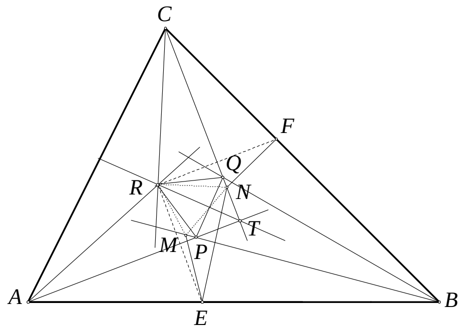
Емилија Целакоска, Скопје

ТЕОРЕМА НА МОРЛИ

Во 1899 г. американскиот математичар Морли (Frank Morley, 1860 - 1937) открил една мошне неочекувана теорема:

Пресеците на соседните трисектриси на аглите во произволен триаголник се темиња на рамностран триаголник.

Нека ΔABC е триаголник во кој секој од аглите при темињата A, B і C е поделен на три еднакви дела со трисектриси. Трисектрисите, во општ случај, не можат да се конструираат, па затоа користиме агломер. Трисектрисата која тргнува од A и е поблиску до сраната AB е соседна со трисектрисата која тргнува од B и е поблиску до истата срана AB. Со P, Q і R ги означуваме пресеците на соседните трисектриси. Ќе покажеме дека ΔPQR е рамносран триаголник.



Crt. 1

Нека $\angle BAC = 3\alpha$, $\angle ABC = 3\beta$ і $\angle BCA = 3\gamma$. Бидејќи $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$ како агли од ΔABC, следува дека $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Нека T е пресекот на трисектрисата при A која е поблиску до AB со трисектрисата при C која е поблиску до BC. Се забележува дека AR і CR се бисектриси во ΔATC. Тоа значи дека и TR е бисектриса во ΔATC (сите се сечат во R).

$$\angle ATR = \angle RTC = \tfrac{1}{2}\angle ATC = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha - 2\gamma) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2(60^\circ - \beta)) = 30^\circ + \beta .$$

Сега, да конструираме еден триаголник ΔMNR, така што: $M \in AT, N \in CT$, $\angle TRM = 30^\circ, \angle TRN = 30^\circ$ и да е рамностран. Ќе покажеме дека $\Delta MNR = \Delta PQR.$ Нека E і F се симетрични точки на R во однос на правата AT и CT, соодветно. Тогаш $E \in AC$, бидејќи RE ја сече AT под прав агол поради осна симетрија, а $\angle EAT = \angle TAR = \alpha$, па се формира рамнокрак триаголник со врв во A. И $F \in BC$, аналогно. Да ги најдеме $\angle EMN$ і $\angle MNF$.

$$\angle MNF = 360^\circ - \angle RNM - \angle RNC - \angle CNF .$$

$\angle RNM = 60^\circ$. (Од конструкцијата на ΔMNR како рамностран).

$\angle RNC = ?$ За ΔRTN имаме: $\angle TRN = 30^\circ, \angle NTR = \angle RTC = 30^\circ + \beta$, како што најдовме предходно. Тогаш $\angle RNC$, како надворешен за ΔRTN е:

$$\angle RNC = \angle TRN + \angle NTR = 30^\circ + 30^\circ + \quad = 60^\circ + \quad .$$

$\angle CNF = \angle RNC$, заради симетрија на R so F во однос на CT.

$\angle MNF = 360^\circ - 60^\circ - 2(60^\circ + \quad) = 180^\circ - 2\quad$. Аналогно и $\angle EMN = 180^\circ - 2\quad$.

Значи $\angle MNF = \angle EMN$. Од тоа и од $\overline{EM} = \overline{RM} = \overline{MN} = \overline{RN} = \overline{FN}$ (од симетријата и заради конструкцијата на рамностраниот ΔMNR) следува дека $EMNF$ е рамнокрак трапез. Околу рамнокрак трапез може да се опише кружница. Таа кружница минува минува и низ B, бидејќи $NEBF$ е тетивен четириаголник: $\angle FBE = 3\quad$, а $\angle ENF = 180^\circ - 3\quad$. Имено, за $\angle ENF$ имаме

$$\angle ENF = \angle MNF - \angle MNE = 180^\circ - 2\quad - \quad = 180^\circ - 3\quad ,$$

каде што $\angle MEN = \angle MNE$ (ΔMEN е рамнокрак) и уште:

$$\angle MNE = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle EMN) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - 2\quad)) = \quad .$$

Бидејќи имавме дека $\overline{EM} = \overline{MN} = \overline{NF}$, следува дека и лаците што ги отсекуваат на кружницата ќе бидат еднакви. Тогаш, како периферни агли над еднакви лаци, ќе мора да важи $\angle EBM = \angle MBN = \angle NBF$. Збирот од овие три агли е $3\quad$, па следува дека овие три агли се еднакви на $\quad$. Ова значи дека $M \equiv P$ и $N \equiv Q$, т.е. $\Delta MNR \equiv \Delta PQR$..

