Сажета мини историја геометрије

dr Leopold Verstraelen, Leuven, Belgija[1]

Настанак и развој у старој Грчкој

Математика је била врхунско и трајно достигнуће у култури античке Грчке. Шире посматрано, аритметички и геометријски проблеми су били истраживани још раније, у неколико претходних цивилизација на разним странама света, у виду неке врсте практичног математичког научног садржаја. Знање које је као такво прво било стечено у Месопотамији и касније у Египту, и филозофске представе његовог значења и његове природе код „старих" Грка, резултирало је у величанственој креацији математике као карактеристично апстрактне и дедуктивне науке. Назив *„математика"* за ову науку, проистекао из грчког језика, у основи означавајући *„знање и разумевање"*, почео је исто тако да се употребљава и у многим другим језицима; схватајући међутим, што је у ствари и чињеница, да је то заиста уметност да се достигне ново знање и разумевање, холандска реч за математику *„wiskunde"*, у преводу: *„уметност да се досегне мудрост"* (на холандском „kunst", „kunde" значи уметност, а „wis" одговара речи мудар), могла би бити прикладнија. За јединке људске врсте, „природа" у суштини представља њихове организоване мисли о чулима и перцепцијама, „њихових светова споља и изнутра" и „радити математику" у суштини се односи на њихово мисаоно битисање у „универзуму" њихових идеализација и апстракција ових осећаја и перцепција. Или, као што је дефинисао Стјуарт (Stewart) у прерађеном издању књиге „Шта је математика?" Куранта (Courant) и Робинса (Robbins): „Математика повезује апстрактни свет менталних појмова са реалним светом физичких ствари при чему није у потпуности смештена ни у једном од њих". Међу главним грчким школама и њиховим математичким херојима, имамо: Милет (сада Турска) са Талесом (Thales) (-624/-548), Кротон (сада Италија) са Питагором (Pythagoras) (-566/-497), Атину са Еудоксом (Eudoxos) (-408/-355), Александрију (сада Египат) са Еуклидом (Euclides) (-365/-285) и Аполонијем (Apollonius) (-260/-170) и Сиракузу (сада Сицилија) са Архимедом (Archimedes) (-287/-212).

Наводимо цитат из увода књиге Куранта и Робинса: „Математика као израз људске мисли одражава активну вољу, мисаоно резоновање и жељу за естетском перфекцијом. Њени основни елементи су логика и интуиција, анализа и конструкција, општост и индивидуалност. Мада би различите традиције могле да наглашавају различите аспекте, једино је, међутим, однос ових неусаглашених сила и битка за њихову синтезу која чини живот, корист и огромна вредност математичке науке". Талес се сматра за једног од очева оснивача математике. *Питагорина теорема* [у сваком правоуглом троуглу са страницама чије су дужине A (за хипотнузу) и B, C (за катете): $A^2 = B^2 + C^2$], представља камен темељац геометрије људске врсте. У Питагориној школи је показано да су страница (----------) и дијагонала (______________) правилног 5–угла, који је уједно био и лого ове школе, несамерљиве дужи, тј. њихов однос (---------- „са" ______________) је известан ирационалан број, („децимални број који иде у бесконачност после децималног знака, запете или тачке, без,

[1] Department of Mathematics, Katholieke Universiteit Leuven, Celestijnenlaan 200B bus 2400, 3000 Leuven, Belgium.

