Универзитет “Св. Кирил и Методиј “ во Скопје

Новак Ивановски Марија Оровчанец

ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ И СПЕЦИЈАЛНИ ФУНКЦИИ

Скопје, 2000

Универзитет “Св. Кирил и Методиј “ во Скопје

Др. Новак Ивановски, редовен професор

Др. Марија Оровчанец, доцент

ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ И СПЕЦИЈАЛНИ ФУНКЦИИ

Скопје, 2000

Одобрено со решение на ректорот бр. 11-425 од 3.07.2000 година како ОСНОВЕН УЧЕБНИК

Со одлука на Наставно - научниот совет на Природно - математичкиот факултет во Скопје под број 07-43/7 од 03.05.2000 година се одобрува употребата на овој учебник како универзитетски учебник.

Рецензенти:

Проф. д-р Драган Димитровски, Природно-математички факултет,
Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Скопје
Доц. д-р Јорданка Митевска, Природно-математички факултет,
Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Скопје

Лектор: Стојан Саревски

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека ''Св. Климент Охридски'', Скопје

517.419.68

ИВАНОВСКИ, Новак
Ортогонални полиноми и специјални функции / Новак Ивановски, Марија Оровчанец. - Скопје: Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2000.
-123 стр. ; 24 см.

Регистар. - Библиографија: стр.122-123

ISBN 9989-43-129-9
1. Оровчанец, Марија
а) Полиноми, ортогонални - Високошколски учебници

Тираж: 300 примероци

Предговор

Во оваа книга изнесени се основните особини на ортогоналните полиноми и специјалните функции. Таа е произлезена од предавањата што ги одржуваше првиот автор повеќе години на студентите од трета година при Институтот за информатика на Природно-математичкиот факултет во Скопје, како и од повеќегодишното изведување вежби и дел од предавањата од вториот автор на истите студенти. Дел од материјалот е изнесен во рамките на предавањата по предметот Анализа III.

При дефиницијата на ортогонални полиноми избран е методот на Грам-Шмит за ортогонализација, додека при проучувањето на класичните ортогонални полиноми главно тежиште е посветено на нивната генератрисна функција како и формулата на Родригез за соодветните полиноми.

Низ целата книга се избегнува употребата на методите на теоријата на функции со комплексна променлива; при Беселовите функции се ползуваат обопштените степенски редови.

Во оваа книга се изнесени теоријата и техниката на сепарабилните Хилбертови простори како комплетирање на нормирани простори, при што како резултат се добиваат просторот од Лебег интеграбилни функции и Лебеговиот интеграл то настануваат со комплетирање на просторот од непрекинати функции со интегрална метрика, при што Лебеговиот интеграл Ќе претставува генерализација на Римановиот интеграл и на несвојствениот Риманов интеграл.

На мислење сме дека овој начин е многу поприфатлив и за студентите по физика, електротехника и другите технички науки, за да се запознаат и да бидат во можност да го користат Лебеговиот интеграл без предзнаења од реална анализа, теорија на мера и интеграција.

Авторите им се заблагодаруваат на рецензентите за корисните сугестии при изработката на конечната верзија и на сите кои читајќи го текстот ќе укажат на евентуалните грешки.

Септември, 2000 година

Новак Ивановски

Марија Оровчанец

С О Д Р Ж И Н А

I ДЕЛ - УНИТАРНИ И ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТОРИ

I Глава

II ДЕЛ - КЛАСИЧНИ ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ

II Глава

III Глава

IV Глава

V Глава

III ДЕЛ - БЕСЕЛОВИ ФУНКЦИИ И БЕСЕЛОВИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

I Д Е Л

УНИТАРНИ И ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТОРИ

I Г Л А В А

ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТОРИ И ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ

1. Унитарни простори

Сметаме дека читателот е добро запознат со поимот и основните особини на векторскиот простор. Нека со X означиме векторски простор над полето реални броеви $\mathbf{R}$ или над полето од комплексни броеви $\mathbf{C}$. Во првиот случај ќе велиме дека X е реален векторски простор, додека во вториот случај ќе велиме дека X е комплексен векторски простор. Многу од особините што ги поседува скаларниот производ на вектори во тродимензионалниот простор ќе бидат земени за дефиниција на функција од две променливи- скаларен простор во векторски простор, а оттаму ќе биде дефинирана норма што ќе претставува должина (интензитет) на вектор во тродимензионалниот простор со што ќе биде пренесена геометријата од тродимензионалниот простор во векторски простор со скаларен производ.

Дефиниција 1. *Скаларен производ* во векторскиот простор H над полето комплексни броеви $\mathbf{C}$ е пресликување од Декартовиот производ $\mathrm{H}\times\mathrm{H}$ во $\mathbf{C}$ со ознака $(x, y)=\langle x, y\rangle=(x|y)$ за кое важи

а) $(y,x)=\overline{(x, y)}, \quad \forall x, y\in \mathrm{H}$

б) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y), \quad \forall\lambda\in \mathbf{C}, \forall x, y\in \mathrm{H}$

в) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in \mathrm{H}$

г) $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{H}$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Дефиниција 2. *Унитарен простор* е комплексен векторски простор со скаларен производ.

Напомена: Ако X е реален простор и ако условите а) и б) се заменат со

а') $(y, x) = (x, y), \quad \forall x, y \in X$

б') $(\lambda x, y) = \lambda (x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall x, y \in X$

тогаш велиме дека X е унитарен простор над полето реални броеви или Евклидски простор.

Од самата дефиниција, непосредно се добива точноста на следните равенства:

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) \tag{1}$$

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \tag{2}$$

$$(x, 0) = (0, x) = 0 \tag{3}$$

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y) \tag{4}$$

каде што $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathrm{H}$ и $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$. (да се види задача 1).

Пример 1. Нека $X = \mathbf{R}^n$ е $n-$димензионален Евклидски простор кој се состои од множество подредени $n-$торки реални броеви $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ со скаларен производ дефиниран со $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ при $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. ●

Пример 2. Нека $X = \mathbf{C}^n$ е множество подредени $n-$торки комплексни броеви $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in \mathbf{C}$. X е векторски простор каде што собирањето на вектори и множењето со скалар се дефинира со:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

при $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Јасно е дека $\mathbf{C}^n$ е векторски простор, со нула вектор (сите координати се еднакви на нула). Уште повеќе, $\mathbf{C}^n$ е унитарен простор со скаларен производ: $(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$. ●

Пример 3. Нека $X = \mathrm{C}^2[a,b]$ е множество од сите комплексно-вредносни непрекинати функции на затворен и ограничен интервал $[a,b]$ каде што собирањето на две функции f и g од $\mathrm{C}^2[a,b]$ и множењето на функција f со скалар λ се дефинира со:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x). \quad \forall x \in [a,b]$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

Јасно е дека $X = \mathrm{C}^2[a,b]$ е векторски простор. Уште повеќе, со формулата

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

за $f, g \in \mathrm{C}^2[\mathrm{a,b}]$ е дефиниран скаларен производ, со што X станува унитарен простор. При проверката на аксиомите за скаларен производ, единствена потешкотија се јавува при проверката на импликацијата $(f,f)=0 \Rightarrow f=0$, односно $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow f(x)=0, \quad \forall x \in [a,b]$. Се остава на читателот да изврши проверка. ●

Пример 4. Нека $p(x)$ е позитивна, непрекината функција дефинирана на сегментот $[a,b]$, со $\mathrm{C}_\mathrm{p}^2[a,b]$ се означува множеството од непрекинати функции на сегментот $[a,b]$ со скаларен производ дефиниран со:

$$(f,g)=\int_a^b p(x)f(x)\overline{g(x)}dx .$$

$\mathrm{C}_\mathrm{p}^2[a,b]$ е унитарен простор. Функцијата $p(x)$ се вика тежинска функција (или тежина). ●

Просторот од примерот 3 е специјален случај во унитарниот простор од примерот 4 кога тежинската функција $p(x)=1$.

На почетокот ќе го изнесеме доказот на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц што претставува генерализација на неравенството под истото име во случај на Евклидскиот $n-$димензионален простор $\mathbf{R}^n$.

Теорема 1. (Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц) За произволни вектори од унитарниот простор H важи $|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$.

Доказ: Ако $y=0$, тогаш десната и левата страна се еднакви на нула (задача 1). Нека $y\neq 0$ и нека λ е произволен комплексен број. Поаѓајќи од $(x+\lambda y, x+\lambda y)\ge 0$ се добива $(x,x)+\lambda(y,x)+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda\overline{\lambda}(y,y)\ge 0$. Ако во последното неравенство избереме $\lambda=-(x,y)/(y,y)$ имаме $(x,x)-(x,y)\overline{(x,y)}/(y,y)\ge 0$, односно $|(x,y)|^2\le (x,x)(y,y)$ што требаше да се докаже. ■

Напоменуваме дека во неравенството на теоремата 1 важи равенство ако и само ако векторите x и y се линеарно зависни, (задача 2).

Дефиниција 3. Бројот $\sqrt{(x,x)}$ се вика *норма* на векторот x и се означува со $\|x\|$.

Теорема 2. За нормата $\|\ \|$ во унитарниот простор H важи:

а) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|,\quad \forall x,y\in \mathrm{H}$

б) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|,\quad \forall\lambda\in\mathbf{C}, x\in\mathrm{H}$

в) $\|x\|\ge 0\quad \forall x\in\mathrm{H}$ и $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$.

Доказ: Својствата б) и в) следуваат непосредно од дефиницијата за норма. Ќе го докажеме неравенството а) познато под името *неравенство на триаголник*. Имаме

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(y,y)+(x,y)+\overline{(x,y)}=\|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{Re}(x,y)\le$$

$$\le\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2$$

Во последното неравенство беше искористено неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц. Прашањето за знакот на еднаквост во неравенството под а) се третира во задачата 3. ■

Дефиниција 4. *Нормиран простор* е векторски простор X во којшто постои ненегативна функција $\| \ \|$ со својства а),б) и в) од теоремата 2.

Од теоремата 2 се гледа дека секој унитарен простор е нормиран простор. Се поставува прашањето дали важи обратното: дали секој нормиран простор е унитарен? Дали во секој нормиран простор нормата произлегува (извира) од скаларен производ? Одговорот на овие прашања е негативен. За да се покаже последното, Ќе биде покажано дека во секој унитарен простор важи равенство на паралелограм што ќе биде карактеризација на унитарните простори.

Теорема 3. За произволни вектори x и y од унитарен простор H важи равенството на паралелограм:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Доказ: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) +$

$+ (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) = 2(x,x) + 2(y,y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. ■

Пример 5. Нека $X = \mathrm{C}[0,1]$ е простор од непрекинати функции на $[0,1]$ со норма $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ за $f \in \mathrm{C}[0,1]$. Непосредно се проверува дека X е нормиран простор. ќе покажеме дека X не е унитарен простор, т.е. не постои скаларен производ во X таков што $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$. Да го претпоставиме спротивното, тогаш заради теоремата 3 би важело равенството на паралелограм. Меѓутоа за $f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad x \in [0,1]$ имаме $\|f\| = \|g\| = 1$, додека пак $\|f+g\| = 2$ и $\|f-g\| = 1$. ●

Напомена. Се покажува (види задача 7) дека ако важи равенството на паралелограм во нормиран простор X , тогаш X е унитарен простор.

Да забележиме дека секој унитарен простор е метрички простор, бидејќи секој унитарен простор е нормиран, а во секој нормиран простор со формулата $d(x,y)=\|x-y\|$ е дефинирана метрика. Така, во унитарниот простор може да се разгледува конвергенција на низи.

2. Ортогоналност во унитарни простори. Апроксимација и неравенство на Бесел

Дефиниција 5. Велиме дека векторите x и y во унитарниот простор се *ортогонални* ако $(x,y)=0$ и користиме ознака $x \perp y$.

За непразно конечно или бесконечно множество M од вектори x_j велиме дека е *ортогонално* ако $(x_i,x_j)=0$ за $i \neq j$ и $x_j \neq 0$.

Множеството $\{e_j : j \in \mathbf{N}\}$ е *ортонормирано* ако $(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$.

Теорема 4. (Питагорина теорема) Ако $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ е ортогонален систем (множество) од вектори во унитарниот простор H, тогаш важи:

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2$$

Доказ: $\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=(x_1+x_2+\cdots+x_n,x_1+x_2+\cdots+x_n)=$

$$=(x_1,x_1)+(x_1,x_2)+\cdots+(x_1,x_n)+(x_2,x_1)+(x_2,x_2)+(x_2,x_3)+\cdots+(x_2,x_n)+$$
$$+\cdots+(x_n,x_1)+(x_n,x_2)+(x_n,x_3)+\cdots+(x_n,x_n)=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2. \ \blacksquare$$

Теорема 5. Секое конечно ортонормирано или ортогонално множество вектори е линеарно независно множество од вектори.

Доказ:. Нека $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ е ортогонално множество вектори и нека $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_n e_n=0$. Ако последното равенство скаларно се помножи со e_k се добива $\lambda_1(e_1,e_k)+\lambda_2(e_2,e_k)+\cdots+\lambda_n(e_n,e_k)=0$ од каде што следува дека $\lambda_k=0$. Линеарната независност следува од произволноста на k. ■

Дефиниција 6. Нека $E = \{e_n, n \in \mathbf{N}\}$ е ортонормирано множество во унитарниот простор H. За $x \in \mathrm{H}$, бројот $c_k = (x, e_k)$ се вика *Фуриев коефициент на векторот* x во однос на ортонормираното множество E.

Нека B_n е $n-$димензионален потпростор генериран од ортонормираниот систем вектори $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Се поставува следната задача за апроксимација: *За даден вектор* $x \in \mathrm{H}$ *да се најде вектор* $y = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \in B_n$ *така што големината* $\|x - z\|, z \in B_n$ *да прими најмала вредност еднаква на* $\|x - y\|$.

При решавањето на оваа задача се претпоставува дека H е комплексен унитарен простор. (Случајот кога H е реален е многу поедноставен за решавање) .

За произволен $z = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \in B_n$ имаме $\|x - z\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \right) =$

$$= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} b_k (e_k, x) - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_k \overline{b}_j (e_k, e_j) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k \overline{c}_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k c_k +$$

$+ \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$ каде што $c_k = (x, e_k), k = 1, 2, \cdots n$ е Фуриев коефициент.

Конечно се добива:

$$\|x - z\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \tag{1}$$

Изразот на десната страна од последното равенство прима најмала вредност кога $b_k = c_k = (x, e_k)$.

Добиваме:

$$\min_{z \in B_n} \|x - z\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \tag{2}$$

односно

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \right\|^2 \qquad (3)$$

за секој избор $b_1, b_2, \cdots b_n \in \mathbf{C}$.

Непосредно од (2) се добива точноста на неравенството

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (4)$$

Од произволноста на природниот број n во неравенството (4), се добива

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (5)$$

Неравенството (5) е познато под името *неравенство на Бесел.*

Докажана е следната теорема:

Теорема 6. Нека H е унитарен простор, $\{e_k : k \in \mathbf{N}\}$ е ортонормирано множество во H и нека B_n е потпростор генериран од векторите $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. За $x \in \mathrm{H}$ важи $\min\limits_{z \in B_n} \|x - z\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2$ каде што $c_k = (x, e_k), k = 1,2,\cdots n$. Уште повеќе, редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ е конвергентен и важи Беселовото неравенство: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$.

3. Хилбертов простор

Дефиниција 7. *Низа* во унитарниот простор H е пресликување $x : \mathbf{N} \to \mathrm{H}$ од множеството природни броеви $\mathbf{N}$ во унитарниот простор H. Вредноста (сликата) $x(n)$ се означува со x_n; низата се означува со (x_n), додека множеството вредности на низата со $M_x = \{x_n : n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathrm{H}$.

Дефиниција 8. За низата вектори (x_n) во унитарниот простор H велиме дека *конвергира* кон векторот $x \in \mathrm{H}$ и пишуваме $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

ако $\|x_n - x\| \to 0, \quad n \to \infty$. Векторот x се вика *лимес* на низата (x_n) а низата се вика конвергентна низа.

Напоменуваме дека лимесот на конвергентна низа е еднозначно определен, што е добро познат резултат од метрички простори.

Во наредната теорема ќе покажеме дека операциите собирање, множење со скалар и скаларниот производ се непрекинати.

Теорема 7. Нека H е унитарен простор и нека (x_n) и (y_n) се две низи во H такви што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ и нека (λ_n) е низа во $\mathbf{C}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Тогаш:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ (непрекинатост на нормата)
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$ (непрекинатост на скаларниот производ)

Доказ: 1. Следува непосредно од $\|(x_n \pm y_n) - (x \pm y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$.

2. $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\| \le |\lambda_n| \|(x_n - x)\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| \to 0$,

бидејќи низата (λ_n) е ограничена.

3. $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \le \|x_n - x\|$. Како последица се добива ако (x_n) е конвергентна низа, тогаш бројната низа $(\|x_n\|)$ е ограничена.

4. $|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \le$
$\le |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \le \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \to 0$ бидејќи постои $M \ge 0$ такво што $\|x_n\| \le M$, $\forall n \in \mathbf{N}$. ■

Дефиниција 9. Низата (x_n) во унитарниот простор H е *Кошиева* (фундаментална) ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbf{N}$ таков што за сите $n, m \ge n_0$ важи $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Дефиниција 10. Унитарниот простор H е *Хилбертов* ако секоја Кошиева низа во H е конвергентна, т.е. ако H е комплетен метрички простор во однос на метриката $d(x, y)=\|x-y\|$, каде што $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$.

Комплетен нормиран простор се нарекува *Банахов простор*.

Напоменуваме дека секој Хилбертов простор е и Банахов простор. Јасно е дека обратното тврдење не важи.

Хилбертовите простори се делат на реални и комплексни. Постои, исто така, поделба на Хилбертовите простори според димензијата. Хилбертовиот простор како векторски простор има димензија којашто е конечна или бесконечна. Сметаме дека читателот е добро запознат со конечно димензионалните векторски простори.

Дефиниција 11. Нека X е векторски простор и нека S е непразно подмножество од X кое е различно од нула потпросторот $\{0\}$. За множеството S велиме дека е *линеарно независно множество* ако секое непразно конечно подмножество од S е линеарно независно.

За дадено непразно подмножество S од векторскиот простор X со $L(\mathrm{S})$ се означува множеството од сите конечни линеарни комбинации $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ каде што $\lambda_k \in \mathbf{C}$ и $x_k \in S$, $k=1,\cdots,n$. Се покажува дека $L(\mathrm{S})$ е векторски потпростор и уште повеќе е најмал векторски потпростор што го содржи множеството S (да се видат $[9]$ и $[22]$).

За линеарно независното множество M се вели дека е *максимално линеарно независно* множество во векторскиот простор X ако M не е вистинско подмножество од некое линеарно независно подмножество T од X.

За множеството $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$ велиме дека е *база* за векторскиот простор X ако B е максимално линеарно независно множество во X и ако $L(\mathrm{B})=\mathrm{X}$.

Ползувајќи ја лемата на Цорн се покажува дека секој векторски простор $\mathrm{X} \neq \{0\}$ поседува база, и уште повеќе ако B и B' се две бази за векторскиот простор X, тогаш нивните кардинални броеви се поклопуваат.

Дефиниција 12. *Димензија* на векторскиот простор X е кардиналниот број на база B на векторскиот простор X.

Означуваме $\dim X = k(B)$. Ако $\mathrm{X} = \{0\}$, тогаш по дефиниција земаме $\dim X = 0$. Да напоменеме дека димензијата на векторскиот простор е еднозначно определена.

Значи, Хилбертовите простори како векторски простори се конечно димензионални или бесконечно димензионални. При изучувањето на Хилбертовите простори многу поважна улога игра ортогоналната димензија на Хилбертов простор (која ќе биде изнесена подоцна), за разлика од векторската (линеарна) димензија.

Пример 6. Просторите $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ се $n-$димензионални Хилбертови простори. Единствено што треба да се провери е комплетноста. Нека $x^k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) \in \mathbf{C}^n$ и нека $\|x^k - x^m\| \to 0$ кога $k, m \to \infty$ т.е. нека

$$\|x^k - x^m\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^m|^2 \right)^{1/2} \to 0.$$

Се добива $|x_i^k - x_i^m| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^m|^2 \right)^{1/2} \to 0$ кога $k, m \to \infty$ за секој фиксен $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, што значи дека низата (x_i^k) е Кошиева низа од комплексни броеви. Од комплетноста на множеството комплексни броеви се добива дека за секој $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ постои $x_i^0 = \lim_{m \to \infty} x_i^m$. Нека $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in \mathbf{C}^n$. Непосредно се проверува дека $\|x^k - x^0\| \to 0$ кога $k \to \infty$. ●

Пример 7. Со l^2 се означува множеството од бесконечни низи од комплексни броеви $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ такви што $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Ќе покажеме дека l^2 е векторски простор. Нека $x = (x_n) \in l^2$ и $y = (y_n) \in l^2$, што значи $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty, \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2<\infty$. Од равенството $|x_n+y_n|^2=(x_n+y_n)(\bar{x}_n+\bar{y}_n)=x_n\bar{x}_n+x_n\bar{y}_n+\bar{x}_n y_n+y_n\bar{y}_n=|x_n|^2+|y_n|^2+2\mathrm{Re}\,x_n\bar{y}_n$ и од неравенството $2\,\mathrm{Re}\,x_n\bar{y}_n\le 2|x_n\bar{y}_n|=2|x_n||y_n|\le|x_n|^2+|y_n|^2$ се добива дека $x+y\in l^2$. Овде се користи елементарното неравенство $2ab\le a^2+b^2$ за $a>0$ и $b>0$. За $x,y\in l^2$ дефинираме скаларен производ (x,y) со

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\bar{y}_n\ . \tag{1}$$

Од погоре изнесеното се гледа дека редот на десната страна од (1) е апсолутно конвергентен. Без потешкотии се проверува исполнувањето на аксиомите за скаларен производ. Ќе покажеме дека l^2 е комплетен простор. За таа цел нека (x^k) е Кошиева низа, што значи дека за произволен $\varepsilon>0$ постои $k_0\in\mathbf{N}$ таков што за $k\ge k_0$ и за $m\ge k_0$ следува:

$$\|x^k-x^m\|<\varepsilon \tag{2}$$

односно

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^k-x_n^m|^2<\varepsilon^2 \tag{2'}$$

За произволен природен број s имаме

$$\sum_{n=1}^{s}|x_n^k-x_n^m|^2<\varepsilon^2 \tag{3}$$

Ако во неравенството (3) пуштиме $m\to\infty$ и имајќи предвид дека бројната низа $(x_n^m)_{m=1}^{\infty}$ е Кошиева низа од комплексни броеви, па е конвергентна, се добива

$$\sum_{n=1}^{s}|x_n^k-x_n^0|^2<\varepsilon^2 \tag{4}$$

каде што $x_n^0=\lim_{m\to\infty}x_n^m,\quad \forall n\in\mathbf{N}$. Од произволноста на природниот број s во (4) се добива:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^k - x_n^0\right|^2 < \varepsilon^2 \tag{5}$$

за секој $k \geq k_0$. Неравенството (5) покажува дека за $k \geq k_0$, $x^k - x^0 \in l^2$, $\left\|x^k - x^0\right\| < \varepsilon$, $x^0 = x^k + (x^0 - x^k) \in l^2$ и $\lim_{k\to\infty} x^k = x^0$. ●

Пример 8. Со l_0^2 се означува множеството од сите бесконечни низи од комплексни броеви $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ такви што $x_n = 0$ освен за конечно многу индекси n, т.е. $l_0^2 = \{x = (x_n) : k(\{n \in \mathbf{N} : x_n \neq 0\} < \chi_0)\}$. За $x, y \in l_0^2$ дефинираме скаларен производ (x, y) со

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n \ . \tag{6}$$

Сумата на десната страна на (6) е конечна, бидејќи истата се сведува на конечен збир. Непосредно се проверува дека l_0^2 е унитарен простор. Напоменуваме дека l_0^2 не е Хилбертов простор. (да се види задача 10). ●

Ако повнимателно се разгледаат просторите $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$, се гледа дека истите се $n-$димензионални, како векторски простори, додека l^2 и l_0^2 се бесконечно димензионални векторски простори. Навистина, множеството $E = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$, каде што $e_n = (0,0,\cdots,1,0,\cdots)$ при што 1 е на $n-$тата позиција, е линеарно независно бидејќи секое конечно подмножество од множеството E е линеарно независно (се остава на читателот за проверка).

4. Растојание на вектор до потпростор. Ортогонален комплемент

Дефиниција 13. Нека H е Хилбертов простор, за $Y \subseteq \mathrm{H}$ велиме дека е *затворен потпростор* ако е Y векторски потпростор и ако е затворено множество.

Напоменуваме дека во Хилбертов простор ќе бидат користени основните особини од метричките простори. Ако $x \in \mathrm{H}$ и Y е затворен потпростор од H, тогаш со $d(x,Y) = \inf\limits_{y \in Y} \{\|x - y\|\}$ е означено растојанието на векторот x до множеството Y.

