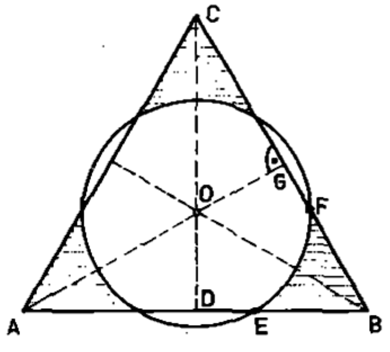
*Задачите се скенирани од книгата:*
*Републички натпревари по математика во СР Макесонија 1968-1977*
*Подготвена од*
*Проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Александар Самарџиски*

## XVIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1975

**1.(I,75).** Даден е рамностран триаголник со страна a и центар O. Да се пресмета плоштината на делот од триаголникот што се наоѓа надвор од кругот со центар O и радиус $\frac{a}{3}$.

Решение. Нека CD и AG се две висини на рамностраниот триаголник ABC и $O = AG \cap CD$ (црт.1.75). Бидејќи $\overline{OD} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, а радиусот на кругот е $\frac{a}{3}$, следува дека кружницата $(O, \frac{a}{3})$ ги сече страните на триаголникот. Нека E и F се две пресечни точки на кружницата $(O, \frac{a}{3})$ со страните AB и BC (црт.1.75).




Црт.1.75

Триаголникот ODE е правоаголен со катета $\overline{OD} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и хипотенуза $\overline{OE} = \frac{a}{3}$. Значи,

$$\overline{OD} : \overline{OE} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

од каде што следува дека $\measuredangle DEO = 60^{\circ}$. Слично, добиваме дека и

$\sphericalangle OFG = 60^{\circ}$. Од тоа, пак, следува дека четириаголникот OEBF е ромб со страна $\frac{a}{3}$. Плоштината $P_1$ на криволинискиот триаголник EFB ќе биде

$$P_1 = \frac{a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{54}(3\sqrt{3} - \pi).$$

Според тоа, бараната плоштина P ќе биде

$$P = 3P_1 = \frac{a^2}{18}(3\sqrt{3} - \pi).$$

<u>2.(I,75)</u>. Каков треба да биде природниот број к за бројот $к^2 - 1$ да е делив со 8?

<u>Решение</u>. Да претпоставиме дека бројот $к^2 - 1$ се дели со 8 без остаток. Тогаш имаме

$$к^2 = 8s + 1,$$

од каде што следува дека к е непарен број.

Нека, сега, к е непарен број, $к = 2a + 1$. Тогаш имаме

$$к^2 - 1 = (2a + 1)^2 - 1 = 4a^2 + 4a = 4a(a + 1).$$

Бројот $a(a + 1)$ е делив со 2, па, значи, бројот $к^2 - 1 = 4a(a + 1)$ е делив со 8.

Од сето тоа следува дека бројот $к^2 - 1$ е делив со 8 ако и само ако к е непарен број.

<u>3.(I,75)</u>. Една продавница треба да добие 1100 бомбониери. Во складиштето за снадбување постојат пакети од по 70, 40 и 25 бомбониери. Цената на превозот за еден пакет е еднаква соодветно со 20, 10 и 7 динари. Какви пакети и во какви количества продавницата треба да порача за превозните трошоци да бидат најмали? (Во складиштето пакетите не смеат да се отвораат.)

<u>Решение</u>. Цената на превозот на една бомбониера од првиот вид пакети е $\frac{20}{70} = \frac{2}{7}$, од вториот $\frac{1}{4}$, а од третиот $\frac{7}{25}$. Најефтин е превозот на бомбониерите од вториот вид, потоа од третиот, а

*најскап е превозот на бонбониерите од третиот вид пакети.*

Бидејќи $1100:40=27,5$, следува дека може да се земат најмногу 27 пакети од по 40 бонбониери. Но, тогаш, остануваат 20 бонбониери што не прават цел пакет од ниеден вид. Значи, треба *да земеме помалку од 27 пакети од вториот вид.*

Ако земеме 26 пакети од вториот вид, тогаш остануваат уште 60 бонбониери, што, исто така, не прават цел пакет од ниеден вид. Ако земеме 25 пакети од вториот вид, тогаш остануваат уште 100 бонбониери, коишто прават четири пакети од по 20 бонбониери.

