриме во вториот сад онолку вода колку што има во вториот сад, тогаш во првиот сад ќе има пет литри повеќе вода отколку во вториот. Одреди ја почетната количина на вода во садовите.

Решение. Нека на почетокот во првиот сад има x литри вода, а во вториот сад има y литри вода. Тогаш, имаме дека $x+y=35$ и $x-y=2y+5$. Системот

$$\begin{cases} x+y=35 \\ x-y=2y+5 \end{cases}$$

има решенија $x=27,5$ и $y=7,5$, значи на почетокот во првиот сад имало 27,5 литри вода, а во вториот сад имало 7,5 литри вода.

2А. На натпреварите на еден фудбалски турнир за победа се добива еден поен, за пораз се губи поен, а нерешениот резултат не ги менува поените. Фудбалскиот тим на Дарко на крајот од првите 20 одиграни натпревари имал 15 поени, а по уште 25 одиграни натпревари завршил со 37 поени. Покажи дека барем еден натпревар во последните 25 натпревари за тимот на Дарко завршил нерешено.

Решение. Во последните 25 натпревари, тимот на Дарко успеал да освои уште 37 – 15 = 22 поени**.** Нека во последните 25 натпревари, тимот на Дарко победил во x натпревари, а изгубил во y натпревари и ниту еден натпревар не завршил со нерешен резултат. Тогаш, го добиваме системот

$$\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=22 \end{cases}$$

Овој систем нема целобројни решенија, од каде заклучуваме дека барем еден натпревар во последните 25 натпревари, за тимот на Дарко, завршил нерешено**.**

3Б. Дали може броевите од 1 до 555 да се поделат на четири групи, така што збирот на броевите од втората група е за 10 поголем од збирот на броевите во првата група, збирот на броевите од третата група да е за 10 поголем од збирот на броевите во втората група и збирот на броевите од четвртата група да е за 10 поголем од збирот на броевите во третата група?

Решение. Нека S е збирот на броевите од првата група. Тогаш збирот на броевите од сите четири групи изнесува

$$S+(S+10)+(S+20)+(S+30)=4(S+15)\,.$$

Овој збир е делив со 4. Од друга страна, збирот на броевите од 1 до 555 изнесува

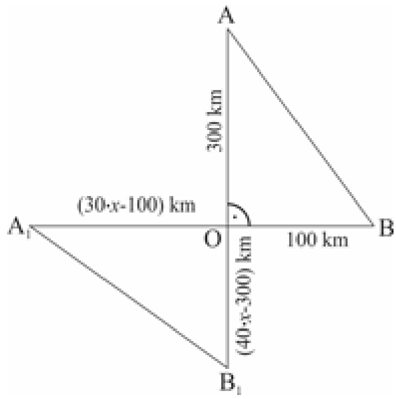
$$1+2+3+.....+555=\frac{555\cdot(555+1)}{2}=555\cdot 278=154290\,.$$

Но, овој број не е делив со 4, па бараната поделба не е можна.

3А.4Б. Бродовите А и В се движат по праволиниски патеки нормални една на друга, кои се сечат во замислена точка О. Бродот А е одалечен 300 *km* од точката О и се движи со брзина од 40 *km/h*, а бродот В е одалечен 100 *km* од точката О и се движи со брзина од 30 *km/h*. И двата брода се движат во насока кон точката О. Бродовите се доволно далеку од брегот, така што по одредено време растојанието меѓу нив повторно ќе стане еднакво со почетното растојание. По колку часа ќе се случи тоа?

Решение. Нека А и В се точките во кои се наоѓаат бродовите на почетокот. Тогаш, триаголникот АОВ е правоаголен со катети $\overline{OA}=300\,\text{km}$ и $\overline{OB}=100\,\text{km}$, па за почетното растојание $\overline{AB}$ имаме

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=300^2+100^2=100000.$$



Нека после x часа, растојанието меѓу бродовите повторно е еднакво на почетното растојание. Во тој момент и двата брода ќе ја имаат поминато точката О, и ќе бидат во точките A_1 и B_1 соодветно, кои се на растојание $\overline{OA_1}=40x-300$ и $\overline{OB_1}=30x-100$ од точката О (види цртеж). Тогаш, за растојанието $\overline{A_1B_1}$ имаме

$$\overline{A_1B_1}^2=\overline{OA_1}^2+\overline{OB_1}^2=(40x-300)^2+(30x-100)^2$$

и од $\overline{A_1B_1}=\overline{AB}$, добиваме дека $(40x-300)^2+(30x-100)^2=100000$.