стартујући притом на неком месту, пре или после овог знака, сталног понављања фиксираног низа цифри произвољне дужине"), наиме: *златни пресек* $\Phi = 0,618\ldots$, који је за увек постао од изузетне актуелне важности како у геометрији, тако и у природи и уметностима. Теорија геометријског континуума Еудокса на прави начин је радила на уграђивању у математичку реалност таквог пара дужи - за које се раније прећутно претпостављало да не постоје, и сходно томе, на заснивању дедуктивно–постулативног тренда који има за циљ „безбедност" математичког резоновања као неопходну допуну иначе другачијег, искључиво интуитивног и евентуално погрешног постављања и истраживања проблема у математици и њеним применама. Кристализација овог начина размишљања у Еуклидовим *„Елементима"*, која је *имала за циљ да изложи „Еуклидску математику"свог времена, постала је* прекретница у историји цивилизације. Такође, и Еуклидова комплементарна *„Оптика"* би се могла сматрати једним од првих систематских студија о људском виђењу. *Постулат паралелности* у раванској Еуклидској геометрији је био, *„као обавезно"*, *прилично* фасцинантан за многе учене људе, још од Еуклидовог времена, зато што „он укључује догађање које учествује у бесконачности, и наша врста није у могућности да види тако далеко". Ово је било веома добро, зато што је према формулацији Кулиџа (Coolidge): „Захваљујући дилемама које је изазвао Еуклидов постулат паралелности и напора многих мислилаца да реше ове дилеме, имамо целокупну савремену апстрактну концепцију математичке науке". Подједнако из угла перспективе као и из употребе сунчаних часовника, *конусни пресеци* су дошли у центар пажње и Аполонијева проучавања истих постала су геометријска класика која је, између осталог, одиграла виталну улогу у открићу Кеплерових (Kepler) закона планетарних кретања. Архимед је проучавао геометрију и законе природе употребљавајући притом снажно резоновање које укључује „инфинитезимале", и према томе предвиђајући диференцијални и интегрални рачун.

Европска ренесанса и глобални модерни развој

Оно што је остало сачувано од математике и егзактних, медицинских и хуманистичких наука од античких времена, у оригиналном облику или у преводу, у Византији, у европским манастирима и на другим местима, а такође и проширења и додаци овом наслеђу уопште, која долазе од Кинеза, Јапанаца, Јевреја и других цивилиација, и посебно овом наслеђу у математици, од Индуса и арапских доприноса тригонометрији и алгебри, после дугог и мрачног периода, поново је постало извориште размишљања и инспирације за европске научнике као, између осталих, за Фибоначија (Fibonacci), Оразма (Oresme), да Винчија (da Vinci) и Дирера (Dürer). Једна од историјских линија значајно нових развитака у математици и њених примена води ка лувенском професору Гема Фризијусу (Gemma Frisius) (1508--1555) који је најплодније године свог рада провео у Антверпену, тадашњем културном и трговачком центру Фландрије. Фризијус је између осталог проучавао триангулације површи и експлицитно написао неке од првих таблица интереса (и према томе, за сложени интерес, у суштини таблице експоненцијалних функција). Заједно са својим студентом Меркатором (Mercator), проучавао је стереографску пројекцију и правио небеске и земаљске глобусе. Касније је Меркатор саставио „атласе" користећи се мапама у *Меркаторовој пројекцији*, тј. помоћу конформних пресликавања која преводе сферне локсодроме на земљи у праве линије на њиховим раванским репрезентацијама (и које се аналитички представљају логаритамским функцијама). И баш у „том" Антверпену догодило се да је Симон Стевин (Simon Stevin) (1548–1620) учио и дипломирао да би постао један од највећих геометара у периоду између

Архимеда и Њутна (Newton). Један од његових најранијих приручника који је штампао Плантијн (Plantijn) у Антверпену је, колико је до сада познато, био *прва права публикација интересних таблица*. Његову књижицу „De Thiende" („Десети") штампао је Плантијн у Лајдену 1585. године и дефинитивно поставио конкретна извођења и сва израчунавања са реалним бројевима искључиво радећи са природним бројевима, употребљавајући *децимални систем*, који је штавише чврсто препоручивао да се употребљава универзално и за практичну корист међународне размене. Између многобројних других достигнућа Симона Стевина у наукама, посебно треба подсетити на његов закон о слагању сила, *„правило паралелограма"*, тј. у суштини равнотеже, илустрован у његовом логоу са геслом „Wonder en is gheen wonder", а које је у основама и апстрактне алгебре и вишедимензионалне геометрије. Оптика и теорија виђења, између осталог, и проучавње перспективе, такође су даље развијане, затим тригонометрија, такође, где се приказује и њена употреба, на пример у Снелијусовом (Snellius) *закону преламања*. У физици, Коперниканска (Copernicus) космологија је геометријски јасно приказана у посматраним *Кеплеровим законима*, да би касније пронашла свој математички опис у *Њутновој механици*, чија је централна идеја та да се силе које делују на тела која се крећу геометријски схвате као поља вектора кривина њихових трајекторија у простору (до на константан фактор који одговара масама ових тела).

