Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2000/01 година

ГЕОМЕТРИЈА ЦЕЛОБРОЈНЕ МРЕЖЕ

Ратко Тошић, Институт за математику, Нови Сад

1. ЦЕЛОБРОЈНА МРЕЖА У РАВНИ

Посматрајмо у координатној равни систем правих задатих једначинама $x = m$ и $y = n$, где су m и n цели бројеви. Те праве образују *квадратну мрежу (решетку)*, за коју се користи и термин *целобројна мрежа*. За саме те праве кажемо да су *линије мреже*. На овај начин раван је поплочана јединичним квадратима, при чему никоја два квадрата немају заједничких унутрашњих тачака. Темена тих јединичних квадрата, тј. тачке са целобројним координатама су *чворови мреже*, односно *целобројне тачке*.

За многоугао кажемо да је *уписан* у целобројну мрежу ако су му сва темена чворови мреже. Општије, произвољна изломљена линија је уписана у мрежу, ако су јој сва темена чворови мреже. Слично, дуж, односно вектор су уписани ако су им обе крајње тачке целобројне.

Лако се доказује следеће тврђење:

Теорема 1. Квадрат дужине уписане дужи је цео број.

Доказ. Заиста, по Питагориној теореми, квадрат дужине уписане дужи једнак је збиру квадрата два цела броја. (У специјалном случају један од тих бројева је 0.) □

Свака целобројна тачка равни припада једном од следећа четири типа: PP (обе координате су парни бројеви), PN (апсциса је паран, а ордината непаран број), NP (апсциса је непаран, а ордината паран број), NN (обе координате су непарне).

Теорема 2. Средиште уписане дужи је целобројна тачка ако и само ако су крајеви дужи целобројне тачке истог типа.

Доказ. Следи на основу чињенице да је апсциса (ордината) средишта дужи целобројна ако и само ако су апсцисе (ординате) крајева дужи исте парности. Наиме, за дате тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ тачка $C(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$ је средиште дужи AB. □

Јасно је да се транслацијом за уписани вектор целобројна мрежа пресликава у саму себе, а такође и централном симетријом у односу на неку целобројну тачку.

Теорема 3. Ако су три темена једног паралелограма целобројне тачке, онда је тај паралелограм уписан у целобројну мрежу.

Доказ. Нека су A, B и C целобројне тачке паралелограма $ABCD$. Како је $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, транслацијом за вектор $\overrightarrow{BC}$ тачка A прелази у тачку D, па следи да је D целобројна тачка. □

Колико целобројних тачака може да садржи права која лежи у координатној равни?

Лако се види да права $y = x\sqrt{2}$ има тачно једну целобројну тачку (координатни почетак). (У противном би за неке целе бројеве x и y, различите од 0, $\sqrt{2} = \frac{y}{x}$ био рационалан број.) Очигледно је, такође, да права $y = x + \frac{1}{2}$ не садржи ниједну целобројну тачку.

С друге стране, права $y = \frac{1}{2} + x\sqrt{2}$ не садржи ниједну целобројну тачку. Наиме, за $x = 0$ је $y = \frac{1}{2}$, а ако би за неки цео број $x \neq 0$, y био цео број, онда би $\sqrt{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{x}$ био рационалан број.

Теорема 4. Ако права која лежи у координатној равни има две целобројне тачке, онда их има бесконачно много.

Доказ. Нека су $A(x, y)$ и $B(x + p, y + q)$ две целобројне тачке праве a са минималним растојањем, тј. такве да између њих нема других целобројних тачака. Тада и тачка $C(x - p, y - q)$ симетрична тачки B у односу на тачку A припада правој a, а такође и тачка $D(x + 2p, y + 2q)$ симетрична тачки A у односу на B. Одавде следи да на правој a има бесконачно много целобројних тачака. $\square$

Напомена. Из доказа претходне теореме лако се види да целобројне тачке једне праве разбијају ту праву на подударне делове.

Теорема 5. На правој не могу да постоје више од два различита типа тачака. Ако права има бесконачно много целобројних тачака, онда се на њој смењују наизменично целобројне тачке два различита типа.

Доказ. Следи на основу чињенице да су две целобројне тачке A и B једне праве истог типа ако је средиште дужи AB целобројна тачка. С друге стране, две целобројне тачке A и B са минималним растојањем не могу бити истог типа, јер би у противном средиште дужи AB била целобројна тачка. Следи да се на правој наизменично смењују тачке нека два различита типа. $\square$

Пример 1. Доказати да у унутрашњости уписаног конвексног петоугла или на његовом обиму постоји бар једна целобројна тачка.

Решење. На основу Дирихлеовог принципа, нека два темена P и Q петоугла су целобрјне тачке истог типа. Следи да је средиште дужи PQ целобројна тачка. Како је PQ страница или дијагонала конвексног петоугла, следи тврђење.