По средување на изразот добиваме дека $x^2-12x=0$, т.е. $x(x-12)=0$. Бидејќи времето $x>0$ имаме дека $x-12=0$, односно дека по $x=12$ часа, растојанието меѓу бродовите повторно ќе биде еднакво на почетното.

4А. Еден четирицифрен број е делив со 7 и 19. Кога тој број ќе го помножиме со 29 и го поделиме со 41 се добива остаток 39. Кој е тој број?

Решение. Ако бројот е делив со 7 и со 19, тогаш постои природен број a, таков што нашиот четирицифрен број е еднаков на $7\cdot19\cdot a=133\cdot a$. Од условот на задачата важи дека постои природен број x, таков што $133a\cdot29=41x+39$, т.е. $x=\frac{133a\cdot29-39}{41}=94a-1+\frac{3a+2}{41}$. Од $\frac{3a+2}{41}\in\mathbb{N}$ имаме дека $3a+2=41k$, за некој природен број k. Сега од тоа што бараниот број е четирицифрен, следи дека $1000\le133a\le9999$, односно $8\le a\le75$, од каде пак $26\le3a+2\le227$, односно $3a+2\in\{41,82,123,164,205\}$. Бидејќи само бројот 41 дава остаток 2 при делење со 3, следи дека $3a+2=41$, односно $a=13$. Бараниот четирицифрен број е $7\cdot19\cdot13=1729$.

II година

1АБ. Реши го системот

$$\begin{cases} x^2+7x-y+11=0 \\ y^2+3x-y+15=0 \end{cases}.$$

Решение. Собирајќи ги двете равенки добиваме

$$x^2+10x+y^2-2y+26=0 \Leftrightarrow (x+5)^2+(y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases}$$

и ова е единственото решение на системот.

2АБ. Корените на квадратната равенка $x^2+ax+b+1=0$ се природни броеви. Докажи дека a^2+b^2 е сложен број.

Решение. Користејќи ги Виетовите правила имаме

$$x_1+x_2=-a \text{ и } x_1x_2=b+1.$$

Тогаш

$$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=x_1^2+x_2^2+(x_1x_2)^2+1=(x_1^2+1)(x_2^2+1).$$

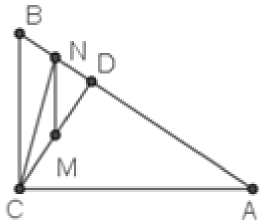
Јасно, корените се природни броеви, па множителите се природни броеви $x_1^2+1, x_2^2+1\geq 2$, од каде a^2+b^2 е сложен број.

3А. Најди ги сите комплексни броеви за кои важи $\frac{1}{\operatorname{Re} z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}$.

Решение. Нека $z=a+ib$, каде што a и b се реални броеви. Тогаш $\operatorname{Re} z=a$ и $\bar{z}=a-ib$ и добиваме $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+ib}+\frac{1}{a-ib}$. Јасно, заради условот во задачата $a\neq 0$. Оттука, $\frac{1}{a}=\frac{a-ib+a+ib}{a^2+b^2}=\frac{2a}{a^2+b^2}$ и важи $2a^2=a^2+b^2, a^2=b^2$, односно $a=\pm b$. Бараните комплексни броеви го имаат обликот $z=a\pm ia$, каде што a е произволен реален број, различен од нула.

4А. Во правоаголен триаголник $(\measuredangle C=90^\circ)$ е повлечена висината CD. Ако точката M е средина на отсечката CD, а N е средина на BD тогаш $AM\perp CN$. Докажи!