Архимедов класични проблем одређивања *тангентне линије произвољних равних кривих* у било којој од њихових тачака и проблем Симона Стевина конкретног *налажења свих сферних локсодрома* били су на почетку стварања диференцијалног и интегралног рачуна, тј. математичке дисциплине која се зове *анализа*. Ово је суштински постало могуће једино систематском употребом *координатног метода* Декартове (Descartes) „Géométrie" из 1637. године, који је сам по себи проистекао из људских перцептивних тешкоћа са појмом паралелизма који је збуњивао геометре од античких времена. Овде је деликатну улогу коју је имало аксиоматско заснивање синтетичке геометрије у основи преузело геометријско заснивање система реалних бројева и, парафразирајући Декарта, помоћу чињенице да се сви Еуклидски геометријски проблеми могу свести на познавање растојања између било које две тачке (Питагорина теорема). Такође, и методе у анализи, за практичне примене, редуковане су на тзв. *Тејлор–Маклоренову теорему* (Taylor–Maclaurin), према којој је Њутн у Кембрицу био инспирисан приликом разматрања реалних функција по аналогији са разматрањем реалних бројева у децималном систему. Нешто раније, његов учитељ Бароу (Barrow) добио је *фундаменталну теорему анализе* која повезује интеграцију и диференцирање као међусобно инверзне операције. Око 1670. године, Њутн је надаље могао аналитички да одреди *кривину произвољне равне криве* у било којој од њених тачака, следећи притом, између осталих, разматрања Декарта и Кеплера о оскулаторним апроксимацијама општих кривих помоћу кругова, као и Хајгенса (Huygens) у теорији каустичних кривих, итд. која се односи на његова проучавања часовника са клатном.

Од 1760. године, са радовима Ојлера (Euler), Монжа (Monge), Меснијеа (Meusnier), Дипена (Dupin), Родригеза (Rodrigues), Жермен (Germain), Казоратија (Casorati), итд. *кривинско понашање површи у Еуклидским просторима* геометријски и аналитички је постајало све јасније, и у том контексту је Гаус (Gauss) открио $2D$ класичне *нееуклидске геометрије*, чије су хиперболичке верзије урађене такође аксиоматски и независно од стране Лобачевског (Lobachevsky) и Бољаја (Bolyai). Према Галилеју (Galileo), „Књига природе написана је математичким језиком и цртежи су троуглови, кругови и остали геометијски објекти", тј. *много природних појава се могу описати помоћу геометријских појмова*, и посебно, помоћу кривина, чији су аналитички изрази у међувремену били познати. Дакле, како се на даље многи од ових проблема односе на реализације разних врста *екстремних вредности* и на *равнотежу* или *симетрије* за дате ситуације, решења многих варијационих принципа Мауперцуиса (Maupertuis), Фермаа (Fermat), Лајбница (Leibniz), Бернулијевих (Bernoulli), итд. често примењујући варијациони рачун Ојлера и Лагранжа (Lagrange), доводила су до спектакуларних развоја у природној филозофији. На пример, неколико циклоида, ланчаница и спирала, поготову највише spira mirabilis (природна логаритамска спирала), и на пример, површи константне средње кривине и површи константне Гаусове кривине и њихове геодезијске линије и коначно локсодроми, приказани на овај начин као криве и површи од веома велике важности за геометрију и примене геометрије у природним наукама и исто тако у технологији.