2. ПИКОВА ФОРМУЛА

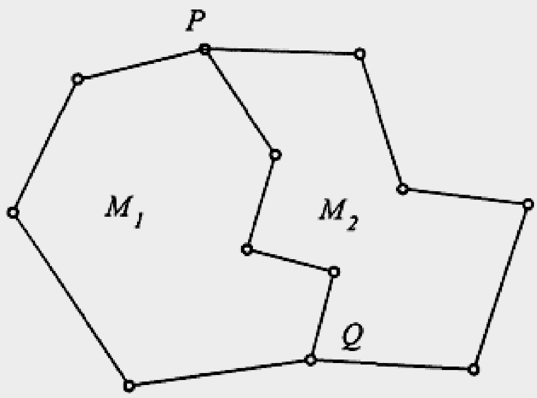
Следећа теорема истиче једно интересантно својство уписаних многоуглова.

Теорема 6 (Пикова теорема.) Нека је многоугао уписан у целобројну мрежу. Ако је a број целобројних тачака у његовој унутрашњости, а b број целобројних тачака на граници многоугла, онда је површина тога многоугла једнака

$$a + \frac{b}{2} - 1.$$

Доказ. Претходно доказујемо неколико помоћних тврђења (лема).

Лема 1. Нека је M уписани многоугао и нека је он разрезан на уписане многоуглове M_1 и M_2 (слика 1). Ако формула Пика важи за било која два од многоуглова M, M_1, M_2, онда важи и за трећи.



Слика 1

Доказ. Уписаном многоуглу M придружимо број $a+\frac{b}{2}-1$. Слично, многоугловима M_1 и M_2 придружујемо бројеве $a_1+\frac{b_1}{2}-1$ и $a_2+\frac{b_2}{2}-1$ редом, где су a_1 и a_2 бројеви целобројних тачака у унутрашњости многоуглова M_1 и M_2 редом, а b_1 и b_2 бројеви целобројних тачака на њиховим границама. За доказ леме довољно је доказати да је $f(M)=f(M_1)+f(M_2)$.

Многоугао M разрезан је (разложен) на многоуглове M_1 и M_2 неком уписаном изломљеном линијом која цела лежи у унутрашњости многоугла M. Та изломљена линија спаја неке две целобројне тачке P и Q на граници многоугла M. Нека је c укупан број целобројних тачака на тој изломљеној линији. Лако се види да је $a=a_1+a_2+c-2$ и $b=b_1+b_2-2c+2$. Зато је

$$f(M_1)+f(M_2)=\left(a_1+\frac{b_1}{2}-1\right)+\left(a_2+\frac{b_2}{2}-1\right)=$$

$$=(a_1+a_2)+\frac{b_1+b_2}{2}-2=a-c+2+\frac{b+2c-2}{2}-2=a+\frac{b}{2}-1=f(M).$$

Горње тврђење се лако проширује и на случај разлагања многоугла на више многоуглова, па се индукцијом лако добија следеће тврђење:

Последица. Нека је M уписани многоугао и нека је он разрезан на уписане многоуглове M_1, $M_2,\ldots,$ M_n. Ако формула Пика важи за било којих n од многоуглова M, M_1, $M_2,\ldots,$ M_n, онда важи за све те многоуглове.

Лема 2. Формула Пика важи за произвољан правоугаоник са страницама на линијама мреже.

Доказ. Нека су дужине страница правоугаоника p и q. Тада је његова површина једнака pq. С друге стране је број целобројних тачака у унутрашњости правоугаоника једнак $(p-1)(q-1)$, а број целобројних тачака на граници је

$$(p+1)(q+1)-(p-1)(q-1).$$

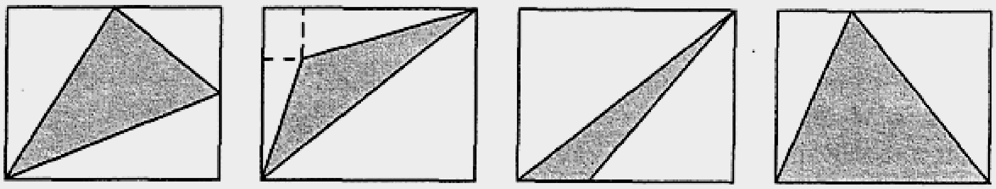
Сад се лако проверава тврђење.

Лема 3. Формула Пика важи за произвољан уписани правоугли троугао са катетама на линијама мреже.

Доказ. Такав троугао добија се повлачењем једне дијагонале правоугаоника са страницама на линијама мреже. Нека је то правоугаоник M и нека је он дијагоналом разрезан на два подударна правоугла троугла M_1 и M_2. Сада тачност тврђења следи на основу тога што је $f(M) = f(M_1) + f(M_2)$ и $f(M_1) = f(M_2)$.

Лема 4. Формула Пика важи за произвољан уписани троугао.

Доказ. Посматрајмо најмањи правоугаоник са страницама на линијама мреже који садржи дати уписани троугао. Дати уписани троугао може се добити одсецањем од тог правоугаоника неких правоуглих троуглова и евентуално једног мањег правоугаоника са страницама на линијама мреже (слика 2). Сада тврђење следи на основу леме 1.



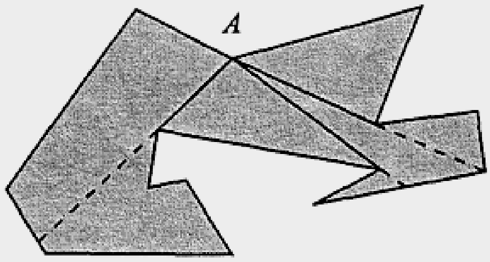
Слика 2

Пређимо сада на доказ теореме 6. Докажимо прво да сваки многоугао има бар једну унутрашњу дијагоналу, тј. дијагоналу чија свака тачка припада томе многоуглу. За конвексне многоуглове тврђење очигледно важи. За неконвексан многоугао посматрајмо један његов угао који је већи од $180°$. Нека је A теме тога угла (слика 3).

