JMMO 2026

1. Нека во остроаголниот $\triangle ABC$ точката D на страната BC е таква што $\measuredangle ACB = 2\measuredangle DCA$. Полуправата AD ја сече опишаната кружнца околу $\triangle ABC$ во точката E, а D' е осносиметрична точка на точката D во однос на правта BE. Нека правата паралелна на AC низ D' ја сече AD во точката F и втората пресечна точка на правата BE со опишаната кружница околу $\triangle BFD$ е $G \neq B$. Докажи дека точките D', E, G, F лежат на иста кружница.

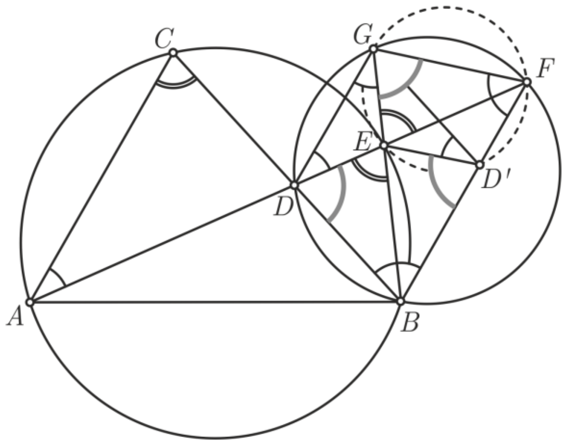
Решение. *Прв начин.* Од осната симетрија и периферни агли во опишаната кружница следува дека

$$\measuredangle D'BE = \measuredangle EBD = \measuredangle EBC = \measuredangle EAC = \measuredangle DAC = \frac{1}{2}\measuredangle ACB .$$

Според тоа, $\measuredangle D'BD = \measuredangle ACB$, т.е. $BD' \| AC$, па затоа точките B, D', F се колинеарни. Сега од

$$\measuredangle ED'B = \measuredangle BDE = \measuredangle BDF = \measuredangle BGF = \measuredangle EGF$$

следува дека четириаголникот $D'FGE$ е тетивен, т.е. точките D', E, G, F лежат на иста кружница.



Втор начин. Од периферните агли во дадените кружници и агли со паралелни краци следува дека

$$\measuredangle AFD' = \measuredangle DAC = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \frac{1}{2}\measuredangle AEB .$$

Според тоа, $\measuredangle D'EB = \measuredangle EBC = \measuredangle EAC$, т.е. $\measuredangle AEB = \measuredangle EFD' + \measuredangle D'BE$, па точките B, D', F се колинеарни (притоа $\measuredangle D'EB = \measuredangle EBC$ следува од осната симетрија на D и D'). Освен тоа,

$$\measuredangle GFE = \measuredangle GFD = \measuredangle GBD = \measuredangle FBG = \measuredangle FDG = \measuredangle EDG = \measuredangle GD'E ,$$

од каде следува дека точките D', E, G, F лежат на иста кружница.

Трет начин. Од периферните агли во дадените кружници и аглите со паралелни краци следува

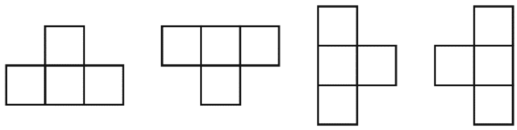
$$\measuredangle AFD' = \measuredangle DAC = \tfrac{1}{2}\measuredangle ACB = \tfrac{1}{2}\measuredangle AEB .$$

Освен тоа,

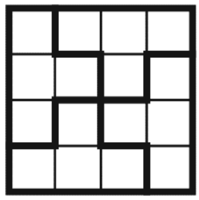
$$\measuredangle GFD = \measuredangle GBD = \measuredangle EBC = \measuredangle EAC = \tfrac{1}{2}\measuredangle AEB ,$$

па $\measuredangle GFD' = \measuredangle AEB = \measuredangle BED'$ од каде следува дека точките D', E, G, F лежат на иста кружница.

2. Најди ги сите природни броеви n за кои квадратна $n \times n$ табла може целосно да се поплочи со Т-тетрамина (цртежи десно)



Решение. Табла 4×4 може да се поплочи како на цртежот десно. Ако $n > 4$ и $n = 4k$, тогаш $n \times n$ таблата може да се подели на k^2 подтабли 4×4, што значи дека таа може да се поплочи.