*Следствено, за превозот да биде најевтин, треба да се земат 25 пакети од по 40 и 4 пакети од по 25 бонбониери.*

4.(I,75). Да се реши равенката

$$\left(\frac{a+1}{ax+1}+\frac{x+1}{x+a^{-1}}-1\right):\left(\frac{x+1}{(x+a^{-1})a}-\frac{a(x+1)}{ax+1}+1\right)=\frac{x}{2}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\left(\frac{a+1}{ax+1}+\frac{a(x+1)}{ax+1}-1\right):\left(\frac{a+1}{ax+1}-\frac{a(x+1)}{ax+1}+1\right)=\frac{x}{2},$$

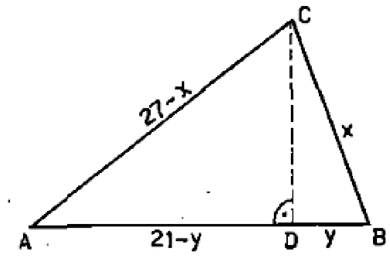
а оваа, за $x\neq-\frac{1}{a}$, е еквивалентна со равенката

$$a=\frac{x}{2}.$$

Според тоа, $x=2a$.

5.(I,75). Должините на страните од еден триаголник се цели броеви, а и плоштината е цел број. Едната од страните е 21, а периметарот е 48. Да се најде должината на најмалата страна.

Решение. Најмалата страна да ја означиме со $x$; тогаш страните на триаголникот се: 21, $x$ и $27-x$. Триаголникот $ABC$ нека биде така означен што: $\overline{AB}=21$, $\overline{BC}=x$, $\overline{CA}=27-x$, и нека $CD$ е висината на триаголникот $ABC$ (црт.2.75). Бидејќи $P=\frac{21}{2}\overline{CD}$, за плоштината да биде цел број потребно е висината $\overline{CD}$ да биде парен природен број.




Црт.2.75

Од правоаголните триаголници ADC и BDC добиваме:

$$x^2 - y^2 = (27-x)^2 - (21-y)^2,$$

од каде што добиваме

$$x = 5 + \frac{3+7y}{9}.$$

За x да биде цел број, потребно е $y \geqslant 6$. За $y = 6$ имаме $x = 10$, а за $y > 6$ добиваме број што не може да биде страна на триаголникот.

Следствено, $x = 10$.

1.(II,75). Задача 3.(I,75).

2.(II,75). Да се докаже дека корените на равенката

$$\frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} = a^2$$

се реални за кои било реални броеви a, c и d.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$a^2x^2 - (a^2(c+d)+2)x + c + d + a^2cd = 0.$$

За дискриминантата D на оваа равенка имаме:

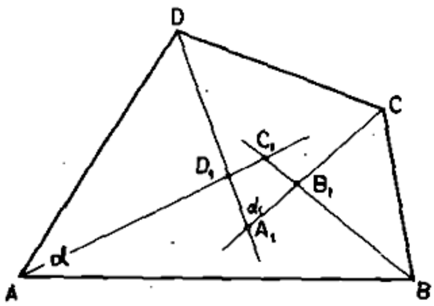
$$\begin{aligned} D &= (a^2(c+d)+2)^2 - 4a^2(c+d+a^2cd) = \\ &= a^4(c+d)^2 + 4a^2(c+d) + 4 - 4a^2(c+d) - 4a^4cd = \\ &= a^4(c+d)^2 - 4a^4cd + 4 = a^4(c-d)^2 + 4. \end{aligned}$$

Значи, $D>0$ за кои било a, c и d, т.е. корените на дадената равенка се реални за кои било a, c и d.

3.(II,75). Нека ABCD е четириаголник чии симетрали на аглите образуваат четириаголник $A_1B_1C_1D_1$. Да се покаже дека четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ е тетивен.

Дали симетралите на аглите на секој четириаголник образуваат четириаголник?

Решение. Аглите на четириаголникот ABCD ќе ги означиме со $\alpha, \beta, \gamma$ и $\delta$, а аглите на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ со $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ и $\delta_1$ соодветно (црт.3.75). За да покажеме дека четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ е тетивен, доволно е да покажеме дека $\alpha_1+\gamma_1=180^\circ$.