Видљиви део било које странице види се из темена A под углом мањим од $180°$; зато се из тачке A виде бар две странице многоугла. Према томе, постоје полуправе са почетком у A у унутрашњости угла $\angle A$ на којима се смењују видљиви делови страница (на слици 3 представљене су све такве полуправе). Свака од тих полуправих одређује једну унутрашњу дијагоналу многоугла. Нагласимо да свака унутрашња дијагонала расеца многоугао на два многоугла.

Сада се може доказати да се сваки многоугао може разрезати на троуглове унутрашњим дијагоналама које се не секу. Доказ дајемо индукцијом по броју страница многоугла. Нека је број страница n. За $n = 3$ тврђење је очигледно. Претпоставимо да је тврђење тачно за све k–углове, $k < n$. Према претходном разматрању, сваки n–угао може се унутрашњом дијагоналом разрезати на два многоугла, сваки са мање од n страница, за које је, по претпоставци индукције тражено разлагање могуће.

Ако је посматрани многоугао уписан у целобројну мрежу, све дијагонале које врше разлагање многоугла на троуглове су дужи уписане у целобројну мрежу, па су и сви троуглови на које је многоугао разложен уписани. Зато се на тај многоугао и троуглове на које је он разложен могу применити леме 1 и 4, одакле следи тврђење. □



Слика 3

Из претходне теореме закључујемо да се површина многоугла увек изражава целим бројем половина, тј. важи следеће тврђење:

Последица. Површина уписаног многоугла је рационалан број.

3. УПИСАНИ ПРАВИЛНИ МНОГОУГЛОВИ

Очигледно је да постоји уписани квадрат: шта више, свака уписана дуж је страница неког уписаног квадрата.

Теорема 7. Не постоји уписани једнакостранични троугао.

Доказ. Нека је a дужина странице уписаног једнакостраничног троугла. Тада је површина тога троугла једнака $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Како је a^2 цео број (теорема 1), следи да је површина посматраног троугла ирационалан број. То је у контрадикцији са последицом теореме 6. □

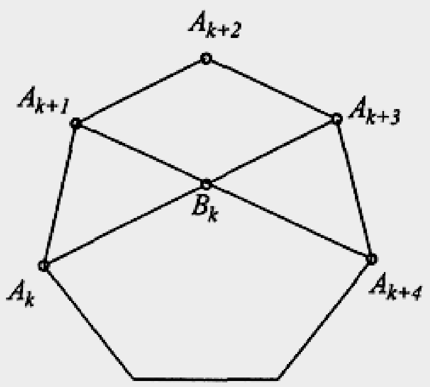
Последица. Не постоји уписани правилан n–угао ако је број n дељив са 3.

Теорема 8. Не постоји правилан уписани n–угао ако је $n \geq 5$.

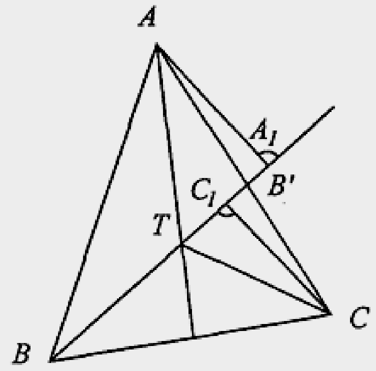
Доказ. Доказ који дајемо не може се применити за $n = 6$, али тај случај решава последица теореме 7.

Претпоставимо да постоје правилни уписани n–угао. Уочимо најмањи међу њима (са најкраћом страницом). Нека је то n–угао $A_0A_1 \dots A_{n-1}$. Такав постоји, јер ако је a дужина уписане дужи, онда је $a = \sqrt{n^2 + m^2}$, где су n и m цели бројеви, тј. има само коначно много различитих бројева мањих од дате дужине који могу бити дужине уписаних дужи. Посматрајмо све дијагонале облика A_kA_{k+3}, $0 \leq k \leq n-1$ (индекси се узимају по модулу n). Две суседне дијагонале A_kA_{k+3}

и $A_{k+1}A_{k+4}$ секу се у тачки B_{k+2} (слика 4).



Слика 4



Слика 5

Та тачка је целобројна, као четврто теме паралелограма чија су остала три темена A_{k+1}, A_{k+2} и A_{k+3}. Лако се види да је $B_0B_1\ldots B_{n-1}$ правилан n–угао и да је мањи од n–угла $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ (јер цео лежи у његовој унутрашњости). Како је он и уписан, дошли смо у контрадикцију са претпоставком да је $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ најмањи правилан уписани n–угао. $\square$

Пример 2. *У квадратну мрежу уписан је троугао. На страницама троугла нема других чворова, а у унутрашњости троугла налази се само један чвор. Доказати да је тај чвор тежиште троугла.*

Решење. Нека је ABC уписани троугао и T целобројна тачка у његовој унутрашњости (слика 5). Површина сваког од троуглова ABT, BCT и CAT једнака је $\frac{1}{2}$ (Пикова теорема). Како троуглови ABT и BCT имају заједничку основицу BT и једнаке површине, подударне су им и висине AA_1 и CC_1 на основицу BT. Нека права BT сече страницу AC у тачки B'. Правоугли троуглови $AB'A_1$ и $CB'C_1$ су подударни (катета и наспрамни угао), па су им и хипотенузе подударне, тј. $|AB'| = |CB'|$. Дакле, тачка T припада тежишној линији BB'. Слично се доказује да припада и осталим тежишним линијама.