Теорема 8. Нека H е Хилбертов простор и нека Y е затворен потпростор од H. Тогаш постои единствен вектор $y \in Y$ таков што

$$d(x,Y) = \|x - y\|. \tag{1}$$

Доказ: Без да се губи од општоста можеме да земеме дека $\delta = d(x,Y) > 0$, бидејќи ако $d(x,Y) = 0$ тогаш $x \in \overline{Y} = Y$, па имаме $y = x$. Од дефиницијата за инфимум следува дека за произволен природен број n постои $z_n \in Y$ таков што

$$\delta \le \|x - z_n\| < \delta + 1/n. \tag{2}$$

Ќе покажеме дека низата (z_n) е Кошиева. Го користиме равенството на паралелограм за векторите $x - z_n$ и $x - z_m$, па се добива:

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\|x - z_n\| + 2\|x - z_m\| - 4\|x - (z_n + z_m)/2\|^2 . \tag{3}$$

Имајќи во предвид дека $(z_n + z_m)/2 \in Y$, се добива $\|x - (z_n + z_m)/2\|^2 \ge \delta^2$. Од $\|x - z_n\|^2 < (\delta + 1/n)^2$ и $\|x - z_m\|^2 < (\delta + 1/m)^2$ и од неравенството (3) имаме $\|z_n - z_m\|^2 = 2(\delta + 1/n)^2 + 2(\delta + 1/m)^2 - 4\delta^2 = 4\delta/n + 4\delta/m + 2/n^2 + 2/m^2 \to 0$ со што е докажано дека (z_n) е Кошиева низа. Заради комплетноста на просторот H следува дека постои $y \in \mathrm{H}$ таков што $y = \lim\limits_{n \to \infty} z_n$. заради затвореноста на просторот Y се добива дека $y \in Y$. Ако во (2) пуштиме $n \to \infty$ имаме

$$\|x - y\| = \delta . \tag{4}$$

Останува за доказ уште единственоста на векторот y со својството (4). Нека претпоставиме постоење на уште еден $y^* \in Y$ таков што $\|x - y^*\| = \delta$.

Ако се примени равенството на паралелограм за векторите $x-y$ и $x-y*$, се добива

$$\|2x-y-y*\|^2+\|y-y*\|^2=2\|x-y\|^2+2\|x-y*\|=2\delta^2+2\delta^2=4\delta^2 \quad (5)$$

Од $\|2x-y-y*\|^2=4\|x-(y+y*)/2\|^2\geq 4\delta^2$ и од (5) имаме $\|y-y*\|^2\leq 4\delta^2-4\delta^2=0$ односно $y=y*$. ■

Последица 1. Ако се исполнети условите од теоремата 8, тогаш векторот y чија егзистенција беше покажана во теоремата 8 е таков што векторот $x-y$ е ортогонален на секој вектор од Y, што значи дека $(x-y,z)=0$ за секој $z\in Y$.

Доказ: За произволни $h\in Y$ и $\lambda\in \mathbf{C}$ имаме $\|x-y+\lambda h\|^2\geq\|x-y\|^2$ односно $(x-y+\lambda h,x-y+\lambda h)\geq(x-y,x-y)\Leftrightarrow(x-y,x-y)+\lambda(h,x-y)+$
$+\overline{\lambda}(x-y,h)+\lambda\overline{\lambda}(h,h)\geq(x-y,x-y)\Leftrightarrow\lambda(h,x-y)+\overline{\lambda}(x-y,h)+\lambda\overline{\lambda}(h,h)\geq 0$.
Земајќи $\lambda=-(x-y,h)/(h,h)$ во последното неравенство се добива $-|(x-y,h)|^2/\|h\|^2\geq 0$ што повлекува $(x-y,h)=0$. ■

Последица 2. (Теорема за проекција). Нека Y е затворен потпростор од Хилбертов простор H, тогаш за произволен $x\in\mathrm{H}$ важи разложувањето:

$$x=y+z \quad (1)$$

каде што $y\in Y$ а $z\perp Y$, при што векторите y и z од (1) се еднозначно определени.

Доказ: Ако $x\in Y$, земаме $y=x$ и $z=0$. Ако $x\notin Y$, нека y е единствениот вектор од Y таков што $d(x,Y)=\|x-y\|$. Егзистенцијата на векторот $y\in Y$ беше покажана во теоремата 8. Од последицата 1 се добива дека векторот $z=x-y$ е ортогонален на Y. Јасно е дека важи $x=y+z$. Се остава на читателот да ја провери единственоста на разложувањето (1). ■

Напомена. Векторот y се вика *ортогонална проекција* на векторот x на потпросторот Y.

Дефиниција 14. Ако Y е векторски потпростор на Хилбертов простор H, тогаш множеството од сите вектори $z \in \mathrm{H}$ ортогонални на Y се вика ортогонален комплемент на Y и се означува со $Y^{\perp}$. Слично се дефинира ортогонален комплемент на произволно непразно подмножество од Хилбертовиот простор H.

Теорема 9. Ортогоналниот комплемент $Y^{\perp}$ е затворен векторски потпростор.

Доказ: Нека $z_1, z_2 \in Y^{\perp}$ т.е. $(z_1, y) = (z_2, y) = 0$ на произволен $y \in Y$. За произволни $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ имаме: $(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, y) = \lambda_1 (z_1, y) + \lambda_2 (z_2, y) = 0$, $\forall y \in Y$. Ќе ја покажеме затвореноста на $Y^{\perp}$. Нека $z \in \overline{Y^{\perp}}$ и (z_n) е низа во $Y^{\perp}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Од $z_n \in Y^{\perp}$ следува дека $(z_n, y) = 0, \forall y \in Y$. Од непрекинатоста на скаларниот производ (теорема 7) се добива дека за $y \in Y$ имаме $(z, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (z_n, y) = 0$. ■

Напомена. Специјално, ако Y е затворен потпростор од Хилбертовиот простор H, тогаш и $Y^{\perp}$ е затворен потпростор. Теоремата за проекција (последица 2 на теорема 8) можеме да ја преформулираме како разложување на Хилбертовиот простор H на ортогонална сума $\mathrm{H} = Y \oplus Y^{\perp}$, $Y^{\perp}$ е ортогонален комплемент, при што "$\oplus$" е ознака за сума од затворени потпростори ортогонални еден на друг.

Теорема 10. Векторскиот потпростор Y од Хилбертовиот простор H е густо множество во H ако и само ако $Y^{\perp} = \{0\}$.

Доказ: Условот е доволен. Нека $Y^{\perp} = \{0\}$. Да претпоставиме дека Y не е густо множество во H. Тогаш $\overline{Y} \neq \mathrm{H}$. ($\overline{Y}$ е затворач на множеството Y). $\overline{Y}$ е затворен векторски потпростор од H. Постои $z_0 \in \mathrm{H}$ таков што $z_0 \notin \overline{Y}$. Заради последицата 2 на теоремата 8 важи $z_0 = y_0 + u_0$ каде што $y_0 \in \overline{Y}$, $u_0 \in \overline{Y}^{\perp} \subseteq Y^{\perp}$. Од $z_0 \notin \overline{Y}$ следува дека $u_0 \neq 0$ и $u_0 \in Y^{\perp}$ што е во контрадикција со претпоставката дека $Y^{\perp} = \{0\}$.

Условот е потребен. Нека Y е густо множество во H, што значи $\overline{Y}=\mathrm{H}$. Нека $z_0 \in Y^{\perp}$. Од $z_0 \in \mathrm{H}$ следува дека постои низа (y_n), $y_n \in Y$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = z_0$. Заради непрекинатоста на скаларниот производ, имаме $\|z_0\|^2 = (z_0, z_0) = \lim\limits_{n\to\infty}(z_0, y_n) = 0$ т.е $Y^{\perp}=\{0\}$. ■

5. Редови на Фурие во Хилбертов простор

Нека H е бесконечно димензионален Хилбертов простор и нека $E=\{e_n : n\in \mathbf{N}\}$ е ортонормирано множество во H. За произволен вектор $x\in \mathrm{H}$ се разгледуваат Фуриевите коефициенти $c_k=(x,e_k)$, $k\in\mathbf{N}$ на векторот x во однос на ортонормираното множество E.

Дефиниција 15. Нека H е бесконечно димензионален Хилбертов простор и нека $E=\{e_n : n\in \mathbf{N}\}$ е ортонормирано множество во H и $x\in \mathrm{H}$. Редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k \tag{1}$$

се вика *Фуриев ред на векторот* x во однос на ортонормираното множество E и се запишува $x \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$.

Природно е да се постави прашање што претставува редот (1). Дали конвергира во H? дали конвергира кон векторот x? Одговорот на првото прашање е позитивен, додека пак на второто е негативен.

За $n\in\mathbf{N}$ со $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$ ја означуваме $n-$тата парцијална сума на редот на Фурие на векторот x во однос на ортонормираното множество E. Ќе покажеме дека низата (s_n) е Кошиева во H. Навистина, за $n>m$ имаме $\|s_n-s_m\|^2=\left\|\sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k e_k\right\|^2=\left(\sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k e_k, \sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k e_k\right)=$

$= \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \to 0$ кога $m, n \to \infty$, заради Беселовото неравенство (теорема 6).

Заради комплетноста на просторот H, постои вектор $y \in \mathrm{H}$ таков што $y = \lim_{n\to\infty} s_n$, Што значи $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$. Значи, Фуриевиот ред е вектор во Хилбертовиот простор.

Дали $y = x$? Во општ случај, одговорот е негативен.

За секој $n \in \mathbf{N}$, векторите $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \in L(E)$ - векторски потпростор генериран од множеството E, па од $\|s_n - y\| \to 0$ кога $n \to \infty$ се добива дека y припаѓа на затворачот од просторот $L(E)$. Ја користиме ознаката $Y = \vee E = \overline{L(E)}$ за најмал затворен векторски потпростор што го содржи множеството E.

Забележуваме дека векторот $x - y$ е ортогонален на потпросторот y. За да се покаже последното, прво ќе покажеме дека векторот $x - y$ е ортогонален на секој вектор од множеството E. Од $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ и од непрекинатоста на скаларниот производ се добива $(y, e_k) = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p} (x, e_n) e_n, e_k \right) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} (x, e_n)(e_n, e_k) = (x, e_k)$. Добивме дека $x - y \perp e_k$, $\forall k \in \mathbf{N}$ т.е. $x - y \perp L(E)$ од каде следува дека $x - y \perp \overline{L(E)} = \vee E = Y$.

Докажана е следната теорема:

Теорема 11. Нека $E = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ е ортонормирано множество во Хилбертов простор H и нека $x \in \mathrm{H}$. Тогаш Фуриевиот ред $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$ е конвергентен со сума $y \in \mathrm{H}$. Уште повеќе $y \in \overline{L(E)}$ и $x - y \in \overline{L(E)}$.

6. Ортонормирани бази во Хилбертов простор

Дефиниција 16. Ортонормираното множество $E=\{e_n : n\in \mathbf{N}\}$ во Хилбертовиот простор H се нарекува *полно ортонормирано* ако не постои вектор различен од нула ортогонален на множеството E (на секој вектор од множеството E).

Дефиниција 17. Полно ортонормирано множество E во Хилбертов простор H се вика *ортонормирана база* во H.

Пример 9. Множеството $\{e_n : n\in \mathbf{N}\}$ каде што $e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$ каде што 1 се појавува на $n-$та позиција е ортонормирана база за просторот l^2. Навистина, нека $x=(x_n)\in l^2$ и нека $x\perp e_n$, $\forall n\in \mathbf{N}$. Се добива $0=(x,e_n)=x_n$, $\forall n\in \mathbf{N}$ т.е. $x=0$. ●

Теорема 12. Нека $E=\{e_n : n\in \mathbf{N}\}$ е ортонормирано множество во Хилбертов простор H. Тогаш следните искази се еквивалентни:

1) E е ортонормирана база за H
2) За секој $x\in \mathrm{H}$ важи равенството на Парсевал-Стеклов
$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$ каде што $c_k=(x,e_k)$, $\forall k\in \mathbf{N}$
3) $x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$ за секој $x\in \mathrm{H}$
4) $Y=\overline{L(E)}=\mathrm{H}$.

Доказ. 1)$\Rightarrow$2): За секој $x\in \mathrm{H}$ важи Беселовото неравенство $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\le \|x\|^2$ каде што $c_k=(x,e_k)$, $\forall k\in \mathbf{N}$ (теорема 6). Нека претпоставиме дека $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\|x\|^2$. Со y ја означуваме сумата на Фуриевиот ред $\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$ на векторот x, т.е. $y=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$. Заради непрекинатоста на скаларниот производ, имаме $\|y\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$. Од теоремата 10 се добива $x - y \perp e_k$, $\forall k \in \mathbf{N}$, па од 1) следува дека $x - y = 0$ т.е. $x = y$, што е во противречност со $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 < \|x\|^2$.

2) $\Rightarrow$ 3): За произволен природен број n имаме $\|x\|^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$ (ова равенство беше ползувано во теоремата 5). Ако во последното равенство пуштиме $n \to \infty$, заради 2) се добива $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$.

3) $\Rightarrow$ 4): Ако $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$, $\forall x \in \mathrm{H}$, заради теоремата 11 се добива дека $x \in \overline{L(E)}$, што значи $\overline{L(E)} = \mathrm{H}$.

4) $\Rightarrow$ 1): Нека $x \perp E$, што значи $(x, e_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbf{N}$; од 4) следува дека $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k$ од каде $x = 0$, па се добива дека E е полно ортонормирано множество односно ортонормирана база за H. ■

Дефиниција 18. Ако постои конечна ортонормирана база за Хилбертовиот простор H се вели дека H е *конечно димензионален Хилбертов простор*, а ако постои пребројлива ортонормирана база $E = \{e_n, n \in \mathbf{N}\}$ за H се вели дека H е *сепарабилен Хилбертов простор*.

Напомена. Во осмиот параграф, користејќи ја постапката за ортогонализација на линеарно независно множество од вектори, истото множество ќе биде заменето со ортогонален систем на вектори во смисла да генерираат еднакви векторски потпростори. Од ортогонален систем вектори лесно се поминува на ортонормиран систем вектори кога секој од векторите ќе се подели со неговата норма. Во случај на бесконечно димензионален Хилбертов простор, ортонормирана база не е (линеарна) база во смисла на векторски простор. Забележуваме дека сепарабилен

Хилбертов простор по дефиниција поседува ортонормирана пребројлива база, но во просторот H постои непребројливо линеарно независно множество (да се види задача 14).

Едно од најтешките прашања во Хилбертовите простори е кога дадено ортонормирано множество E е ортонормирана база за H.

Досега беше дадена ортонормирана база за l^2. Не е тешко да се најде ортонормирана база за конечно димензионалните Хилбертови простори $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$.

На читателот многу добро му е познато дека бесконечното множество функции $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} : n=1,2,\cdots\right\}$ е ортонормирано множество во унитарниот простор $C^2[0,2\pi]$. Се поставува прашањето: Дали унитарниот простор $C^2[0,2\pi]$ е комплетен? Во $C^2[0,2\pi]$ е дефиниран скаларен производ со $(f,g)=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Одговорот е негативен. (да се види $[7]$, пример 9, страна 338). Дали просторот $C^2[0,2\pi]$ може да се смести во поширок унитарен простор што ќе биде Хилбертов простор?

Постојат два начини да се излезе од овој ќорсокак. Едниот е пократок, при што се зема просторот $C^2[0,2\pi]$ да биде векторски потпростор од $L^2[0,2\pi]$ - простор од мерливи функции на $[0,2\pi]$ во Лебегова смисла со интеграбилен квадрат

$$L^2[0,2\pi]=\{f : f \text{ мерлива и } \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx<\infty\}$$

каде што две функции што се еднакви скоро секаде, ќе бидат идентифицирани и истите нема да се разликуваат.

Користејќи ги резултатите од L^p простори (да се види $[7]$, стр. 130), се добива дека $L^2[a,b]$ е комплетен метрички простор и од истата теорија се добива дека множеството $C^2[a,b]$ е густо во $L^2[a,b]$ (да се види [6], страна 121).

Постои и друг начин: со комплетирање на унитарниот простор $C^2[a,b]$ се доаѓа до Хилбертов простор K којшто ќе биде означен со $L^2[a,b]$. Комплетирањето ќе биде дадено во теоремата 14. Го користиме фактот дека $L^2[a,b]$ е Хилбертов простор.

Теорема 13. Ортонормираното множество

$$B = \left\{1/\sqrt{2\pi}, \cos nx/\sqrt{2\pi}, \sin x/\sqrt{2\pi} : n \in \mathbf{N}\right\}$$

е ортонормирана база во Хилбертовиот простор $L^2[0,2\pi]$.

Доказ: Доказот на теоремата ќе биде даден во два дела.

Прв дел: Нека f е непрекината функција на $[0,2\pi]$ таква што $f \perp B$ и нека претпоставиме дека $f \neq 0$. Постои точка $x_0 \in [0,2\pi]$ таква што $f(x_0) > 0$, земаме $0 < x_0 < 2\pi$. Заради непрекинатоста на функцијата f, постои $\alpha > 0$ и сегмент $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [0,2\pi]$ таков што $f(x) \geq \alpha, \forall x \in I$. Нека $K = [0,2\pi] \setminus I$. Ја разгледуваме функцијата

$$p(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta \tag{1}$$

Тогаш за секој природен број m важи $p^m(x) \geq 1$ за $x \in I$ и $p^m(x) < 1$ на множеството K. Функцијата $p^m(x)$ е линеарна комбинација на тригонометриските функции па е ортогонална со функцијата f. Имаме

$$0 = \int_0^{2\pi} f(x)p^m(x)dx = \int_I f(x)p^m(x)dx + \int_K f(x)p^m(x)dx \tag{2}$$

Од $\left|\int_K f(x)p^m(x)dx\right| \leq M \int_K p^m(x)dx$ се добива дека последниот интеграл (теорема на Дини за рамномерна конвергенција на монотоно опаѓачка низа), а од друга страна се добива $\int_I f(x)p^m(x)dx \geq \alpha \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p^m(x)dx \geq 2\alpha\delta$. Ако побараме лимес во (2) кога $m \to \infty$ и од последното неравенство, се добива $0 \geq 2\alpha\delta$ што е апсурд.

Втор дел: Нека $f \in L^2[0,2\pi]$ и нека $f \perp B$. Ја разгледуваме функцијата $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ за $x \in [0,2\pi]$. Функцијата F е непрекината и уште повеќе е со ограничена варијација. Бидејќи $f \perp 1/(2\pi)$, следува

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot 1 dx \tag{3}$$

На секое од равенствата $\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ ја применуваме формулата за врската меѓу Лебеговиот и Стилтесовиот интеграл како и формулата за парцијална интеграција (да се види [9]) се добива $-in\int_0^{2\pi}(F(x) - C)dx + [F(x) - C]e^{inx}\Big|_0^{2\pi} = 0$. Изразот во средната заграда е еднаков на нула заради $F(0) = F(2\pi) = 0$. Константата C ќе биде определена од условот $\int_0^{2\pi}(F(x) - C)dx = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dx$. Добиено е дека непрекинатата функција

$$G(x) = F(x) - C \tag{4}$$

го исполнува условот

$$\int_0^{2\pi} G(x)e^{inx}dx = 0 \text{ за } n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{5}$$

Заради првиот дел $F(x) - C = 0$ односно $F(x) = C$. Но познато е дека важи $0 = F'(x) = f(x)$ скоро секаде на $[0,2\pi]$, па се добива дека $f(x) = 0$ како елемент во $L^2[0,2\pi]$. ■

Напомена. Од општите услови на конвергенција следува дека за секоја функција $f \in L^2[0,2\pi]$ нејзиниот Фуриев ред конвергира кон f. Конвергенцијата овде треба да се сфати во смисла на Хилбертовиот простор $L^2[0,2\pi]$ односно средно квадратна конвергенција, но не во смисла на точкеста конвергенција. Во овој дел постојат најмалку два вида конвергенција.

Пример 10. Тригонометрискиот ред $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ е конвергентен во секоја точка $x\in[0,2\pi]$, $g(0)=g(2\pi)=0$ (се ползува критериумот на Абел-Дирихле). Забележуваме дека последниот ред не е Фуриев ред на функција од $L^2[0,2\pi]$.(да се види $[24]$, том 2, страна 238 или $[28]$ страна 296 - руско издание).

7. Пополнување на унитарни и нормирани простори

Во овој дел ќе покажеме дека секој унитарен простор H може да се комплетира (пополни); истиот да се смета за густ потпростор од Хилбертов простор K. Потполно аналогно важи за нормиран простор кој може да се комплетира до Банахов простор , односно да се смета за густо подмножество од Банахов простор. Комплетирањето на унитарните и нормирани простори е во потполна аналогија со комплетирањето на метричките простори (да се види $[7]$ стр. 340). Најпрво ќе го уточниме поимот на комплетирање унитарни простори.

Дефиниција 19. *Изометриски изоморфизам* меѓу унитарните простори H и K е пресликување $\Phi:\mathrm{H}\to\mathrm{K}$ такво што:

а) Φ е линеарно пресликување што значи

$$\Phi(\alpha x+\beta y)=\alpha\Phi(x)+\beta\Phi(y),\ \forall\alpha,\beta\in\mathbf{C},\ \forall x,y\in\mathrm{H}$$

б) пресликувањето Φ го зачувува скаларниот производ т.е.

$$(\Phi(x),\Phi(y))_{\mathrm{K}}=(x,y)_{\mathrm{H}},\ \ \forall x,y\in\mathrm{H}.$$

Два унитарни (Хилбертови) простора H и K се *изоморфни* ако постои барем еден изометриски изоморфизам од H на K. За овие простори се вели дека имаат еднаква алгебарска и метричка структура и истите ќе бидат идентифицирани.

Дефиниција 20. *Изометриски изоморфизам* меѓу нормирани простори X и Y е пресликување $U : X \to Y$ такво што:

а) $U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y), \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \forall x, y \in X$

б) пресликувањето U ја зачувува нормата т.е. $\|U(x)\|_Y = \|x\|_X$.

Два нормирани простора се *изометриски изоморфни* ако постои барем еден изометриски изоморфизам од едниот нормниран простор во другиот.

Ќе покажеме дека секој унитарен простор H е изометриски изоморфен со унитарен простор K_0 кое е густо подмножество од Хилбертов простор K . Со идентификација на H со K_0, просторот K можеме да го сметаме за комплетирање на H, што е во потполна аналогија со комплетирањето на множеството рационални броеви, при што се доаѓа до множеството реални броеви. Аналогно важи за комплетирање на нормирани простори.

Теорема 14. а) За произволен унитарен простор H постои комплетирање K ;

б) за секој нормиран простор X постои комплетирање Y ;

в) комплетирањата под а) и б) се единствени со точност до изометриски изоморфизам.

Имајќи предвид дека секој унитарен простор е и нормиран простор, прво ќе биде дадено комплетирањето на нормирани простори, а потоа ќе биде издвоено за Хилбертов простор само за дефиницијата за скаларен производ.

Го разгледуваме множеството од Кошиеви низи во X (односно H). За две Кошиеви низи (x_n) и (x'_n) се вели дека се *еквивалентни* ако $\|x_n - x'_n\| \to 0$ кога $n \to \infty$ и се користи ознаката $(x_n) \sim (x'_n)$.

Лема. а) Релацијата $\sim$ е релација за еквивалентност;

б) ако $(x_n) \sim (x'_n)$ и $(y_n) \sim (y'_n)$ тогаш $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$;

в) од $(x_n) \sim (x'_n)$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ следува $(\lambda x_n) \sim (\lambda x'_n)$;

г) од $(x_n) \sim (x'_n)$ следува $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|x'_n\|$;

д) од $(x_n) \sim (x'_n)$ и $(y_n) \sim (y'_n)$ следува $|(x_n, y_n) - (x_n, y_n)| \to 0$.

Доказ: а) Ќе ја покажеме само транзитивноста на ~. Нека $(x_n)\sim(x_n')$ и $(x_n')\sim(x_n'')$, тогаш $\|x_n - x_n'\| \to 0$ и $\|x_n' - x_n''\| \to 0$, па од неравенството $\|x_n - x_n''\| \le \|x_n - x_n'\| + \|x_n' - x_n''\|$ се добива $(x_n)\sim(x_n'')$.

б) $\|(x_n \pm y_n) - (x_n'' \pm y_n')\| \le \|x_n - x_n'\| + \|y_n - y_n'\| \to 0$.

в) $\|\lambda x_n - \lambda x_n'\| \le |\lambda| \|x_n - x_n'\|$.

г) $\left|\|x_n\| - \|x_n'\|\right| \le \|x_n - x_n'\|$.

д) $|(x_n, y_n) - (x_n, y_n)| = |(x_n - x_n', y_n) + (x_n', y_n - y_n')| \le$

$$\le \|x_n - x_n'\| \|y_n\| + \|x_n'\| \|y_n - y_n'\| \to 0 \text{ кога } n \to \infty.$$

Се користи дека секоја Кошиева низа е ограничена што следува од самата дефиниција. ■

Со релацијата ~ , множеството од Кошиеви низи во X (соодветно H) е разбиено на класи на еквивалентност. Овие класи образуваат множество кое ќе биде означено со K во случај на унитарен простор H и со Y во случај на нормиран простор X. Две Кошиеви низи припаѓаат на една иста класа ако $(x_n)\sim(y_n)$. Класата на еквивалентност што ја содржи низата (x_n) ја означуваме со $\tilde{x}$ и ја користиме ознаката $(x_n)\in\tilde{x}$.