Гаусова Гетингенска (Göttingen) „Disquisitiones generalis circa superficies curvas" из 1827. године садржавала је клицу појма диференцијабилних многострукости, тј. математичке области *„глобалне анализе"*, и то је направило суштинску разлику за површи у Еуклидским $3D$ просторима између њихових *унутрашњих* и њихових *спољашњих геометријских особина*, тј. између особина које зависе искључиво од растојања између тачака ових површи тако да ова растојања произилазе из мерења дужина кривих које су комплетно смештене на овим површима и које повезују те тачке, и особина које у основи зависе од облика које ове површи имају у амбијентним Еуклидским просторима, или још, од „изгледа" ових површи када се посматрају у простору. Грубо говорећи, „глобална анализа" се бави најбитнијим традиционалним областима алгебре и анализе. Схватање унутрашње геометије површи у Еуклидском 3–простору омогућава разумевање „апстрактних" *Риман (Riemann) – Финслерових (Finsler) геометрија* на свим диференцијабилним многострукостима које нису „чудне". Заснивање ових геометрија урађено је независно од стране Римана и Хелмхолца (Helmholtz) у њиховим делима „Ueber die Hypothesen" и „Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", респективно, објављених 1866. године (мада је Риманово предавање у Гетингену са овим насловом одржано већ 1854. године), односно, 1868. године, у којима су дали подстицај, у областима природне филозофије, и посебно, за физички простор-време, као и за људску визуелну перцепцију, респективно. Следећи предавање Минковског (Minkowski) у Келну (Köln) 1908. године под називом „Raum und Zeit", Риманова геометрија је постала језик помоћу кога је Ајнштајн (Einstein) 1916. године могао да прикаже своју *општу теорију релативности*; у ствари, Ајнштајнове „једначине поља" у суштини дефинишу масу и енергију помоћу Ричијевих (Ricci) кривина „нашег" физичког простор–времена. Хилберт (Hilbert) је окарактерисао Ајнштајнове просторе помоћу варијационог принципа који се односи на глобалну скаларну кривину Риманових многострукости. У својој тези са Каратеодоријем (Carathéodory), Финслер је иницирао систематско проучавање „његове" геометрије, која је од недавно постала још приступачнија захваљујући истраживању Черна (Chern) и сарадника. И највише је из Хелмхолцовог геометријског рада резултирала карактеризација максимално могуће симетричних Риманових простора, тј. простора који се понашају на исти начин у свим правцима у свакој од својих тачака и за које је, штавише, ово униформно понашање у свим правцима врло слично, независно од њихових тачака, тј. перфектно хомогених изотропних простора, као што су *простори константне Риманове или секционе кривине K*; осим тога, ови простори су Риманови простори који задовољавају *аксиому слободног кретања*, тј. за које се мерења свих објеката који „живе" у овим просторима не мењају при „кретању" ових објеката на било који произвољан начин „наоколо" у овим просторима. И према теореми Белтрамија (Beltrami) ово су управо простори који су пројективно еквивалентни локално Еуклидским просторима. Горња проучавања представљају врхунац свих напора да се да добар одговор на питање како објективно и на разуман начин описати „позориште" у коме имамо утисак да се налазимо на позорници, које, као и у античким временима, поново заузима централни положај у свим озбиљним научним истраживањима почевши од друге половине 19. века (до, рецимо, пре неколико деценија). Према речима Черна: *„Док алгебра и анализа обезбеђују основе математике, геометрија је у срцу"*.