4. ТРОДИМЕНЗИОНАЛНА ЦЕЛОБРОЈНА МРЕЖА

Уведимо у простору правоугли координатни систем и посматрајмо у њему скуп равни задатих једначинама $x = m$, $y = n$, $z = p$, где су m, n и p цели бројеви. Те равни образују *целобројну мрежу (решетку)* у простору или *тродимензионалну целобројну мрежу*. За саме те равни кажемо да су *равни мреже*. На овај начин простор је разбијен на јединичне коцке, при чему никоје две коцке немају заједничких унутрашњих тачака. За темена тих јединичних коцки, тј. тачке са целобројним координатама кажемо да су *чворови мреже*, односно *целобројне тачке*.

Полиедар је *уписан* у целобројну мрежу ако су му сва темена чворови мреже. Слично као у случају равни, може се говорити о уписаним изломљеним линијама, дужима и векторима.

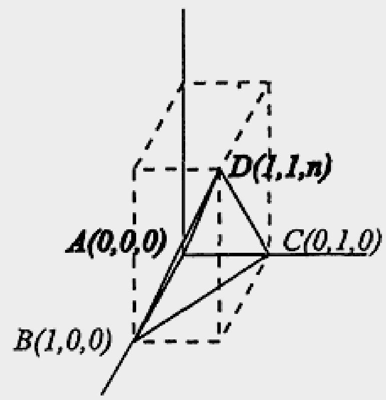
Свака целобројна тачка у простору припада једном од осам типова, према парности координата (постоји осам могућности да се координате целобројне тачке у простору одреде с обзиром на парност).

На потпуно исти начин као за целобројну мрежу у равни доказује се да и у простору важе теореме 1 – 4.

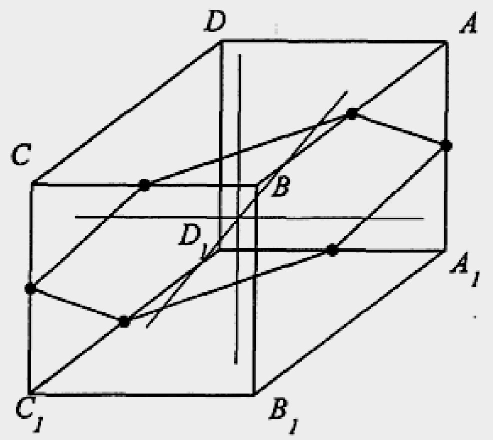
Пример 3. Доказати да у унутрашњости уписаног конвексног полиедра са девет темена или на његовој површи постоји бар једна целобројна тачка.

Решење. На основу Дирихлеовог принципа, нека два темена P и Q полиедра су целобрјне тачке истог типа. Следи да је средиште дужи PQ целобројна тачка. Како је полиедар конвексан, следи тврђење.

Формула Пика има један недостатак: нема директан аналог у простору. Пример на слици 6 показује да запремина полиедра уписаног у тродимензионалну целобројну мрежу не зависи од броја чворова у унутрашњости полиедра и на његовој површи. Тетраедар са теменима у тачкама $A(0,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(1,0,0)$ $D(1,1,n)$ може имати произвољно велику запремину (она износи $\frac{1}{6}n$) иако ни у његовој унутрашњости нити на његовој површи нема других целобројних тачака.



Слика 6



Слика 7

Пример 4. Утврдити за које природне бројеве n постоји правилан n-угао уписан у тродимензионалну целобројну мрежу?

Решење. Доказаћемо прво да за $n = 3, 4, 6$ такав многоугао постоји. За $n = 4$ то је очигледно. Посматрајмо коцку са теменима $A(1,1,1)$, $B(1,-1,1)$, $C(-1,1,1)$, $D(-1,-1,1)$, $A_1(1,1,-1)$, $B_1(1,-1,-1)$, $C_1(-1,1,-1)$, $D_1(-1,-1,-1)$ (слика 7). Тада су средишта ивица AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 и A_1A целобројне тачке и темена правилног шестоугла, док су средишта ивица AB, CC_1 и D_1A_1 темена једнакостраничног троугла.

Доказ да за $n \neq 3, 4, 6$ не постоји правилан n–угао уписан у тродимензионалну целобројну мрежу потпуно је исти као за раван, уз коришћење теореме 3.

ЗАДАЦИ

1. Четири буве седе у теменима квадрата. Сваке секунде једна бува прескаче једну од преостале три и пада у симетричну тачку (ако бува из тачке A прескаче буву у тачки B и пада у тачку C онда су вектори $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ једнаки. Доказати да се ни у једном тренутку три буве не могу наћи на једној правој.