Да претпоставиме дека $n\times n$ табла може да се поплочи со Т-тетрамина. Бидејќи секое тетрамино има 4 квадратчиња, а таблата има n^2 квадратчиња, заклучуваме дека $4 | n^2$, од каде следува $2 | n$.
Сега, со црна и бела боја шаховски да ја обоиме таблата. При ова боење имаме по $\frac{n^2}{2}$ црни и бели полиња. Понатаму, да забележиме дека имаме два вида Т-татрамина: оние кои покриваат три црни и едно бело квадратче и нека нивниот број е A, и оние кои покриваат три бели и едно црно квадратче и нека нивниот број е B. Тогаш за вкупниот број црни и бели квадратчиња важи $3A + B = \frac{n^2}{2} = A + 3B$, па затоа $A = B$. Според тоа, $4A = \frac{n^2}{2}$, од каде добиваме дека $4 | \frac{n^2}{2}$, односно $4 | n$.

3. Докажи дека за секои четири ненегативни реални броеви x_1, x_2, x_3, x_4 такви што $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ и $x_3^2 + x_4^2, x_4^2 + x_1^2, x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ е точно неравенството

$$\frac{x_1+x_2}{x_3^2+x_4^2} + \frac{x_2+x_3}{x_4^2+x_1^2} + \frac{x_3+x_4}{x_1^2+x_2^2} \geq 4 .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин*. Означуваме $x_1+x_2=a>0,\ x_3+x_4=1-a>0$. Тогаш

$$\frac{x_1+x_2}{x_3^2+x_4^2}+\frac{x_2+x_3}{x_4^2+x_1^2}+\frac{x_3+x_4}{x_1^2+x_2^2}\geq\frac{x_1+x_2}{x_3^2+x_4^2}+\frac{x_3+x_4}{x_1^2+x_2^2}\geq\frac{x_1+x_2}{x_3^2+2x_3x_4+x_4^2}+\frac{x_3+x_4}{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}$$

$$=\frac{x_1+x_2}{(x_3+x_4)^2}+\frac{x_3+x_4}{(x_1+x_2)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{1-a}{a^2}$$

$$\overset{AG}{\geq}2\sqrt{\frac{a(1-a)}{a^2(1-a)^2}}=\frac{2}{\sqrt{a(1-a)}}\overset{AG}{\geq}\frac{2}{\frac{a+(1-a)}{2}}=4.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_2+x_3=0$ и $x_1+x_2=x_3+x_4$, т.е. ако и само ако $x_2=x_3=0$ и $x_1=x_4=\frac{1}{2}$.

Втор начин. Од условот на задачата, неравенството

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\geq a^2+b^2$$

и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува:

$$\frac{x_1+x_2}{x_3^2+x_4^2}+\frac{x_2+x_3}{x_4^2+x_1^2}+\frac{x_3+x_4}{x_1^2+x_2^2}\geq\frac{x_1+x_2}{x_3^2+x_4^2}+\frac{x_3+x_4}{x_1^2+x_2^2}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3+x_4)}{x_3^2+x_4^2}+\frac{(x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3+x_4)}{x_1^2+x_2^2}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_3^2+x_4^2}+\frac{(x_3+x_4)^2}{x_1^2+x_2^2}+(x_1+x_2)(x_3+x_4)(\frac{1}{x_3^2+x_4^2}+\frac{1}{x_1^2+x_2^2})$$

$$\geq\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2+x_4^2}+\frac{x_3^2+x_4^2}{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{x_3^2+x_4^2}(\frac{1}{x_3^2+x_4^2}+\frac{1}{x_1^2+x_2^2})$$

$$\overset{AG}{\geq}2\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2+x_4^2}\cdot\frac{x_3^2+x_4^2}{x_1^2+x_2^2}}+\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{x_3^2+x_4^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{(x_3^2+x_4^2)(x_1^2+x_2^2)}}$$

$$=2+2=4.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_2+x_3=0$ и $x_3^2+x_4^2=x_1^2+x_2^2$, т.е. ако и само ако $x_2=x_3=0$ и $x_1=x_4=\frac{1}{2}$.

