

Самоил Малчески, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА, МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА И НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

Постојат повеќе познати докази на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц. Еден од нив е доказот со математичка индукција, кој ќе го презентираме во оваа статија. Притоа, базата на индукцијата ќе ја докажеме на два начина, од кои едниот е со користење на Питагоровата теорема.

Теорема 1 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, за $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}, \quad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}. \quad (2)$$

Доказ. Точноста на теоремата ќе ја докажеме со помош на математичка индукција по $n \in \mathbb{N}$. Притоа, базата на индукцијата, т.е. точноста на теоремата за $n = 2$ ќе ја докажеме на два начина.

Прв начин. Нека $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Имаме,

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \\ &= (a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2) + (a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2, \end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1). Јасно, во (1) знак за равенство важи ако и само ако $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, т.е. ако и само ако $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Втор начин. Бидејќи

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq |a_1| \cdot |b_1| + |a_2| \cdot |b_2|$$

доволно е тврдењето да го докажеме во случај кога a_1, a_2, b_1, b_2 се ненегативни реални броеви. Да ставиме $a_1 = a, a_2 = b, b_1 = x, b_2 = y$. Нека

$$\overline{AB} = ax, \overline{BD} = by, \overline{AD} = ax + by, AC \perp AD, DE \perp AD, \overline{AC} = bx, \overline{DE} = ay.$$

Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BC} = \sqrt{(ax)^2 + (bx)^2} = x\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\overline{DE} = \sqrt{(ay)^2 + (by)^2} = y\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Понатаму, $\overline{AB} : \overline{BC} = a : b = \overline{DE} : \overline{BD}$,
па затоа правоаголните триаголници
 BCA и EBD се слични. Од слич-
носта на овие триаголници следува

$$\angle DBE + \angle ABC = \angle DBE + \angle DEB = 90^\circ,$$

па затоа

$$\angle EBC = 180^\circ - (\angle DBE + \angle ABC) = 90^\circ.$$

Според тоа, триаголникот BCE е правоаголен. Сега, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CE} = \sqrt{(x\sqrt{a^2 + b^2})^2 + (y\sqrt{a^2 + b^2})^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Но, трапезот $ACED$ е правоаголен, па затоа важи

$$ax + by = \overline{AD} \leq \overline{CE} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

Притоа знак за равенство важи ако и само ако правоаголниот трапез $ACED$ е правоаголник, т.е. ако и само ако $ay = bx$, со што тврдењето е докажано.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $n = k$, т.е. дека за $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$, важи

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}$$

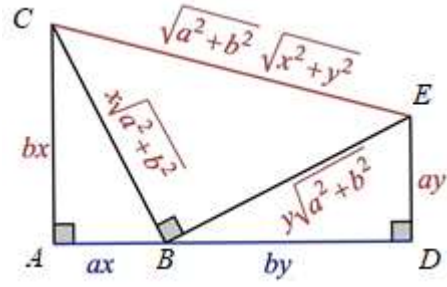
при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_k}{b_k}$.

Нека $n = k + 1$ и $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k + 1$. Земаме

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2}, \quad b = a_{k+1}, \quad x = \sum_{i=1}^k b_i^2, \quad y = b_{k+1}$$

и прво од индуктивната претпоставка, а потоа од (3) добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i &= \sum_{i=1}^k a_i b_i + a_{k+1} b_{k+1} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2} + a_{k+1} b_{k+1} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2 + b_{k+1}^2}, \end{aligned}$$



при што знак за равенство важи ако и само ако во двете неравенства важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$. Според тоа, тврдењето важи за $n = k + 1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993
2. Малчески, Р., *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства* (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019

Статијата прв пат е издадена на српски јазик во математичкото списание ДИОФАНТ во јуни 2026 година