Во K (односно Y) дефинираме операција собирање на класи $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ со: ако $(x_n)\in\tilde{x}$ и $(y_n)\in\tilde{y}$, тогаш под збир $\tilde{x}+\tilde{y}$ се подразбира класата што ја содржи низата $(x_n + y_n)$. Заради лема под б) сумата $\tilde{x}+\tilde{y}$ е добро дефинирана т.е не зависи од изборот на Кошиевите низи (x_n) и (y_n) што припаѓаат на класите $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ соодветно. Во K (односно Y) дефинираме производ на класата $\tilde{x}$ со комплексниот број λ: со $\lambda\tilde{x}$ е означена класата што ја содржи низата (λx_n) каде што $(x_n)\in\tilde{x}$. Заради лема под в) производот $\lambda\tilde{x}$ е добро дефиниран т.е не зависи од изборот на низата (x_n) што припаѓа на класата $\tilde{x}$. Непосредно се покажува дека K (односно Y) е векторски простор. Улогата на нула ја игра класата што ја содржи низата $x_n = 0, \forall n \in \mathbf{N}$. Во Y дефинираме норма со:

$$\|\tilde{x}\|_Y = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| \tag{1}$$

каде што $(x_n)\in \tilde{x}$. Заради лема под г), со (1) нормата е добро дефинирана во Y (не зависи од изборот на Кошиевата низа $(x_n)\in \tilde{x}$).

Во K дефинираме скаларен производ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ со :

$$(\tilde{x}, \tilde{y})_K = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) \tag{2}$$

каде што $(x_n)\in \tilde{x}$ и $(y_n)\in \tilde{y}$. Заради лема под д) скаларниот производ определен со (2) е добро дефиниран. Се остава на читателот да провери дека со (1) е дефинирана норма со што Y станува нормиран простор, а со (2) е дефиниран скаларен производ, со што K станува унитарен простор.

Доказ на теоремата 14: Доказот на теоремата ќе биде даден во три етапи.

Етапа 1. За $x\in X$, (односно $x\in \mathrm{H}$) со $\hat{x}$ ја означуваме класата на еквивалентност од сите Кошиеви низи во X (односно H) што конвергираат кон x. Оваа класа не е празна, бидејќи во истата се наоѓа стационарната низа $x_n = x, \forall n\in \mathbf{N}$. Нека $Y_0 = \{\hat{x} : x\in X\}$ и $K_0 = \{\hat{x} : x\in \mathrm{H}\}$. Дефинираме пресликувања: $U : X \to Y_0$, $\Phi : \mathrm{H} \to K_0$ со $U(x) = \hat{x}, x\in X$ и $\Phi(u) = \hat{u}, u\in \mathrm{H}$. Јасно е дека U е линеарно пресликување од X во Y_0. Ќе докажеме дека U е изометрија. Навистина, $\|U(x)\|_{Y_0} = \|\hat{x}\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_X = \|x\|_X$, бидејќи $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Исто така, непосредно се проверува дека Φ е линеарно пресликување од H на K_0 и уште повеќе важи: $(\Phi(x), \Phi(y))_{K_0} = (\hat{x}, \hat{y})_{K_0} = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)_H$, бидејќи $x_n \to x$ и $y_n \to y$.

Етапа 2. Y_0 е густо множество во Y, а K_0 е густо множество во K. Нека $\tilde{x}\in Y$ и нека (x_n) е Кошиева низа во X што припаѓа на класата $\tilde{x}$. Тогаш за произволен $\varepsilon > 0$, постои $n_0\in \mathbf{N}$ таков што $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2$ за сите $m, n \ge n_0$. Нека m е фиксен природен број поголем од n_0. Ја разгледуваме нормата на векторот $\tilde{x} - \hat{x}_m$. Нека $(y_k)\in \hat{x}_m$ т.е. $\lim_{k\to\infty} y_k = x_m$ во X. Тогаш е

$\|\tilde{x} - \hat{x}_m\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| \le \lim_{n\to\infty}\|x_n - x_m\| + \lim_{n\to\infty}\|x_m - y_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - x_m\| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Етапа 3. Просторот Y е комплетен. (аналогно на просторот K). Навистина, нека $(\tilde{x}_n)$ е Кошиева низа во Y . Бидејќи Y_0 е густо множеството во Y , следува дека за секој природен број n постои $\hat{y}_n \in Y_0$ таков што $\|\tilde{x}_n - \hat{y}_n\| < 1/n$.

Ја разгледуиваме низата (y_n). Тврдиме дека е Кошиева. Навистина, $\|y_n - y_m\| = \|\hat{y}_n - \hat{y}_m\| \le \|\hat{y}_n - \tilde{x}_n\| + \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| + \|\tilde{x}_m - \hat{y}_m\| < 1/n + 1/m + \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| \to 0$ кога $n, m \to \infty$.

Со $\tilde{x}$ ја означуваме класата на еквивалентност што ја содржи Кошиевата низа (y_n). Имаме $\|\tilde{x} - \tilde{x}_n\| \le \|\tilde{x} - \hat{y}_n\| + \|\hat{y}_n - \tilde{x}_n\| \le \|\tilde{x} - \hat{y}_n\| + 1/n$. За произволен позитивен број ε избираме природен број n_0 таков што ги задоволува следните два услова: 1. $1/n_0 < \varepsilon/2$. 2. $\|y_k - y_n\| < \varepsilon/2$ за $k, n \ge n_0$. Условот 2. е можен, бидејќи низата (y_n) е Кошиева. За $n \ge n_0$ имаме $\|\tilde{x} - \hat{y}_n\| = \lim_{n\to\infty}\|y_k - y_n\| \le \varepsilon/2$, па се добива резултатот. ■

Просторот $C^2[a,b]$ од примерот 3 е унитарен простор. Напоменуваме дека не е Хилбертов. простор.(да се види $[7]$,стр. 238,239). Со комплетирање на овој простор се доаѓа до Хилбертов простор кој се состои од класи на еквивалентност од Кошиеви низи од непрекинати функции (f_n) во однос на средно квадратната конвергенција. Имено, $(f_n) \in \tilde{f}$ ако $\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^2\, dx$ кога $n, m \to \infty$ и овој простор уште се означува со $L^2[a,b]$. Засега елементите од $L^2[a,b]$ се класи; односно $L^2[a,b]$ се состои од идеализирани елементи. Дали се тоа функции? Познато е дека $C^2[a,b]$ е е изометриски изоморфен со густо подмножество од $L^2[a,b]$.

Пример 11. Со $X = C^1[a,b]$ е означено множеството од непрекинати функции на $[a,b]$ со норма

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \tag{1}$$

каде што интегралот на десната страна од (1) се зема во Риманова смисла. Без тешкотии се проверува дека X е нормиран простор. Напоменуваме дека X не е Банахов простор во однос на нормата определена со (1).

Со примена на теоремата 14 просторот $C^1[a,b]$ се комплетира до Банахов простор кој ќе биде означен со $Y = L^1[a,b]$ кој се состои од класи на еквивалентност $\tilde{f}$ на Кошиеви низи од непрекинати функции (f_n) такви што $\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|dx \to 0$ кога $m,n \to \infty$. Од дефиницијата на норма на комплетирањето на нормираните простори имаме

$$\|\tilde{f}\|_{L^1[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x)|dx \tag{2}$$

Изразот $\|\tilde{f}\|_{L^1[a,b]}$ се зема за Лебегов интеграл на класата од еквивалентност и тој се добива како лимес од низа од Риманови интеграли од непрекинати функции. Дали постојат функции од просторот $L^1[a,b]$?. Заради теоремата 14 просторот $L^1[a,b]$ ги содржи класите $\hat{f}$ каде што $f \in C[a,b]$, бидејќи $\hat{f}$ е класата што ја содржи стационарната низа $f_n = f$. Заради изометријата $: f \to \hat{f}$ вршиме идентификација на класата $\hat{f}$ со функцијата $f(x) \in C^1[a,b]$ и класата $\hat{f}$ ќе ја означуваме со $f(x)$. Освен функцијата $f(x)$ класата $f(x)$ содржи функции кои имаат прекин, на пример во конечен број на точки од прв вид, што ќе биде покажано во примерот 12.

Некои прекинати функции може да се сметаат како лимеси на норма на кошиеви низи од непрекинати функции од просторот $C^1[a,b]$. Секоја од овие функции можно е да се идентифицира со некоја класа од $L^1[a,b]$. Уште повеќе, секоја класа од $L^1[a,b]$ може да се идентифицира си некоја функција (во општ случај прекината), односно поточно со некоја класа од такви функции. На овој начин ќе биде дефиниран Лебегов интеграл од поширока класа од функции, поширока од класата на непрекинати функции, што ќе биде обопштување на поимот Риманов интеграл.

Пример 12. Нека f е непрекината функција на сегментот $[a,b]$, освен во конечен број точки во кои функцијата има прекин од прв вид (постојат леви и десни лимеси на функцијата). Ќе покажеме дека постои Кошиева низа од непрекинати функции во средно којашто конвергира кон функцијата f во средно. Заради едноставност, земаме дека функцијата f има прекин само во една точка. Нека f има прекин во точката c и нека $a<c<b$. Избираме доволно мал δ, така што $a<c-\delta<c+\delta<b$ и нека

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,b]\setminus\left(c-\dfrac{\delta}{n},c+\dfrac{\delta}{n}\right) \\ \dfrac{f\left(c+\dfrac{\delta}{n}\right)-f\left(c-\dfrac{\delta}{n}\right)}{2\delta/n}\left(x-c+\dfrac{\delta}{n}\right)+f\left(c-\dfrac{\delta}{n}\right), & x\in\left[c-\dfrac{\delta}{n},c+\dfrac{\delta}{n}\right] \end{cases}$$

Ќе покажеме дека низата (f_n) е Кошиева во просторот $C^1[a,b]$. Од постоењето на десниот и лев лимес на функцијата f во точката c и од непрекинатоста на функцијата f во останатите точки следува ограниченост на функцијата , па постои константа $K\ge 0$ таква што $|f(x)|\le K$, $\forall x\in[a,b]$. Нека $m>n$, имаме

$$\|f_m-f_n\|_1=\int_a^b|f_m(x)-f_n(x)|dx=\int_{c-\delta/n}^{c+\delta/n}|f_m(x)-f_n(x)|dx\le 2K\cdot 2\delta/n=4K\delta/n\to 0$$

кога $n\to\infty$.

Од друга, пак, страна, функцијата е интеграбилна во Риманова смисла и важи $\int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx\to 0$. На тој начин класата што ја содржи низата (f_n)

може да се идентифицира со прекинатата функција f со што просторот $C^1[a,b]$ е проширен со нова функција којашто припаѓа на $L^1[a,b]$. ●

Пример 13. Ќе покажеме дека функции коишто имаат апсолутно конвергентен несвојствен Риманов интеграл, исто така припаѓаат на просторот L^1. За упростување, земаме интервал $[0,1]$ и функција $f(x)=1/\sqrt{x}$ која има несвојствен Риманов интеграл $\int_0^1 f(x)dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$.

Нека $f_n(x)=\begin{cases}1/\sqrt{x}, & x\in[1/n,1]\\ \sqrt{n}, & x\in[0,1/n]\end{cases}$. За $m>n$ имаме:

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_0^1 |f_m - f_n|dx = \int_0^{1/m}\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)dx + \int_{1/m}^{1/n}\left(1/\sqrt{x}-\sqrt{n}\right)dx = \left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)/m +$$

$$+ 2\sqrt{x}\Big|_{1/m}^{1/n} - \sqrt{n}x\Big|_{1/m}^{1/n} = 1/\sqrt{n} - 1/\sqrt{m} < 1/\sqrt{n} \to 0 \text{ кога } n\to\infty .$$

Добиваме дека низата (f_n) е Кошиева, при што $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ а интегралот од десната страна е несвојствен Риманов интеграл. ●

Последните два примера всушност претставуваат доказ на теоремата што следува:

Теорема 15. Нека f е дефинирана на сегментот $[a,b]$ на којшто има конечен број точки на прекин и интегралот $\int_a^b |f(x)|dx$ конвергира како несвојствен Риманов интеграл. Тогаш постои Кошиева низа од непрекинати функции (f_n) којашто во средно конвергира кон функцијата f, што значи $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \to 0$ кога $n\to\infty$.(интегралите се несвојствени Риманови интеграли).

Ако со $C_k^1[a,b]$ се означи просторот од непрекинати функции на $[a,b]$, освен во конечен број точки, а со $R_0[a,b]$ се означи просторот од апсолутно интеграбилни функции со несвојствена Риманова смисла, тогаш се добиени инклузиите: $C_k^1[a,b] \subseteq L^1[a,b]$ и $R_0[a,b] \subseteq L^1[a,b]$.

Напоменуваме дека треба да се биде многу внимателен кога се работи со просторот $L^1[a,b]$, бидејќи елементите од овој простор претставуваат класи на еквивалентност на Кошиеви низи во средно од непрекинати функции. Да се има предвид дека конвергенцијата е во средно. Се поставува прашањето: Дали низата (f_n) конвергира точкесто? Одговорот на ова прашање е крајно разочарувачки. Дури и во нултата класа $\tilde{0}$ која ја содржи нултата функција, постои Кошиева низа од непрекинати функции (f_n) таква што $\int_0^1 |f_n(x)| dx \to 0$ кога $n \to \infty$, но низата (f_n) не конвергира во ниедна точка $x \in [0,1]$. (Да зе види [6], задача 44).

Но и покрај овој разочарувачки резултат, од интерес претставува дали е можно да се најде функција g од класата $\tilde{f} \in L^1[a,b]$, (функцијата g има точки на прекин), така што да постои подниза (f_{n_k}) од Кошиевата низа (f_n) што припаѓа на класата $\tilde{f}$ таква што $f_{n_k} \to g$ скоро секаде, т.е. да конвергира во сите точки од $[a,b]$, освен на множество $A \subseteq [a,b]$ кое може да се покрие со конечна или пребројлива фамилија од интервали чија сума на должини е помала од однапред зададен позитивен број ε. Ќе ја дадеме точната дефиниција на множество со мера нула. За поедноставно, Ќе земеме дека множествата кои се разгледуваат се подмножества од интервалот $[a,b]$.

Дефиниција 20. Множеството $A \subseteq [a,b]$ е *множество со мера нула* ако за секој $\varepsilon > 0$ постои конечна или пребројлива фамилија од сегменти (интервали) $\{(a_n, b_n)\}$ за која важи: $A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n)$ и $\sum_n (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Веднаш од самата дефиниција се гледа дека секое конечно множество (дури и пребројливо множество) е множество со мера нула. Уште повеќе, унија (конечна или пребројлива) од множества со мера нула е множество со мера нула (задача 31).

Дефиниција 21. За две функции f и g дефинирани на $[a,b]$ се вели дека се *еднакви скоро секаде* ако множеството точки $x \in [a,b]$ за кои што $f(x) \neq g(x)$ е множество со мера нула. Ознака: $f = g$ с.с..

Дефиниција 22. За низата функции (f_n) се вели дека *конвергира скоро секаде* кон функцијата f ако $f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in [a,b] \setminus A$, каде што множестото A има мера нула. Се користи ознаката $f_n \xrightarrow{c.c} f$.

Напоменуваме дека од конвергенцијата во средно не зависи конвергенција скоро секаде; но и покрај тоа ќе биде покажано дека секоја Кошиева низа во средно содржи конвергентна скоро секаде подниза.

Ако F е конечна или пребројлива фамилија од сегменти, тогаш со $|F|$ се означува сумата на должините на тие сегменти. Ако множеството B е покриено со фамилија од сегменти F , односно ако $B \subset F$ при што $|F| < \alpha$, ќе се користи ознаката $|B| < \alpha$.

Теорема 16. Нека (f_n) е Кошиева низа во $C^1[a,b]$ таква што $f_n \to 0$ во средно, тогаш постои подниза (f_{n_k}), таква што:

1. $\lim\limits_{k\to 0} f_{n_k}(x) = 0$ скоро секаде на $[a,b]$.
2. Редот $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x)|$ конвергира скоро секаде на $[a,b]$.
3. За секој природен број $m > m_0$ постои $B_m \subseteq [a,b]$ на коешто $|f_{n_k}(x)| < \dfrac{1}{2^k}$ за сите $k \geq m$, при што $|[a,b] \setminus B_m| < \dfrac{1}{2^m}$ и $B_m \subseteq B_{m+1}$.

Доказ: Заради претпоставката $\lim\limits_{n\to 0} \int\limits_a^b f_n(x)dx = 0$, постои подниза (f_{n_k}) на низата (f_n) таква што

$$\int_a^b \left| f_{n_k}(x) \right| dx < \frac{1}{2^{5k}} \quad . \tag{1}$$

Заради пократко запишување нека $g_k(x) = f_{n_k}(x)$. Ќе покажеме дека низата (g_k) ги исполнува условите 1.,2. и 3. од теоремата.

Заради теоремата на Вајерштрас (да се види задача 23 и задача 25), за секоја од непрекинатите функции g_k на $[a,b]$, постои полином $p_k(x)$ таков што

$$\left| g_k(x) - p_k(x) \right| < \frac{1}{2^{5k}(b-a+1)} \tag{2}$$

за сите $x \in [a,b]$.

Тогаш од (1) и (2), се добива:

$$\int_a^b \left| p_k(x) \right| dx \le \int_a^b \left| g_k(x) \right| dx + \int_a^b \left| p_k(x) - g_k(x) \right| dx < \frac{1}{2^{5k}} + \frac{b-a}{2^{5k}(b-a+1)} < \frac{1}{2^{4k}} . \tag{3}$$

Го разгледуваме множеството $F_k = \left\{ x \in [a,b] : \left| p_k(x) \right| \ge \frac{1}{2^{2k}} \right\}$. Од особините на полиноми (има конечен број нули и конечен број локални екстреми) се добива дека множеството F_k претставува конечна дисјунктна унија од затворени интервали дури и празно множество. Може да се разгледува Римановиот интеграл од полиномот $p_k(x)$ на множеството F_k како конечен збир на Римановите интеграли земени по затворените интервали од кои е составено множеството F_k. Имаме

$$\left| F_k \right| \frac{1}{2^{2k}} \le \int_{F_k} \left| p_k(x) \right| dx \le \int_a^b \left| p_k(x) \right| dx < \frac{1}{2^{4k}} . \tag{4}$$

Од (4) непосредно се добива дека важи $\left| F_k \right| < \frac{1}{2^{2k}}$. За множествата $\widetilde{F}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} F_k$ ја имаме оценката $\left| \widetilde{F}_m \right| = \left| \bigcup_{k=m}^{\infty} F_k \right| < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4^m} \frac{4}{3} < \frac{1}{2^m}$.

Нека $B_m = [a,b] \setminus \tilde{F}_m$, тогаш за $m \ge m_0$ множествата се непразни, бидејќи $\left|[a,b] \setminus B_m\right| = \left|\tilde{F}_m\right| < \frac{1}{2^m}$ и за произволен $x \in B_m = [a,b] \setminus \tilde{F}_m =$ $= [a,b] \setminus \bigcup_{k=m}^{\infty} F_k \subseteq \bigcup_{k=m}^{\infty} ([a,b] \setminus F_k)$, па за $k \ge m$ се добива

$$\left|p_k(x)\right| < \frac{1}{2^{2k}} . \tag{5}$$

Од една страна од (2) и (5) се добива $\left|g_k(x)\right| \le \left|p_k(x)\right| + \left|g_k(x) - p_k(x)\right| < \frac{1}{2^{5k}(b-a+1)} + \frac{1}{2^{2k}} < \frac{1}{2^k}$ за сите $x \in B_m$ и $k \ge m$, со што 3. е докажано. Од друга страна се добива рамномерна конвергенција на редот

$$\sum_{k=m}^{\infty} \left|g_k(x)\right| \tag{6}$$

на множеството B_m.

Нека $S = \left\{ x \in [a,b] : \sum_{k=m}^{\infty} \left|g_k(x)\right| = +\infty \right\}$, тогаш за секој произволен $m \ge m_0$ е точна инклузијата $S \subseteq [a,b] \setminus B_m$, така што за даден $\varepsilon > 0$, избирајќи m доволно големо така што $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$, се добива $|S| \le \left|F_m\right| < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Значи множеството S има мера нула, па редот (6) конвергира кон нула скоро секаде. ■

Читателот кој сака подетално да се запознае со Лебеговиот простор $L^1[a,b]$ настанат со комплетирање на просторот $C^1[a,b]$, се упатува на [23].

8. Ортогонализација во унитарни простори. Ортогонални полиноми

Ќе покажеме дека секое конечно линеарно независно множество вектори $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ во унитарниот простор H можно е да се замени со ортогонално множество од вектори $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ во смисла за секој $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ да важи :

$$L\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = L\{y_1, y_2, \cdots, y_n\},$$

каде што со $L(S)$ е означен најмалиот векторски потпростор генериран од множеството S. Оваа постапка е позната под името метод на Грам-Шмит (Gram - Schmidt) за ортогонализација на систем вектори.

Теорема 17. Нека е зададено линеарно независно множество вектори

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \tag{1}$$

од унитарниот простор H . Тогаш постои ортогонално множество вектори

$$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \tag{2}$$

со следните својства:

а) за секој $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ важи

$$y_k = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k \tag{3}$$

каде што $a_k \neq 0$;

б) за секој $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ важи

$$x_k = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_k y_k \tag{4}$$

каде што $b_k \neq 0$.

Доказ: Со математичка индукција по k . За $k = 1$ едноставно земаме $y_1 = x_1$. Нема што да се докажува; $x_1 \neq 0$ бидејќи $\{x_1\}$ е линеарно независно множество. За $k = 2$ ставаме $y_1 = x_1$ и

$$y_2 = x_2 - a_{21} y_1 \tag{5}$$

каде што реалниот број a_{21} ќе биде определен од условот $y_2 \perp y_1$, од каде што се добива $0=(y_2, y_1)=(x_2, y_1)-a_{21}(y_1, y_1)$ односно $a_{21}=(x_2, y_1)\big/\|y_1\|^2=(x_2, x_1)\big/\|x_1\|^2$, па се добива разложувањето:

$$y_2=-\frac{(x_2, x_1)}{\|x_1\|^2}x_1+1\cdot x_2. \tag{5'}$$

Од (5) следува:

$$x_2=-\frac{(x_2, y_1)}{\|y_1\|^2}y_1+1\cdot y_2. \tag{6}$$

Напоменуваме дека $y_2 \neq 0$. Претпоставката дека $y_2=0$ не доведува до линеарна зависност на множеството $\{x_1, x_2\}$ што е во спротивност со претпоставката.

Нека е конструирано ортогоналното множество $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ со особините а) и б). За $k+1$ линеарно независни вектори $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$ земаме

$$y_{k+1}=x_{k+1}-a_{k+1,1}y_1-a_{k+1,2}y_2-\cdots-a_{k+1,k}y_k \tag{7}$$

Броевите $a_{k+1,j},\quad j=1,2,\cdots,k$ ги избираме од условите $(y_{k+1}, y_j)=0,\quad \forall j\in\{1,2,\cdots,k\}$, што повлекува $(x_{k+1}, y_j)=a_{k+1,j}\|y_j\|^2$ односно $a_{k+1,j}=(x_{k+1}, y_j)\big/\|y_j\|^2$. Од (7) и од индуктивната претпоставка се добива $x_{k+1}=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_ky_k+1\cdot y_{k+1}$, со што теоремата е докажана во потполност. Од самата постапка на ортогонализација важи: $L\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}=L\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, за $k\in\{1,2,\cdots,n\}$. ■

Напомена 1. Се поставува прашањето: Дали ортогоналниот систем вектори $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ е еднозначно определен? Јасно е дека множеството вектори $\{k_1y_1, k_2y_2, \cdots, k_ny_n\}$, каде што $k_i\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ е исто така ортогонален систем од вектори. Ќе ја покажеме единственоста на ортогоналниот систем со точност до множител. Точна е следната последица.

Последица. Нека $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ е линеарно независно множество и нека $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ е ортогонално множество конструирано во теоремата. Ако $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ е ортогонален систем од вектори таков што $L\{z_1, z_2, \cdots, z_k\} = L\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ за секој $k \in \{1,2,\cdots,n\}$, тогаш постојат $d_k \in \mathbf{R}$ такви што $z_k = d_k y_k$, $k = 1,2,\cdots,n$.

Доказ: Имаме $y_n \in L\{y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}\}^{\perp} = L\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}^{\perp}$ и $z_n \in L\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\}^{\perp} = L\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}^{\perp}$. Од друга страна имаме $y_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n$ каде што $a_n \neq 0$ и $z_n = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_{n-1} x_{n-1} + c_n x_n$ каде што $c_n \neq 0$. Тогаш за $w = c_n y_n - a_n z_n = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \cdots + d_{n-1} x_{n-1}$, па се добива $w \in L\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\} \cap L\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}^{\perp} = \{0\}$, од каде $c_n y_n - a_n z_n = 0$ односно $z_n = d_n y_n$, што требаше да се докаже. ■

Забележуваме дека е лесно да се премине од ортогонален систем вектори во ортонормиран систем вектори едноставно ако секој од векторите од првиот систем се подели со својата норма.

Пример 14. Нека $\mathrm{H} = C^2[-1,1]$ е реален унитарен простор од непрекинати функции на сегментот $[-1,1]$ со скаларен производ $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$,

Множеството функции $1, x, x^2, \cdots, x^n$ е линеарно независно множество (се остава за проверка на читателот). Со примена на постапката на Грам-Шмит, се доаѓа до ортогонален систем од полиноми, познати под името на Лежандр (Legendre).