На исти начин као што Еуклидска геометрија у димензији 2 у суштини врши извођења из *круга као основне фигуре* помоћу кога су дефинисана растојања (на изотропан начин, када се посматра са људске тачке гледишта), тако су и *Ламеове (Lamé) криве-* назване супер круговима од Пита Хајна (Piet Hein) - у основи најједноставнијих дефинитних Минковски--Финслерових геометрија (у којима се појављују 4–струке „благе" анизотропије, када се посматрају са људског становишта), и аналогни коментари се могу дати у димензији 3 и више. У том смислу, испоставило се да су, *Гилисове (Gielis) криве* за димензију 2 и *Гилисове (хипер) површи* за димензију 3 (и више), основне фигуре за описивање *најприроднијих m–тоструких* ($m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$) *анизотропија*; и осим тога, применом одговарајућих *Гилисових трансформација* на „најприродније" криве и површи Еуклидске геометрије (нпр. за димензију 2: кругови између свих затворених кривих и логаритамске спирале између свих отворених кривих) добија се највише облика које стварно опажамо у природи - у биологији, физици, кристалографији, итд. Овде је мотивација за „Еуклидски најприродније", која се уклапа у специјални случај Банг–Јен Ченове (Bang–Yen Chen) недавне теорије о *„подмногострукостима константне пропорционалности"*, у томе да се у еволуцији ових облика поља њихових вектора положаја стално или потпуно слажу или опонирају што је могуће више са пољем напона које је индуковано овим облицима (угаона кривина или векторско поље убрзања за криве и поље вектора средње кривине за површи).

Грубо говорећи, главни алгебарско–аналитички формализми који се користе у диференцијалној геометрији су троструки. Прво имамо *Ричијев рачун*, који се у основи односи на *тензорски рачун* у локалним координатама; овај рачун је био развијан од Ричија, Леви–Цивите (Levi–Civita), Схоутена (Schouten) и Струика (Struik), и то је био формализам који је користио Ајнштајн. Затим имамо *Картанов (Cartan) рачун* или *ω-рачун*, (Картан је увек означавао конексионе диференцијалне форме и кривинске диференцијалне форме са омега), што у основи представља метод *покретних репера*, који се враћа на Ојлерово сагледавање значења појма кривине Еуклидских кривих, који је прво био систематски развијан од стране Рибокура (Ribeaucour) и Дарбуа (Darboux) за криве и површи у Еуклидским 3–димензионалним просторима и који је био проширен до потпуне генерализације од стране Ели Картана (Élie Cartan), следећи Ламеова проучавања за тродимензионалне Еуклидске просторе употребом криволинијских координата и Демуленова (Demoulin) слична проучавања пројективних простора. Најзад, имамо такође и *набла рачун* или *координатно инваријантни рачун*, који је измишљен у Чикагу од Косула (Koszul) и тамо је у потпуности развијен од Номицуа (Nomizu) у педесетим годинама прошлог века. Значај добро дизајнираних формализама не треба омаловажавати: за геометра који перфектно влада једним од оваквих формализама, њена живахна употреба у истраживању може понекад бити интерактивна у чему она може понекад да води и инспирише тог геометра много даље од онога што би он могао и да помисли да може доћи одмах до резултата или да назначи нове правце који ће бити истраживани у потпуности изван његовог виђења када је на почетку свог рада. И мада ниједан геометар нема тешкоћа са било којом методологијом у својој области, многи геометри веома често фаворизују једну од ове три када проучавају неке проблеме који су неутрални у односу на методологију; на пример, међу студентима Картана који су и сами постали водећи геометри са својом сопственом заслугом за преостале доприносе унутрашњој и спољашњој геометрији, Јано (Yano) и Роска (Rosca) су били шампиони у тензорском рачуну и у омега рачуну, респективно.