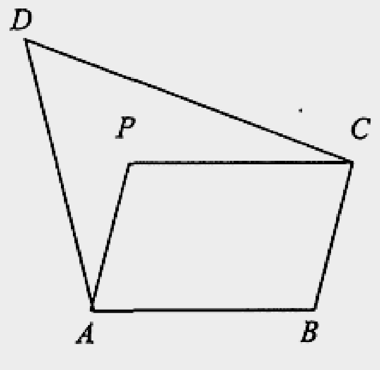
Решење. Уведимо координатни систем у равни тако да на почетку буве седе у тачкама $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$ и $D(1,0)$. Према теореми 2. свака бува може да скочи само у целобројну тачку истог типа као и тачка у којој се налазила пре скока. Сада тврђење следи на основу теореме 5. имајући у виду да на почетку не постоје две буве у тачкама истог типа.

2. Доказати да у координатној равни не постоји целобројна тачка на растојању мањем од $\frac{1}{30}$ од праве $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$.

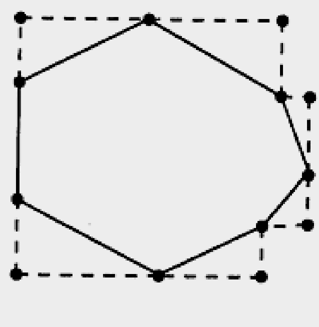
3. *Око сваке целобројне тачке у кординатној равни описана је кружница са центром у тој тачки, полупречника ϵ, где је ϵ произвољно мали реалан број. Доказати да права $y = \alpha x$, где је α ирационалан број, поред централне кружнице сече бар још једну од описаних кружница.

4. Доказати да се у унутрашњости сваког конвексног уписаног четвороугла без паралелних страница налази бар једна целобројна тачка.

Решење. У конвексном четвороуглу без паралелних страница постоје два суседна угла чији је збир већи од 180°. Нека су то углови код темена A и B (слика 8).



Слика 8



Слика 9

Од преостала два темена C и D уочимо оно које је ближе правој AB. Нека је то теме C. Кроз A поставимо праву паралелну са BC, а кроз C праву паралелну са AB. Нека се те праве секу у тачки P. Тачка P очигледно лежи у унутрашњости четвороугла $ABCD$. С друге стране, $ABCP$ је паралелограм, па је P целобројна тачка.

5. Ако на страницама у квадратну мрежу уписаног паралелограма нема других чворова осим у теменима, а у унутрашњости паралелограма налазе се тачно два чвора, онда ти чворови леже на дијагонали паралелограма и деле је на три једнака дела. Доказати.

Решење. Нека је $ABCD$ уписани паралелограм. Разделимо га дијагоналом AC на троуглове ABC и ADC. Ти троуглови имају једнаке површине, одакле следи да сваки има по једну унутрашњу целобројну тачку, или да на дијагонали AC постоје две целобројне тачке. У првом случају те целобројне тачке су тежишта троуглова ABC и ADC (пример 2), а у другом тежишта троуглова ABD и CDB, одакле лако следи тврђење.

6. Све странице многоугла M леже на линијама целобројне мреже. Доказати да је обим тога многоугла паран број.

Решење. Површина многоугла M је очигледно цео број. Из Пикове формуле онда следи да је број целобројних тачака на граници тога многоугла паран број; према томе и обим је паран број.

7. (40. савезно такмичење СРЈ, 2000.) Темена конвексног многоугла M су целобројне тачке у равни а дужине свих страница су цели бројеви. Доказати да је обим тога многоугла паран број.

Решење. Сваку страницу a многоугла која не лежи на линији мреже заменимо катетама правоуглог троугла са хипотенузом a, при чему те катете леже на линијама мреже у спољашњости многоугла (слика 9). Странице многоугла које леже на линијама мреже не дирамо. На тај начин добијамо многоугао M_1 са страницама на линијама мреже. Обим тога многоугла је паран број (види претходни задатак). Дужина хипотенузе правоуглог троугла са целобројним дужинама страница је непаран број ако и само ако је дужина једне катете паран а друге непаран број. Следи да многоугао M_1 има исто толико страница непарне дужине колико и многоугао M. Очигледно, M_1 има паран број страница непарне дужине (јер му је обим паран број), па то важи и за многоугао M. Одатле следи тврђење.

8. Дужине свих дужи затворене изломљене линије уписане у целобројну мрежу су цели бројеви. Доказати да је дужина те изломљене линије паран број.

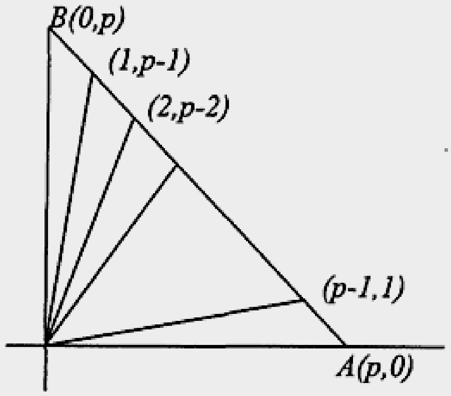
9. У целобројну мрежу у равни уписана је затворена изломљена линија састављена из n дужи исте дужине. Доказати да је n паран број.