За $f_1 = 1$, земаме $g_1 = 1$, а за $f_2(x) = x$ нека $g_2(x) = x - a_{21} \cdot 1$, каде што коефициентот a_{21} ќе биде определен од условот $(g_2, g_1) = 0$, што значи $\int_{-1}^{1} x dx - a_{21} \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dx = 0$ односно $a_{21} = 0$, од каде $g_2(x) = x$. За $f_3(x) = x^2$, ставаме $g_3(x) = x^2 - a_{31} g_1(x) - a_{32} g_2(x)$, каде што $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, при што коефициентите a_{31} и a_{32} ќе бидат определени од условите $(g_3, g_1)=0,\quad (g_3, g_2)=0$. Добиваме: $a_{31}=\dfrac{(x^2, g_1)}{\|g_1\|^2}$; $a_{32}=\dfrac{(x^2, g_2)}{\|g_2\|^2}$;

$(x^2, g_1)=\int_{-1}^{1} x^2\cdot 1dx=\dfrac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{2}{3}$; $(x^2, g_2)=\int_{-1}^{1} x^2 x dx=0$; $\|g_1\|^2=\int_{-1}^{1} 1dx=2$;

$\|g_2\|^2=\int_{-1}^{1} x^2 dx=\dfrac{2}{3}$. Така $g_3(x)=x^2-a_{31}g_1(x)-a_{32}g_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$.

Постапката продолжува. Ползувајќи ја класичната ознака $Q_0(x)=1,\quad Q_1(x)=x^2,\quad Q_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$, во вториот дел ќе биде покажано

дека $Q_n(x)=a_n P_n(x)$, каде што $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n\left((x^2-1)^n\right)}{dx^n}$ е формулата на Родригез (Rodrigues). ●

Пример 15. Со X го означуваме множеството од непрекинати функции f на сегментот $[-1,1]$ такви што несвојствениот интеграл $\int_{-1}^{1}\dfrac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ конвергира. Во X дефинираме скаларен производ со $(f, g)=\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Се остава на читателот да провери дека во просторот X сигурно припаѓаат мономите $1, x, x^2, \cdots, x^n$. Користејќи ја постапката за ортогонализација се доаѓа до полиноми од облик $a_n T_n(x)$ каде што $T_n(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x), n=0,1,2,\cdots$ е полином на Чебишев. ●

Пример 16. Со $Z=C^2(-\infty,\infty)$ го означуваме множеството од непрекинати функции f на $(-\infty,\infty)$ такви што $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(f(x))^2 dx<\infty$, при што интегралот е несвојствен Риманов интеграл. Во Z е дефиниран скаларен производ со

$\left(f,g\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}f(x)g(x)dx$. Се покажува дека Z е унитарен простор. Просторот Z ги содржи мономите $1,x,x^2,\cdots,x^n$. Со примена на процесот за ортогонализација се доаѓа до низа од ортогонални полиноми $Q_0(x),Q_1(x),Q_2(x),\cdots,Q_n(x)$ каде што $Q_n(x)=a_nH_n(x)$ при што $H_n(x)=e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ се полиноми на Хермит (Hermitte). Просторот што се добива со комплетирање на просторот Z се означува со $L^2(-\infty,\infty)$. ●

Пример 17. Со $S=C^2(0,\infty)$ го означуваме просторот од непрекинати функции f на $(0,\infty)$ такви што конвергира несвојствениот интеграл $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}f(x)^2dx$. Во S дефинираме скаларен производ со: $\left(f,g\right)=\int\limits_0^{\infty}e^{-x}f(x)g(x)dx$. Со ортогонализација на $1,x,x^2,\cdots,x^n$, се доаѓа до низа ортогонални полиноми $Q_0(x),Q_1(x),\cdots,Q_n(x)$ такви што $Q_n(x)=a_nL_n(x)$ каде што $L_n(x)=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right)$ се полиноми на Лагер (Laguerre). ●

Ја имаме следната шема на ортогонални полиноми:

полиноми	интервал	тежина	стандардна ортогонализација
Лежандр	$[-1,1]$	1	$\int\limits_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\dfrac{2}{2n+1}$
Чебишев	$[-1,1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\pi/2, & n\neq 0\\ \pi, & n=0\end{cases}$
Хермит	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)dx=2^n n!\sqrt{\pi}$
Лагер	$(0,\infty)$	e^{-x}	$\int\limits_0^{\infty}e^{-x}L_n^2(x)dx=1$

Сите овие полиноми се познати под името класични ортогонални полиноми кои ќе бидат подетално проучувани во вториот дел. Секој од класичните ортогонални полиноми задоволува соодветна линеарна диференцијална равенка од втор ред; се јавува како коефициент во развојот на генератрисна функција што ќе овозможи откривање на нивните натамошни особини . Со примена на теоремата 14 за комплетирање на унитарни простори се доаѓа до соодветни Хилберови простори $L^2[a,b]$. Од друга страна, секој од унитарните простори од примерите 15,16 и 17 може да се разгледуваат како потпростори од Хилбертов простор $L^2(\mu)$ каде што μ е мера дефинирана со:

(а) $\mu(E)=\int_E \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad E\subset[-1,1],$

(б) $\mu(E)=\int_E e^{-x^2}dx, \quad E\subset(-\infty,\infty),$

(в) $\mu(E)=\int_E e^{-x}dx, \quad E\subset(0,\infty).$

Интегралите од десните страни од равенствата се Лебегови интеграли, множествата E се мерливи, а тежинската функција е Радон-Никодимов извод на мерата во однос на Лебеговата мера (да се види [7]-седма глава).

Оние читатели што не се запознаени со Лебеговиот интеграл, треба да имаат предвид дека во Хилбертовите простори припаѓаат функциите чиј квадрат има несвојствен конвергентен Риманов интеграл во однос на соодветната тежина. Јасно е дека во тие простори, освен полиномите, припаѓаат и сите непрекинати функции кои се анулираат надвор од интервал со конечна должина. Тие имаат најголема примена во техниката и физиката. Природно е да се постави прашањето дали бесконечната низа од класичните ортогонални полиноми $P_n(x)/\|P_n\|$ е ортонормирана база за соодветниот простор $L^2[a,b]$.

Во теоремата 13 беше покажано дека тригонометрискиот систем $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},n\in\mathbf{N}\right\}$ е ортонормирана база за $L^2[0,2\pi]$, користејќи ја теоријата на мера и интеграција. Се поставува прашањето дали е можно да се дојде до истиот резултат без употреба на теорија на мера и интеграција, туку само со користење на теоремата 14 за комплетирање на унитарни простори. Поимот за сепарабилен Хилбертов простор беше даден во дефиницијата 18. Ќе дадеме уште една дефиниција на сепарабилен Хилбертов простор, што е всушност дефиниција за сепарабилност во метрички простори односно нормирани простори.

Дефиниција 23. За Хилбертовиот простор H се вели дека е *сепарабилен* ако постои пребројливо множество $A=\{x_n : n\in \mathbf{N}\}$ густо во H.

Теорема 18. Хилбертовиот простор H е сепарабилен во смисла на дефиниција 23, ако и само ако е сепарабилен во смисла на дефиниција 18.

Доказ: Нека H е сепарабилен Хилбертов простор во смисла на дефиницијата 18. Тогаш постои пребројлива ортонормирана база $B=\{e_n : n\in \mathbf{N}\}$ за H. Нека $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ е нумерација на множеството од рационални броеви. Тврдиме дека множеството $A=\{r^{(i)}e_n : i,n\in \mathbf{N}\}$ е пребројливо и густо множество во H (реален унитарен простор), што значи дека H е сепарабилен во смисла на дефиницијата 23. Нека $x\in \mathrm{H}$, и $\varepsilon>0$, тогаш заради теоремата 12 под 3) постои $n\in \mathbf{N}$ таков што $\left\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right\|^2<\dfrac{\varepsilon^2}{4}$ каде што $c_k=(x,e_k)$. За секој од реалните броеви $c_1,c_2,\cdots,c_n$ избираме рационални броеви $r^{(1)},r^{(2)},\cdots,r^{(n)}$ такви што $\left|c_j-r^{(j)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2n}$. Тогаш, $\left\|x-\sum_{j=1}^{n}r^j e_j\right\|\le\left\|x-\sum_{j=1}^{n}c_j e_j\right\|+\left\|\sum_{j=1}^{n}c_j e_j-\sum_{j=1}^{n}r^j e_j\right\|<$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+n\sum_{j=1}^{n}\left|c_j-r_j\right|<\frac{\varepsilon}{2}+n\frac{\varepsilon}{2n}=\varepsilon .$$

Нека H е сепарабилен во смисла на дефиницијата 23. Тогаш постои пребројливо множество $A=\{x_n : n\in \mathbf{N}\}$ коешто е густо во H. Без да се губи од општоста, можеме да сметаме дека A е линеарно независно множество, бидејќи во спротивно со отфрлање на векторите што зависат од претходните се доаѓа до пребројливо линеарно независно множество густо во A. Со примена на постапката на Грам-Шмит за ортогонализација на множеството $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ се доаѓа до ортогонален систем од вектори $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ за секој природен број n, при што важи $L\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = L\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. Нека $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$, тогаш множеството $B = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ е ортонормирана база за сепарабилниот простор H. Навистина, нека $x \in \mathrm{H}$ и $\varepsilon > 0$, тогаш постои вектор $x_n \in A$ таков што $\|x - x_n\| < \varepsilon$.

Но, $x_n \in L\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = L\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ $L\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = L\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, па $x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Докажавме дека $\overline{L(B)} = \mathrm{H}$. Според теоремата 12 под 4) следува дека B е ортонормирана база. ■

Низ задачите 24,25,27 е покажано дека полиномите на Лежандр е насекаде густо множество во просторот $L^2[-1,1]$, односно низ задачите 28,29 и 30 е покажано дека тригонометрискиот систем $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbf{N}\right\}$ е густо множество во $L^2[0,2\pi]$. Ќе покажеме дека секој сепарабилен Хилбертов простор е изометриски изоморфен со просторот l^2 од низи од комплексни броеви $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ такви што $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$.

Теорема 19. Нека H е сепарабилен комплексен Хилбертов простор. Тогаш H е изометриски изоморфен со просторот l^2.

Доказ: Нека H е сепарабилен комплексен Хилбертов простор и нека $B = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ е ортонормирана база за H. За $x \in \mathrm{H}$ нека $c_k = (x, e_k)$ е Фуриев коефициент на векторот x. Од теоремата 6 следува дека $(c_k) \in l^2$ и $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Исто така, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ (теорема 12 под 1),2) и 3)).

Дефинираме пресликување $\Phi : \mathrm{H} \to l^2$ со $\Phi(x) = (c_k) = \overline{x}$. Јасно е дека Φ е линеарно пресликување, еден-еден и $\|\Phi(x)\|^2 = \|x\|^2$ (од точноста на равенството на Парсевал-Стеклов).

Ако $y \in \mathrm{H}$, нека $\alpha_k = (y, e_k)$, $k \in \mathbf{N}$. Тогаш од $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ и $y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ (теорема 12 под 3) и од непрекинатоста на скаларниот производ (теорема 7 под 4) се добива $(x, y) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{\alpha}_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{\alpha}_k = ((c_k),(\alpha_k))_{l^2} = (\overline{x}, \overline{y})_{l^2}$.

Ќе покажеме дека пресликувањето Φ е од облик *на*. Нека $\overline{x} = (a_k) \in l^2$ што значи $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. За $n \in \mathbf{N}$ нека $z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Тврдиме дека (z_n) е Кошиева низа во H. Навистина, за $m > n$ имаме $\|z_m - z_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{m} |a_k|^2 \to 0$ кога $m, n \to \infty$ заради Кошиевиот критериум за конвергенција на низа од комплексни броеви. Од претпоставката за комплетност на просторот H, се добива постоење на $x \in \mathrm{H}$, $x = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right)$. Од непрекинатоста на скаларниот производ, за фиксен $j \in \mathbf{N}$ имаме: $(x, e_j) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k , e_j \right) = a_j$. Значи a_j е Фуриев коефициент на векторот x, односно $\Phi(x) = \overline{x}$. ■

Ортонормираното множество од Лежандрови полиноми $\varphi_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{\|P_n\|}$ е ортонормирана база за просторот $L^2[-1,1]$. Навистина, заради задачата 23, множеството од полиноми е густо во просторот $C^2[-1,1]$ во однос на $\max -$норма, а просторот $C^2[-1,1]^\wedge$ е густ во просторот $L^2[-1,1]$, заради теоремата за комплетирање, така што $\{\varphi_n \hat{}: n = 0,1,2,\cdots\}$ е ортонормирана база.

Како последица се добива дека за секоја непрекината функција f на $[-1,1]$ важи $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$ во смисла да $\int_{-1}^{1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right|^2 dx \to 0$ кога $n \to \infty$.

9. Три основни теореми за ортогоналните полиноми

Сите ортогонални полиноми од примерите 14 до 17 поседуваат заеднички особини за бројот и карактерот на нулите на полиномите, рекурентна формула што дава врска меѓу три последователни членови и равенството на Кристофел-Дарбу (Cristoffel-Darboux) за рекурентна релација на изводите на полиномите. Со $I = [a,b]$ се означува интервалот на интеграција во однос на кој полиномите се ортогонални. Интервалот I може да биде конечен или бесконечен. Првата теорема се однесува на бројот на нулите и нивниот карактер.

Теорема 20. Ортогоналниот полином $P_n(x)$ со степен $n \geq 1$ има n реални и различни нули.

Доказ: Со $x_1, x_2, \cdots, x_k$ ги означуваме нулите на полиномот $P_n(x)$ со непарна кратност кои се наоѓаат на интервалот $I = [a,b]$. Тврдиме дека $k = n$. Да претпоставиме дека $k < n$. Со $Q(x)$ го означуваме полиномот со степен k: $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k)$. Полиномот $Q(x)$ го менува знакот во истите точки во кои полиномот $P_n(x)$ го менува знакот. Така, полиномот $Q(x)P_n(x)$ не го менува знакот во ниедна точка, па затоа $\int_a^b Q(x)P_n(x)dx \neq 0$ што е во контрадикција со ортогоналноста на $P_n(x)$ и $Q(x)$. ■

Теорема 21. Нека $Q_{n-1}(x), Q_n(x)$ и $Q_{n+1}(x)$ се три последователни ортонормирани полиноми и нека $p(x)$ е тежинска функција на $[a,b]$ и нека

$$Q_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + c_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \cdots + c_0^{(n)} \tag{1}$$

Тогаш важи

$$xQ_n(x) = \frac{A_n}{A_{n+1}} Q_{n+1}(x) + \left(\frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} \right) Q_n(x) + \frac{A_{n-1}}{A_n} Q_{n-1}(x) \ . \tag{2}$$

Доказ: Производот $xQ_n(x)$ е полином од степен $n+1$ и истиот може да се претстави во вид:

$$xQ_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k^{(n)} Q_k(x) \tag{3}$$

при што коефициентите $c_k^{(n)}$ се Фуриеви коефициенти односно $c_k^{(n)} = \int_a^b p(x) x Q_n(x) Q_k(x) dx$. Ако $k < n-1$, тогаш $xQ_k(x)$ е полином со степен $k+1 < n$, па бидејќи $Q_n(x)$ е ортогонален на секој полином со степен помал од n, следува дека $c_k^{(n)} = 0$. Затоа важи:

$$xQ_n(x) = c_{n+1}^{(n)} Q_{n+1}(x) + c_n^{(n)} Q_n(x) + c_{n-1}^{(n)} Q_{n-1}(x) \tag{4}$$

Ако секој од полиномите $Q_s(x), \ (s = n-1, n, n+1)$ од (4) се замени со изразот од формулата (1), се добива:

$$A_n x^{n+1} + B_n x^n + \cdots = c_{n+1}^{(n)} A_{n+1} x^{n+1} + c_{n+1}^{(n)} B_{n+1} x^n + c_n^{(n)} A_n x^n + c_n^{(n)} B_n x^{n-1} +$$
$$+ c_{n-1}^{(n)} A_{n-1} x^{n-1} + c_{n-1}^{(n)} B_{n-1} x^{n-2} + \cdots \tag{5}$$

Со споредување на коефициентите пред највисокиот степен во (5) се добива:

$$A_n = c_{n+1}^{(n)} A_{n+1} \Rightarrow c_{n+1}^{(n)} = \frac{A_n}{A_{n+1}}; \quad B_n = c_{n+1}^{(n)} B_{n+1} + c_n^{(n)} A_n \Rightarrow c_n^{(n)} = \frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} .$$

За да се определи коефициентот $c_{n-1}^{(n)}$, се поаѓа од равенството:

$$Q_{n-1}(x) = A_{n-1} x^{n-1} + B_{n-1} x^{n-2} + \cdots \tag{6}$$

односно

$$xQ_{n-1}(x) = A_{n-1}x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots \tag{6'}$$

па е

$$c_{n-1}^{(n)} = \int_a^b p(x)Q_n(x)xQ_{n-1}(x)dx = \int_a^b p(x)Q_n(x)\left[A_{n-1}x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots\right]dx =$$

$$= A_{n-1}\int_a^b p(x)Q_n(x)x^n dx = A_{n-1}\int_a^b p(x)Q_n(x)\frac{Q_n(x)}{A_n}dx = \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

при што е користено равенството: $x^n = \dfrac{Q_n(x)}{A_n} - T_{n-1}(x)$ каде што $T_{n-1}(x)$ е

полином со степен $n-1$. ■

Теорема 22. (Формула на Cristoffel-Darboux). Нека $Q_n(x)$ е низа од ортогонални полиноми на интервалот $[a,b]$. Тогаш, за било кои $x, t \in [a,b]$ важи:

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k(x)Q_k(t) = \frac{A_n}{A_{n+1}}\left[\frac{Q_{n+1}(x)Q_n(t) - Q_n(x)Q_{n+1}(t)}{x-t}\right] \tag{1}$$

Доказ: Ако изразот од формулата (2) од претходната теорема го помножиме со $Q_n(t)$, се добива:

$$xQ_n(x)Q_n(t) = \frac{A_n}{A_{n+1}}Q_{n+1}(x)Q_n(t) + \left(\frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}\right)Q_n(x)Q_n(t) +$$

$$+\frac{A_{n-1}}{A_n}Q_{n-1}(x)Q_n(t) \tag{2}$$

односно со промена на местата на променливите x и t, се добива:

$$tQ_n(t)Q_n(x) = \frac{A_n}{A_{n+1}}Q_{n+1}(t)Q_n(x) + \left(\frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}\right)Q_n(t)Q_n(x) +$$

$$+\frac{A_{n-1}}{A_n}Q_{n-1}(t)Q_n(x) \tag{2'}$$

Ако од равенството (2) се извади равенството (2'), се добива:

$$(x-t)Q_n(x)Q_n(t) = \frac{A_n}{A_{n+1}}\left[Q_{n+1}(x)Q_n(t) - Q_{n+1}(t)Q_n(x)\right] -$$

$$-\frac{A_{n-1}}{A_n}\left[Q_n(x)Q_{n-1}(t)-Q_n(t)Q_{n-1}(x)\right] \qquad (3)$$

Ако во (3) индексот n се замени со $n-1, n-2, \cdots, 1, 0$ (при што $Q_{-1}=0$) и собирајќи ги соодветните равенства, се добива:

$$(x-t)\sum_{k=0}^{n} Q_k(x)Q_k(t)=\frac{A_n}{A_{n+1}}\left[Q_{n+1}(x)Q_n(t)-Q_{n+1}(t)Q_n(x)\right]$$

што требаше да се докаже. ■

Последица 1. Ако $(Q_n(x))$ е ортонормиран систем од полиноми, тогаш

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k^2(t)=\frac{A_n}{A_{n+1}}\left[Q'_{n+1}(t)Q_n(t)-Q_{n+1}(t)Q'_n(t)\right] \qquad (1)$$

Доказ: Формулата на Кристофел-Дарбу ја трансформираме во облик:

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k(x)Q_k(t)=\frac{A_n}{A_{n+1}}\left[\frac{Q_{n+1}(x)-Q_{n+1}(t)}{x-t}Q_n(t)-\frac{Q_n(x)-Q_n(t)}{x-t}Q_{n+1}(t)\right] \qquad (2)$$

Ако побараме лимес во последната формула кога $x \to t$ се добива точноста на формулата (1). ■

Последица 2. Полиномите $Q_n(x)$ и $Q_{n+1}(x)$ немаат заеднички нули, уште повеќе нулите на тие полиноми меѓусебе се "разминуваат" т.е. меѓу две последователнои нули на полиномот $Q_{n+1}(x)$ се наоѓа точно една нула на полиномот $Q_n(x)$.

Доказ: Нека x_0 е нула на полиномот $Q_{n+1}(x)$. Од равенството

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k^2(t)=\frac{A_n}{A_{n+1}}\left[Q'_{n+1}(t)Q_n(t)-Q_{n+1}(t)Q'_n(t)\right] \qquad (1)$$

се добива

$$Q'_{n+1}(x_0)Q_n(x_0)>0 \qquad (2)$$

што значи $Q_n(x_0)\neq 0$.

Нека x_0 и y_0 се две последователни нули на полиномот $Q_{n+1}(x)$, па е

$$Q'_{n+1}(x_0)Q'_{n+1}(y_0)<0 \qquad (3)$$

Тогаш, $Q_n(x_0)Q_n(y_0) = \dfrac{Q_n(x_0)Q'_{n+1}(x_0)}{Q'_{n+1}(x_0)} \dfrac{Q_n(y_0)Q'_{n+1}(y_0)}{Q'_{n+1}(y_0)} < 0$ што значи полиномот $Q_n(x)$ го менува знакот во точките x_0 и y_0, од каде што следува дека се анулира во некоја точка меѓу x_0 и y_0. ■

10. Задачи

1. Да се докаже дека во секој унитарен простор H важи:

   $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) \quad \forall x, y \in \mathrm{H}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}$

   $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in \mathrm{H}$

   $(x, 0) = (0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{H}$

   $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in \mathrm{H}$.

2. а) Поаѓајќи од

   $$\|(y, y)x - (x, y)y\|^2 \geq 0 \tag{1}$$

   и $y \neq 0$ да се докаже неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

   б) Да се докаже дека важи равенството

   $$|(x, y)| = \|x\|\|y\| \tag{2}$$

   ако и само ако $x = \lambda y$ за некое $\lambda \in \mathbf{C}$.

3. Да се докаже дека важи равенството $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, ако и само ако $x = \lambda y$ каде што λ е ненегативен реален број.

Упатство: Да се користи задачата 2. ●

4. Да се докаже дека во унитарен простор H важи $\|x - z\| = \|x - y\| + \|y - z\|$ ако и само ако $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$ за некој $\lambda \in [0,1]$.

5. а) Во реален унитарен простор (Евклидов) два вектора x и y се ортогонални, ако и само ако важи $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

   б) Во унитарен простор H два вектора x и y се ортогонални, ако и само ако важи $\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$ за произволни комплексни броеви λ и μ.

6. а) Да се покаже дека во секој реален унитарен простор важи поларизационото равенство: $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x, y)$.

   б) Да се покаже дека во секој (комплексен) унитарен простор важи поларизационото равенство:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 4(x, y).$$

7. а) Да се покаже дека ако во ралниот нормиран простор H важи равенството на паралелограм

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{1}$$

за секој $x, y \in \mathrm{H}$, тогаш со формулата

$$(x, y) = (x, y)_1 = (x, y)_{\mathbf{R}} = 1/4\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \tag{2}$$

е дефиниран скаларен производ.

б) Да се покаже дека ако во комплексниот нормиран простор X важи равенството на паралелограм, тогаш со формулата

$$(x, y) = (x, y)_{\mathbf{C}} = (x, y)_1 + i(x, iy)_1 \tag{2'}$$

е дефиниран скаларен производ.

Решение: а) Јасно е дека се исполнети условите а) и г) од дефиницијата за скаларен производ во реален унитарен простор. Од (1) и (2) имаме:

$$(x, z) + (y, z) = 1/4\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) =$$

$$= 1/8\left(2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2 - (2\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2)\right) =$$

$$= 1/8\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2 - (\|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)\right) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right) \text{ т.е.}$$

$$(x, z) + (y, z) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \tag{3}$$

Ако во равенството (3) ставиме $y = 0$, се добива $(x, z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)$, од каде за $x = 2u$ се добива:

$$(2u, z) = 2(u, z) \tag{4}$$

Ако во (3) ставиме $x=2u$, $y=2v$, се добива $(2u,z)+(2v,z)=2(u+v,z)$ од каде заради (4) се добива

$$(u+v,z)=(u,z)+(v,z). \tag{5}$$

Не е тешко да се провери дека од (5) следува $(rx,y)=r(x,y), \quad \forall r\in \mathbf{Q}$, па заради непрекинатоста на нормата $\|\alpha x+y\|^2$, $\|\alpha x-y\|^2$ се добива равенството $(\alpha x,y)=\alpha(x,y), \quad \forall \alpha\in \mathbf{R}$.