***

Оваа задача може да се реши и на тригономериски начин. Да ги задржиме ознаките и уште d нека е дијаметар на опишаната кружница околу ΔABC, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $u = \overline{CR}$, $v = \overline{CQ}$. Според синусната теорема, имаме:

$$a = d \sin 3\sim, \ b = d \sin 3\quad , \ c = d \sin 3¥ .$$

Од ΔCQB, $v = \frac{a}{\sin(180^\circ - \quad - ¥)} \sin\quad$. Поради тоа што $\sim + \quad + ¥ = 60^\circ$, (на почетокот на претходниот доказ), $v = \frac{d \sin 3\sim}{\sin(120^\circ + \sim)} \sin\quad = \frac{d \sin 3\sim}{\sin(60^\circ - \sim)} \sin\quad$. Бидејќи општо важи:

$\sin 3\sim = 3\sin\sim - 4\sin^3\sim$ (покажете!), можеме да продолжиме:

$$\sin 3\sim = 3\sin\sim - 4\sin^3\sim = 4\sin\sim\,((\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 - \sin^2\sim) = 4\sin\sim\,(\sin^2 60^\circ - \sin^2\sim) =$$

$$= 4\sin\sim\,(\sin 60^\circ + \sin\sim)(\sin 60^\circ - \sin\sim) =$$

$$= 4\sin\sim \cdot 2\sin\tfrac{60^\circ+\sim}{2} \cdot \cos\tfrac{60^\circ-\sim}{2} \cdot 2\cos\tfrac{60^\circ+\sim}{2} \cdot \sin\tfrac{60^\circ-\sim}{2} =$$

$$= 4\sin\sim\ \sin(60^\circ + \sim)\sin(60^\circ - \sim).$$

Значи, $v = 4d \sin\sim \sin\quad \sin(60^\circ + \sim)$. Аналогно се покажува дека $u = 4d \sin\sim \sin\quad \sin(60^\circ + \quad)$. Според косинусната теорема, од ΔCQR:

$$\overline{QR}^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos ¥ =$$

$$= 16\,d^2\ \sin^2\sim\ \sin^2\quad \sin^2(60^\circ + \sim) + 16\,d^2\ \sin^2\sim\ \sin^2\quad \sin^2(60^\circ + \quad) -$$

$$- 2 \cdot 16\,d^2\ \sin^2\sim\ \sin^2\quad \sin(60^\circ + \sim) + \sin(60^\circ + \quad)\cos ¥ =$$

$$=16\,d^2\sin^2\!\sim\,\sin^2\quad(\sin^2(60^\circ+\sim)+\sin^2(60^\circ+\quad-2\sin(60^\circ+\sim)+\sin(60^\circ+\quad)\cos\text{¥}).$$

Бидејќи $(60^\circ+\sim)+(60^\circ+\quad)+\text{¥}=180^\circ$, следува дека постои триаголник со агли $60^\circ+\sim$, $60^\circ+\quad$ і ¥. Ако дијаметарот на опишаната кружница околу таквиот триаголник е 1, тогаш неговите страни се $\sin(60^\circ+\sim),\sin(60^\circ+\quad)$ и $\sin\text{¥}$. Па според косинусна теорема

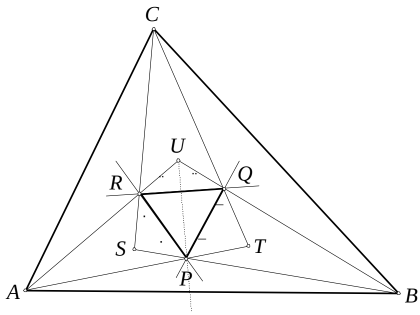
$$\sin^2\text{¥}=\sin^2(60^\circ+\sim)+\sin^2(60^\circ+\quad)-2\sin(60^\circ+\sim)\sin(60^\circ+\quad)\cos\text{¥}.$$

Значи $\overline{QR}^2=16\,d^2\sin^2\!\sim\,\sin^2\quad\sin^2\text{¥}$, т.е. $\overline{QR}=4\,d\sin\sim\sin\quad\sin\text{¥}$.

Со циклична замена на ознаките (или со аналогно изведување) се добива и: $\overline{RP}=4\,d\sin\sim\sin\quad\sin\text{¥}$, $\overline{PQ}=4\,d\sin\sim\sin\quad\sin\text{¥}$. Заклучуваме дека $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RP}$, т.е. ΔPQR е рамностран триаголник.