10. Постоји ли у равни уписани правоугли троугао са страницама целобројне дужине чија ниједна страница не лежи на линијама мреже?

11. Повучена је дуж која спаја тачке $A(1999,0)$ и $B(0,1999)$ у координатној равни. Та дуж пролази кроз тачке $(1,1998),(2,1997),\ldots,(1998,1)$. Тих 1998 тачака спојене су дужима са координатним почетком O и на тај начин је троугао OAB подељен на 1999 мањих троуглова. Ако се искључе два крајња троугла од којих сваки има по једну страницу на једној координатној оси, онда сви преостали троуглови садрже исти број целобројних тачака у својој унутрашњости. Доказати.

Решење. Решаваћемо општији проблем кад дуж спаја тачке $A(p,0)$ и $B(0,p)$, где је p произвољан прост број (слика 10).

Нека је $C(a,b)$ нека целобројна тачка у унутрашњости троугла OAB. Ако тачка C лежи на некој од дужи поделе, тј. на дужи која спаја O са тачком $(i,p-i)$, $(1 \leq i \leq p-1)$, онда је $\frac{b}{a} = \frac{p-i}{i}$.



Слика 10

Како је $b < p-i$ и $a < i$, следи да се разломак $\frac{p-i}{i}$ може скратити. Међутим, како је p прост број, бројеви $p-i$ и i су узајамно прости. Контрадикција! Дакле, на дужима поделе нема целобројних тачака.

Сваки од $p-2$ троуглова о којима је реч у задатку уписан је у целобројну мрежу и нема других целобројних тачака на граници. С друге стране, сви ти троуглови имају једнаке површине (једнаке висине из O и једнаке одговарајуће основице), па на основу Пикове теореме следи тврђење.

12. Однос површине датог многоугла и квадрата једне његове странице је ирационалан број. (То важи, на пример, за једнакостранични троугао.) Доказати да се многоугао сличан датом не може уписати у квадратну мрежу.

Решење. Нека су S и S' површине сличних многоуглова M и M', а d и d' дужине одговарајућих страница, при чему је $\frac{S'}{(d')^2}$ ирационалан број. Претпоставимо да се многоугао M може уписати у целобројну мрежу. За сличне многоуглове M и M' је

$$\frac{S}{S'} = \frac{d^2}{(d')^2},$$

одакле је

$$\frac{S}{d^2} = \frac{S'}{(d')^2}.$$

Како је, на основу Пикове формуле S рационалан број, а d^2 цео, следи да је и $\frac{S'}{(d')^2}$ рационалан број, што је у контрадикцији са условом задатка.

13. Доказати да за површину $S(M)$ уписаног многоугла M важи неједнакост

$$S(M) \geq c - \frac{o}{2} - 1,$$

где је $c = a + b$, при чему је a број унутрашњих а b број граничних чворова и o обим многоугла.

Ако све странице многоугла леже на линијама мреже, онда је

$$S(M) = c - \frac{o}{2} - 1.$$

14. (Такмичење Румуније, 1998.) Доказати да површина уписаног конвексног петоугла износи бар $\frac{5}{2}$.

Решење. Довољно је да докажемо нешто јаче тврђење од оног из примера 1, тј. да у унутрашњости уписаног конвексног петоугла постоји бар једна целобројна тачка.

Лако се доказује да у сваком конвексном петоуглу постоје два суседна унутрашња угла чији је збир већи од 180°. Нека је на пример $\alpha + \beta > 180°$, где су α и β унутрашњи углови код темена A и B уписаног конвексног петоугла $ABCDE$. Нека су c и e праве које пролазе кроз темена C и E редом и паралелне су страници AB. Уочимо ону која је ближа страници AB; нека је то, на пример, права c. Означимо са F тачку пресека праве c и странице AE. Уочимо у унутрашњости угла α полуправу са почетком у A, паралелну са BC. Нека она сече дуж CF у тачки G. $ABCG$ је паралелограм, па је G целобројна тачка, а по конструкцији налази се у унутрашњости петоугла.

15. Колико највише а колико најмање заједничких тачака може имати кружница полупречника 100 са линијама целобројне мреже у равни?

16. У координатној равни дата је кружница k полупречника 10. Доказати да у њеној унутрашњости лежи бар 250 целобројних тачака.

Упутство. Посматрајмо круг полупречника 9, концентричан датој кружници k и све јединичне квадрате са центрима у целобројним тачкама у унутрашњости кружнице k и са страницама паралелним линијама мреже. Лако се показује да ти квадрати у потпуности покривају конструисани круг полупречника 9. Упоредити збир површина тих квадрата са површином круга.

17. (а) Доказати да за сваки цео број $n \geq 0$ постоји кружница у координатној равни у чијој се унутрашњости налази тачно n целобројних тачака.

(б) Доказати да у координатној равни постоји систем концентричних кружница

$$K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$$

такав да за свако n, кружница K_n садржи у својој унутрашњости тачно n целобројних тачака.

18. У координатној равни означено је 100 целобројних тачака. Доказати да се међу њима могу наћи две тачке, A и B, такве да правоугаоник $AXBY$, са страницама паралелним линијама мреже, садржи бар 20 означених тачака (рачунајући и оне на страницама правоугаоника).