б) Заради а), X е реален унитарен простор така што важи $(\alpha x,y)=\alpha(x,y), \quad \forall \alpha\in \mathbf{R}$ и условот в) од дефиницијата на скаларен производ. Непосредно се проверува точноста на следните равенства:

$$(y,x)_1=(x,y)_1 \tag{6}$$

$$(ix,iy)_1=(x,y)_1 \tag{7}$$

$$(y,ix)_1=-(x,iy)_1 \tag{8}$$

Конечно е

$$(y,x)=(y,x)_1+i(y,ix)_1 \overset{(6),(8)}{=} (x,y)_1-i\,(x,iy)_1=\overline{(x,y)}$$

и

$$(ix,y)=(ix,y)_1+i\,(ix,iy)_1 \overset{(7),(8)}{=} -(x,iy)_1+i\,(x,y)_1=$$

$$=i((x,y)_1+i\,(x,iy)_1)=i\,(x,y). \bullet$$

8. Да се покаже дека во секој Хилбертов простор H важи:

   а) $M\subseteq N \Rightarrow N^{\perp}\subseteq M^{\perp}$

   б) $M^{\perp}=M^{\perp\perp\perp}$

   в) M е затворен потпростор од H, ако и само ако $M=M^{\perp\perp}$.

9. Ако X и Y се затворени потпростори од Хилбертов простор H и $X\perp Y$, тогаш $X+Y=\{x+y : x\in X, y\in Y\}$ е затворен потпростор од H. Докажи!

10. Да се покаже дека просторот l_0^2 од примерот 8 не е комплетен простор.

Упатство. Да се разгледа низата x^k каде што $x=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2^{k-1}},0,0,\cdots\right)$. Да се покаже дека $\left(x^k\right)$ е Кошиева низа во l_0^2. Да се докаже дека не постои $x\in l_0^2$ таков што $\|x_k - x\|\to 0$ кога $k\to\infty$. ●

11. Нека H е унитарен простор и L е линеарно многуобразие и нека x е вектор од H кој се наоѓа на растојание δ од L. Да се докаже дека за било кои y_1, y_2 од L важи $\|y_1 - y_2\| \le \sqrt{\|x-y_1\|^2-\delta^2}+\sqrt{\|x-y_2\|^2-\delta^2}$, познато под името неравенство на Бепо-Леви. (Beppo-Levi).

Упатство: Да се ползува техниката од доказот на теоремата 8. Да се тргне од неравенството $\|x-(y_1+\lambda h)\|^2\ge\delta^2$ за $h\in L$ и $\lambda\in\mathbf{C}$. Да се добие неравенството $|(x-y_1,h)|^2\le\left(\|x-y_1\|^2-\delta^2\right)\|h\|^2$. Аналогно за y_2, итн. ●

12. Нека $y = x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$, тогаш $y\perp z$ за секој $z\in B_n$ каде што B_n е потпростор генериран од ортонормираното множество $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ (теорема 5). Докажи!
13. Да се докаже дека $\{e_n : n\in\mathbf{N}\}$ не е линеарна база за просторот l^2 каде што $e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, бројот 1 е на $n-$тата позиција.
14. Нека $|\lambda|<1$ и нека $x_\lambda=(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)\in l^2$ и нека $M=\{x_\lambda : |\lambda|<1\}$. Да се покаже дека M е непребројливо линеарно независно множество.
15. Нека $x_1,x_2,\cdots,x_n$ се вектори во унитарен простор H. Детерминантата

$$\begin{vmatrix} (x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \cdots & (x_1,x_n) \\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \cdots & (x_2,x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & \cdots & (x_n,x_n) \end{vmatrix}$$

се вика Грамова детерминанта од векторите $x_1,x_2,\cdots,x_n$ и се означува со $\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. Да се покаже дека векторите

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ се линеарно независни, ако и само ако нивната Грамова детерминанта е позитивна.

16. Да се најдат првите три членови од низата ортогонални полиноми што настануваат со ортогонализација на $1, x, x^2$ од примерот 15.
17. Истото прашање како задачата 16 за примерот 16.
18. Истото прашање како задачата 16 за примерот 17.
19. Ако $x \in \mathrm{H}$ и M е затворен потпростор од Хилбертов простор H, да се докаже: $\min\{\|x - x_0\| : x \in M\} = \max\{|(x_0, y)| : y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\}$.
20. Да се пресмета $\min\limits_{a,b,c}\left(\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3 - a - bx - cx^2\right)^2 dx\right)$ и да се најде $\max \int\limits_{-1}^{1} x^3 g(x)dx$, каде што $g(x)$ ги задоволува условите $\int\limits_{-1}^{1} g(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} xg(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0$, $\int\limits_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx = 1$.
21. Да се пресмета $\min\limits_{a,b,c}\left(\int\limits_{0}^{\infty}\left(x^3 - a - bx - cx^2\right)^2 e^{-x} dx\right)$.
22. Со $X = C^1[a,b]$ е означен просторот од непрекинати функции на $[a,b]$. Да се покаже дека со $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx$ е дефинирана норма на X. Дали $C^1[a,b]$ е комплетен простор?
23. (Теорема на Вајерштрас за апроксимација на непрекинати функции со полином). Нека f е непрекината функција на $[0,1]$. Да се покаже дека за полиномите

$$B_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) x^p (1-x)^{n-p} \tag{1}$$

важи

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{0\le x\le 1}\{|f(x) - B_n(x)|\}\right) = 0 \tag{2}$$

односно

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|f-B_n\|_\infty\right)=0 \tag{2'}$$

каде што

$$\|f\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}\{|f(x)|\} \tag{2''}$$

(Полиномите $B_n(x)$ се викаат полиноми на Бернштајн).

Решение: Се поаѓа од биномната формула

$$(x+u)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p u^{n-p} \tag{3}$$

која ја диференцираме по x и ја множиме со x, па се добива

$$nx(x+u)^{n-1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}px^p u^{n-p} \tag{4}$$

Со диференцирање на (3) два пати по x, па со множење со x^2 се добива

$$n(n-1)x^2(x+u)^{n-2}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}p(p-1)x^p u^{n-p} \tag{5}$$

Ја користиме ознаката

$$r_p(x)=\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p} \tag{6}$$

Тогаш непосредно се добива:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}r_p(x)=(x+(1-x))^n=1^n=1\\ \sum_{p=0}^{n}pr_p(x)\overset{(4)}{=}nx\\ \sum_{p=0}^{n}p(p-1)r_p(x)\overset{(5)}{=}n(n-1)x^2\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Имаме:

$$\sum_{p=1}^{n}(p-nx)^2 r_p(x)=n^2x^2\sum_{p=1}^{n}r_p(x)-2nx\sum_{p=1}^{n}pr_p(x)+\sum_{p=1}^{n}p^2r_p(x)=$$

$$=n^2x^2-2nxnx+(nx+n(n-1)x^2)=nx(1-x) \tag{8}$$

Функцијата $f(x)$ е непрекината на $[0,1]$, па е рамномерно непрекината, што значи дека за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \ . \qquad (9)$$

Од непрекинатоста на функцијата f следува ограниченост, па постои $M > 0$ таков што $|f(x)| \le M, \quad \forall x \in [0,1]$. Со примена на формулата (7), се добива $\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right) r_p(x) \right| = \left| \sum_{p=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right) r_p(x) \right| < |\Sigma'| + |\Sigma''|$ каде што со Σ' е означено сумирањето на оние индекси p такви што $|p - nx| < \delta n \Leftrightarrow \left|\frac{p}{n} - x\right| < \delta$, додека со Σ'' е означено сумирањето по оние индекси p такви што $|p - nx| \ge \delta n \Leftrightarrow \left|\frac{p}{n} - x\right| \ge \delta$. Заради $r_p(x) \ge 0$, за првата сума ја имаме оценката $|\Sigma'| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=0}^{n} r_p(x) = \frac{\varepsilon}{2}$. Заради (8) ја имаме оценката $|\Sigma''| \le 2M \, \Sigma'' r_p(x) = 2M \, \frac{1}{(p - nx)^2} \Sigma''(p - nx)^2 r_p(x) \le \frac{2M}{n^2 \delta^2} <$

$< \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{p=0}^{n} (p - nx)^2 r_p(x) \le \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{M}{2\delta^2 n} \to 0$ кога $n \to \infty$ па за доволно голем n, $|\Sigma''| < \frac{\varepsilon}{2}$. ●

24. Нека f е непрекината функција на $[a,b]$ таква што $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$ за $n = 0,1,2,\cdots$. Да се докаже дека $f(x) \equiv 0$. (да се користи задачата 23).

25. Нека $X = C[a,b]$ е простор од непрекинати функции на сегментот $[a,b]$.
За $f \in X$ дефинираме норми со :

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} \{|f(x)|\} \qquad (1)$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \qquad (2)$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Да се докаже дека важи: $\frac{1}{\sqrt{b-a}}\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

Упатство: Да се ползува неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц. ●

26. Да се докаже дека множеството од полиноми е густо во просторите $C^1[a,b]$ и $C^2[a,b]$.

Упатство: Да се ползуваат задачите 23 и 25. ●

27. Да се покаже дека множеството $\hat{P} = \{\hat{p} : p$ е полином $\}$ е густо во просторите $L^2[a,b]$ и $L^1[a,b]$.

Упатство: Непосредно од теоремата за комплетирање на унитарни и нормирани простори се гледа дека за $\tilde{f} \in L^2[a,b]$и $\varepsilon > 0$, постои $g \in C^2[a,b]$ таква што $\|\tilde{f} - \hat{g}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Од задачата 26 се доби постоење на полином p таков што $\|g - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$, па со комбинирање на задачата 25, се добива $\|\hat{g} - \hat{p}\|_{L^2[a,b]} = \|g - p\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, итн.. Аналогно за $L^1[a,b]$. ●

28. (Апроксимација на периодична непрекината функција со низа од тригонометриски полиноми) . Нека $F(t)$ е непрекината периодична функција со период 2π на бројната права $\mathbf{R}$. Тогаш, за произволен $\varepsilon > 0$ постои тригонометриски полином $T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ таков што за секој t е исполнето $|F(t) - T_n(t)| < \varepsilon$.

Решение: Нека $\varphi(t) = \frac{F(t) + F(-t)}{2}$ и $\psi(t) = \frac{F(t) - F(-t)}{2}\sin t$. Функциите φ и ψ се парни и периодични функции со период 2π. Ако

$x = \cos t, \quad t \in [0, \pi]$, тогаш $x \in [-1,1]$ и нека $f(x) = \varphi(t)$ и $g(x) = \psi(t)$. Функциите f и g се непрекинати функции на сегментот $[-1,1]$. Заради задачата 23 (адаптирана на сегментот $[-1,1]$), постојат полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ такви што $\left|P(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\left|Q(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad x \in [-1,1]$, односно $\left|\varphi(t) - P(\cos t)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\left|\psi(t) - Q(\cos t)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Неравенствата се добиени во интервалот $[0, \pi]$. Но, имајќи предвид дека сите функции што се појавуваат се парни и периодични, истите неравенства важат за произволно t. Заради $F(t) \sin t = \varphi(t) \sin t + \psi(t)$, се добива точноста на неравенството

$$\left|F(t) \sin t - U(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

каде што $U(t) = Q(\cos t) + P(t) \sin t$ е тригонометриски полином. Ако се применат истите расудувања кон функцијата $F\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, се добива постоење на тригонометриски полином $V(t)$ таков што за секој $t \in \mathbf{R}$ важи

$$\left|F\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin t - V(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Со замена на $\frac{\pi}{2} - t$ со t, формулата (2) ја презапишуваме во облик

$$\left|F(t) \cos t - V\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2'}$$

Од (1) и (2') се добива $\left|F(t) \sin^2 t - U(t) \sin t\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\left|F(t) \cos^2 t - V\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos t\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, што повлекува

$$\left|F(t) - U(t) \sin t - V\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos t\right| < \varepsilon .$$

Бараниот тригонометриски полином е $T(t) = U(t) \sin t + V\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos t$. ●

29. Да се покаже дека за дадена непрекината функција f на сегментот $[0,2\pi]$ и даден $\varepsilon > 0$ постои непрекината функција g таква што $g(0) = g(2\pi)$ и $\|f - g\|_2 = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$.

Решение: Од непрекинатоста на функцијата f следува ограниченост, па постои $M > 0$ таков што $|f(x)| \le M, \quad \forall x \in [a,b]$. За $0 < s < 2\pi$, нека

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le s \\ \text{дел од права меѓу точките} & (s, f(s)) \text{ и } (2\pi, f(0)) \end{cases}$$

. Јасно е дека g е непрекината функција и $g(0) = g(2\pi)$ и $\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx = \int_s^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx < (2M)^2 (2\pi - s)$. На бројот s се поставува условот $4M^2 (2\pi - s) < \varepsilon^2$. Така се добива $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. ●

30. Да се докаже дека множеството од тригонометриски полиноми T (поточно $\hat{T}$) е густо во $L^2[0,2\pi]$.

Решение: Заради теоремата 14 (за комплетирање) за произволна класа $\tilde{f} \in L^2[0,2\pi]$ постои непрекината функција h на $[0,2\pi]$ таква што $\|\tilde{f} - \hat{h}\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Заради задачата 29 постои непрекината функција g таква што $g(0) = g(2\pi)$ и $\|h - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Со примана на задачата 28 постои тригонометриски полином $p(t)$ таков што $\|g - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$, од каде заради неравенствата од задачата 25 се добива $\|g - p\|_2 < \sqrt{2\pi} \|g - p\|_\infty < \sqrt{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\, 3} = \frac{\varepsilon}{3}$. Конечно се добива:

$$\|f - p\|_2 \le \|f - h\|_2 + \|h - g\|_2 + \|g - p\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$ ●

31. Да се докаже дека:

а) секое конечно множество е множество со мера нула;

б) секое пребројливо множество е множество со мера нула;

в) конечна унија на множества со мера нула е множество со мера нула;

г) пребројлива унија на множества со мера нула е множество со мера нула.

32. а) Да се докаже дека релацијата ~ дадена во дефиницијата 21 е релација за еквивалентност.

б) Ако $f_1 \sim f_2$ и $g_1 \sim g_2$, да се покаже дека $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$.

в) Ако $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$, да се покаже дека $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

II Д Е Л

КЛАСИЧНИ ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ

II ГЛАВА

ПОЛИНОМИ НА ЛЕЖАНДР

1. Дефиниција и некои основни својства

Дефиниција 1. Полиномот

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n-2r}{n} x^{n-2r} \tag{1}$$

каде што $\left[\frac{n}{2}\right]$ е $\frac{n}{2}$ ако n е парен и $\frac{n-1}{2}$ ако n е непарен број, се вика *Лежандров полином од степен* n.

Со примена на формулата $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ при што n и r се ненегативни цели броеви такви што $n \geq r$, добиваме:

$$\binom{2n-2r}{n} \cdot \binom{n}{r} = \frac{(2n-2r)!}{n!(n-2r)!} \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} \quad \text{за} \quad r \leq \frac{n}{2}.$$

Така добивме нов облик на Лежандровиот полином:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r} \tag{1'}$$

Ќе покажеме дека полиномот P_n го има и следниот облик:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{1''}$$

Користејќи ја формулата $(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \cdot x^{2n-2k}$, имаме:

$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, n!\cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n} \cdot x^{n-2k}$. Ако $2k > n$ т.е. $2n-2k < n$ имаме $\binom{2n-2k}{n} = 0$, па добиваме

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(-1\right)^r \binom{n}{r}\binom{2n-2r}{n} x^{n-2r} = P_n(x).$$

Формулата (1'') се вика Родригезова формула. Докажана е во 1814 од O.Rodrigues.

Користејќи ја дефиницијата 1, ќе ги дадеме првите неколку Лежандрови полиноми:

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$,

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$, $P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$,

$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$ итн.

Теорема1. Лежандровиот полином $P_n(x)$ е парна функција кога n е парен број и е непарна функција кога n е непарен број., т.е.

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x) \tag{1.1}$$

Исто така

$$P_n(1)=1 \text{ и } P_n(-1)=(-1)^n \tag{1.2}$$

Доказ: Ги користиме Родригезовата формула и Лајбницовото правило за диференцирање на производ на две функции:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x-1\right)^n\left(x+1\right)^n\right)=$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left(n!(x+1)^n + \binom{n}{1} n! n (x-1)(x+1)^{n-1} + \cdots + n!(x-1)^n \right). \blacksquare$$

Теорема 2. Сите нули на Лежандровите полиноми се реални и различни и се наоѓаат во внатрешноста на интервалот $(-1,1)$.

Доказ: Бидејќи функцијата $g(x) = (x^2-1)^n$ е непрекината, диференцијабилна и $g(-1) = 0 = g(1)$, според теоремата на Рол следува дека функцијата $g'(x)$ има барем една нула во интервалот $(-1,1)$. Теоремата на Рол можеме да ја примениме и на функцијата $g'(x)$, па заклучуваме дека функцијата $g''(x)$ има барем две различни нули на интервалот $(-1,1)$. На сличен начин заклучуваме дека функцијата $g^{(n)}(x)$ има барем n различни нули на интервалот $(-1,1)$. Но, бидејќи $g^{(n)}(x)$ е полином од $n-$та степен, не може да има повеќе од n нули. ■

Теорема 3. За функцијата $\omega(t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ важи развојот:

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{3.1}$$

за доволно мали вредности на $|t|$.

Доказ: Нека за фиксно x , r_1, r_2 се корените на квадратната равенка $1-2xt+t^2 = 0$ и нека $r = \min\{|r_1|, |r_2|\}$. Функцијата $\omega(t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ ја развиваме во Маклоренов ред (3.2). За $|t| < r$ тој конвергира.

$$\omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dt^n} (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \right)\Bigg|_{t=0} \frac{t^n}{n!} \tag{3.2}$$

Ќе покажеме дека $\left(\frac{d^n}{dt^n}\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{t=0} = n!P_n(x)$. За $|t|<r$ го имаме развојот

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-(2xt-t^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!(-1)^k}{2^{2k}k!}(t^2-2xt)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!(-1)^k}{2^{2k}k!}t^k\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^{k-s}k!}{s!(k-s)!}t^s(2x)^{k-s}$$

и можеме почлено да диференцираме:

$$\frac{d^n}{dt^n}(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!(-1)^k}{2^{2k}k!}\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^{k-s}k!}{s!(k-s)!}(2x)^{k-s}(k+s)(k+s-1)\cdots(k+s-n+1)t^{k+s-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!(-1)^k}{2^{2k}k!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-s}k!}{s!(k-s)!}(2x)^{k-s}(k+s)(k+s-1)\cdots(k+s-n+1)t^{k+s-n}.$$

Последното е точно бидејќи $\frac{1}{(k-s)!}=0$ кога $k<s$.

Ќе го користиме фактот дека $\frac{1}{(n-k)!}=0$ ако $k>n$ и $\frac{1}{(2k-n)!}=0$ ако $k<\left[\frac{n+1}{2}\right]$, а потоа воведуваме смена $k'=n-k$. Добиваме:

$$\frac{d^n}{dt^n}(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!(-1)^{k-n}2^{2k-n}}{2^{2k}(n-k)!(2k-n)!}x^{2k-n}n! = n!\sum_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n}\frac{(2k)!(-1)^{k-n}}{2^n(n-k)!(2k-n)!}x^{2k-n} =$$

$$= n!\frac{1}{2^n}\sum_{k'=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\left(2n-2k'\right)!(-1)^{k'}}{k'!\left(n-2k'\right)!}x^{n-2k'} = n!P_n(x).$$

Така, ја добиваме релацијата (3.1). ■

Функцијата $\omega(t)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ се вика *генератрисна функција* на Лежандровите полиноми.

Понатаму ќе докажеме некои рекурентни релации што важат за Лежандровите полиноми.

Теорема 4. За Лежандровите полиноми важат следните рекурентни релации:

1. $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \qquad n=1,2,...$
2. $P_{n+1}^{'}(x)-2xP_n^{'}(x)+P_{n-1}^{'}(x)-P_n(x)=0$
3. $P_{n+1}^{'}(x)-P_{n-1}^{'}(x)=(2n+1)P_n(x)$
4. $xP_n^{'}(x)-P_{n-1}^{'}(x)=nP_n(x)$
5. $P_{n+1}^{'}(x)-xP_n^{'}(x)=(n+1)P_n(x)$
6. $\left(1-x^2\right)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x)$
7. $\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right]+n(n+1)P_n(x)=0$.

Доказ: Диференцирајќи ја функцијата $\omega(x,t)=(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ по x и t, добиваме:

$$\left(1-2xt+t^2\right)\frac{\partial\omega}{\partial x}-t\omega=0 \tag{4.1}$$

$$\left(1-2xt+t^2\right)\frac{\partial\omega}{\partial t}+(t-x)\omega=0 \tag{4.2}$$

1. Со почлено диференцирање по t на редот (3.1), добиваме

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1} \tag{4.3}$$

Ако во (4.2) замениме (3.1) и (4.3), а потоа ги изедначиме коефициентите пред t^n, ја добиваме рекутентната релација

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \qquad n=1,2,... \tag{4.4}$$

Равенството (4.4) го извел O Bonnet и го носи неговото име.

2. Со почлено диференцирање по x на редот (3.1), добиваме:

$$t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \left(1-2xt+t^2\right)\sum P_n'(x)t^n \tag{4.5}$$

Ги изедначуваме коефициентите пред t^n и добиваме дека за $n \geq 1$ важи равенството

$$P_{n+1}'(x) - 2xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0 \tag{4.6}$$

3. Од равенството (4.4), со диференцирање, се добива

$$(n+1)P_{n+1}'(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP_n'(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \qquad n = 1,2,... \tag{4.7}$$

Елиминираме $P_n'(x)$ од (4.6) и (4.7) и добиваме

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x) \tag{4.8}$$

Формулата (4.8) се вика по Christoffel кој што ја извел во 1856 год.

4. Со елиминирање на $P_{n+1}'(x)$ од (4.6) и (4.7) , добиваме

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x) \tag{4.9}$$

5. Ако елиминираме $P_{n-1}'(x)$ од (4.8) и (4.9) , добиваме

$$P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x) \tag{4.10}$$

6. $$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)P_n'(x) &= P_n'(x) - x\cdot x\cdot P_n'(x) = P_n'(x) - x\cdot(nP_n(x) + P_{n-1}'(x)) = \\ &= P_n'(x) - nxP_n(x) - P_n'(x) + nP_{n-1}(x) = \\ &= nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)\end{aligned} \tag{4.11}$$

7. Со диференцирање по x на (4.11) имаме:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right] &= nP_{n-1}'(x) - nxP_n'(x) - nP_n(x) = -nP_n(x) + n\left(P_{n-1}'(x) - xP_n'(x)\right) \\ &= -nP_n(x) + n\left(-nP_n(x)\right) = -n(n+1)P_n(x)\end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{4.12}$$

■

Од (4.12) заклучуваме дека Лежандровиот полином е едно партикуларно решение на линеарната диференцијална равенка од втор ред $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0$, n е ненегативен цел број, која е позната како *Лежандрова диференцијална равенка*.

2. Ортогоналност на Лежандровите полиноми

Теорема 5. Системот Лежандрови полиноми $\{P_n(x): n=0,1,2\cdots\}$ е ортогонален (не и ортонормиран) во просторот $C^2[-1,1]$.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \qquad (m,n=0,1,2\cdots) \tag{5.1}$$

Доказ: Доволно е да покажеме дека секој полином $P_n(x)$ е ортогонален на полиномите $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ со чија линеарна комбинација се добиваат полиномите $P_k(x),\ k<n$. Со парцијална интеграција за $k<n$, се добива:

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx=\frac{k!}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{k+1}x^k}{dx^{k+1}}\frac{d^{n-k-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}dx=0.$$

Исто така, лесно се изведува дека $\|P_n\|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ (задача 1). ■

Така, системот полиноми $\widetilde{P}_n,\ n\geq 0$ каде што $\widetilde{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ е ортонормиран во просторот $C^2[-1,1]$. Уште повеќе, во првиот дел е покажано дека $\{\widetilde{P}_n\}$ е ортонормирана база за просторот $L^2[-1,1]$.

Да забележиме дека релацијата (5.1) е карактеристична за Лежандровите полиноми. Се покажува дека од релацијата (5.1) и од условот дека P_n се полиноми со степен n, следува дека полиномите P_n се идентични со Лежандровите полиноми (задача 4).

Користејќи го својството за ортогоналност на Лежандровите полиноми, можеме да напишеме $x^m = \sum_{n=0}^{m} a_n P_n(x), \quad m = 0,1,2,\cdots$. Притоа коефициентите a_n се дадени со: $a_n = \dfrac{2n+1}{2}\int x^m P_n(x)dx$. (да се видат теоремата 17 и примерот 14 од првиот дел). Така добиваме:

$x^0 = P_0(x)$, $x = P_1(x)$, $x^2 = \dfrac{1}{3}\big(2P_2(x) + P_0(x)\big)$, $x^3 = \dfrac{1}{5}\big(2P_3(x) + 3P_1(x)\big)$,

$x^4 = \dfrac{1}{35}\big(8P_4(x) + 20P_2(x) + 7P_0(x)\big)$, итн.

Според теоремата 12 од првиот дел имаме дека за секое $f \in L^2[-1,1]$,

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}} P_k(x)$, каде што c_k е Фуриевиот коефициент

$\int_{-1}^{1} f(x)\tilde{P}_k(x)dx = \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx$.

3. Лежандрова функција од втор вид

Лежандровиот полином $P_n(x)$ се нарекува и Лежандрова функција од прв вид .

Дефиниција 2. Лежандрова функција од втор вид е функцијата

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(y)}{x-y}dy, \quad (|x| \neq 1) \text{ и } n \in N \cup \{0\}, \tag{2}$$

каде што $P_n(x)$ е Лежандрова функција од прв вид.