Црт.3.75

Од триаголникот $ABC_1$ имаме

$$\gamma_1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=180^\circ, \qquad (1)$$

а од триаголникот $A_1DC$:

$$\alpha_1+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=180^\circ. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\alpha_1+\gamma_1=360^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=360^\circ-180^\circ=180^\circ.$$

Симетралите на аглите на некои четириаголници не градат четириаголник; на пример: квадрат, ромб, делтоид.

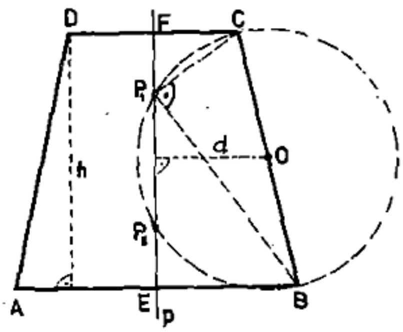
4.(II,75). Даден е рамнокрак трапез со основи a и c.

а) На симетралата на основите да се определи точка P од која двата крака на трапезот се гледаат под прав агол.

б) При кои услови постои таква точка P?

в) Да се определи растојанието од точката P до една од основите на трапезот.

Решение. а) Нека ABCD е рамнокрак трапез со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=c$ (црт.4.75) и нека $p=EF$ е симетралата на основите.




Црт.4.75

Геометриското место на точки од кои кракот BC се гледа под прав агол е кружницата конструирана над отсечката BC како дијаметар; ако O е средината на отсечката BC, тогаш тоа е кружницата $(O,\overline{OB})$. Значи, ако P е точка од која кракот BC се гледа под прав агол, тогаш $P\in(O,\overline{OB})$ и $P\in p$, па, значи, $P\in(O,\overline{OB})\cap p$. На црт. 4.75 тоа се точките $P_1$ и $P_2$. Во *зависност од бројот на пресечните точки* на правата p и кружницата $(O,\overline{OB})$, задачата може да има две, едно или ниедно решение.

б) Да ги најдеме условите при кои ќе постои таква точка P. Според а), точката P ќе постои ако и само ако правата p и кружницата $(O,\overline{OB})$ имаат заеднички точки. Правата p и кружницата $(O,\overline{OB})$ имаат заеднички точки ако и само ако растојанието d од O до правата p не е поголемо од $\overline{OB}$, т.е. ако и само ако

$$d \leqslant \overline{OB}. \tag{1}$$

Бидејќи $d = \frac{a+c}{4}$, а $\overline{OB}^2 = \frac{1}{4}(h^2 + (\frac{a-c}{2})^2)$, од (1) добиваме

$$\frac{(a+c)^2}{16} \leqslant \frac{1}{4}(h^2 + (\frac{a-c}{2})^2),$$

односно

$$h^2 \geqslant ac. \tag{2}$$

Значи, таква точка P постои ако и само ако важи неравенството (2).

в) Да го најдеме растојанието x од точката $P_1$ до основата AB (црт.4.75). Ако $\sphericalangle FP_1C = \alpha$, тогаш $\sphericalangle EP_1B = 90^\circ - \alpha$, па $\sphericalangle EBP_1 = \alpha$. Значи, правоаголните триаголници $P_1FC$ и $P_1EB$ се слични, од каде што добиваме:

$$\overline{EB} : \overline{P_1F} = \overline{P_1E} : \overline{FC},$$

$$\frac{a}{2} : (h-x) = x : \frac{c}{2},$$

$$x^2 - hx + \frac{ac}{4} = 0. \tag{3}$$

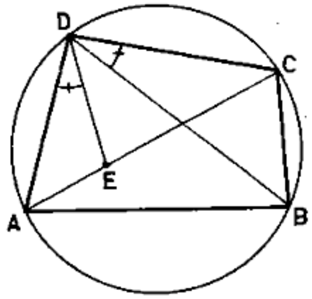
Равенката (3) има решение ако и само ако $D = h^2 - ac \geqslant 0$, т.е. ако и само ако $h^2 \geqslant ac$, што претставуваше потребен и доволен услов за *постоење на точката P. При овој услов решенијата на равенката (3)* се:

$$x_1 = \frac{1}{2}(h + \sqrt{h^2 - ac}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(h - \sqrt{h^2 - ac})$$

*и, притоа, двете се позитивни.*

<u>5.(II,75)</u>. Да се докаже дека кај секој тетивен четириаголник збирот од производите на спротивните страни е еднаков со производот од неговите дијагонали.