Решење. Посматрајмо најмањи правоугаоник P са страницама на линијама мреже, који садржи све означене тачке. На свакој страници тога правоугаоника налази се бар једна означена тачка. Уочимо по једну на свакој страници и означимо их, у смеру кретања по обиму правоугаоника P, са A, B, C, D (неке се могу и поклапати). Тада пет правоугаоника са страницама на линијама мреже и дијагоналама редом AB, BC, CD, DA и AC покривају цео правоугаоник P; према томе, бар један од њих садржи бар 20 тачака.

19. Одредити најмањи могући обим који може имати конвексан 32–угао уписан у целобројну мрежу у равни.

Одговор. $4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$.

20. Дат је прост број $p>3$. Нека је S скуп свих целобројних тачака (x,y) таквих да је $0\le x<p$, $0\le y<p$. Доказати да је могуће изабрати p тачака скупа S међу којима не постоје три колинеарне нити четири које су темена једног паралелограма.

21. Доказати да се у целобројну мрежу у равни не може уписати једнакокраки троугао са углом при врху од 45°.

22. Доказати да у равни не постоји конвексан уписани четвороугао чија је једна дијагонала два пута дужа од друге а угао између дијагонала је 45°.

23. (Руска олимпијада, 1997.) У координатној равни смештен је квадрат са теменима у целобројним тачкама. Квадрат је померен тако да су му два темена поново пала у целобројне тачке. Доказати да су и друга два темена у целобројним тачкама.

24. (Руска олимпијада, 1997.) Свака тачка координатне равни са целобројним координатама обојена је једном од две боје. Доказати да онда постоји бесконачан скуп тачака исте боје који има центар симетрије.

25. У унутрашњости круга полупречника 1990 са центром у координатном почетку означено је 555 целобројних тачака међу којима не постоје три колинеарне. Доказати да се могу наћи два троугла једнаких површина са теменима у означеним тачкама.

Решење. Површина троугла не може бити већа од површине датог круга $\pi\cdot 1990^2<12,6\cdot 10^6$; према томе површине посматраних троуглова не могу имати више од $25,2\cdot 10^6$ различитих вредности (површина мора бити цео број половина). С друге стране, са 555 тачака одређено је $\frac{555\cdot 554\cdot 553}{6}>25,2\cdot 10^6$ троуглова. По Дирихлеовом принципу, нека два имају једнаке површине.

(**Напомена.** Услови задатка могу се ослабити. Може се показати да површина троугла са теменима у унутрашњости круга није већа од површине једнакостраничног троугла уписаног у тај круг, тј. није већа од $\frac{4\sqrt{3}}{3}\,1996^2$, што је мање од двоструког броја тројки тачака $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ већ за $n = 397$, тако да се већ за 397 тачака у општем положају увек могу наћи два троугла једнаких површина.)

26. Нека је G конвексна фигура у координатној равни. Означимо са $S(G)$, $L(G)$ и $N(G)$ редом површину, обим фигуре G и број чворова садржаних у фигури G. Доказати да је

$$N(G) \leq S(G) + \frac{1}{2}L(G) + 1.$$

Решење. Нека је F конвексни омотач скупа целобројних тачака фигуре G тј. најмањи конвексан многоугао који садржи све те тачке. Очигледно је да свих $N(G)$ целобројних тачака фигуре G леже у унутрашњости фигуре F или на њеној граници.

Користимо чињеницу да је $L(F) \leq L(G)$. Дајемо доказ за случај троугла: у општем случају доказ је потпуно аналоган. Продужимо странице троугла до пресека са границом фигуре G у тачкама B_1, B_2, B_3 (слика 11). Запишимо систем неједнакости, од којих свака просто тврди да је "дуж најкраће растојање између две тачке" (са $|A_rA_s|$ означавамо дужину дужи A_rA_s, а са $|B_rB_s|$ дужину лука B_rB_s):

$$|A_1A_2| + |A_2B_2| \leq |A_1B_1| + |B_1B_2|,$$

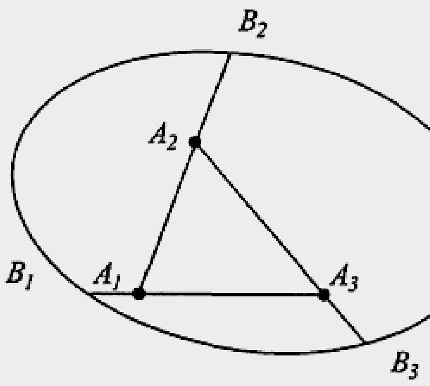
$$|A_2A_3| + |A_3B_3| \leq |A_2B_2| + |B_2B_3|,$$

$$|A_3A_1| + |A_1B_1| \leq |A_3B_3| + |B_3B_1|.$$

Сабирањем неједнакости, после сређивања добијамо:

$$|A_1A_2| + |A_2A_3| + |A_3A_1| \leq |B_1B_2| + |B_2B_3| + |B_3B_1|,$$

што је и требало доказати.