Заснована на *(псеудо)–паралелном преносу* Леви–Цивите (1917) (и Схоутена, 1918), Риманова геометрија је могла бити проширена на *геометрију G–простора*–Черн, посебно оправдавајући, као такве, Картанове „espaces generalisés" који се односе на Ли–Клајнове (Lie–Klein) просторе група (чије се геометрије тичу одговарајућих теорија инваријанти) на сличан начин као што се Риманови простори нехолономно односе према Еуклидским просторима-, геометрију путања и проучавање произвољних конексија на влакнастим раслојењима. На известан начин, као крајње разумно замишљено проширење Еуклидске геометрије до данас, после нека два миленијума од постављања постулата паралелности, дошли смо до проучавања геометрије општих конексија на диференцијабилним многострукостима. Али, у сваком случају, у нашим садашњим временима, према Черну, *Риманова геометрија је централна област у геометрији.* У околини било које своје тачке, свака Риманова многострукост M изгледа као Еуклидски простор, тако да се Риманов простор може схватити као бесконачно много Еуклидских простора који су удружени заједно на известан „осетљив" начин. Основна разлика између Еуклидских и општих Риманових простора M лежи у чињеници да се, при паралелном померању правоуглог координатног система S од тачке p до неке друге произвољне тачке q из M дуж различитих кривих α и β, резултујући правоугли координатни системи S_α и S_β који су притом добијени у тачки q, не подударају, али се S_β може добити од S_α применом Еуклидске ортогоналне трансформације у тачки q. Са ове тачке гледишта, Риманови простори се могу видети као нехолономни Еуклидски простори. Осим тога, према *Теореми о изометричном утапању* Неша (Nesh) (1956), свака апстрактна n–димензионална (дефинитна) Риманова многострукост може се, на много начина, сматрати за подмногострукост у Еуклидским просторима довољно великих димензија $n+m$, и Лоренцова (Lorentz) верзија овог фундаменталног резултата добијена је неколико година касније од стране Фридмана (Friedman). Према томе, *Риманова геометрија* је суштински *еквивалентна унутрашњој геометрији Риманових подмногострукости* произвољних димензија n и кодимензија m у Еуклидским амбијентним просторима. У овом контексту, познавање фундаменталних веза између унутрдњих и спољашњих геометрија подмногострукости је од суштинске важности. У 1990–им, Банг–Јен Чен је иницирао значајни помак у том смислу, започињући помоћу појмова његових нових скаларних Риманових кривинских инваријанти, извођења *општих оптималних неједнакости* између разних унутрашњих и спољашњих карактеристика подмногострукости (видети одељак „δ–инваријанте, неједнакости подмногострукости и њихове примене" у књизи румунске Академије „Теме у Диференцијалној геометрији" из 2008. године, у уредништву А. Михаи, И. Михаи и Р. Мирона). Одговарајуће Ченове и Винтгенове (Wintgen) *идеалне подмногострукости*, тј. облици који се претпостављају за дате апстрактне Риманове моногострукости када их реализују у Еуклидским просторима као подмногострукости за које су спољашњи напони (који за Ченове идеалне подмногострукости у основи укључују квадрат средње кривине, а за Винтгенове идеалне подмногострукости штавише укључују и кривину нормалног раслојења) минимални, представљају очигледне особине оних типова унутрашњих симетрија који су проучавани од 1980-их, посебно од стране Дешча (Deszcz). Када се ови услови односе на Риманов тензор кривине, многострукости које их задовољавају зову се *Дешч симетрични простори*; и као што је недавно показано, Дешч симетрични простори чине пројективну класу семи–или Сабо (Szabó) – симетричних простора, тј. Риманових многострукости M чија секциона кривина K остаје инваријантна после њеног паралелног преноса свуда око свих инфинитезималних координатних паралелограма у M. Оне су окарактерисане као nD Риманови простори $(n > 2)$ са изотропном „двоструком" секционом кривином L Дешча, слично као што су простори који задовољавају аксиому слободног кретања окарактерисани као nD Риманове многострукости $(n > 2)$ са изотропном секционом или Римановом кривином K. У извесном смислу, одмах после простора са слободним кретањем, који су геометријски „најсавршенији" симетрични простори, прави Дешч симетрични простори се могу сматрати највише симетричним просторима који у свакој тачки морају да поседују извесне погодне правце, што им омогућава да буду „најприроднији" симетрични простори. На пример, у $3D$ Римановој геометрији, модели свих Турстонових (Thurston) геометрија су Дешч симетрични, а у $4D$ Лоренцовој геометрији, сва физички најрелевантнија простор–времена су такође Дешч симетрична (видети одељак „О природним симетријама" у књизи „Теме у Диференцијалној геометрији").

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија вп 2009/10 година