Решение. Да претпоставиме дека четириаголникот ABCD (црт. 5.75) е тетивен; нека E е точка од дијагоналата AC, така што $\measuredangle ADE = \measuredangle BDC$. Бидејќи $\measuredangle CAD = \measuredangle DBC$ (како периферниски агли над




Црт.5.75

ист лак), следува дека $\triangle AED \sim \triangle BCD$, од каде што добиваме

$$\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{BC},$$

т.е.

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{BD}. \qquad (1)$$

Слично се проверува дека $\triangle ECD \sim \triangle ABD$, од каде што добиваме

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{EC} \cdot \overline{BD}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2), пак, добиваме

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AE} + \overline{EC})\overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD},$$

што требаше да се докаже.

1.(III,75). Да се реши системот равенки

$$\log_{(3x-4y-15)}(2x-y) = 1,$$

$$\log_{(x+2y)}\cos(\pi(x+y) = 0.$$

Решение. При $2x-y>0$ и $x+2y>0$, дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\left.\begin{aligned} &2x-y=3x-4y-15, \\ &\cos\pi(x+y)=1, \end{aligned}\right\}$$

односно со

$$\left.\begin{array}{r} x-3y=15, \\ x+y=2к, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

каде што к е цел број.

Решението на системот (1) е:

$$x=\frac{6к+15}{4}, \qquad y=\frac{2к-15}{4}. \qquad (2)$$

За x и y од (2) да бидат решение и на дадениот систем потребно е да важи

$$2x-y>0 \quad \text{и} \quad x+2y>0. \qquad (3)$$

Бидејќи

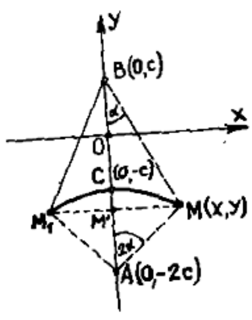
$$2x-y=\frac{10к+45}{4}, \qquad x+2y=\frac{10к-15}{4},$$

неравенствата (3) важат за $к>1$.

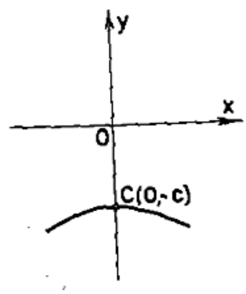
Според тоа, решенијата на дадениот систем се вредностите на x и y од (2) за $к=2,3,\dots$ .

2.(III,75). Дадени се точките $A(0,-2c)$ и $B(0,c)$. Да се одреди геометриското место на точки $M(x,y)$, така што аголот ABM да биде двапати помал од аголот BAM.

Решение. Можеме да претпоставиме дека $c>0$. Нека точката M е таква што $\sphericalangle BAM = 2\sphericalangle ABM$ (црт.6.75). При овој случај ($c>0$), точката M се наоѓа во третиот или во четвртиот квадрант.




Црт.6.75




Црт.7.75

Од $\Delta AM'M$ ($\Delta AM'M_1$) имаме $tg2\alpha = \frac{|x|}{y+2c}$, а од $\Delta BM'M$ ($\Delta BM'M_1$) имаме $tg\alpha = \frac{|x|}{c-y}$. Бидејќи $tg2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, добиваме

$$\frac{x}{y+2c} = \frac{2x}{c-y} : \left(1 - \frac{x^2}{(c-y)^2}\right),$$

од каде што

$$3y^2 - x^2 = 3c^2. \qquad (1)$$

Следствено, бараното геометриско место, при $c>0$, е долната гранка од хиперболата (1) (црт.7.75).

3.(III,75). Да се најдат сите природни броеви к, такви што $к+1$ е делител на $к^4+1$.