Решение. Од тоа што M и N се средини на CD и BD соодветно следува дека MN е средна линија за триаголникот ΔDBC, па $MN\,||\,BC$.

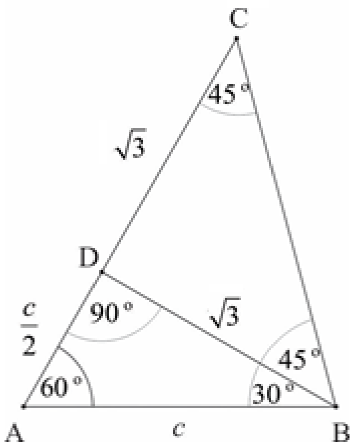


Тогаш $AC \perp BC \Leftrightarrow MN \perp AC$. Од друга страна $CD \perp AN$ и оттука следува дека M е ортоцентар за ΔCAN. Тогаш AM е трета висина па $AM \perp CN$.

3Б. Даден е петцифрениот природен број a. Од него го формираме шестцифрениот број b така што од десно, на крајот на бројот a допишуваме 1. Го формираме и шестцифрениот број c така што од лево, на почетокот на бројот a допишуваме 1. Најди го бројот a, ако бројот b е трипати поголем од бројот c.

Решение. Според условите во задачата $b = 10a + 1$ и $c = 100000 + a$. Бидејќи $b = 3c$, добиваме $10a + 1 = 300000 + 3a$ и оттука $7a = 299999$, односно $a = 42857$.

4Б. Аглите во триаголникот ABC се $\alpha = 60^\circ, \beta = 75^\circ$. Ако висината спуштена од темето B изнесува $\sqrt{3}$ cm, пресметај ја плоштината на триаголникот.



Решение. Нека висината спуштена од темето B е отсечката BD, $\overline{BD} = \sqrt{3}$ cm. Тогаш $\angle DBC = 45^\circ$, триаголникот DBC е рамнокрак правоаголен и затоа $\overline{DC} = \sqrt{3}$ cm. Од правоаголниот триаголник ABD со остри агли 60° и 30°, следува дека $\overline{AD} = \frac{c}{2}$, каде што $\overline{AB} = c$. Од Питагоровата теорема за триаголникот ABD имаме $c^2 - \frac{c^2}{4} = 3$ и оттука $c^2 = 4$, односно $c = 2$ cm. Добиваме дека $\overline{AC} = 1 + \sqrt{3}$ cm и затоа за плоштината на триаголникот ABC добиваме

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2.$$

III година

1А. Реши ја равенката $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$.

Решение. Решенијата на дадената равенка ги бараме при услови $\log x \geq 0$ и $4-\log x \geq 0$, од каде дефиниционата област на равенката е $0 \leq \log x \leq 4,$ односно $1 \leq x \leq 10000$. Тогаш, заради позитивноста на двете страни, квадрираме па добиваме еквивалентни равенки

$$4-\log x = 3\sqrt{\log x}$$
$$16-8\log x + \log^2 x = 9\log x$$
$$\log^2 x - 17\log x + 16 = 0.$$

Со смена $\log x = t$, последната равенка станува $t^2 - 17t + 16 = 0$ и има решенија $t = 1$ и $t = 16$. Од тоа што $0 \leq t \leq 4,$ следува дека $t = 1,$ односно $x = 10$.

1Б. Бројот 18 е напишан како збир на два броја. Да се определат тие броеви така да нивниот производ достигнува најголемата можна вредност.

Решение. Нека двата броја чиј збир е 18, се x и $y = 18 - x$. Треба да определиме за која вредност на променливата x, производот на броевите, односно функцијата $f(x) = x(18-x) = -x^2 + 18x$ достигнува максимум. Максимумот за квадратната функција, отворена надолу, се достигнува во темето на параболата, односно за $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{-2} = 9$. Тогаш бараните броеви се $x = 9$ и $y = 9$.