Да забележиме дека за $n = 0$, имаме :

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_0(y)}{x-y}dy = \frac{1}{2}P_0(x)\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,$$

додека за $n \geq 1$:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{x-y}dy - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y}dy =$$

$$= \frac{1}{2}P_n(x)\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - W_{n-1}(x) \qquad (2')$$

каде што $W_{n-1}(x)$ е полином со степен $n-1$.

Полиномите $W_{n-1}(x)$ експлицитно ќе ги претставиме во теоремата 8 .

Теорема 6. За Лежандровите функции од втор вид, $Q_n(x)$, важат следните рекурентни релации:

1. $Q'_{n+1}(x) - xQ'_n(x) = (n+1)Q_n(x)$

2. $xQ'_n(x) - Q'_{n-1}(x) = nQ_n(x), \qquad n = 1,2,3,\cdots$

Доказ: Со парцијална интеграција, од (2) добиваме:

$$Q_n(x) = -\frac{1}{2}\left[P_n(1)\log|1-x| - P_n(-1)\log|1+x| - \int_{-1}^{1}P'_n(y)\log|y-x|dy\right]$$

Диференцирајќи го по x последниот резултат, добиваме

$$Q'_n(x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{(-1)^n}{x+1} - \int_{-1}^{1}\frac{P'_n(y)}{x-y}dy\right] \qquad (6.1)$$

1.

$$Q'_{n+1}(x) - xQ'_n(x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{x+1} - \int_{-1}^{1}\frac{P'_{n+1}(y)}{x-y}dy\right] + \frac{x}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{(-1)^n}{x+1} - \int_{-1}^{1}\frac{P'_n(y)}{x-y}dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-1 + (-1)^n - \int_{-1}^{1}\frac{P'_{n+1}(y) - yP'_n(y) - (x-y)P'_n(y)}{x-y}dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-1 + (-1)^n - \int_{-1}^{1}\frac{(n+1)P_n(y)}{x-y}dy + \int_{-1}^{1}P'_n(y)dy\right] =$$

$$= (n+1)Q_n(x)\,.$$

2.

$$xQ'_n(x) - Q'_{n-1}(x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x-1} - \frac{(-1)^n x}{x+1} - \int_{-1}^{1}\frac{xP'_n(y)}{x-y}dy\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{(-1)^n}{x+1} - \int_{-1}^{1}\frac{P'_{n-1}(y)}{x-y}dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1-(-1)^n - \int_{-1}^{1}\frac{yP_n'(y)-P_{n-1}'(y)+(x-y)P_n'(y)}{x-y}dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1-(-1)^n - \int_{-1}^{1}\frac{nP_n(y)}{x-y}dy - \int_{-1}^{1}P_n'(y)dy\right] =$$

$$= nQ_n(x)\,. \ \blacksquare$$

Користејќи ги рекурентните релации од теоремата 6, на потполно ист начин како во (4.11) и (4.12) покажуваме дека и $Q_n(x)$ (таму каде што е дефинирано) е решение на Лежандровата диференцијална равенка:

Теорема 7. За секој ненегативен цел број n и за $x \neq \pm 1$, Лежандровите функции $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ претставуваат две линеарно независни решенија на Лежандровата диференцијална равенка:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0\,.$$

Теорема 8. Ако, за природен број n, $Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - W_{n-1}(x)$,

тогаш:

$$W_{n-1}(x) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(2n-4s-1)}{(2s+1)(n-s)}P_{n-2s-1}(x)\,.$$

Доказ: Поаѓаме од (2') т.е. од $W_{n-1}(x) = P_n(x)Q_0(x) - Q_n(x)$. Користејќи го фактот дека функциите $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ за $n = 0,1,2,\cdots$ се решенија на Лежандровата диференцијална равенка, лесно се покажува дека

$$\left(1-x^2\right)W_{n-1}''(x) - 2xW_{n-1}'(x) + n(n+1)W_{n-1}(x) = -2P_n'(x) \qquad (8.1)$$

Ќе ги претставиме полиномите $W_{n-1}(x)$ и $P_n'(x)$ како линеарни комбинации од Лежандровите полиноми, т.е. нека

$$W_{n-1}(x) = \sum\nolimits_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x) \qquad (8.2)$$

$$P_n'(x) = \sum\nolimits_{i=0}^{n-1} a_i P_i(x) \qquad (8.3)$$

Коефициентите $a_i = 0,\cdots,n-1$, ќе ги определиме користејќи ја особината за ортогоналност на Лежандровите полиноми:

$$a_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n'(x)P_i(x)dx =$$

$$= \frac{2i+1}{2}\left[P_n(x)P_i(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n(x)P_i'(x)dx\right] =$$

$$= \frac{2i+1}{2}\left[1-(-1)^{n-i}\right] \tag{8.4}$$

Ако ги искористиме (8.2) и (8.3) во (8.1), добиваме

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i\left[(1-x^2)P_i''(x) - 2xP_i'(x) + i(i+1)P_i(x)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} c_i\left[n(n+1) - i(i+1)\right]P_i(x) = 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i P_i(x)$$

т.е.

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i\left((n-i)(n+i+1)\right)P_i(x) = 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i P_i(x) \tag{8.5}$$

Со изедначување на коефициентите пред $P_i(x)$, добиваме: $c_i = \frac{(2i+1)\left[1-(-1)^{n-i}\right]}{(n-i)(n+i+1)}$, $i = 0,1,\cdots,n-1$. Забележуваме дека $c_i = 0$ ако $n-i$ е парен број. Со смената $n-i = 2k+1,\ k = 0,1,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$, добиваме :

$$c_{n-2k-1} = \frac{(2n-4k-1)\cdot 2}{(2k+1)(2n-2k-1+1)} = \frac{2n-4k-1}{(2k+1)(n-k)}$$

Така

$$W_{n-1}(x) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(2n-4s-1)}{(2s+1)(n-s)} P_{n-2s-1}(x). \qquad \blacksquare$$

Првите неколку функции Q_n се:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,$$

$$Q_1(x) = P_1(x)Q_0(x) - P_0(x),$$

$$Q_2(X) = P_2(x)Q_0(x) - \frac{3}{2}P_1(x)$$

$Q_3(x) = P_3(x)Q_0(x) - \frac{5}{3}P_1(x) - \frac{1}{6}P_0(x)$ итн.

4. Придружени Лежандрови функции

Дефиниција 3. Обичната диференцијална равенка

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0 \tag{3}$$

каде што n и m се дадени константи, е позната како *''Придружена Лежандрова равенка".*

Теорема 9. Ако m е позитивен а n ненегативен цел број, тогаш функциите

$$P_n^m(x) = (-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m} \tag{9.1}$$

$$Q_n^m(x) = (-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m} \tag{9.2}$$

се линеарно независни решенија на придружената Лежандрова равенка.

Доказ: Ако Лежандровата диференцијална равенка $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$ ја диференцираме m-пати, добиваме:

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - 2(1+m)x\frac{d}{dx} + (n-m)(n+m+1)\right]\frac{d^my}{dx^m} = 0 \tag{9.3}$$

Со смената $\frac{d^my}{dx^m} = (-1)^m\left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}}z$, од (9.3) добиваме:

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}\right]z = 0 \tag{9.4}$$

Бидејќи функциите $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ се линеарно независни решенија на Лежандровата диференцијална равенка, можеме да заклучиме дека функциите $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ дефинирани во (9.1) и (9.2) се линеарно независни решенија на придружената Лежандрова диференцијална равенка (9.4). ■

Функциите $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ се викаат *придружени Лежандрови функции со степен n и ред m, од прв и втор вид.*

Ако $m=0$, тогаш имаме $P_n^m(x)=P_n(x)$ *и* $Q_n^m(x)=Q_n(x)$.

Да забележиме дека ако $m>n$ тогаш имаме $P_n^m(x)=0$. Ако $m=n$, тогаш

$$P_m^m(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_m(x)}{dx^m}=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{m!2^m}(2m)!=$$

$$=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}(2m-1)!! \tag{4}$$

Теорема 10. Придружените Лежандрови функции од прв вид $P_n^m(x)$, за фиксна вредност на ненегативниот цел број m, се ортогонални на сегментот $[-1,1]$, т.е. важи

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_r^m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{n,r} \tag{10.1}$$

каде што $\delta_{n,r}=\begin{cases}0, n=r\\ 1, n\neq r\end{cases}$.

Доказ: Придружените Лежандрови функции од прв вид $P_n^m(x)$ и $P_r^m(x)$ се решенија на придружената Лежандрова диференцијална равенка, па важи:

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1+x^2}\right\}\right]P_n^m(x)=0 \tag{10.2}$$

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1+x^2}\right\}\right]P_r^m(x)=0 \tag{10.3}$$

Ако од равенката (10.2) помножена со $P_r^m(x)$, ја одземеме (10.3) помножена со $P_n^m(x)$, ќе добиеме:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left\{P_r^m(x)\frac{dP_n^m(x)}{dx}-P_n^m(x)\frac{dP_r^m(x)}{dx}\right\}\right]+$$

$$+(n-r)(n+r+1)P_n^m(x)P_r^m(x)=0 \tag{10.4}$$

Ако $n\neq r$, интегрирајќи ја (10.4) по x во граници од $x=-1$ до $x=1$, добиваме

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_r^m(x)dx=0 \tag{10.5}$$

Нека сега $n=r$. За да покажеме дека

$$I_{n,m}=\int_{-1}^{1}P_n^m(x)^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

ќе ја искористиме рекурентната релација (види задача 9):

$$I_{n,m+1}=(n-m)(n+m+1)I_{n,m} \tag{10.6}$$

Така, имаме:

$$I_{n,m}=(n-m+1)(n+m)(n-m+2)(n+m-1)\cdots n(n+1)I_{n,0}=\frac{n!}{(n-m)!}\frac{(n+m)!}{n!}\frac{2}{2n+1}$$

■

5. Задачи

1. Да се пресмета нормата $\|P_n\|$ на полиномот $P_n(x)$.

Решение: Ќе ја примениме рекурентната релација (1) од теоремата 4.

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0,\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1}$$

Бидејќи системот Лежандрови полиноми е ортогонален, имаме:

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)^2\,dx \qquad (1.2)$$

Ако во (1.1) наместо n ставиме $n-1$, потоа ја помножиме со $P_n(x)$ и интегрираме по x во граници од $x=-1$ до $x=1$, ќе добиеме:

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,dx + \frac{n-1}{2n-1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_n(x)dx$$

$$= \frac{n}{2n-1}\int_{-1}^{1} P_n(x)dx \qquad (1.3)$$

Од (1.2) и (1.3) ја добиваме рекурентната релација

$$I_n = \frac{2(n-1)+1}{2n+1} I_{n-1}, \qquad n = 1,2,\cdots \qquad (1.4)$$

каде што $I_n = \int_{-1}^{1} P_n(x)^2\,dx$. Така,

$$I_n = \frac{2(n-1)+1}{2n+1} I_{n-1} = \cdots = \frac{2(n-1)+1}{2n+1}\cdot\frac{2(n-2)+1}{2(n-1)+1}\cdots\frac{2(n-n)+1}{2(n-n+1)+1} I_0 = \frac{2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\,. \quad \bullet$$

2. Покажи дека секој полином со степен n е линеарна комбинација на Лежандровите полиноми $P_0, P_1, \cdots P_n$.

3. Да се развијат во ред по Лежандрови полиноми следните функции:

а) $f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x - 1$ б) $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Решение: а) Нека $f(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + c_3P_3(x)$. Тогаш,

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx = \frac{2k+1}{2}\cdot\frac{1}{2^k k!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2-1\right)^k dx\,.$$

Добиваме дека $c_0 = -3;$ $c_1 = 0;$ $c_2 = -4;$ $, c_3 = 2$.

$\Rightarrow f(x) = -3 - 4P_2(x) + 2P_3(x)$. ■

4. Нека функцијата $F_n(x)$ е дефинирана на следниот начин: $F_n(x)$ е полином со степен n, $F_n(1)=1$ и $\int_{-1}^{1} F_m(x)F_n(x)dx = 0, \quad (m \neq n)$. Со математичка индукција или на друг начин покажи дека $F_n(x)$ е Лежандров полином.

Решение: Според последицата на теоремата 17 од првиот дел (стр 42), постојат $\alpha_k \in \mathbf{R}$ такви што $F_k(x) = \alpha_k P_k(x)$. Притоа, $F_k(1) = \alpha_k P_k(1)$ т.е. $\alpha_k = 1$. ■

5. Да се определат $P_m'(1)$ и $P_m'(-1)$.

Решение: Ако во Лежандровата диференцијална равенка ставиме $x=1$ и $x=-1$, ќе добиеме $P_m'(1) = \frac{m(m+1)}{2}$ и $P_m'(-1) = (-1)^{m-1}\frac{m(m+1)}{2}$. ●

6. Ако природните броеви m и n, $(n \geq m)$, се со иста парност, да се покаже дека тогаш $\int P_n'(x)P_m'(x)dx = m(m+1)$.

Решение: Ги користиме фактот дека броевите m и n се со иста парност и резултатот од задачата 5 и добиваме:

$$I = \int_{-1}^{1} P_n'(x)P_m'(x)dx = \left[P_n(x)P_m'(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_m''(x)P_n(x)dx \right] = P_n(1)P_m'(1) -$$

$$-P_n(-1)P_m'(-1) = 1 \cdot \frac{m(m+1)}{2} - (-1)^m(-1)^{m-1}\frac{m(m+1)}{2} = m(m+1). \;\bullet$$

7. За Лежандровиот полином $P_n(x)$ да се пресмета $\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx$.

Резултат: $\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ ●

8. Да се одредат коефициентите a_k, $(k = 0,1,\cdots,n)$ такви што $x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$

Решение: $a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} x^n P_k(x)dx = \frac{2k+1}{2}\cdot\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot\binom{n}{k}\int_{-1}^{1} x^{n-k}\left(x^2-1\right)^k dx$

$$a_k = \begin{cases} 0, & n-k \quad \text{непарно} \\ \dfrac{(2k+1)2^k n!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!(n+k+1)!}, & n-k \quad \text{парно} \end{cases} \quad \bullet$$

9. Да се докаже рекурентната релација: $\int_{-1}^{1} P_n^{m+1}(x)^2 dx = (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} P_n^m(x)^2 dx$ каде што $P_n^m(x)$ е придружена Лежандрова функција од прв вид.

Решение: Поаѓаме од $\frac{dP_n^m(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}P_n^{m+1}(x) - \frac{mx}{1-x^2}P_n^m(x)$, ја квадрираме и интегрираме по x во граници од $x=-1$ до $x=1$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{m+1}(x)^2 dx = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\frac{dP_n^m(x)}{dx}\frac{dP_n^m(x)}{dx}dx + 2m\int_{-1}^{1} xP_n^m(x)\frac{dP_n^m(x)}{dx}dx +$$

$$+ m^2\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1-x^2}P_n^m(x)^2 dx = \left[n(n+1) - m^2 - m\right]\int_{-1}^{1} P_n^m(x)^2 dx.$$

По парцијална интеграција и примена на придружената Лежандрова диференцијална равенка добиваме дека . $I_n^{m+1} = (n-m)(n+m+1)I_n^m$

каде што $I_n^m(x) = \int_{-1}^{1} P_n^m(x)^2 dx$. ●

10. Да се докаже дека придружените Лежандрови функции од прв вид $P_n^m(x)$ се ортогонални на сегментот $\left[-1,1\right]$ со тежина $\frac{1}{1-x^2}$, т.е. дека

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x^2}P_n^m(x)P_n^k(x)dx = 0, \qquad \left(m \neq k\right), \left(m,k = 0,1,\cdots n\right).$$

Решение: За $P_n^m(x)$ и $P_n^k(x)$ важи:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n^m(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n^m(x)}{dx}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_n^m(x)=0 \qquad (10.1)$$

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n^k(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n^k(x)}{dx}+\left(n(n+1)-\frac{k^2}{1-x^2}\right)P_n^k(x)=0 \qquad (10.2)$$

Ако од првата равенка помножена со $P_n^k(x)$ ја извадиме втората помножена со $P_n^m(x)$ а потоа интегрираме по x во граници од $x=-1$ до $x=1$, добиваме

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(P_n^k(x)\frac{dP_n^m(x)}{dx}-P_n^m(x)\frac{dP_n^k(x)}{dx}\right)\right]dx=$$

$$=(m-k)(m+k)\int_{-1}^{1}\frac{P_n^k(x)P_n^m(x)}{1-x^2}dx \qquad (10.3)$$

Бидејќи левата страна од последното равенство е 0 и $m\neq k$, заклучуваме дека $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x^2}P_n^m(x)P_n^k(x)dx=0$. ●

Во задачите 11-15 да се докажат рекурентните релации за придружените Лежандрови функции од прв вид $P_n^m(x)$.

11. $\sqrt{1-x^2}P_n^{m+1}(x)=2mxP_n^m(x)-(n+m)(n-m+1)\sqrt{1-x^2}P_n^{m-1}(x)$

Упатство: Лежандровата диференцијална равенка ја диференцираме $m-1$ пат, а потоа множиме со $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$. ●

12. $P_{n-1}^m(x)=xP_n^m(x)-(n-m+1)\sqrt{1-x^2}P_n^{m-1}(x)$

Упатство: Да се искористи рекурентната формула (4.9) – теорема 4. ●

13. $(2n+1)xP_n^m(x)-(n-m+1)P_{n+1}^m(x)-(n+m)P_{n-1}^m(x)=0$

Упатство: Се користат релациите (4.4) и (4.9) – теорема 4. ●

14. $P_{n+1}^m(x)=xP_n^m(x)+(n+m)\sqrt{1-x^2}P_n^{m-1}(x)$

Упатство: Да се искористат задачите 12. и 13. ●

15. $\sqrt{1-x^2}P_n^{m+1}(x)=(n+m+1)xP_n^m(x)-(n-m+1)\sqrt{1-x^2}P_{n+1}^m(x)$

16. $\left(1-x^2\right)\dfrac{d}{dx}P_n^m(x)=\left(n+1\right)xP_n^m(x)-(n-m+1)P_{n+1}^m(x)$

17. Да се пресмета интегралот $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{1-x^2}P_n^m(x)^2\,dx$.

Резултат: $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{1-x^2}P_n^m(x)^2\,dx=\dfrac{1}{m}\dfrac{\left(n+m\right)!}{\left(n-m\right)!}$. ●

III ГЛАВА
ПОЛИНОМИ НА ЧЕБИШЕВ

1. Дефиниција и некои основни својства

Дефиниција1. Полиномот

$$T_0(x) = 1$$

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r (n-r-1)!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}\ ,\ \ n \geq 1 \qquad (1)$$

се вика *Чебишев полином од степен* n.

Чебишевиот полином T_n го има и следниот облик:

$$T_n(x) = (-1)^n 2^n \frac{n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \qquad (1')$$

Формулата (1') ќе ја докажеме подоцна. Таа се вика Родригезова формула за Чебишевиот полином.

Првите неколку Чебишеви полиноми се:

$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$,

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$,

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ итн.

Се покажува, слично како кај Лежандровите полиноми , и

Теорема 1. За функцијата $G(t) = \left(1-t^2\right)\cdot\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}$, за $|t| < 1$ важи развојот:

$$\left(1-t^2\right)\cdot(1-2xt+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) t^n \qquad (1.1)$$

каде што $a_0 = 1$ и $a_n = 2,\ \ n \geq 1$. ❑

Функцијата $G(t) = \left(1-t^2\right)\cdot\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}$ се вика *генератрисна функција* на Чебишевите полиноми.

Да забележиме дека за $|x| \leq 1$ полиномот $T_n(x)$ може да го има и обликот

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{1''}$$

Ако ја развиеме функцијата $G(t)$ во околина на $t = 0$ и воведеме смена $x = \cos\theta$, добиваме:

$$\frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos\theta + t^2} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{in\theta} - \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-in\theta} = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos n\theta =$$

$$= 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos(n \arccos x) \tag{2}$$

Со споредување на (2) и (1.1), добиваме (1'').

Понатаму ќе докажеме некои рекурентни релации што важат за Чебишевите полиноми.

Теорема 2. За Чебишевите полиноми важат следните рекурентни релации:

1. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
2. $2T_m(x)T_n(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x)$, $\quad n \geq m$
3. $(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$

Доказ: 1. Поаѓаме од идентитетот

$$\cos(n+1)a + \cos(n-1)a = 2\cos na \cos a$$

Со смената $a = \arccos x$, добиваме

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{2.1}$$

2. Индукција по m.

$$T_{n+(m+1)}(x) + T_{n-(m+1)} = 2xT_{n+m}(x) - T_{n+m-1}(x) + 2xT_{n=m}(x) - T_{n-m+1}(x) =$$

$$= 2x(T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x)) - (T_{n+(m-1)}(x) + T_{n-(m-1)}(x)) =$$

$$= 2x \cdot 2T_m(x)T_n(x) - 2T_{m-1}(x)T_n(x) =$$

$$= 2T_n(x)(2xT_m(x) - T_{m-1}(x)) =$$

$$= 2T_{m+1}(x)T_n(x).$$

3. Диференцираме (1'') и добиваме:

$$T_n'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x),$$

$$T_n''(x) = -\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arccos x) + \frac{nx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Со елиминирање на $\sin(n\arccos x)$ и $\cos(n\arccos x)$ од горните равенки, добиваме:

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0 \qquad (2.3)\ \blacksquare$$

Да забележиме дека од релацијата (2.1) можеме лесно да ги добиеме Чебишевите полиноми. Исто така, од (2.3) заклучуваме дека Чебишевиот полином е едно партикуларно решение на линеарната диференцијална равенка од втор ред $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$, n е ненегативен цел број, која е позната како *Чебишева диференцијална равенка*.

2. Чебишева функција од втор вид

Друго партикуларно решение на Чебишевата диференцијална равенка е:

$$U_n(x) = \sin(n\arccos x) \qquad (3)$$

Функцијата $U_n(x)$ ја викаме Чебишева функција од втор вид.

Функцијата $U_n(x)$ може да се претстави како :

$$U_0(x) = 0$$

$$U_n(x) = 2^{n-1}\sqrt{1-x^2}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^r(n-r-1)!}{2^{2k}r!(n-2r-1)!}x^{n-2r-1}, \quad n \geq 1 \qquad (3')$$

Првите неколку Чебишеви функции од прв вид се:

$U_0(x) = 0$, $\quad U_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\quad U_2(x) = \sqrt{1-x^2}\cdot 2x$,

$U_3(x) = \sqrt{1-x^2}\left(4x^2-1\right)$ итн.

Теорема 3. За Чебишевите функции од втор вид важат следните рекурентни релации:

1. $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$

2. $T_n'(x) = \dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}} U_n(x)$

3. $U_n'(x) = -\dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)$

Доказ: Му се остава на читателот како вежба. ■

Со помош на Чебишевата диференцијална равенка, ќе покажеме дека важи Родригезовата формула (1'') за Чебишевите полиноми. Имено, се покажува дека функцијата $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ е едно партикуларно решение на Чебишевата диференцијална равенка. Општото решение на Чебишевата диференцијална равенка е $y = C_1T_n(x) + C_2U_n(x), \quad (-1 \le x \le 1)$, Бидејќи $T_n(x)$ е полином, а Чебишевата функција од втор вид не е, заклучуваме дека $T_n(x) = C\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ каде што C е константа што треба да ја одредиме: $1 = T_n(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} C\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = C(-1)^n(2n-1)!!$

$\Rightarrow C = \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!!} = (-1)^n \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

Слично, можеме да покажеме дека Родригезовата формула за Чебишевата функција од втор вид е: $U_n(x) = (-1)^{n-1} 2^n n \dfrac{n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}$.

2. Ортогоналност на Чебишевите полиноми

Теорема 4. Системот Чебишеви полиноми $\{T_n(x) : n = 0,1,2\cdots\}$ е ортогонален (не и ортонормиран) на интервалот $(-1,1)$ со тежина $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi/2 & m=n\neq 0,\qquad (m,n=0,1,2\cdots)\\ \pi & m=n=0\end{cases}$$

(4.1)

Доказ: Воведуваме смена $x=\cos t$, па имаме:

$$\int_{-1}^{1}T_m(x)T_n(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{0}^{\pi}\cos(mt)\cos(nt)dt=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi/2 & m=n\neq 0\\ \pi & m=n=0\end{cases}. \qquad \blacksquare$$

Слично се покажува и

Терема 5. Системот Чебишеви функции од втор вид $\{U_n(x):n=0,1,2\cdots\}$ е ортогонален (не и ортонормиран) на интервалот $(-1,1)$ со тежина $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}U_m(x)U_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi/2 & m=n\neq 0,\quad (m,n=0,1,2\cdots)\\ 0 & mn=0\end{cases} \qquad (5.1)$$

4. Задачи

1. Да се покаже дека е точно $x^mT_n(x)=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}T_{|n+m-2k|}(x)$

Решение: Ако релацијата (2.1)- теорема 2 ја помножиме со x , добиваме:

$$x^2T_n(x)=\frac{1}{2}\left(xT_{n+1}(x)+xT_{n-1}(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(T_{n+2}(x)+2T_n(x)+T_{n-2}(x)).$$

Продолжувајќи ја постапката, доаѓаме до бараното равенство. ●

2. Да се докаже равенството:

$$T_{n+1}(x)T_n(x)=2x\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}T_k(x)^2+(-1)^n x.$$

Упатство: Релацијата (2.1)- теорема 2 ја множиме со $(-1)^{n-k}T_k(x)$ за $k=1,2,\cdots,n$ а потоа ги собираме така добиените равенства. ●

3. Да се докаже равенството $\frac{d}{dx}T_{2n}(x) = 4n\sum_{k=0}^{n-1} T_{2k+1}(x)$.