Решение. Бројот $к^4+1$ може да се напише во обликот

$$к^4+1 = к^4+к-к+1 = к(к^3+1)-(к-1) =$$
$$= к(к+1)(к^2-к+1)-(к-1).$$

Ако $(к+1)|(к^4+1)$, тогаш $(к+1)|(к(к+1)(к^2-к+1)-(к-1))$, а бидејќи $(к+1)|к(к+1)(к^2-к+1)$, следува дека $(к+1)|(к-1)$. Но $к-1<к+1$, па, значи, $к-1=0$, т.е. $к=1$.

4.(III,75). Даден е пресечен конус во кој висината е геометриска средина од дијаметрите на основите. Да се докаже дека во конусот може да се впише сфера.

Решение. Доволно е да покажеме дека во рамнокракиот трапез ABCD (црт.8.75) може да се впише кружница ако и само ако $h^2=ab$, т.е. рамнокракиот трапез ABCD е тангентен ако и само ако $h^2=ab$.

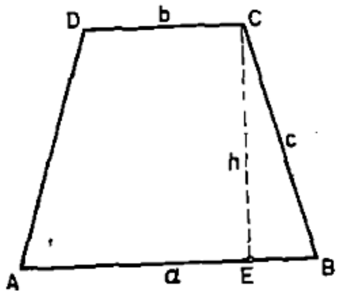
Еден четириаголник ABCD е тангентен ако и само ако важи равенството

$$\overline{AB}+\overline{CD} = \overline{AD}+\overline{BC}. \qquad (1)$$

Ако трапезот ABCD е рамнокрак, со основи $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$ и краци

$\overline{BC}=\overline{AD}=c$, тогаш равенството (1) се сведува на

$$2c=a+b\,. \tag{2}$$




Црт.8.75

Од $\triangle CEB$ имаме

$$4h^2=4c^2-(a-b)^2. \tag{3}$$

Заменувајќи $2c$ од (2) во (3) добиваме $4h^2=(a+b)^2-(a-b)^2$, т.е. $h^2=ab$.

Според тоа, рамнокракиот трапез ABCD е тангентен ако и само ако висината $h$ е геометриска средина од основите.

5.(III,75). Да се докаже дека бројот на жителите од СРМ што имаат непарен број роднини меѓу жителите на СРМ е парен број.

Решение. Да го означиме со:

- $M$ множеството жители на СР Македонија;
- $M_1$ *подмножеството жители од M што имаат непарен број роднини во M,*
- $M_2$ подмножеството жители од M што имаат парен број роднини во M,
- $s$ сумата од роднините на сите жители од M (во M),
- $s_1$ сумата од роднините на жителите од $M_1$ (во M),
- $s_2$ сумата од роднините на жителите од $M_2$ (во M).

Јасно е дека $s_2$ е парен број и дека $s=s_1+s_2$.

Да го формираме множеството

$D = \{\{x,y\} \mid x,y\in M,\ x\neq y,\ x$ и $y$ се во родбинска врска $\}$.

(Значи, $D$ содржи некои двоелементни подмножества од $M$.) Бидејќи секој елемент $\{x,y\}\in D$ внесува по една единица во бројот на родниниte на секое од лицата $x$ и $y$, значи, вкупно две единици во $s$, следува дека $s=2|D|$. Од $s=s_1+s_2=2|D|$, поради парноста на $s_2$, следува дека и $s_1$ е парен број.

<u>1.(IV, 75)</u>. Да се најде најголемиот природен број $k$ што го има следново својство: ако се отфрлат последните три цифри од неговиот куб, тогаш се добива број што е пак полн куб. Притоа, барем една од отфрлените цифри да не е нула.

<u>Решение</u>. Да го означиме со $s^3$ бројот што се добива по отфрлањето на трите последни цифри од $k^3$. Бидејќи барем една од отфрлените цифри не е нула, следува дека

$$k^3-1000s^3>0, \qquad (1)$$

а бидејќи бројот, формиран од отфрлените цифри е помал од 1000, добиваме дека

$$k^3-1000s^3<1000. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$10s<k<10(s+1),$$

па за најмалиот од овие броеви, т.е. за $k=10s+1$, од (2) добиваме

$$300s^2+30s+1<1000. \qquad (3)$$

Неравенството (3) е исполнето само за $s=1$. Следствено

$$11\leqslant k<20. \qquad (4)$$

Од (4) следува дека $к^3$ е четирицифрен број чија прва цифра е помала од $8 = 2^3$. Значи, меѓу броевите к, $11 \leq к < 20$, треба да ги најдеме оние, чија прва цифра на нивниот куб е (бројот) 1. Со проба се уверуваме дека тоа се броевите 11 и 12:

$11^3 = 1331$ (по отфрлањето на 331 се добива $1 = 1^3$),

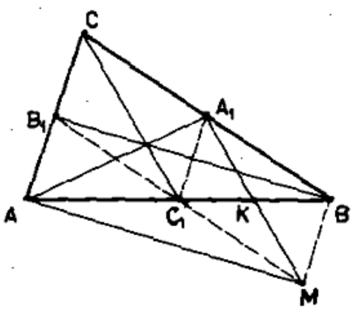
$12^3 = 1728$ (по отфрлањето на 728 се добива $1 = 1^3$).

Значи, најголемиот број со бараното својство е бројот 12.

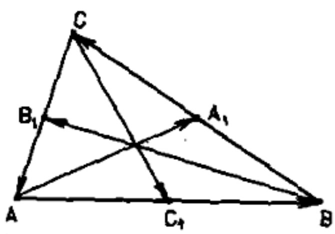
2.(IV,75). Да се докаже дека од тежишните линии на кој било триаголник може да се образува друг триаголник.

Даден е триаголник со плоштина P. Од неговите тежишни линии е конструиран друг триаголник, потоа од тежишните линии на вториот е конструиран трет триаголник итн. Општо, (к+1)-от триаголник е конструиран од тежишните линии на к-тиот триаголник. Да се најде сумата S од плоштините на сите триаголници од така добиената низа.

Решение. Нека ABC е произволен триаголник. Да ги означиме со $A_1$, $B_1$ и $C_1$ средините на страните од триаголникот ABC (црт.9.75) и да ја конструираме отсечката AM, паралелна и еднаква со $B_1B$.




Црт.9.75




Црт.10.75

Тогаш четириаголникот $AMBB_1$ е паралелограм во кој $C_1$ е пресекот на дијагоналите. Бидејќи $B_1C_1$ е средна линија на $\triangle ABC$ и бидејќи $\overline{C_1M} = \overline{B_1C_1} = \overline{CA_1}$, следува дека четириаголникот $A_1CC_1M$ е паралелограм, па $\overline{A_1M} = \overline{CC_1}$.

Значи, $\triangle AA_1M$ е конструиран од тежишните линии на триаголникот ABC.

[До тој заклучок се доаѓа поорһу со помош на вектори. Имено, бидејќи (црт.10.75):

$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA} + \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = 0,$$

следува дека од тежишните линии на триаголникот ABC може да се конструира триаголник.]

Пред да поминеме на решавање на вториот дел од задачата, да уочиме дека пресечната точка K на отсечката AB и отсечката $A_1M$ (црт.9.75) е средина на отсечката $BC_1$ (бидејќи $A_1K$ е средна линија на триаголникот $CC_1B$) и средина на отсечката $A_1M$ (како пресек на дијагоналите од паралелограмот $A_1C_1MB$), па, значи, $\overline{AK} = \frac{3}{4}\overline{AB}$.

Да ја означиме со $P_{XYZ}$ плоштината на $\triangle XYZ$ и да ставиме $P_{AA_1M} = P_1$. Триаголниците $AA_1K$ и AKM имаат исти плоштини (бидејќи имаат еднакви основи $\overline{A_1K} = \overline{KM}$ и иста висина, спуштена од темето A), па, значи,

$$P_{AA_1K} = \frac{1}{2}P_1.$$

Од друга страна, $P_{AA_1K} = \frac{3}{8}P$ (бидејќи $\overline{AK} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, а висината на триаголникот $AA_1K$ е една половина од висината на триаголникот ABC), па, значи,

$$P_1 = \frac{3}{4}P.$$

На сличен начин добиваме

$$P_2 = \frac{3}{4}P_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}P = \left(\frac{3}{4}\right)^2 P,$$

каде што $P_2$ е плоштината на третиот триаголник (конструиран од тежишните линии на вториот) и, општо,

$$P_{\kappa+1} = \frac{3}{4}P_\kappa = (\frac{3}{4})^{\kappa+1}P.$$

Според тоа:

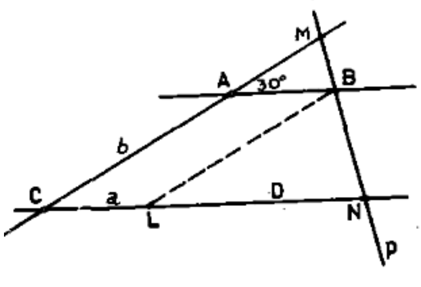
$$S = P + \frac{3}{4}P + (\frac{3}{4})^2 P + \ldots + (\frac{3}{4})^\kappa P + \ldots =$$
$$= (1 + \frac{3}{4} + \ldots + (\frac{3}{4})^\kappa + \ldots)P = \frac{1}{1-\frac{3}{4}}P =$$
$$= 4P.$$

3.(IV,75). Дадени се две паралелни прави AB и CD, така што правите AB и AC да се сечат под агол од $30^\circ$, $\overline{AB} = a$ и $\overline{AC} = b$. Променлива права p низ B ги сече правите AC и CD во точките M и N соодветно.

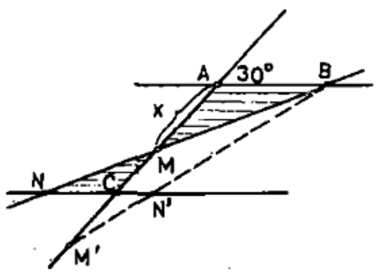
Ставајќи $\overline{AM} = x$, да се изрази збирот S од плоштините на триаголниците ABM и CNM како функција од x. Дали таа функција S(x) има најголема или најмала вредност? За $\overline{AB} = 4$ и $\overline{AC} = 1$, да се нацрта графикот на S(x).

Решение. Од црт.11.75 гледаме дека $P_{ABM} = \frac{ax}{4}$ и $P_{CNM} = \frac{1}{4}(b+x)\overline{CN}$, при што $\overline{CN} = a + \overline{LN}$. Од сличноста на триаголниците ABM и LNB следува дека $\overline{LN} = \frac{ab}{x}$, па $P_{CNM} = \frac{1}{4}(b+x)(a+\frac{ab}{x})$ и

$$S(x) = \frac{ax}{4} + \frac{a}{4}\cdot\frac{(b+x)^2}{x} = \frac{a}{4}\left(x + \frac{(b+x)^2}{x}\right). \qquad (1)$$




Црт.11.75




Црт.12.75

Ако, пак, положбата на точката M е во насоката $\vec{AC}$, како на црт.12.75, тогаш добиваме слична зависност на $S_1$ - збирот на плоштините на триаголниците ABM и CNM :

$$S_1(x) = \frac{a}{4}\left(x + \frac{(b-x)^2}{x}\right). \qquad (2)$$

Бидејќи

$$S'(x) = \frac{a}{4x^2}\,(2x^2 - b^2), \qquad S_1'(x) = \frac{a}{4x^2}\,(2x^2 - b^2),$$

за $x = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}$ добиваме $S'(x) = S_1'(x) = 0$, а бидејќи x е должина, земаме само $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Бидејќи $S''(x) = \frac{ab^2}{2x^3}$ и $S''(\frac{b}{\sqrt{2}}) > 0$, добиваме дека $S(\frac{b}{\sqrt{2}}) = \frac{ab}{2}(\sqrt{2} + 1)$ е минимум (односно $S(\frac{b}{\sqrt{2}}) = \frac{ab}{2}(\sqrt{2} - 1)$ е минимум).

За $a = 4$, $b = 1$:

$$S(x) = x + \frac{(1+x)^2}{x}, \qquad S_1(x) = x + \frac{(1-x)^2}{x}.$$

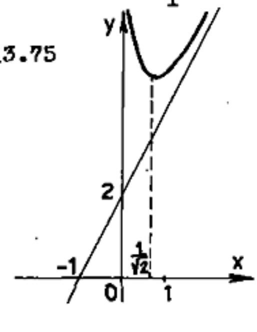
Дефинирана е за $x > 0$; $x \to +\infty \Longrightarrow S(x) \to +\infty$, $x \to 0^+ \Longrightarrow S(x) \to +\infty$. За $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ : $S_{min} = 2(\sqrt{2} + 1)$, односно $(S_1)_{min} = 2(\sqrt{2} - 1)$. Бидејќи:

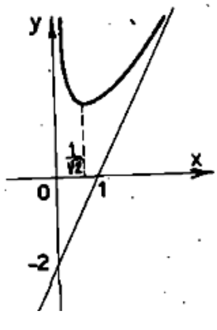
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{(1 \pm x)^2}{x^2}\right) = 2,$$

$$m = \lim_{x\to\infty}(S(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1 \pm 2x}{x} = \pm 2,$$

добиваме дека $y = 2x + 2$ односно $y = 2x - 2$ е асимптота на графикот од $S(x)$ односно од $S_1(x)$.

Црт.13.75

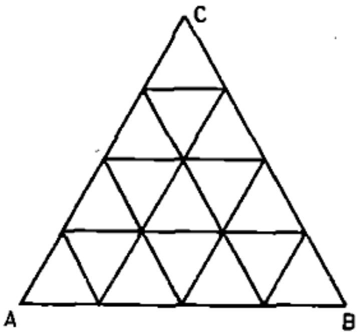


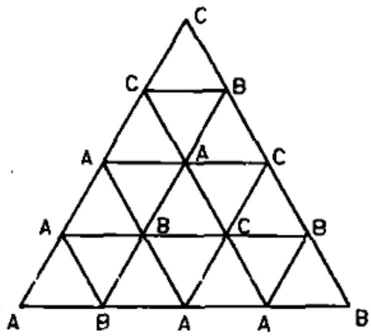

Црт.14.75

4.(IV,75). Задача 5.(III,75).

5.(IV,75). Даден е триаголник ABC, којшто е поделен на 16 мали триаголници, како што е прикажано на црт.15.75.




Црт.15.75




Црт.16.75

Неозначените темиња на малите триаголници ги означуваме со буквите A, B, C и тоа: темињата што лежат на страната AB од големиот триаголник - со буквата A или B; темињата што лежат на AC - - со буквата A или C; темињата што лежат на BC - со B или C; теме што не лежи на страна од големиот триаголник - со која било од буквите A, B, C. (Една можност на означување е прикажана на црт.16.75.)

На секоја страна од малите триаголници ѝ придружуваме број од множеството $\{0,1\}$ по правилото: Ако краевите на страната се означени со иста буква - бројот нула, а ако се означени со различни букви - бројот 1.

Да се докаже дека:

а) Збирот од броевите придружени на оние страни од малите триаголници што лежат на иста страна од големиот триаголник, за кое било означување на темињата од малите триаголници, е непарен број.

б) Бројот на малите триаголници кај кои сите три темиња се означени со различни букви е непарен број.

Решение. а) Севозможните начини на означување на темињата од малите триаголници што лежат на страната АВ од големиот триаголник се следниве:

АААAВ, АААВВ, ААВАВ, АВААВ, ААВВВ, АВАВВ, АВВАВ, АВВВВ.

Проверувајќи директно за секој од овие случаи, заклучуваме дека збирот од броевите придружени на оние страни (од малите триаголници) што лежат на страната АВ од големиот триаголник, е непарен број.

Поради симетрија, тоа важи и за страните АС и ВС од големиот триаголник.

б) Нека $s_1$ е збирот од броевите, придружени на оние страни (од малите триаголници) што лежат на страните од големиот триаголник. Според а), $s_1$ е непарен број (како збир од три непарни броеви). Потоа, да го означиме со $s_2$ збирот од броевите, придружени на оние страни (од малите триаголници) што не лежат на страните од големиот триаголник. Бидејќи секоја од тие страни е страна на два од малите триаголници, следува дека $s_2$ е парен број. Значи, бројот $s = s_1 + s_2$ е непарен.

Збирот од броевите што им се придружени на страните на некој мал триаголник ќе го наречеме "должина" на тој триаголник. Значи, секој мал триаголник е со должина 0, 2 или 3, а бројот $s$ е збир од должините на сите мали триаголници. Бидејќи $s$ е непарен број, следува дека меѓу собирците на $s$ има непарен број собирци еднакви на 3, т.е. постојат непарен број триаголници со должина 3.

Следствено, бројот на малите триаголници што се означени со три различни букви е непарен.