2А.3Б. Докажи дека

$$(1+\frac{7}{\sin x})(1+\frac{19}{\cos x}) > 293, \text{ за сите } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(1+\frac{7}{\sin x})(1+\frac{19}{\cos x}) &= 1+\frac{7}{\sin x}+\frac{19}{\cos x}+\frac{2\cdot 7\cdot 19}{2\sin x\cos x}\\ &= 1+\frac{7}{\sin x}+\frac{19}{\cos x}+\frac{266}{\sin 2x}\\ &> 1+7+19+266 = 293,\end{aligned}$$

затоа што $0 < \sin x < 1, 0 < \cos x < 1, 0 < \sin 2x < 1$.

2Б. Реши ја неравенката

$$(\tfrac{2}{7})^{-2x} \cdot (\tfrac{49}{4})^{2x} \leq (\tfrac{7}{2})^{2x^2+4}.$$

Решение. Со трансформации неравенката се сведува на облиците

$$(\tfrac{7}{2})^{2x} \cdot (\tfrac{7}{2})^{4x} \leq (\tfrac{7}{2})^{2x^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad (\tfrac{7}{2})^{6x} \leq (\tfrac{7}{2})^{2x^2+4}.$$

Имајќи во предвид дека $\frac{7}{2}>1$, добиваме

$$6x<2x^2+4 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty).$$

3А.4Б. Бочните ѕидови на права тристрана призма имаат плоштини $26\text{cm}^2, 28\text{cm}^2, 30\text{cm}^2$. Пресметај го волуменот на призмата, ако нејзината плоштина е 126cm^2.

Решение. Од $2B+26+28+30=126$, добиваме дека плоштината на основата на призмата е $B=21\text{cm}^2$. Нека a,b,c се страните на триаголникот кој е основа на призмата и нека H е висината на призмата. Тогаш,

$$aH=26, bH=28, cH=30, \text{ т.е. } a=\frac{26}{H}, b=\frac{28}{H}, c=\frac{30}{H}.$$

Според Хероновата формула, плоштина на основата е

$$B=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ каде } s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{26+28+30}{2H}=\frac{42}{H}.$$

Тогаш,

$$21^2=\frac{42}{H}\cdot\left(\frac{42}{H}-\frac{26}{H}\right)\cdot\left(\frac{42}{H}-\frac{28}{H}\right)\cdot\left(\frac{42}{H}-\frac{30}{H}\right)=\frac{42\cdot16\cdot14\cdot12}{H^4},$$

од каде $H^4=\frac{42\cdot16\cdot14\cdot12}{21^2}=\frac{2\cdot3\cdot7\cdot2^4\cdot2\cdot7\cdot2^2\cdot3}{3^2 7^2}=2^8=(2^2)^4$, односно $H=4\text{cm}$.

Волуменот на призмата е $V=B\cdot H=21\cdot4=84\text{cm}^3$.

4А. Нека $a<b<c$, $a+c=2b$ и $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, каде $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}$ и $c=\overline{AB}$ се должините на страните, а r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружница на $\triangle ABC$. Одреди ја големината на аголот во темето B.

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{b}{\sin\beta}=2R$, т.е. $b=2R\sin\beta$. Плоштината на $\triangle ABC$ е $P=sr=\frac{a+b+c}{2}r=\frac{abc}{4R}$, од каде со замена на условот $a+c=2b$ добиваме $\frac{3b}{2}r=\frac{abc}{4R}$, т.е. $6rR=ac$. Од косинусната теорема имаме

$$\begin{aligned}
b^2&=a^2+c^2-2ac\cos\beta=(a+c)^2-2ac-2ac\cos\beta\\
&=(a+c)^2-2ac(1+\cos\beta)=(2b)^2-2\cdot6rR(1+\cos\beta),
\end{aligned}$$

$$12rR(1+\cos\beta)=3b^2$$

$$4rR(1+\cos\beta)=4R^2\sin^2\beta$$

$$r(1+\cos\beta)=R(1+\cos\beta)(1-\cos\beta).$$

Ако последното равенство го скратиме со $1+\cos\beta$, бидејќи $\beta\neq180°$, ќе добиеме дека $r=R(1-\cos\beta)$. Од условот на задачата имаме дека $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=1-\cos\beta$ од каде следува дека $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\beta=30°$.