Решение: $\frac{d}{dx}T_{2n}(x) = \frac{2n(-\sin(2n\arccos x))}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n}{\sqrt{1-x^2}}U_{2n}(x)$. Нека $t = \arccos x$, тогаш $\frac{d}{dx}T_{2n}(x) = \frac{2n\sin(2nt)}{\sin t}$. Ако ги собереме тригонометриските равенки:

$$\sin 2nt - \sin(2n-2)t = 2\cos(2n-1)t \cdot \sin t$$

$$\sin(2n-2)t - \sin(2n-4)t = 2\cos(2n-3)t \cdot \sin t$$

$$\vdots$$

$$\sin 2t = 2\cos t \cdot \sin t$$

добиваме:
$$\sin 2nt = 2\sin t\sum_{k=0}^{n-1} T_{2k+1}(x)$$
т.е.

$\frac{d}{dx}T_{2n}(x) = \frac{2n\sin(2nt)}{\sin t} = 4n\sum_{k=0}^{n-1} T_{2k+1}(x)$. ●

4. Да се докажат равенствата

а) $T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x)$

б) $2T_n(x)^2 = 1 + T_{2n}(x)$

в) $\sqrt{1-x^2}\,T_n(x) = U_{n+1}(x) - xU_n(x)$

г) $\sqrt{1-x^2}\,U_n(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x)$

5. Да се провери:

$T_{-n}(x) = T_n(x)$; $U_{-n}(x) = -U_n(x)$; $T_n(1) = 1$; $T_n(-1) = (-1)^n$; $T_{2n}(0) = (-1)^n$;

$T_{2n+1}(0) = 0$; $U_n(1) = 0$; $U_n(-1) = 0$; $U_{2n}(0) = 0$; $U_{2n+1}(0) = (-1)^n$

6. Да се покаже дека Чебишевиот полином $T_n(x)$ има n различни реални нули и сите лежат во интервалот $(-1,1)$.

IV ГЛАВА
ПОЛИНОМИ НА ХЕРМИТ

1. Дефиниција и некои основни својства

Дефиниција1. Полиномот

$$H_n(x) = n!\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k} \tag{1}$$

односно

$$H_n(x) = n!\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k 2^{n-2k}}{k!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{1'}$$

се вика *Хермитски полином од степен* n.

Првите неколку Хермитски полиноми се:

$H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$, $H_3(x)=8x^3-12x$, , итн,

Теорема 1. За функцијата $f(t)=e^{2tx-t^2}$, $x\in\mathbf{R}$ важи развојот:

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad t\in\mathbf{R}, \tag{1.1}$$

Доказ: $f(t)=e^{2tx-t^2} = e^{2tx}e^{-x^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(tx)^n}{n!}\right)\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\right)=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}n!\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{2^{n-2k}(-1)^k}{k!(n-2k)!}x^{n-2k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}\ . \ \blacksquare$$

Функцијата $f(t)$ се вика *генератрисна* функција на Хермитските полиноми.

Ќе покажеме сега дека полиномот $H_n(x)$ го има и следниот облик:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \tag{1''}$$

Навистина, се покажува дека

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}(e^{\left(-(x-t)^2\right)}) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{\left(-(x-t)^2\right)})$$

За фиксно x, Тајлоровиот ред на функцијата e^{2tx-t^2} во околина на точката $t = 0$, кој е конвергентен за секое конечно t, гласи:

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{2tx-t^2})\Big|_{t=0} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{x^2}(\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{(-(x-t)^2)})\Big|_{t=0} \frac{t^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{x^2}(\frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{(-(x-t)^2)})\Big|_{t=0} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{-x^2} \frac{t^n}{n!} \tag{2}$$

Ако ги спредиме (2) и (1.1), добиваме дека е точно (1'')

Формулата (1'') се вика *Родригезова формула за Хермитските полиноми*.

Теорема 2. За Хермитските полиноми важат следните рекурентни релации:

1. $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$
2. $2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$
3. $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$.

Доказ: 1. Ако ги диференцираме по x двете страни на релацијата (1.1), добиваме:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Ги изедначуваме коефициентите пред t^n и добиваме:

$$H'_0(x) = 0$$

За $n \geq 1$,

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{2.1}$$

2. Ако ги диференцираме по t двете страни на релацијата (1.1), добиваме:

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2xH_n(x)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} 2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Ги изедначуваме коефициентите пред t^n, добиваме $2xH_0(x) = H_1(x)$ а за $n \geq 1$ имаме:

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x). \tag{2.2}$$

3. Со елиминирање на $H_{n-1}(x)$ од (2.1) и (2.2) , добиваме:

$$2xH_n(x) = H'_n(x) + H_{n+1}(x) \tag{2.3}$$

Ја диференцираме по x релацијата (2.3) и добиваме:

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{2.4}$$ ■

Дефиниција 2. Обичната диференцијална равенка од втор ред

$$xy'' - 2xy' + 2\nu y = 0$$

каде што ν е реална или комплексна константа се вика *Хермитска диференцијална равенка*.

Од (2.4) можеме да заклучиме дека Хермитскиот полином $H_n(x)$ е партикуларно решение на Хермитската диференцијална равенка $xy'' - 2xy' + 2ny = 0$, кога $\nu = n$ е ненегативен цел број.

2. Хермитска функција. Ортогоналност на Хермитските полиноми

Дефиниција 3. Функцијата

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

се вика Хермитска функција со степен n.

Со директна примена на теоремата 2 и со користење на Родригезовата формула (1') лесно се покажува:

Теорема 3. Хермитските функции $\psi_n(x)$ ги задоволуваат следните рекурентни релации:

1. $2n\psi_{n-1}(x) = x\psi_n(x) + \psi'_n(x)$ (3.1)

2. $2x\psi_n(x) = 2n\psi_{n-1}(x) + \psi_{n+1}(x)$ (3.2)

3. $\psi'_n(x) = x\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)$ (3.3)

4. $\psi_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ (3.4)

Доказ: Се остава на читателот. ■

Теорема 4. Множеството Хермитски функции $\{\psi_n(x) : n = 0,1,2\cdots\}$ е ортогонално на интервалот $(-\infty,\infty)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn} \qquad (m,n = 0,1,2\cdots) \tag{4.1}$$

Доказ: Нека $m \le n$.

$$I_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}dx .$$

Ако примениме парцијална интеграција m пати и ја искористиме релацијата (2.1) теорема 2, добиваме:

$$I_{mn} = (-1)^{n+m} 2^m m!\int_{-\infty}^{\infty} H_0(x)\frac{d^{n-m}(e^{-x^2})}{dx^{n-m}}dx \tag{4.2}$$

Ако $m < n$, со уште една парцијална интеграција, добиваме $I_{mn} = 0$.

Ако $m = n$, тогаш од (4.2) имаме $I_{mn} = 2^n n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$. ■

Последица 1. Множеството Хермитски полиноми $\{H_n(x) : n = 0,1,2\cdots\}$ е ортогонално во интервалот $(-\infty,\infty)$ со тежина e^{-x}, т.е.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} H_m(x)H_n(x)dx = (n!)^2 \delta_{mn} \qquad (m,n = 0,1,2\cdots)$$

Последица 2. Множеството функции $\{\chi_n(x) : n = 0,1,2\cdots\}$ каде што $\chi_n(x) = \dfrac{\psi_n(x)}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}\pi^{\frac{1}{4}}}$, е ортонормирано множество на интервалот $(-\infty,\infty)$.

3. Задачи

1. Да се покаже дека за Хермитската функција $\psi_n(x)$ важи рекурентната релација

$$I_{n,n} = 2nI_{n-1,n-1}$$

каде што $I_{n,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)^2\, dx$.

Упатство: Да се искористат рекурентните релации (3.2) и (3.4)-теорема 3 и ортогоналноста на Хермитските функции на интервалот $(-\infty,\infty)$. ❑

2. Ако $m < n$, докажи дека $\dfrac{d^m}{dx^m} H_n(x) = \dfrac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x)$.

3. Пресметај $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^n H_m(x) dx$.

4. Да се развие функцијата $f(x) = x^n, n \in \mathbf{N}$ во ред од Хермитски полиноми.

V ГЛАВА

ПОЛИНОМИ НА ЛАГЕР

1. Дефиниција и некои основни својства

Дефиниција 1. Полиномот

$$L_n(x) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k!} x^k \tag{1}$$

$$= (n!)^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 (n-k)!} x^k \tag{1'}$$

се вика *Лагеров полином од степен* n.

Ќе покажеме дека полиномот $L_n(x)$ го има и следниот облик:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) \tag{1''}$$

Го користиме Лајбницовото правило за диференцирање на производ на две функции на функцијата $x \mapsto x^n e^{-x}$ и добиваме:

$$e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k!} x^k .$$

Формулата (1'') се вика Родригезова формула.

Првите неколку Лагерови полиноми се:

$L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = 2 - 4x + x^2$,

$L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$, $L_4(x) = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4$,

$L_5(x) = 120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5$, итн.

Теорема 1. За функцијата $f(t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$, $x \in \mathbf{R}$ важи развојот:

$$\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t|<1, \tag{1.1}$$

Доказ: Функцијата $f(t)=\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}$, $x\in\mathbf{R}$ има сингуларитет $t=1$. Затоа, може да се развие во Тајлоров ред (1.2) во околина на точката $t=0$. Редот конвергира во околината $|t|<1$:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)_{t=0}\frac{t^n}{n!} \tag{1.2}$$

Ќе покажеме дека $L_n(x)=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)_{t=0}$. Навистина,

$$\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}=\frac{1}{1-t}e^{-\frac{x(1-t)-x}{1-t}}=\frac{e^x}{1-t}e^{-\frac{x}{1-t}}=\frac{e^x}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{x^k}{(1-t)^k}=e^x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{(1-t)^{k+1}k!}$$

За $|t|<1$, можеме почлено да диференцираме. Добиваме:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)_{t=0}=e^x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{k!}x^k \tag{1.3}$$

Од друга страна,

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right)=e^x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{k!}x^k \tag{1.4}$$

Со споредување на (1.3) и (1.4) , добиваме (1.1). ■

Функцијата $f(t)$ се нарекува *генератрисна* функција на Лагеровите полиноми.

Понатаму ќе докажеме некои рекурентни релации што важат за Лагеровите полиноми.

Теорема 2. За Лагеровите полиноми важат следните рекурентни релации:

1. $L_{n+1}(x)+(x-2n-1)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0$
2. $nL_{n-1}(x)+L_n'(x)-nL_{n-1}'(x)=0$
3. $xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$

Доказ: 1. Ако ги диференцираме по t двете страни на релацијата (1.1), добиваме

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} = (1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Ги изедначуваме коефициентите пред t^n , па добиваме:

$$L_1(x) - (1-x)L_0(x) = 0$$

$$L_2(x) + (x - 2\cdot 1 - 1)L_1(x) + L_0(x) = 0$$

За $n \geq 2$, $$L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \qquad (2.1)$$

2. Ако ги диференцираме по x двете страни на релацијата (1.1), добиваме

$$-\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} L_n'(x)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_n'(x)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)L_n(x)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Ги изедначуваме коефициентите пред t^n , па за $n \geq 1$ добиваме:

$$L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x) = 0\,. \qquad (2.2)$$

3. Ја диференцираме по x два пати релацијата (2.1). Добиваме:

$$L_{n+1}''(x) + (x - 2n - 1)L_n''(x) + 2L_n'(x) + n^2 L_{n-1}''(x) = 0$$

Ако наместо n ставиме $n+1$, ќе добиеме:

$$L_{n+2}''(x) + (x - 2n - 3)L_{n+1}''(x) + 2L_{n+1}'(x) + (n+1)^2 L_n''(x) = 0 \qquad (2.3)$$

Од идентитетот (2.2) добиваме:

$$L_{n+1}'(x) = (n+1)(L_n'(x) - L_n(x))$$

$$L_{n+1}''(x) = (n+1)(L_n''(x) - L_n'(x))$$

$$L_{n+2}'(x) = (n+2)(L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x))$$

$$L_{n+2}''(x) = (n+2)(L_{n+1}''(x) - L_{n+1}'(x))$$

$$\Rightarrow L_{n+2}''(x) = (n+2)((n+1)(L_n''(x) - L_n'(x)) - (n+1)(L_n'(x) - L_n(x)))$$

$$L''_{n+2}(x) = (n+2)(n+1)(L''_n(x) - 2L'_n(x) + L_n(x)).$$

Заменуваме во (2.3) и добиваме

$$(n+2)(n+1)(L''_n(x) - 2L'_n(x) + L_n(x)) + (x - 2n - 3)(n+1)(L''_n(x) - L'_n(x)) +$$

$$+ 2(n+1)(L'_n(x) - L_n(x)) + (n+1)^2 L''_n(x) = 0$$

т.е.

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0. \qquad (2.4) \blacksquare$$

Дефиниција 2. Обичната диференцијална равенка од втор ред

$$xy'' + (1-x)y' + \nu y = 0 \qquad (2)$$

каде што ν е реална или комплексна константа е позната како *Лагерова диференцијална равенка.*

Од (2.4) можеме да заклучиме дека Лагеровиот полином $L_n(x)$ е партикуларно решение на Лагеровата диференцијална равенка $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$, кога $\nu = n$ е ненегативен цел број.

2. Лагерова функција. Ортогоналност на Лагеровите полиноми

Дефиниција 3. Функцијата

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n!} e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$$

се вика Лагерова функција.

Теорема 3. Множеството Лагерови функции $\{\phi_n(x) : n = 0,1,2\cdots\}$ е ортонормирано во интервалот $(0,\infty)$, т.е.

$$\int_0^\infty \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \delta_{mn}, \qquad (m,n = 0,1,2\cdots) \qquad (3.1)$$

Доказ: Применувајќи m пати парцијална интеграција, се покажува дека за $n > m$:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x)dx = \int_0^{\infty} x^m \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} dx = (-1)^m m! \int_0^{\infty} \frac{d^{n-m}(x^n e^{-x})}{dx^{n-m}} dx = 0 \qquad (3.2)$$

$L_m(x)$ е полином со степен m, па може да се претстави како $L_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$. Користејќи го резултатот (3.2), имаме $\frac{1}{n!m!}\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)dx = 0$ ако $n > m$. Јасно е дека го имаме истиот заклучок и ако $n < m$, т.е. имаме:

$$\frac{1}{n!m!}\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)dx = 0 \quad \text{ако} \quad m \neq n \qquad (3.3)$$

Ако $m = n$, тогаш:

$$\frac{1}{(n!)^2}\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x)^2 dx = \frac{1}{(n!)^2}\int_0^{\infty} \frac{d^n\left(x^n e^{-x}\right)}{dx^n}\left[n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n!}{i!(n-i)!i!} x^i\right]dx =$$

$$= \frac{1}{(n!)^2}\int_0^{\infty} \frac{d^n\left(x^n e^{-x}\right)}{dx^n}\left[n!\frac{(-1)^n n!}{n!(n-n)!n!} x^n\right]dx =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\int_0^{\infty} x^n \frac{d^n\left(x^n e^{-x}\right)}{dx^n} dx =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = 1 .$$

Применивме парцијална интеграција n пати. ■

Последица 1. Множеството Лагерови полиноми $\{L_n(x) : n = 0,1,2\cdots\}$ е ортогонално во интервалот $(0,\infty)$ со тежина e^{-x}, т.е.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)dx = (n!)^2 \delta_{mn}, \qquad (m,n = 0,1,2\cdots)$$

3. Придружени Лагерови полиноми и функции

Дефиниција 4. Функцијата

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$$

се вика *придружена Лагерова функција*.

Дефиниција 5. Обичната диференцијална равенка:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (m-1-x)\frac{dy}{dx} + (n-m)y = 0 \tag{3}$$

се вика *"придружена Лагерова диференцијална равенка".*

Теорема 4. Придружената Лагерова функција е едно решение на придружената Лагерова диференцијална равенка.

Доказ: Ако Лагеровата диференцијална равенка (2) ја диференцираме m пати, добиваме

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (m-1-x)\frac{d}{dx} + (n-m)\right]\frac{d^m y}{dx^m} = 0. \tag{4.1}$$

Со смената $\dfrac{d^m y}{dx^m} = z$, од (4.1) ја добиваме придружената Лагерова диференцијална равенка (3).

Бидејќи $L_n(x)$ е партикуларно решение на Лагеровата диференцијална равенка, можеме да заклучиме дека придружената Лагерова функција е решение на придружената Лагерова диференцијална равенка. ■

4. Задачи

1. Да се покаже дека за Лагеровите полиноми важи равенството:

$$L_n(x)L_{n+1}(x) = (n!)^2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{2k+1-x}{(k!)^2} L_k(x)^2$$

Решение: Рекурентната релација (2.1) - теорема 2,

$L_{k+1}(x)+(x-2k-1)L_k(x)+k^2L_{k-1}(x)=0$, $\quad k=0,1,2,\cdots,n$ ќе ја помножиме со $\frac{(-1)^{n-k}}{(k!)^2}L_k(x)$, а потоа ќе ги собереме така добиените равенства. ●

2. Да се претстави полиномот $L_n(\lambda x)$ како линеарна комбинација на Лагеровите полиноми.

Решение: Треба да ги одредиме коефициентите a_k, $k=0,1,\cdots,n$ во развојот $L_n(\lambda x)=\sum_{k=0}^{n}a_kL_k(x)$. Користејќи го својството на ортогоналност на Лагеровите полиноми во интервалот $(0,\infty)$ со тежина e^{-x}, добиваме $a_m=\frac{1}{(m!)^2}\int_0^\infty e^{-x}L_n(\lambda x)L_m(x)dx=\frac{n!}{m!}\binom{n}{m}(1-\lambda)^{n-m}\lambda^m$.

Според тоа, важи развојот $L_n(\lambda x)=n!\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1-\lambda)^{n-m}\lambda^m\frac{L_m(x)}{m!}$. ●

III ДЕЛ

БЕСЕЛОВИ ФУНКЦИИ И БЕСЕЛОВИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

1. Дефиниција и некои основни својства

Дефиниција1: Функцијата $J_\nu(x)$ дефинирана со релацијата

$$J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(\nu + r + 1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu} \tag{1}$$

каде што ν е реален број и Γ е гама функција, ја викаме *Беселова функција од прв вид со индекс "ν".*

Во случај кога ν е цел број, за индексот ја користриме ознаката "n".

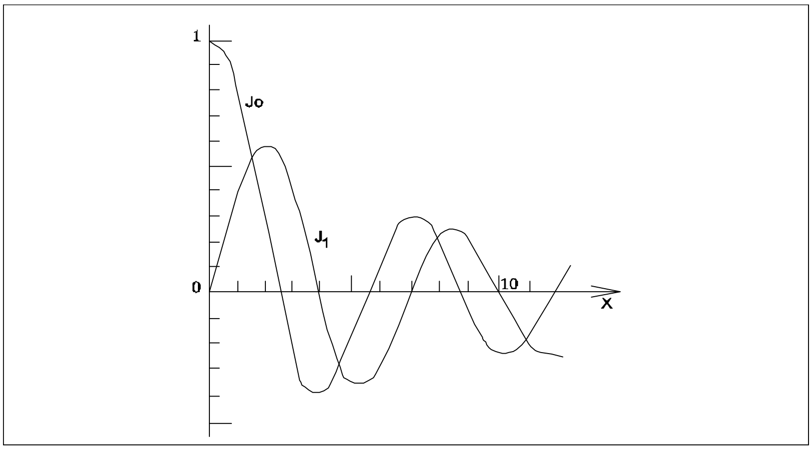
Со Даламберовиот критериум можеме да заклучиме дека редот (1) конвергира за сите вредности на x. Затоа можеме почлено да го диференцираме и интегрираме.

На сл. 1 се дадени графиците на функциите

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \cdots$$

Да напоменеме дека графикот на функцијата $J_0(x)$ во извесна смисла е сличен на косинусоидата, а графикот на функцијата $J_1(x)$-на синусоидата.



Сл.1.

Да забележиме дека ако $\nu \notin \mathbf{Z}$, тогаш очигледно е функциите $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ се линеарно независни.

Теорема 1. Ако n е цел број, тогаш важи

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{2}$$

Доказ: Нека $n \in \mathbf{N}$, тогаш :

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} +$$

$$+ \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{(s+n)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s+n)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Го искористивме фактот дека $\dfrac{1}{\Gamma(-k)} = 0$, ако $k \geq 0$ и воведовме смена $s = r - n$. ■

Теорема 2. За сите реални вредности за x и за t такво што $0 < |t| < \infty$, за функцијата $\omega(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$ важи развојот:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n . \tag{3}$$

Функцијата $\omega(x,t)=e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ ја викаме г*енератрисна функција на Беселовите функции.*

Доказ: Ги развиваме функциите $e^{x\frac{t}{2}}$ и $e^{-\frac{x}{2t}}$ во степенски редови.

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^k}{k!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x}{t2}\right)^s}{s!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{k!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+s}t^{k-s}.$$

Воведуваме смена $s=m,\quad k=m+n$. Бидејќи за $n<-m$ $\quad\frac{1}{\Gamma(m+n+1)}=0$, имаме:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-m}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}t^n=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n.\ \blacksquare$$

Теорема 3. За Беселовите функции од прв вид $J_n(x)$ важат следните рекурентни формули:

1. $2J_n'(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)$
2. $2nJ_n(x)=x\left(J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)\right)$
3. $xJ_n'(X)=xJ_{n-1}(x)-nJ_n(x)$
4. $xJ_n'(X)=nJ_n(x)-xJ_{n+1}(x)$
5. $\frac{d}{dx}\left(x^nJ_n(x)\right)=x^nJ_{n-1}(x)$
6. $\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right)=-x^{-n}J_{n+1}(x)$
7. $x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+\left(x^2-n^2\right)J_n(x)=0$
8. $\left(\frac{d}{xdx}\right)^m\left(x^nJ_n(x)\right)=x^{n-m}J_{n-m}(x)$
9. $\left(\frac{d}{xdx}\right)^m\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right)=(-1)^m\frac{J_{n+m}(x)}{x^{n+m}}$

Доказ: 1. Со почлено диференцирање по x на редот (3), добиваме: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$. Ги изедначуваме коефициентите пред t^n и добиваме дека за секој цел број n важи

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x). \tag{4}$$

2. Со почлено диференцирање по t на редот (3), добиваме: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1} = \frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$. Ги изедначуваме коефициентите пред t^n и добиваме дека за секој цел број n важи

$$2nJ_n(x) = x\left(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right). \tag{5}$$

3. Равенството (4). го множиме со x, а потоа добиеното равенство го собираме со (5). Добиваме

$$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x). \tag{6}$$

4. Равенството (4). го множиме со x, а потоа добиеното равенство го одземеме од (5). Добиваме

$$xJ_n'(X) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \ . \tag{7}$$

5. Равенството (6) го множиме со x^{n-1}.

$$x^n J_{n-1}(x) = nx^{n-1}J_n(x) + x^n J_n'(X) = \frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right). \tag{8}$$

6. Слично како во 5. Равенството (7) го множиме со x^{-n-1}. Добиваме:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}J_n(x)\right) = -x^{-n}J_{n+1}(x). \tag{9}$$

7. Во (9) наместо n ставаме $n-1$, од добиеното равенство и од (6) го елиминираме $J_{n-1}(x)$. На крајот множиме со x^{n+1} и добиваме:

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + \left(x^2 - n^2\right)J_n(x) = 0. \tag{10}$$

8. Редот (1) помножен со x^n почлено го диференцираме по x, а потоа го делиме со x. Добиваме:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^n 2(k+n)}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2n-1}\frac{1}{2} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1}$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

т.е. $\frac{d}{xdx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^{n-1} J_{n-1}(x)$.

Ако целата постапка ја повториме m пати, добиваме:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left(x^n\ J_n(x)\right) = x^{n-m} J_{n-m}(x) \cdot \tag{11}$$

9. Слично како во 8. Добиваме:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right) = (-1)^m\ \frac{J_{n+m}(x)}{x^{n+m}}\ . \tag{12}$$ ■

Од (10) заклучуваме дека Беселовата функција $J_n(x)$ е едно партикуларно решение на линеарната диференцијална равенка од втор ред $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0$, $n \in \mathbf{Z}$ која е позната како *Беселова диференцијална равенка*,

Примери.

1. Со помош на рекурентната релација (5), поаѓајќи од функциите $J_0(x)$ и $J_1(x)$, може да се пресмета $J_n(x)$ каде што n е произволен природен број. Така,

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$$

$$J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x) = \frac{8 - x^2}{x^2} J_1(x) - \frac{4}{x} J_0(x) \qquad \text{итн.}$$

2. Да се определат Беселовите функции $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$, $m \in \mathbf{Z}$.