4. За природниот број велиме дека е *единично делив* ако е делив со секоја од своите цифри, но не е делив со квадратот на ниту една од своите цифри. Колку најмногу различни цифри може да има единечно делив број? Дали има конечно или бесконечно единечно деливи броеви со тој број на различни цифри?

Решение. Ќе докажеме дека ваков број може да има најмногу 5 различни цифри.

Според условот на задачата 0 и 1 не може да бидат цифри на единечно делив број. Освен тоа ако 2 е цифра на некој единечен делив број, тогаш ниту 4, ниту 8 не може да бидат цифри на тој број и обратно, ако 4 или 8 е цифра на некој единечен делив број, тогаш 2 не е цифра на тој број. Слично, ако 3 е цифра на ваков број, тогаш 9 не е цифра на тој број и обратно. Според тоа, од цифрите 2, 3, 4, 8 и 9, најмногу 3 може да се во записот на единечно делив број.

Ако претпоставиме дека цифрата 5 учествува во записот на единечно делив број, тогаш тој број е непарен (не смее да завршува на цифрата 0), па затоа има најмногу три различни цифри, т.е. 5, 7 и една од цифрите 3 или 9. Пример за вакви броеви се 357735 и 975555.

Ако цифрата 5 не учествува во записот на единечно делив број, тогаш во неговиот запис може да ги има 6, 7 и најмногу три од цифрите 2, 3, 4, 8 и 9. Ако цифрата 6 е во записот, тогаш не може да се цифрите 4 и 9, а ниту цифрите 8 и 9, па единствен начин да имаме пет различни цифри, тоа е бројот да е запишан со цифрите 3, 4, 6, 7 и 8. Нивниот најмал заеднички содржател е 168 и бараниот број мора да е делив со овој број. Освен тоа, бројот поделен со 168 не смее да е делив со 2, 3 или 7.

Лема 1. Постои единечно делив број кој е запишан со цифрите 3, 4, 6, 7 и 8.

Доказ. *Прв начин*. За да најдеме број кој ги здоволува својствата почнуваме со 168 (или друг број кој е содржател на 168 кој завршува на 4, 6 или 8). Потоа бидејќи 1 не е дозволена цифра, додаваме содржател на 168 кој завршува на две нули, а третата цифра од десно е 2 или 6 (за да се добие 3 или 7). Првиот ваков број е $4368=168\cdot(1+25)$, но тој не ја содржи цифрата 7, па затоа треба постапката да ја продолжиме или да најдеме друг број. Ако во следниот чекор додадеме $168\cdot 375$ го добиваме бројот 67368. Во овој број ја нема цифрата 4, па додаваме 1680000 и го добиваме бројот 1747368. Сега, како во првиот чекор додаваме $168\cdot 250000$ и го добиваме бројот $43747368=168\cdot 260401$, па како бројот 260401 не е делив со ниту еден од броевите 2, 3 и 7, добивме единечно делив број.

Втор начин. Прво ќе докажеме дека за секој непарен број n кој не е делив со 5 постои број запишан само со цифрата 1 и е делив со n. Ако ги разгледаме броевите e_i кои се запишани со i единици, тогаш меѓу првите $n+1$ броја ќе има два броја кои при делење со n даваат ис остаток. Јасно, нивната разлика $e_j - e_i = 10^i e_{j-i}$ е делива со n. Бидејќи n е непарен број кој не е делив со 5, заклучуваме дека $n \mid e_{j-i}$.

Конкретно во задачата не интересира број кој е делив со 21 и број кој е делив со $21^2 = 441$. Тоа се броевите e_6 и e_{126}. Дополнително е важно дека $\frac{111111}{21} = 5291$ е непарен број и не е делив ниту со 3 ниту со 7. Сега, бројот $8e_6$ е делив со $8 \cdot 21 = 168$, но не е делив со квадратите на 3, 4 и 7. Јасно, броевите $a \cdot e_{126} \cdot 10^s$ се делив со 168^2 за секој $a \in \{3,4,6,7\}$ и $s \geq 6$, па единечно делив број е бројот

$$8e_6 + 7e_{126} \cdot 10^6 + 6e_{126} \cdot 10^{132} + 4e_{126} \cdot 10^{258} + 3e_{126} \cdot 10^{384}.$$

Имено, бидејќи сите собирци освен $8e_6$ се делив со 168^2 заклучиуваме дека збирот е делив со 168, но не е делив со броевите $3^2, 4^2, 7^2$.