Слика 11

Приметимо да ако на страници многоугла F леже два чвора A_r и A_s, онда је растојање између њих бар 1. За обим многоугла F на чијој граници се налазе целобројне тачке A_1, $A_2, \ldots, A_b$ тим редом, важи неједнакост:

$$L(F) = |A_1A_2| + |A_2A_3| + \cdots + |A_bA_1| \geq b.$$

Сада је на основу Пикове теореме

$$N(G) = N(F) = a + b = (a + \frac{b}{2} - 1) + \frac{b}{2} + 1 = S(F) + \frac{b}{2} + 1 \leq$$

$$\leq S(F) + \frac{1}{2}L(F) + 1 \leq S(G) + \frac{1}{2}L(G) + 1.$$

27. (Задатак Њумена) Доказати да квадрат са страницом дужине n може да покрије највише $(n+1)^2$ целобројних тачака равни.

Решење. Ово је специјалан случај тврђења из претходног задатка. Заиста, за квадрат Q са страницом n је $S(Q) = n^2$, $L(Q) = 4n$, па је на основу претходног задатка

$$N(Q) \leq n^2 + \frac{1}{2} \cdot 4n + 1 = (n+1)^2.$$

28. За тачку $C(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ кажемо да је разлика тачака $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Доказати да се у унутрашњости сваког многоугла површине веће од 1 могу наћи две тачке чија је разлика целобројна тачка.

29. Доказати да се сваки многоугао површине веће од n може сместити у координатној равни тако да покрије бар $n + 1$ целобројних тачака.

30. (Такмичење Румуније, 1998.)Фигура F у равни је је унија коначног броја дужи, при чему је збир дужина свих дужи мањи од $\sqrt{2}$. Доказати да се фигура F кретањем у равни може пресликати у фигуру F' која нема заједничких тачака са линијама целобројне мреже.

31. У простору је дато 37 целобројних тачака. Доказати да се међу њима могу наћи три тачке A, B и C такве да је и тежиште троугла ABC целобројна тачка.

Решење. Између 37 тачака постоји 13 различитих чије x−координате дају исти остатак при дељењу са 3. Између тих 13 може се наћи 5 различитих тачака чије y−координате дају исти остатак при дељењу са 3. Сада се између тих 5 тачака могу наћи или три различите тачке чије z−координате дају исти остатак при дељењу са 3, или три различите тачке чије z−координате при дељењу са 3 дају различите остатке (0, 1 или 2). Те три тачке су тражене тачке.

32. Нека је S скуп целобројних тачака (x, y) у равни, тавих да су и x и y по апсолутној вредности мањи од 10. Наћи највећи природан број n који задовољава следећи услов:

(П) За свако пресликавање $f : S \to \{1,2,3,\ldots,n\}$ могуће је наћи паралелограм $ABCD$ позитивне површине, са теменима у тачкама скупа S, симетричан у односу на координатни почетак, тако да је $f(A) + f(C) = f(B) + f(D)$.

33. Нека је S скуп целобројних тачака (x,y) у равни, тавих да су и x и y по апсолутној вредности не већи од n. На колико се начина из скупа S могу изабрати три различите тачке тако да једна од њих буде средиште дужи са крајевима у друге две тачке?

Одговор. $2n^2(n+1)^2$.

34. *На колико се начина у скупу S из претходног задатка могу уочити три неколинеарне тачке?

35. Који се правилни полиедри могу уписати у тродимензионалну целобројну мрежу?

Решење. Доказаћемо прво да постоје коцка, правилан тетраедар и правилан октаедар уписани у тродимензионалну целобројну мрежу. За коцку је тврђење очигледно. За октаедар је довољно узети као темена центре страна (пљосни) коцке из примера 4, а за октаедар темена A, B_1, C и D_1.

Правилан додекаедар и правилан икосаедар не могу се уписати у тродимензионалну целобројну мрежу. Наиме, према примеру 4, не постоји правилан уписани петоугао. Тврђење за правилан додекаедар следи јер му је пљосан правилан петоугао. Пет темена правилног икосаедра која су спојена ивицама са једним истим теменом такође су темена правилног петоугла, одакле следи тврђење за икосаедар.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Х. С. М. Цошетер, *Интродуцтион то Геометры*, Јохн Шилеы анд Сонс, инц., Нещ Ыорк – Лондон, 1961.

2. Р. Хонсбергер, *Матхематицал Морселс*, Долциани Матхематицал Ешпоситионс, Матх. Ашоц. оф Америца, 1978.

3. Р. Хонсбергер, *Ингенуиты ин Матхематицс*, вол. 23, Нещ Матхематицал Либрары, Матх. Ашоц. оф Америца, 1970.

4. Д. Ј. Нещман, Проблем Е1954, АММ, 1968, п. 545.

5. Г. Пицк, *Геометрисчес зур Захленлехре*, Вереинес Лотос, Праг, 1899.

6. В. В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, часть II, Наука, Москва, 1986.

7. Ј. Е. Рееве, *Он тхе Волуме оф Латтицс Полыхедра*, Процеедингс оф тхе Лондон Мат. Соц. 7(1957), 378–395.

8. Р. Тошић, *Инваријанте – варијације на тему*, Алеф, Нови Сад, 1996.

9. Р. Тошић, *Математички проблеми '97 – 365 задатака са решењима са разних такмичења у свету*, Архимедес – Нови Сад, Нови Сад, 1997.

10. Р. Тошић, *Комбинаторика*, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1999.