Нека $m = 0$, тогаш:

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2} + s\right) = (s + \tfrac{1}{2})\Gamma(s + \tfrac{1}{2}) = (s + \tfrac{1}{2})(s - \tfrac{1}{2}) \cdots \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{2s+1}{2}\,\tfrac{2s-1}{2} \cdots \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right);$$

$$s!\,\Gamma\left(\tfrac{3}{2} + s\right) = \tfrac{2\cdot 1}{2}\,\tfrac{2\cdot 2}{2} \cdots \tfrac{2\cdot s}{2}\,\tfrac{2s+1}{2}\,\tfrac{2s-1}{2} \cdots \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(2s+1)!}{2^{2s+1}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(2s+1)!}{2^{2s+1}}\sqrt{\pi}$$

т.е. $\frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma(\frac{3}{2} + s)} = \frac{(-1)^s\, 2^{2s+1}}{(2s+1)!\sqrt{\pi}}$. Така,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(\frac{1}{2}+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\frac{1}{2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^s 2^s 2}{(2s+1)!\sqrt{\pi}} \frac{x^{2s}\sqrt{x}}{2^{2s}\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \,.$$

Слично, ако во општата формула (1) ставиме $n = -\dfrac{1}{2}$, добиваме:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \,.$$

Функциите $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ се линеарно независни, бидејќи такви се функциите $\sin x$ и $\cos x$. Беселовите функции од ред $n = m + \frac{1}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$ се викаат *афини Беселови функции*. За да ги определиме Беселовите функции $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$, $m \in \mathbf{Z}$, ќе се послужиме со равенствата (11) и (12).

Нека $m > 0$. Во равенството (12) ќе ставиме $n = \frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left(\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = (-1)^m \frac{J_{\frac{1}{2}+m}(x)}{x^{\frac{1}{2}+m}}$$

и добиваме :

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left(\frac{\sin x}{x}\right). \tag{13}$$

Така ,

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3-x^2}{x^2} \sin x - \frac{3}{x} \cos x\right) \text{итн.}$$

Ако $m < 0$ т.е. $m = -p,\ \ p \in \mathbf{N}$, тогаш во равенството (11) ставаме $n = \frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left(x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)\right) = x^{\frac{1}{2}-m} J_{\frac{1}{2}-m}(x) \cdot$$

Добиваме: $$J_{-p+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}x^p\left(\frac{d}{xdx}\right)^p(\sin x) \tag{14}$$

Така, $J_{-\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x-\frac{\cos x}{x}\right)$, $J_{-\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3}{x}\sin x+\frac{3-x^2}{x^2}\cos x\right)$

итн.

2. Беселова диференцијална равенка

Дефиниција 2. Обичната диференцијална равенка од втор ред

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0 \tag{15}$$

каде што $\nu\in\mathbf{R}$ ја викаме *Беселова диференцијална равенка*.

Беселовата диференцијална равенка е линеарна хомогена диференцијална равенка од втор ред со променливи коефициенти. За решавање на равенка со променливи коефициенти во општ случај се применува методата на обопштени степенски редови (метода на Фробениус).

Општото решение на Беселовата диференцијална равенка може да се запише како:

$$u(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$$

каде што $u_1(x)$ и $u_2(x)$ се линеарно независни партикуларни решенија на (15).

Ќе побараме барем едно решение на равенката (15) за да биде обопштен степенскиот ред

$$u_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+\alpha},\quad a_0\neq 0. \tag{16}$$

Два пати го диференцираме по x редот (16) :

$$u_1'(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+\alpha)x^{m+\alpha-1}$$

$$u_1''(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+\alpha)(m+\alpha-1)x^{m+\alpha-2}$$

и заменуваме во (15):

$$x^2u_1''(x)+xu_1'(x)+\left(x^2-\nu^2\right)u_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+\alpha)(m+\alpha-1)x^{m+\alpha}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} a_m(m+\alpha)x^{m+\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\alpha+2} - \sum_{m=0}^{\infty} a_m \nu^2 x^{m+\alpha} = \left(a_0\left(\alpha^2-\nu^2\right)\right)x^{\alpha}$$

$$+\left(a_1\left((\alpha+1)^2-\nu^2\right)\right)x^{\alpha+1} + \sum_{m=2}^{\infty}\left(a_m\left((m+\alpha)^2-\nu^2\right)+a_{m-2}\right)x^{m+\alpha} = 0 .$$

Ги изедначуваме коефициентите пред $x^{m+\alpha}$, $m \geq 0$. Така го добиваме системот равенки:

$$\begin{aligned} &a_0\left(\alpha^2-\nu^2\right)=0 \\ &a_1\left((\alpha+1)^2-\nu^2\right)=0 \\ &a_m\left((\alpha+m)^2-\nu^2\right)+a_{m-2}=0, \quad m \geq 2 \end{aligned} \tag{17}$$

Бидејќи $a_0 \neq 0$, од првата равенка на системот (17) добиваме равенство $\alpha^2-\nu^2=0$, од кое следува дека $\alpha = \pm\nu$, $(\nu \geq 0)$.

Ќе го разгледаме прво случајот кога $\alpha = \nu$. Од второто равенство од (17) добиваме дека $a_1 = 0$ (во спротивно $\alpha = -\frac{1}{2} < 0$). Од третото равенство во (17) имаме :

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)}, \quad k = 2,3,4,5,\cdots \tag{18}$$

Бидејќи $a_1 = 0$, следува дека $a_{2m+1} = 0, \quad m \in \mathbf{N}$.

Ако во (18) ставиме $k = 2m$, добиваме:

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(\nu+m)}, \quad m \in \mathbf{N} . \tag{19}$$

Така, поаѓајќи од a_0 , кое останува неодредено, се добива:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(\nu+2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(\nu+2)(\nu+1)}, \; \ldots..$$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!(\nu+m)(\nu+m-1)\cdots(\nu+1)} = (-1)^m \frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)a_0}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+\nu}$$

Го добивме првото партикуларно решение на равенката (15):

$$u_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\nu+1)}{2^{2m} m!\Gamma(\nu+m+1)} x^{2m+\nu} . \tag{20}$$

Да ги одредиме сега коефициентите a_k и за случајот кога $\alpha = -\nu$. Тоа е можно ако коефициентот пред a_k во системот (17) е различен од нула за секое $k = 2m$, т.е. $(\alpha + k)^2 - \nu^2 \neq 0$. Бидејќи $\alpha = -\nu$ и $k = 2m$ имаме $-2\nu 2m + 4m^2 \neq 0$ т.е. $\nu \neq m$. Значи, ако $\nu \notin \mathbf{Z}$, второто партикуларно решение на Беселовата диференцијална равенка е:

$$u_2(x) = a_0' \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(-\nu+1)}{2^{2m} m! \Gamma(-\nu+m+1)} x^{2m-\nu} . \tag{21}$$

Ако ставиме $a_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$ и $a_0' = \dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$ добиваме:

$$u_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} = J_{\nu}(x) \tag{22}$$

$$u_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu} = J_{-\nu}(x) . \tag{23}$$

Покажавме дека ако $\nu \notin \mathbf{Z}$, општото решение на Беселовата диференцијална равенка може да се запише како: $u(x) = B_1 J_{\nu}(x) + B_2 J_{-\nu}(x)$. Во тој случај решението може да се запише:

$$u(x) = B_3 J_{\nu}(x) + B_4 Z_{\nu}(x)$$

каде што $Z_{\nu}(x) = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$, $C_2 \neq 0$. Да напоменеме дека $B_i, C_j, i = 1,2,3,4,; j = 1,2$ не зависат од x.

Ако ставиме $C_1 = ctg\,\nu\pi$ и $C_2 = -\cos ec\,\nu\pi$, добиваме функција

$$Y_{\nu} = \frac{J_{\nu}(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{24}$$

Ако $n \in \mathbf{Z}$, тогаш

$$Y_n = \lim_{\nu \to n} Y_{\nu} \tag{25}$$

Применувајќи го Лопиталовото правило, имаме:

$$Y_n = \lim_{\nu \to n} Y_{\nu} = \lim_{\nu \to n} \frac{\dfrac{\partial}{\partial \nu}\left(J_{\nu}(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right)}{\dfrac{\partial}{\partial \nu}\sin\nu\pi} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)\right)}{\cos\nu\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right). \qquad (26)$$

Функциите $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ се решенија на Беселовата диференцијална равенка (15). Ако (15) ја диференцираме по ν, при што прво земаме $y=J_\nu(x)$, а потоа $y=J_{-\nu}(x)$, имаме:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\right)+x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\right)+\left(x^2-\nu^2\right)\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)-2\nu J_\nu(x)=0$$

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right)+x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right)+\left(x^2-\nu^2\right)\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)-2\nu J_{-\nu}(x)=0.$$

Ако првата равенка ја множиме со $(-1)^n$ и ја одземеме од втората, ќе добиеме:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\right)+x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\right)+$$

$$+\left(x^2-\nu^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\right)-2\nu\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\right)=0.$$

Сега ќе побараме лимес кога $\nu\to n$ и ќе го искористиме резултатот од теоремата 1. Добивме дека и функцијата $Y_n(x)$ е решение на Беселовата диференцијална равенка.

Дефиниција 3: Функцијата $Y_n(x)$ дадена со релациите (24) и (25) се вика *Беселова диференцијална равенка од втор вид* или *Нојманова функција* со индекс*"ν ".*

Ја покажавме следната:

Теорема 4. Општото решение на Беселовата диференцијална равенка е:

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x).$$

Доказ: Ако ν не е цел број, $Y_\nu(x)$ е решение на Беселовата диференцијална равенка, бидејќи, според (24), е линеарна комбинација на решенијата $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$. Решенијата J_ν и Y_ν се линеарно независни, бидејќи J_ν и $J_{-\nu}$ се линеарно независни, а $J_{-\nu}$ влегува во линеарната комбинација со која е дефинирана функцијата $Y_\nu(x)$. Според тоа, $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ е двојка фундаментални решенија на Беселовата диференцијална равенка. Ситуацијата останува непроменета и кога $\nu \in \mathbf{Z}$. Функциите $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ се две линеарно независни решенија на Беселовата равенка. ■

Беселовите функции од втор ред имаат многу особини слични со функциите $J_n(x)$. Така, за овие функции важат следните релации :

1. $Y_n(x) = (-1)^n Y_{-n}(x)$.
2. $Y_n(x) = -Y_{n-2}(x) + \dfrac{2(n-1)}{x} Y_{n-1}(x)$.
3. $Y_n'(x) = Y_{n-1}(x) + \dfrac{n}{x} Y_n(x) = -Y_{n+1}(x) + \dfrac{n}{x} Y_n(x)$.
4. $xY_0(x) = [xY_1(x)]'$.

Понекогаш е потребно решенијата на Беселовата диференцијална равенка да бидат комплексни за реални вредности на x. Тогаш најчесто се користат следните линеарно независни решенија:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x).$$

познати како *Беселови функции од трет ред или Ханкелови функции* со индекс *“ν ”.*

3. Беселов интеграл

Теорема 5. Беселовата функција од прв ред $J_n(x),\ n \in \mathbf{Z}$ ја има следната репрезентација:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Доказ: Користејќи ги резултатите од теоремата 1 и теоремата 2 имаме:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right)J_n(x) .$$

Ако ставиме $t = e^{i\varphi}$, тогаш бидејќи $\dfrac{t-t^{-1}}{2} = i\sin\varphi$ и $e^{ix\sin\varphi} = \cos(x\sin\varphi) + i\sin(x\sin\varphi)$, имаме:

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\varphi + 2i\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\varphi$$

од каде што следува:

$$\cos(x\sin\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\varphi \qquad (26)$$

$$\sin(x\sin\varphi) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\varphi \ . \qquad (27)$$

Ако во (26) и (27) φ го замениме со $\frac{\pi}{2} - \varphi$, заради $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$, се добива:

$$\cos(x\cos\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)\cos 2n\varphi \qquad (28)$$

$$\sin(x\cos\varphi) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\varphi \ . \qquad (29)$$

Користејќи ја ортогоналноста на тригонометриските функции, ако (26) се помножи со $\cos n\varphi$ и се интегрира, се добива:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\varphi)\cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} J_n(x) & n - \text{парно} \\ 0 & n - \text{непарно} \end{cases} . \qquad (30)$$

Слично

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x\sin\varphi)\sin n\varphi d\varphi = \begin{cases} J_n(x) & n - \text{непарно} \\ 0 & n - \text{парно} \end{cases} . \qquad (31)$$

Ги собираме (30) и (31), и делиме со два. Добиваме:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(x\sin\varphi)\cos n\varphi + \sin(x\sin\varphi)\sin n\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi \ . \qquad (32) \blacksquare$$

Репрезентацијата (32) се вика *интегрална репрезентација на Беселовите функции.*

Како специјален случај, за $n = 0$, се добива:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi) d\varphi \qquad (33)$$

Интегралот (33) го нарекуваме *интеграл на Парсевал*.

Редовите од (26) до (29) се викаат *Јакобиеви редови*. Да напоменеме дека секој од нив може да се смета за Фуриев ред.

4. Задачи

1. Да се покаже : $J_2'(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)J_1(x) + \frac{2}{x}J_0(x)$

Упатство: Да се искористат рекурентните релации (6) за $n = 2$ како и (5) за $n = 1$. ●

2. Да се најде $\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx$

Решение: Од рекурентната релација (12) за $m = 1$ имаме : $\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right)' = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}$. Така, $\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx = -x^{-n} J_n(x) + c$. ●

3. Да се покаже дека $\int J_{n+1}(x)dx = \int J_{n-1}(x)dx - 2J_n(x)$.

Решение: Од рекурентните релации (7) и (6) добиваме: $J_{n+1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_n'(x) = \left(J_{n-1}(x) - J_n'(x)\right) - J_n'(x) = J_{n-1}(x) - 2J_n'(x)$. Со интеграција на ова равенство се добива бараната релација. ●

4. Да се најде $\int x^3 J_0(x)dx$.

Решение: Со примена на парцијална интеграција добиваме $\int x^3 J_0(x)dx = \int x^2 x J_0(x)dx = x^2 x J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)dx$. Притоа ја искористивме рекурентната релација (8) за $n = 1$: $xJ_0(x) = \left(xJ_1(x)\right)'$. Повторно ја применуваме релацијата (8) и добиваме:

$$\int x^3 J_0(x)dx = x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + c. \ ●$$

5. Да се пресмета: $\int_0^a x^n J_{n-1}(x)dx$, $a > 0$, $n > 0$.

Решение: $\int_0^a x^n J_{n-1}(x)dx = \int_0^a \frac{d}{dx}(x^n J_n(x))dx = a^n J_n(a)$. ●

6. Да се пресмета: $\int_0^a x^n J_{n-1}(\xi x)dx$, $a>0,\quad \xi>0,\quad n>0$.

Упатство. Да се искористи задача 5. Резултатот е $\frac{a^n}{\xi} J_n(\xi a)$. ●

7. $\int_0^a x^{n+2} J_{n-1}(x)dx$, $a>0,\quad n>0$

Резултат: $\int_0^a x^{n+2} J_{n-1}(x)dx = a^{n+2} J_n(a) - 2a^{n+1} J_{n+1}(a)$. ●

8. Најди ја сумата на редот $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)$.

9. Да се најде општото решение на диференцијалната равенка:

$$x^2 y'' + (1-2n)xy' + n^2\left(4x^{2n} + 1 - n^2\right)y = 0$$

Решение: Ако ставиме $y = x^n u$, тогаш $y' = nx^{n-1}u + x^n u'$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}u + 2nx^{n-1}u' + x^n u''$. Дадената равенка, по средувањето, станува: $x^n\left[x^2u'' + xu' + n^2\left(4x^{2n} - n^2\right)u\right] = 0$, откаде што следува:

$$x^2u'' + xu' + n^2\left(\left(2x^n\right)^2 - n^2\right)u = 0 \tag{9.1}$$

Ако ставиме $2x^n = z$, добиваме $u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 2nx^{n-1}\frac{du}{dz}$,

$u'' = \frac{d}{dx}\left(2nx^{n-1}\frac{du}{dz}\right) = 2n(n-1)x^{n-2}\frac{du}{dz} + 2nx^{n-1}\frac{d^2u}{dz^2}2nx^{n-1}$. Заменуваме во (9.1) и добиваме: $n^2\left[\left(2x^n\right)^2 u'' + 2x^n u' + \left(\left(2x^n\right)^2 - n^2\right)u\right] = 0$. Бидејќи $z = 2x^n$, имаме $z^2u'' + zu' + \left(z^2 - n^2\right)u = 0$, а тоа е Беселова диференцијална равенка. Нејзиното општо решение е

$u = C_1 J_n(z) + C_2 Y_n(z)$. Значи општото решение на дадената равенка е $y = x^n \left(C_1 J_n(2x^n) + C_2 Y_n(2x^n) \right)$. ●

10. Да се најде општото решение на диференцијалната равенка:

$$xy'' + y' + \frac{1}{4} y = 0$$

Резултат: Користиме смена $z = \sqrt{x}$; $y = C_1 J_0(\sqrt{x}) + C_2 Y_0(\sqrt{x})$. ●

11. Да се покаже дека $y = \sqrt{x} J_{\frac{3}{2}}(x)$ е решение на равенката $x^2 y'' + (x^2 - 2)y = 0$.

12. Да се пресмета $I = \int_0^{\pi/2} J_0(x \cos t) \cos t dt$.

Решение: Бидејќи е $J_0(x\cos t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \frac{\cos^{2n} t}{n!n!}$ и редот апсолутно конвергира за секое x, имаме: $I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \frac{1}{n!n!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt$.

Ако $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt$, тогаш важи рекурентната релација $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$, па имаме: $I_n = \frac{2^{2n} n!n!}{(2n+1)!}$.

Така, $I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin x}{x}$. ●

13. Да се пресмета $I = \int_0^{\pi/2} J_1(x \cos t) dt$.

Резултат: $\frac{1 - \cos x}{x}$. ●

ДОДАТОК

Гама и Бета функции

Овде ќе изнесеме некои својства на Гама и Бета функциите, а за деталите читателот се упатува на [12] (том 2 стр. 544-550).

Бета функција е дефинирана со *Ојлеровиот интеграл од прв вид, тоа е* несвојствениот интеграл

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \tag{1}$$

што е конвергентен за $a>0, b>0$.

Точни се следните рекурзивни врски:

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)=\frac{a-1}{a-1+b}B(a-1,b) \tag{2}$$

Гама функција е интеграл на Ојлер од втор вид, *тоа е* несвојствениот интеграл:

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx \tag{3}$$

што е конвергентен за $a>0$.

Важи рекурентната формула:

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a) \tag{4}$$

односно:

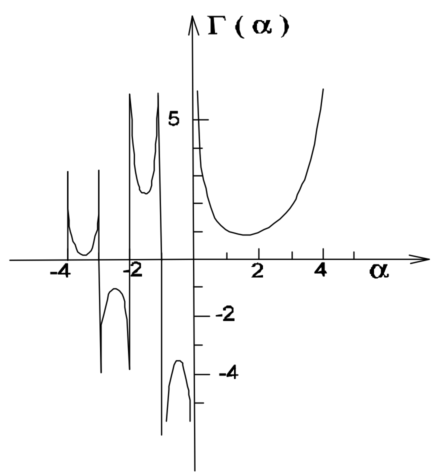
$$\Gamma(a+n)=(a+n)(a+n-1)\cdots(a+1)\Gamma(a) \tag{4'}$$

Специјално, $\Gamma(n)=(n-1)!,\quad n\in\mathbf{N}$.

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{5}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{6}$$

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{7}$$



Сл. 2.

$$\Gamma(-n+\tfrac{1}{2})=(-1)^n\,\frac{2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi} \tag{7'}$$

Ја споменуваме врската меѓу Бета и Гама функцијата

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{8}$$

Имајќи предвид дека $x^{a-1}e^{-x}>0$ за $x>0$ и дека $\Gamma(n)=(n-1)!\to\infty$ кога $n\to\infty$, добиваме дека $\lim\limits_{a\to\infty}\Gamma(a)=+\infty$. Поаѓајќи од равенството $\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+1)}{a}$, ако $a\to\infty$, се добива $\lim\limits_{a\to 0^+}\Gamma(a)=\lim\limits_{a\to 0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=\infty$. Овде се користи резултатот $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}dx=1$. Ако $-1<a<0$, тогаш $a+1>0$ и

$\Gamma(a+1)$ постои заради $\Gamma(a)=\dfrac{\Gamma(a+1)}{a}$ има смисла. Ако $a \to 0_-$, тогаш $\lim\limits_{a\to 0_-}\Gamma(a) = -\infty$.

Ако $-n < a < -n+1$, каде што $n>0$ е цел број, по дефиниција ставаме $\Gamma(a)=\dfrac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$. Ако ставиме $a=-n+\alpha,\quad 0<\alpha<1$, тогаш во интервалот $(-n,-(n-1))$ имаме $\Gamma(a)>0$, ако n е парен и $\Gamma(a)<0$ при n непарен, па се добиваат соодветните лимеси во точката $-n$:

$$\lim_{a\to -n\pm 0}\Gamma(a) = \frac{(-1)^n}{n!}\lim_{\alpha\to\pm 0}\Gamma(\alpha) = \pm\infty$$

за n парен; а важи спротивно равенство за n е непарен природен број.
На сл.2 е дадена скица на графикот на функцијата $\Gamma(a)$.

Од интерес е да се разгледа функцијата $f(a)=\dfrac{1}{\Gamma(a)}$. Последната функција е дефинирана на $(0,\infty)\cup(-1,0)\cup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n-1,-n)\right)$. Имајќи во предвид дека $\lim\limits_{a\to\pm 0}\Gamma(a) = \pm\infty$, се добива дека $\lim\limits_{a\to\pm 0} f(a) = 0$. Слично се добива $\lim\limits_{a\to -n\pm 0} f(a) = 0$.

Последните лимеси ни овозможуваат функцијата $f(a)$ да ја прошириме до функција $g(a)$ на целата бројна права, така што ќе биде непрекината на $\mathbf{R}$, ставајќи:

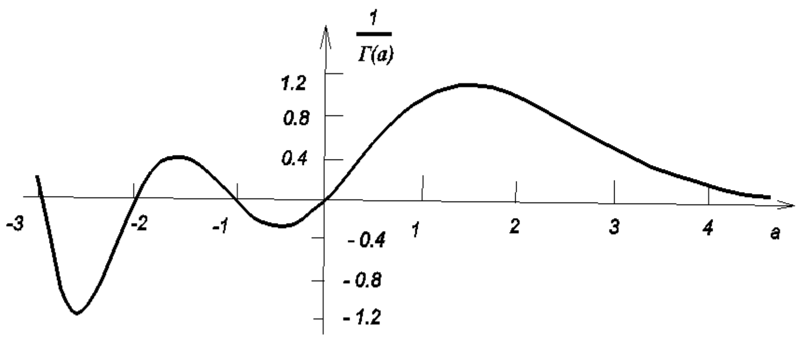
$$g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(a)}, & a\in \mathbf{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}\\ 0, & a\in\{0,-1,-2,\cdots\}\end{cases}$$

при што исто така со $\dfrac{1}{\Gamma(a)}$ ја означуваме проширената функција $g(a)$.

Имаме

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = 0 \tag{9}$$

ако $a \in \{0,-1,-2,\cdots\}$. Графикот на проширената функција $\dfrac{1}{\Gamma(a)}$ е даден на сл 3.



Сл. 3.

Индекс

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.Б Антоневич, П.Н. Князев, Я.В. Радино, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Минск,1978.

[2] А.Б Антоневич, Я.В. Радино: *Функциональний анализ и интегральные уравнения* , Москва.

[3] Charabarty: *Ordinary differential Equations and special functions,* New AGE International Publ. Co, New Delhi, 1996.

[4] Б.П. Демидович, И.А. Марон, Е.З. Шувалова, *Численние метод анализа,* Москва 1967.

[5] J.W. Dettman: *Mathematical methods in physics and Engineering*, Mc Graw Hill Book Co. 1962.

[6] К. Иосида, *Операционное исчисление теории гиперфункций*, Минск,1989.

[7] Н. Ивановски , *Математичка анализа I (функции од една независно променлива)*, Скопје, 1991.

[8] Н. Ивановски , *Решени задачи по Анализа III*, Универзитет "Св.Кирил и Методиј", Скопје, 1996.

[9] Н. Ивановски , *Реална анализа* , Просветно дело, Скопје, 1997.

[10] Н. Ивановски, Н. Речкоски, *Математика III*, Скопје, 1991.

[11] Д. Карчицка, *Конечно димензионални векторски простори*, Скопје 1990.

[12] Л.Д. Кудрявцев. *Математический анализ*, Том 1, Том 2, Том 3, , 1988,1988,1989.

[13] S. Kurepa: *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Zagreb, 1967.

[14] S. Kurepa: *Matematička analiza 1,2,3,* Zagreb.

[15] И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я. Г. Гай, А.Ф. Калайда, *Математический анализ*, Киев, Часть 2, 1985, Часть 3, 1987.

[16] S. Mardešić: *Matematička analiza I dio*, Zagreb, 1974.

[17] D.S. Mitrinović: *Specijalne funkcije. Zbornik zadataka i problema*, Beograd, 1990.

[18] D.S. Mitrinović: *Uvod u specijalne funkcije*, IV izdanje, Beograd, 1991.

[19] Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин: *Рациональние апроксимации и ортогональност*, Москва , 1988.

[20] L.A. Pipes: *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*, Mc Graw-Hill Book Co, 1959.

[21] В.И. Смирнов, *Курс висшеы математики, том 2*, Москва

[22] В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Наука, Москва, 1984.

[23] В.А. Треногин: *Функциональний анализ*, Москва, 1980.

[24] В. Урумов: *Математичка физика*, Просветно дело, Скопје ,1996.

[25] А. Зигмунд: *Тригонометрические ряды,* том 1,Мир, Москва 1965.

[26] Lj. Ćirić, *Specijalne funkcije*, Mašinski fakultet Beograd.

[27] И. Шапкарев: *Математика III (Редови и диференцијални равенки),* Скопје, 1991.