IV година

1АБ. За која вредност на x, вредностите на $\sqrt{x-5}, \sqrt[4]{10x+4}, \sqrt{x+2}$ се последователни членови на геометриска прогресија?

Решение. За да бидат дефинирани броевите, јасно е дека мора $x\geq5$. Членовите на низата формираат геометриска прогресија ако и само ако $(\sqrt[4]{10x+4})^2=\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+2}$. Квадрираме и имаме $10x+4=x^2-3x-10$. По средувањето добиваме равенка $x^2-13x-14=0$, чии решенија се $x_1=14$ и $x_2=-1$. Заради ограничувањето за x, бараната вредност $x=14$.

2А. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција зададена со $f(x)=ax^5+bx^3+c\sin x-1$, каде a,b,c се реални броеви. Ако $f(-2019)=2019$, одреди ја вредноста $f(2019)$.

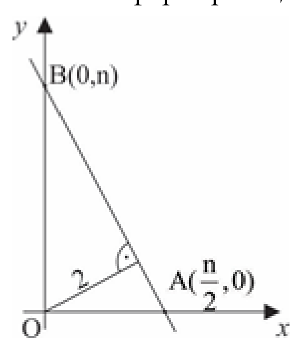
Решение. За функцијата во точките $x=2019$ и $x=-2019$ важи:

$$f(-2019)=-2019^5a-2019^3b-c\sin2019-1,$$

$$f(2019)=2019^5a+2019^3b+c\sin2019-1.$$

Го пресметуваме збирот $f(2019)+f(-2019)=-2$, од каде што добиваме $f(2019)=-2-f(-2019)=-2-2019=-2021.$

2Б. Права со коефициент на правец -2 е оддалечена од координатниот почеток за 2 cm. Пресметај ја плоштината на триаголникот формиран од дадената права и координатните оски.



Решение. *Прв начин.* Од условите на задачата дадената права има равенка $y=-2x+n$. Нека A и B се пресечните точки на дадената права со $x-$оската и $y-$оската, соодветно. Ако замениме $y=0$ и $x=0$ во правата, соодветно, ги добиваме пресечните точки $A(\frac{n}{2},0)$ и $B(0,n)$. Триаголникот формиран од дадената права и координатните оски е триаголникот AOB, каде $O(0,0)$ е координатниот почеток. Должините на страните на правоаголниот триаголник AOB се следните:

$$\overline{OA}=\frac{|n|}{2}, \overline{OB}=|n| \text{ и } \overline{AB}=\sqrt{(\tfrac{n}{2}-0)^2+(0-n)^2}=\frac{|n|\sqrt{5}}{2}.$$

Бидејќи правата е оддалечена 2 cm од координатниот почеток, висината на триаголникот спуштена од темето O е $h=2\text{cm}$. Тогаш

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=h\cdot\overline{AB} \Leftrightarrow \frac{|n|}{2}\cdot|n|=2\cdot\frac{|n|\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |n|=2\sqrt{5}.$$

Должините на катетите на правоаголниот триаголник AOB се $\overline{OA}=\frac{|n|}{2}=\sqrt{5}$ cm и $\overline{OB}=|n|=2\sqrt{5}$ cm. На крај, за плоштината на триаголникот AOB добиваме $P_{\triangle AOB}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}}{2}=5\text{ cm}^2$.

Втор начин. Каноничната равенка на права со коефициент -2 гласи $y=-2x+n$. Вредноста на n ќе ја утврдиме од условот за растојание, при што ќе сметаме, без губење на општоста, дека $n>0$ (т.е. правата го сече позитивниот дел од y – оската). Бидејќи за растојанието d имаме $d=-2$, координатниот почеток O од кој се мери растојанието до правата има координати $x_0=0, y_0=0$ и коефициентите на правата се $a=2$, $b=1$ и $c=-n$, во формулата за растојание од точка до права имаме $2=\frac{|2\cdot0+1\cdot0-n|}{\sqrt{2^2+1^2}}$, од каде следи дека $n=2\sqrt{5}$. Значи, равенката на правата е $y=-2x+2\sqrt{5}$. Нека A и B се пресечните точки на дадената права со $x-$ оската и $y-$ оската, соодветно. Ако замениме $y=0$ и $x=0$ во правата, ги добиваме соодветно координатите на пресечните точки $A(\sqrt{5},0)$ и $B(0,2\sqrt{5})$. Триаголникот формиран од дадената права и координатните оски е правоаголниот триаголник AOB со катети OA и OB, па за неговата плоштината добиваме:

$$P_{\triangle AOB}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}}{2}=5\text{ cm}^2.$$

3А.4Б. На шаховски турнир учествуваат две ученички и неколку ученици. Секој со секого одиграл по една партија. Ученичките освоиле заедно 8 поени. Колку ученици имало на натпреварот, ако се знае дека тие освоиле по еднаков број поени?

Решение. Да го означиме бројот на ученици со x. Тогаш вкупниот број учесници на турнирот е $x+2$. Бројот на сите одиграни партии е

$\binom{x+2}{2}=\frac{(x+2)(x+1)}{2}$. Учениците освоиле по еднаков број поени, секој по y, па тогаш за вкупниот број поени освоен од учениците важи $xy=\frac{(x+2)(x+1)}{2}-8$, од каде се добива квадратната равенка $x^2-(2y-3)x-14=0$, чии решенија се $x_{1,2}=\frac{2y-3\pm\sqrt{(2y-3)^2+56}}{2}$. Бидејќи x,y се природни броеви, дискриминантата на квадратната равенка треба да е полн квадрат, па $(2y-3)^2+56=n^2$, односно $(n+2y-3)(n-2y+3)=56$. Се добиваат три системи од кои следните два даваат целобројни решенија: $\begin{cases} n+2y-3=28 \\ n-2y+3=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} n+2y-3=14 \\ n-2y+3=4 \end{cases}$. Од првиот систем го добиваме решението $y=8$, а од вториот систем добиваме $y=4$. Соодветно, бројот на ученици на турнирот е $x=14$ или $x=7$.

3Б. Ако $x+y+z=4,$ тогаш $x^2+y^2+z^2\geq\frac{16}{3}$. Докажи.

Решение. Навистина, од $(x+y+z)^2=16$, развиваме и добиваме

$$16=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) .$$

Притоа, познато е дека важат следните неравенства:

$$\begin{cases} x^2+y^2\geq 2xy \\ y^2+z^2\geq 2yz \\ x^2+z^2\geq 2xz \end{cases} \Rightarrow \quad 2(x^2+y^2+z^2)\geq 2(xy+yz+xz) .$$

Користејќи ги неравенствата, имаме

$$16=(x+y+z)^2\leq x^2+y^2+z^2+2(x^2+y^2+z^2)$$
$$16\leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

што требаше и да се покаже.

4А. Нека c е ненегативен цел број. Дефинираме низа $a_n=n^2+c, n\geq 1.$ Нека d_n е најголемиот заеднички делител за a_n и a_{n+1}. Докажи дека $d_n\leq 4c+1, \forall n\geq 1.$

Решение. Од $d_n \mid a_n$ и $d_n \mid a_{n+1}$ следува $d_n \mid a_n+a_{n+1}$ и $d_n \mid a_n-a_{n+1}$. Значи $d_n \mid 2(a_n+a_{n+1})$ и $d_n \mid -(a_n-a_{n+1})^2$, па е

$$d_n \mid 2a_n + 2a_{n+1} - a_n^2 + 2a_n a_{n+1} - a_{n+1}^2 .$$

Од $a_n = n^2 + c$ и $a_{n+1} = n^2 + +2n + c + 1$ имаме

$$2a_n + 2a_{n+1} - a_n^2 + 2a_n a_{n+1} - a_{n+1}^2 = 4c + 1 .$$

Според тоа добиваме дека $d_n \mid 4c + 1$, од каде следува дека $d_n \le 4c + 1$.