Лема 2. Постојат бесконечно многу единечно деливи броеви такви што во записот на секој од овие броеви се сите пет цифри 3, 4, 6, 7 и 8.

Доказ. *Прв начин*. Нека b е еден ваков број со k цифри (на пример $b = 43747368, k = 8$). Ги разгледуваме броевите

$$a_0 = 1, a_1 = 1 + 10^k, \ldots, a_i = 1 + 10^k + 1 + 10^{2k} + \ldots + 10^{ki}.$$

За секој $i \in \mathbb{N}_0$ во записот на бројот ba_i се сите цифри 3, 4, 6, 7 и 8 и овој број е делив со нив. Јасно, за $i \equiv 2 (\bmod 3)$, бројот a_i е делив со 3, па затоа бројот ba_i не е единечно делив. Освен тоа, некои од броевите (најмногу секој втор ако $k \equiv 4 (\bmod 6)$) a_i може да се деливи со 7. Но, во секој случај најмалку два од секои шест вакви последователни броеви не се деливи ниту со 3 ниту со 7. Сега, бидејќи броевите се непарни, добиваме дека два од секои шест вакви последователни броеви ba_i се единечни деливи, па затоа постојат бесконечно многу единечно деливи броеви.

Втор начин. Како во вториот доказ на Лема 1 заклучуваме дека од единечно делив број A со додавање на $3 \cdot e_{126} \cdot 10^k$, каде k е бројот на цифрите на A, се добива нов единечно делив број, што значи дека постојат бесконечно многу единечно деливи броеви во чии записи се сите цифри 3, 4, 6, 7 и 8.

5. На овогодишната ЈБМО ќе учествуваат парен број натпреварувачи. Секој натпреварувач има помалку познати отколку непознати натпреварувачи. Докажи дека организаторите може да ги распоредат сите натпреварувачи така што во една клупа ќе седат по два натпреварувачи кои меѓусебно не

се познаваат. (Релацијата „познанство“ е симетрична.)

Решение. Нека на натпреварот учествуваат $2n$ натпреварувачи и нека претпоставиме дека ваков распоред не е можен. Да разгледаме распоред во кој има најмал број клупи во кои седат познаници.

Во овој распоред постојат познаници A и B кои седат во иста клупа. Нека има a клупи во кои A не ги познава обата натпреварувачи и b клупи во кои B не ги познава обата натпреварувачи. Ако B ги познава натпреварувачите од споменатите a клупи, тогаш тој познава најмалку

$$1+2a+(n-1)-(a+b)=n+a-b$$

натпреварувачи (имено, го познава A, познава $2a$ натпреварувачи од споменатите a клупи и познава по еден натпреварувач од останатите $(n-1)-(a+b)$ клупи). Слично, ако A ги познава сите натпреварувачи од споменатите b клупи, тогаш тој познава најмалку

$$1+2b+(n-1)-(a+b)=n+b-a$$

натпреварувачи. Според тоа, збирот на познаниците на A и познаниците на B е поголем или еднаков на $2n$. Последното противречи на условот на задачата, бидејќи секој натпреварувач има најмногу $[\frac{2n-1}{2}]=n-1$ познаници.

Од добиената противречност следува дека постои клупа во која едниот од A и B не ги познава двата натпреварувачи, а другиот не познава барем еден од овие два натпреварувачи. Според тоа, постои клупа во која седат натпреварувачи C и D, таква што A не го познава C, а B не го познава D. Сега, ако направиме прераспределба така да заедно седат A и C, односно B и D, тогаш го намалуваме бројот на клупите во кои седат двајца познаници. Последното противречи на претпоставката за минималноста на бројот на клупите во која седат познаници. Конечно, од добиената противречност следува постои распоред така што во секој клупа седат натпреварувачи кои не се познаваат.