***

Кај предходните два докази го користевме методот со напредување. Ќе наведеме еден доказ во кој се користи методот со враќање.



Crt. 2

Поставуваме прво рамностран ΔPQR.. Над сраните PQ, QR, RP конструираме рамнокраки триаголници ΔTPQ, ΔURQ, ΔSRP. Аглите при основата PQ на рамнокракиот риаголник ΔTPQ се еднакви и ги означуваме со ¯, на ΔURQ so ¨ и на ΔSRP so · и притоа, нека важи

$$¯+¨+·=120^\circ,\ ¯<60^\circ,\ ¨<60^\circ,\ ·<60^\circ.$$

Ги продолжуваме краците на рамнокраките триаголници сé додека тие не се пресечат во точки A, B і C. Нека $PT\cap UR=\{A\}$, $SP\cap UQ=\{B\}$, $TQ\cap SR=\{C\}$. Бидејќи $¯+¨+·+60^\circ=180^\circ$, следува дека

$$\angle TQB=·,\ \angle UQC=·,\ \angle URC=¯,\ \angle ARS=¯,\ \angle SPA=¨,\ \angle BPT=¨.$$

Сега, јасно е дека $\angle APB=180^\circ-¨=90^\circ+(90^\circ-¨)$. Од друга страна, бисектрисата на $\angle RUQ$ е бисектриса и во рамностраниот триаголник кај точката P (бидејки $PQUR$ е делтоид). Па сакаме да провериме дали истата бисектриса PU е бисектриса и на $\angle APB$. Ќе искористиме едно својство кое е навистина лесно за докажување, а тоа е дека *поголемиот до аглите при пресекот на бисектрисите на два агли во еден траголник изнесува* 90° *плус половина од* *третиот агол.* Во случајов треба да го разгледуваме ΔABU. $\angle AUB = 180^\circ - 2¨$, па знчи $\frac{1}{2}\angle AUB = 90^\circ - ¨$.

Значи, сега имаме: $\angle APB = 180^\circ - ¨ = 90^\circ + (90^\circ - ¨) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle AUB$, па од својството што предходно го искажавме следува дека навистина PU е бисектриса и на $\angle APB$. Ако PA е бисектриса $\angle BAU$ тогаш и PB ќе биде бисектриса на $\angle ABU$, бидејќи се сечат во точката P. Од ΔPAR можеме да најдеме дека

$$\angle PAR = 180^\circ - (¨ + · + ¯ + ·) = 180^\circ - (120^\circ + ·) = 60^\circ - · .$$

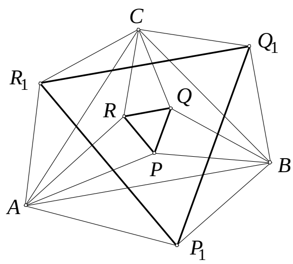
Дали и $\angle PAB = 60^\circ - ·$? Да го најдеме $\angle PAB$.

$$\angle BPU = ¨ + ¯ + 30^\circ = 120^\circ - · + 30^\circ = 150^\circ - · = 90^\circ + (60^\circ - ·) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAU .$$

Значи, $\frac{1}{2}\angle BAU = 60^\circ - ·$, т.е. $\angle PAR = \angle PAB = 60^\circ - ·$. Значи P е пресек на бисектрисите на аглите во ΔABU. Аналогна постапка се спроведува за ΔATC и за ΔBSC, од каде што добиваме дека R е пресекот на бисектрисите на аглите во ΔATC и Q е пресекот на бисектрисите на аглите во ΔBSC. Можеме да заклучиме дека AP і AR го делат аголот при A на три еднакви дела, BP і BQ го делат аголот при B на три еднакви дела и CR і CQ го делат аголот при C на три еднакви дела.

***

Теоремата на Морли важи и за **надворешните агли** на триаголникот. Притоа, страните на рамностраниот триаголник што се добива со пресеците на соседните трисектриси од надворешните агли на произволен триаголник, **се паралелни** со страните на рамностраниот триаголник добиен со пресеците на соседните трисектриси на внатрешните агли на истиот произволен триаголник!



Crt. 3

Лебег (Henri Léon Lebeg, 1875-1941) во 1939 г. покажал дека од сите пресечни точки на трисектрисите во еден триаголник можно е да се установат 27 тројки кои се темиња на рамнострани триаголници. Првиот доказ на теоремата на Морли е објавен во 1909 г. Денес постојат десетина различни докази на оваа теорема, но доста сложени во однос на простата формулација.

Литература

Г. С. М. Кокстер: Введение в геометрии, 1966, Москва, Изд. Наука

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